



République Algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche scientifique

Université d'El Oued

Faculté des Sciences Exactes

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADÉMIQUE

Spécialité: Mathématiques

Option: Mathématiques Fondamentales et Appliquées

**Analyse variationnelle et convergence de
l'approximation par éléments finis d'un
problème de contact thermo-élasto-
viscoplastique avec adhésion**

Présenté par: Amina Ghanem

Imane Guezoun

Soutenue publiquement le: 27/05/2025

Devant le jury composé de:

Nom et Prénom	Grade	Affiliation	Rôle
Dehda Bachir	Pr	Université d'El Oued	Président
Mesai Aoun Mohammed Salah	MCB	Université d'El Oued	Rapporteur
Azeb Ahmed Abdelaziz	Pr	Université d'El Oued	Examineur

Année académique: 2024-2025

Remerciements

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance et nos remerciements les plus profonds à notre encadreur le professeur **Mohammed Salah Mesai Aoun**. Nous lui sommes également reconnaissants pour le temps conséquent qu'il nous a accordé malgré ses nombreuses responsabilités, ses qualités humaines et scientifiques qu'il nous a apportées lors de l'encadrement de notre mémoire. Nous avons beaucoup appris à son côté et nous lui adresse notre gratitude pour tout cela.

Nous sommes très honorées que le professeur **Dehda Bachir** ait accepté de présider le jury de notre mémoire.

Nous voudrions adresser tous nos remerciements sincèrement et apprécions au professeur **Azeb Ahmed Abdelaziz** pour avoir accepté d'examiner notre travail.

Enfin, nos remerciements aussi à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

الإهداء

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذي بيده الخير وهو على كل شيء قدير، الحمد لله الذي علم بالقلم، علم الانسان ما لم يعلم، الحمد لله الذي لولا فضله ما اهتدينا ولا تعلمنا ولا أنجزنا.

بفضلك يارب وفقنا وبنور هدايتك اهتدينا وبمعونتك تمّ هذا العمل، فلا حول لنا ولا قوة إلا بك .

إلى والديّ الحبيين ، تاج رأسي ونبراس حياتي إلى من بذلا العمر سهرًا وعطاءً وتضحية ، وإلى من كانت دعواتهما الزاد في كل عثرة والعون في كل ضعف

أهدي هذا الجهد المتواضع عرفانًا بفضلهما الذي لا يرد.

إلى إخوتي وأخواتي الأحبة، السند الدائم، رفاق القلب والدرب أسأل الله أن يحفظهم ويبارك لهم.

وإلى أستاذي الفاضل ومشرف بحثي (مسعي عون محمد الصالح) الذي كان نعم المعلم والموجه، شكرًا له من أعماق القلب ودعوة صادقة أن يجزيه الله عني خير الجزاء ويرفع قدره في الدنيا والآخرة.

وإلى زميلتي العزيزة (قزون إيمان) لك مني أجمل مشاعر الإمتنان والدعاء بالتوفيق والنجاح والسعادة.

وإلى معلماتي الغاليات في حفظ القرآن الكريم، إلى من كان لهنّ الفضل بعد الله في أن أكون من الخاتمات لكتابه، إلى من زرعن في قلبي حب القرآن و صبرن معي في كل خطوة . أهديكن هذا البحث وكلي شكر وامتنان ، بفضل الله أولاً ثم بفضلكن تحقق لي هذا الشرف العظيم ، جزاكن الله خير الجزاء وجعل ماقدمته في ميزان حسناتكن.

وختاماً

يارب تقبل هذا العمل واجعله خالصاً لوجهك الكريم مباركاً نافعاً ولا تجعل فيه رياء ولا سمعة إنك قريب مجيب الدعوات.

الحمد لله

الحمد لله الذي أوصلنا إلى ما ابتغينا بأن نصل إليه، لحظةً لطالما انتظرتها طويلاً وحلمتُ بها.
وأخيراً عانقت حلمي الجميل فالحمد لله أكملتُ مسيرتي الدراسية.

أهدي تخرجي إلى من كلله الله بالوقار وإلى من أحملُ اسمه بكل افتخار إلى السند الذي
لا يميل "والدي العزيز"

وإلى بسمه الحياة وسر الوجود إلى تلك التي ساندتني بدعائها الذي به وصلتُ إلى هنا
إلى مصدر الحب والحنان "أمي الحبيبة"

والى من كانت سنداً ورفيقة درب ودعم "عمتي العزيزة" جزاك كل خير.

وإلى مصدر الأمل الذي يملأ قلبي بالأمل والثبات "اختي الغالية"

وإلى من يشتدُّ أزرِي بهم "اخواني الأحباء".

والى استاذي الفاضل مشرف بحثي مسعي عون محمد الصالح الذي كان خير مرشد
ومعلم، بفضل توجيهاته القيمة ونصائحه الثمينة بارك الله له في علمه وعمله ونفع به وجزاه الله
كل خير.

وإلى زميلتي في رحلة التخرج أمينة غانم التي كانت الوجه المشرق شكراً لكونك جزءاً من
قصة التخرج

«ولله الحمد على ما كان وما نحنُ به وما سيكون»

Table des matières

Introduction	1
Notations	4
I Préliminaires	7
1 Elements d'analyse non-linéaire	9
1.1 Espaces fonctionnels	9
1.2 Équations variationnelles d'évolution	12
1.3 Lemmes de Gronwall	13
2 Modélisation	15
2.1 Cadre physique et modèle mathématique	15
2.2 Loi de comportement	17
2.3 Conditions aux limites	18
II Problème thermo-élasto-viscoplastique	20
3 Analyse variationnelle du problème	22
3.1 Énoncé du problème	22
3.2 Formulation variationnelle	27
3.3 Existence et unicité de la solution	29

4	Approximation par éléments finis du problème	40
4.1	Formulation variationnelle approchée	40
4.2	Estimation d'erreur	43
	Conclusion	45
	Bibliographie	46

Introduction

Le contact avec adhésion entre corps, lorsqu'une colle est ajoutée pour immobiliser les surfaces, fait l'objet d'une attention croissante dans la littérature mathématique. Une modélisation de base est présentée dans [7, 8]. L'analyse des modèles de contact avec adhésion est présentée dans [1, 5, 6, 9, 20]. Les résultats sur le contact avec adhésion sans frottement sont présentés dans [2, 11, 12, 17, 19]. Une application de la théorie du contact avec adhésion au domaine médical des prothèses a été examinée dans [16]. La nouveauté de tous ces articles réside dans l'introduction d'une variable interne à la surface, le champ d'adhésion. Il décrit la densité fractionnaire ponctuelle des liaisons actives sur la surface de contact. D'après [7, 8], le champ d'adhésion satisfait les restrictions $0 \leq \lambda \leq 1$, lorsque $\lambda = 1$ en un point de la surface de contact, l'adhésion est complète et toutes les liaisons sont actives; lorsque $\lambda = 0$, toutes les liaisons sont inactives, rompues, et il n'y a pas d'adhésion; lorsque $0 < \lambda < 1$, l'adhésion est partielle et seule une fraction des liaisons est active.

Le lecteur est invité à consulter la bibliographie exhaustive sur le sujet dans [14, 18, 22]. Ce mémoire étudie le processus dynamique d'un contact sans frottement entre un corps thermo-élasto-viscoplastique et une base adhésive. L'effet de la température est inclus dans la loi de comportement et décrit par une équation différentielle de la chaleur. Le contact est modélisé par une condition de compliance normale impliquant l'effet d'adhésion des surfaces de contact. L'adhésion est modélisée par une variable de surface, dont l'évolution est décrite par une équation différentielle du premier ordre. Le modèle est formulé comme un système impliquant le champ de déplacement, le champ d'adhésion et le champ de température. Une formulation variationnelle du modèle est dérivée. L'existence et l'unicité de la solution faible sont démontrées. La nouveauté de ce mémoire réside dans le couplage d'un matériau

élasto-viscoplastique avec effet thermique et d'un contact avec adhésion sans frottement. De tels problèmes se posent dans l'industrie et le domaine médical.

Ce mémoire est organisé en deux parties que nous décrirons brièvement afin d'en faciliter la lecture.

La **première partie** de ce mémoire est consacrée aux résultats préliminaires nécessaires à l'étude du problème de contact considéré dans la seconde partie du mémoire. Elle constitue la base de ce mémoire et comprend deux chapitres.

Le *premier chapitre* présente les espaces fonctionnels utilisés dans l'étude du problème variationnel considéré. Nous abordons brièvement quelques rappels sur les espaces fonctionnels utilisés en mécanique du contact. Nous présentons ensuite quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et lipschitziens. Nous rappelons ensuite un résultat sur les équations variationnelles d'évolution que nous utiliserons plus loin dans ce manuscrit. Pour conclure ce chapitre, nous rappelons le lemme de Gronwall utilisé pour la démonstration et obtenir des estimations d'erreur.

Le *deuxième chapitre* de cette partie est essentiellement axé sur la modélisation. Nous commençons par préciser le cadre physique, puis présentons la loi de comportement thermo-élasto-viscoplastique considérée dans le problème de contact. Enfin, nous décrivons les conditions de contact utilisées dans le problème de contact considéré.

Dans la **deuxième partie**, nous étudions un problème de contact sans frottement entre un corps thermo-élasto-viscoplastique et un obstacle assimilé à une fondation. Cette partie comporte deux chapitres structurés comme suit :

Le *premier chapitre* est consacré à l'étude analytique d'un problème de contact sans frottement pour des matériaux thermo-élasto-viscoplastiques à compliance normale dans un processus dynamique. La formulation faible du problème est formulée comme un système formé d'une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, d'une équation variationnelle par rapport au champ de température et d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre par rapport au champ d'adhésion. Nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La preuve repose sur la théorie des équations variationnelles d'évolution. Dans le *deuxième chapitre*, nous présentons une approximation numérique de ce problème de contact basée sur une approximation en temps et en espace, utilisant res-

pectivement une discrétisation temporelle uniforme et une méthode des éléments finis. À l'issue de ces discrétisations, nous donnons un résultat sur l'estimation de l'erreur.

Notations

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), nous notons par :

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω dans $\mathbb{R}^d$.
Γ	la frontière de Ω supposée régulière.
Γ_i ($i = \overline{1, 3}, a, b$)	une partie mesurable de la frontière Γ .
$mes \Gamma_i$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_i .
$\boldsymbol{\nu}$	la normale unitaire sortante à Γ .
$v_\nu, \mathbf{v}_\tau$	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel $\mathbf{v}$ définies sur $\overline{\Omega}$.
$\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω .
L	l'espace $\{\mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\}$.
$\mathcal{L}$	l'espace $\{\mathbf{C} = (C_{ij}) \mid C_{ij} = C_{ji} \in L^2(\Omega)\}$.
L_1	l'espace $\{\mathbf{u} \in L \mid \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) \in \mathcal{L}\}$.
$\mathcal{L}_1$	l'espace $\{\mathbf{C} \in \mathcal{L} \mid Div \mathbf{C} \in L\}$.
E	l'espace $\{\mathbf{v} \in L_1 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1\}$.
F	l'espace $\{\vartheta \in H^1(\Omega) \mid \vartheta = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$.
$H^1(\Omega)$	l'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω .
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
L_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
L'_Γ	l'espace dual de $L_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$\gamma : L_1 \rightarrow L_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si L est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, nous utilisons les notations suivantes :

L^d	l'espace $\{\mathbf{x} = (x_i) \mid x_i \in L, i = \overline{1, d}\}$.
$L_s^{d \times d}$	l'espace $\{\mathbf{x} = (x_{ij}) \mid x_{ij} = x_{ji} \in L, i, j = \overline{1, d}\}$.
$(\cdot, \cdot)_L$	le produit scalaire de L .
$ \cdot _L$	la norme de L .
2^L	l'ensemble de toutes les parties de L .
L'	l'espace dual de L .
$(\cdot, \cdot)_{L' \times L}$	le produit de dualité entre L' et L .
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans L .
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans L .
Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, nous notons par	
$\mathcal{C}(0, T; L)$	l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans L .
$ \cdot _{0, L}$	la norme de $\mathcal{C}(0, T; L)$.
$\mathcal{C}^1(0, T; L)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans L .
$ \cdot _{1, L}$	la norme de $\mathcal{C}^1(0, T; L)$.
$L^p(0, T; L)$	l'espace des fonctions u mesurables de $(0, T)$ dans L telles que $\int_0^T u(t) _L^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.
$ \cdot _{0, p, L}$	la norme de $L^p(0, T; L)$.
$W^{k, p}(0, T; L)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p .
$ \cdot _{k, p, L}$	la norme de $W^{k, p}(0, T; L)$.
Pour une fonction f , nous notons par	
$\dot{f}, \ddot{f}$	les dérivées première et seconde de f par rapport au temps.
$f_{,i}$	la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i .
∇f	le gradient de f .
$\delta(f)$	la partie symétrique du gradient de $f = \frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$.
$Div f$	la divergence de f .
Δf	le laplacien de f .

Autres notations

- $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$.
- I_d le tenseur identité du second ordre sur $\mathbb{R}^d$.
- $\mathbf{0}_d$ le zéro de $\mathbb{R}^d$ et celui de $\mathbb{S}^d$.
- c une constante générique strictement positive.
- p.p presque partout.
- r_+ partie positive de r .
- Π_h opérateur d'interpolation d'élément fini.

Première partie

Préliminaires

Cette partie, dans laquelle nous présentons les outils d'analyse fonctionnelle et les notations de la mécanique du contact, comporte deux chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons certains espaces fonctionnels de la mécanique nécessaires à l'étude du problème de contact que nous abordons dans la seconde partie, et nous présentons un bref rappel des opérateurs monotones. Ensuite, nous passons en revue des résultats concernant les équations variationnelles d'évolution qui seront très utiles pour les démonstrations. Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons à la modélisation du problème de contact. Nous présentons la loi de comportement et les conditions de contact.

Chapitre 1

Elements d'analyse non-linéaire

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, un théorème sur les équations variationnelles d'évolutions qui sera d'une grande utilité pour les démonstrations et les lemmes de Gronwall.

1.1 Espaces fonctionnels

L'analyse variationnelle des problèmes de la mécanique nécessite l'introduction d'espaces fonctionnels spécifiques. Dans cette section, nous présentons les espaces fonctionnels en mécanique associés aux opérateurs de divergence et de déformation.

Nous définissons les espaces suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} L = \{ \mathbf{u} = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega) \}, \\ \mathcal{L} = \{ \mathbf{C} = (C_{ij}) \mid C_{ij} = C_{ji} \in L^2(\Omega) \}, \\ L_1 = \{ \mathbf{u} = (u_i) \mid \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) \in \mathcal{L} \}, \\ \mathcal{L}_1 = \{ \mathbf{C} \in \mathcal{L} \mid \text{Div} \mathbf{C} \in L \}. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Les espaces L , $\mathcal{L}$, L_1 et $\mathcal{L}_1$ sont des espaces de Hilbert réels pourvus de produits scalaires donnés, respectivement, par :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_L = \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ (\mathbf{C}, \mathbf{D})_{\mathcal{L}} = \int_{\Omega} C_{ij} D_{ij} dx, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L_1} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_L + (\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}))_{\mathcal{L}}, \\ (\mathbf{C}, \mathbf{D})_{\mathcal{L}_1} = (\mathbf{C}, \mathbf{D})_{\mathcal{L}} + (\text{Div} \mathbf{C}, \text{Div} \mathbf{D})_L, \end{array} \right. \quad (1.2)$$

où $\boldsymbol{\delta} : L_1 \rightarrow \mathcal{L}$, $Div : \mathcal{L}_1 \rightarrow L$ sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) = (\delta_{ij}(u)), \quad \delta_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad Div \mathbf{C} = (C_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces L , $\mathcal{L}$, L_1 et $\mathcal{L}_1$ sont notées par $|\cdot|_L$, $|\cdot|_{\mathcal{L}}$, $|\cdot|_{L_1}$ et $|\cdot|_{\mathcal{L}_1}$, respectivement.

Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur $\boldsymbol{\nu}$ à la frontière est défini presque partout. Pour tout champ de vecteur $\mathbf{v} \in L_1$ nous utilisons la notation $\mathbf{v}$ pour désigner $\gamma \mathbf{v}$ la trace de $\mathbf{v}$ sur Γ .

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : L_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de L_1 par cette application est notée par $L_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$, ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$.

Par ailleurs, si $\mathbf{C} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ est suffisamment régulier, nous rappelons la formule de Green :

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} Div \mathbf{C} \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Gamma} \mathbf{C} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in L_1. \quad (1.3)$$

Nous introduisons à présent un sous-espace fermé de L_1 , dont la définition est donnée ci-après

$$E = \{\mathbf{v} \in L_1 \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (1.4)$$

Puisque $mes \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur E , il existe une constante $c_K > 0$ dépendante uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$|\boldsymbol{\delta}(\mathbf{v})|_{\mathcal{L}} \geq c_K |\mathbf{v}|_{L_1} \quad \forall \mathbf{v} \in E. \quad (1.5)$$

Sur E , nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_E = (\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}))_{\mathcal{L}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \quad (1.6)$$

et soit $|\cdot|_E$ la norme associée ; c'est-à-dire

$$|\mathbf{v}|_E = |\boldsymbol{\delta}(\mathbf{v})|_{\mathcal{L}} \quad \forall \mathbf{v} \in E. \quad (1.7)$$

Par l'inégalité (1.5) de Korn et (1.7), il vient que $|\cdot|_{L_1}$ et $|\cdot|_E$ sont des normes équivalentes sur E et ainsi $(E, (\cdot, \cdot)_E)$ est un espace de Hilbert.

En outre, d'après (1.5), (1.7) et le théorème de trace de Sobolev, trouvons qu'il existe une constante $c_0 > 0$ dépendante uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$|\boldsymbol{v}|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 |\boldsymbol{v}|_E \quad \forall \boldsymbol{v} \in E. \quad (1.8)$$

Maintenant, nous définissons le sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ par

$$F = \{\alpha \in H^1(\Omega) \mid \alpha = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}. \quad (1.9)$$

Puisque $\text{mes } \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante $c_p > 0$ dépendante uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_2 telle que

$$|\nabla \alpha|_L \geq c_p |\alpha|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \alpha \in F, \quad (1.10)$$

Sur F , nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\alpha, \vartheta)_{F \times F} = (\nabla \alpha, \nabla \vartheta)_L \quad \forall \alpha, \vartheta \in F, \quad (1.11)$$

et soit $|\cdot|_F$ la norme associée ; c'est-à-dire

$$|\alpha|_F = |\nabla \alpha|_L \quad \forall \alpha \in F. \quad (1.12)$$

En combinant l'inégalité (1.10) et (1.12), il vient que $|\cdot|_{H^1(\Omega)}$ et $|\cdot|_F$ sont des normes équivalentes sur F et ainsi $(F, |\cdot|_F)$ est un espace de Hilbert.

En outre, d'après (1.10), (1.12) et le théorème de trace de Sobolev, trouvons qu'il existe une constante $c_1 > 0$ dépendante uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$|\alpha|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_1 |\alpha|_F \quad \forall \alpha \in F. \quad (1.13)$$

En plus, si $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est suffisamment régulier, nous rappelons aussi la formule de Green ci-dessous :

$$(\Delta \alpha, \vartheta)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla \alpha \cdot \nabla \vartheta dx = \int_{\Gamma} \nabla \alpha \cdot \boldsymbol{\nu} \vartheta da, \quad \forall \vartheta \in F. \quad (1.14)$$

L'application d'inclusion de $(F, |\cdot|_F)$ dans $(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)})$ est continue et à image dense. Notant par F' l'espace dual de F et identifiant le dual de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$F \subset L^2(\Omega) \subset F'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{F' \times F}$ pour désigner le produit de dualité entre F' et F telle que

$$(\alpha, \vartheta)_{F' \times F} = (\alpha, \vartheta)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \alpha \in L^2(\Omega), \forall \vartheta \in F, \quad (1.15)$$

et $|\cdot|_{F'}$ la norme sur F' .

1.2 Équations variationnelles d'évolution

Dans cette section, nous commençons par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour ce faire, nous considérons un espace de Hilbert Y munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_Y$ et de la norme associée $|\cdot|_Y$.

Définition 1.1. Soit $B : Y \rightarrow Y'$ un opérateur défini sur Y . L'opérateur B est dit :

(1) monotone si

$$(Bu - Bv, u - v)_{Y' \times Y} \geq 0 \quad \forall u, v \in Y;$$

(2) hémicontinu si

$$\forall u, v \in Y \quad \text{l'application } t \rightarrow B(u + tv) : \mathbb{R} \rightarrow Y' \text{ est continue.}$$

Nous rappelons maintenant deux résultats sur les équations d'évolution.

Équation différentielle ordinaire

Théorème 1.2. (Cauchy-Lipschitz) Soit $(Y, |\cdot|_Y)$ un espace de Banach réel et soit $A(t, \cdot) : Y \rightarrow Y$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } L_A > 0 \text{ tel que} \\ |A(t, y_1) - A(t, y_2)|_Y \leq L_A |y_1 - y_2|_Y \quad \forall y_1, y_2 \in Y, \text{ p.p. } t \in (0, T); \end{array} \right.$$

$$\text{il existe } 1 \leq p \leq +\infty \text{ tel que } A(\cdot, y) \in L^p(0, T; Y) \quad \forall y \in Y.$$

Alors pour tout $y_0 \in Y$, il existe une fonction unique $y \in W^{1,p}(0, T; Y)$ telle que

$$\dot{y}(t) = A(t, y(t)) \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$y(0) = y_0.$$

Maintenant nous considérons E et L deux espaces de Hilbert réels tels que l'application d'inclusion de $(E, |\cdot|_E)$ dans $(L, |\cdot|_L)$ est continue et dense. Identifiant le dual de L avec

lui-même, c'est-à-dire nous pouvons écrire le triplet de Gelfand $E \subset L \subset E'$. Les notations $|\cdot|_E$, $|\cdot|_{E'}$ et $(\cdot, \cdot)_{E' \times E}$ représentent les normes sur E , E' et le produit de dualité entre E' et E , respectivement.

Équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorème 1.3. *Soient E et L deux espaces satisfaisant les hypothèses décrites ci-dessus et soit $V : E \rightarrow E'$ un opérateur hémicontinu et monotone qui satisfait*

$$\text{il existe } \beta > 0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \quad (Vv, v)_{E' \times E} \geq \beta |v|_E^2 + \gamma \quad \forall v \in E,$$

$$\exists c > 0, \quad |Vv|_{E'} \leq c(|v|_E + 1) \quad \forall v \in E.$$

Alors, pour tout $u_0 \in L$ et $f \in L^2(0, T; E')$, il existe une fonction unique u qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; E) \cap C(0, T; L), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; E'),$$

$$\dot{u}(t) + Vu(t) = f(t) \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

$$u(0) = u_0$$

1.3 Lemmes de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes de Gronwall qui interviennent par la suite dans ce mémoire.

Lemme 1.4. *Soient m et $n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$*

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq e^{at} \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $a = 0$, $n = 1$, la partie (1) de ce Lemme devient.

Corollaire 1.5. Soit $m \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq \int_0^t m(s) ds + \int_0^t \phi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, il existe $c > 0$ tel que

$$\phi(t) \leq c \int_0^t m(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Lemme 1.6. Soient $T > 0$, donné, et $N > 0$, un entier. Nous définissons $k = \frac{T}{N}$. Supposons que $\{e_n\}_{n=0}^N$ et $\{g_n\}_{n=0}^N$ sont deux suites de nombres non négatifs satisfaisant

$$e_0 \leq \bar{c}g_0 \text{ et } e_n \leq \bar{c}g_n + \bar{c} \sum_{j=0}^{n-1} ke_j, \quad n = 1, \dots, N,$$

avec, $\bar{c}$ est une constante positive indépendante de N et k . Alors, si k est suffisamment petit, il existe une constante positive c , indépendante de N et k , telle que

$$\max_{0 \leq n \leq N} e_n \leq c \max_{0 \leq n \leq N} g_n.$$

Chapitre 2

Modélisation

Dans ce chapitre, nous introduisons d'abord le cadre physique du problème de contact ainsi qu'un bref rappel de la mécanique des milieux continus, nous rappelons en particulier l'équation de Cauchy du mouvement. Nous décrivons ensuite la loi de comportement thermo-élasto-viscoplastique et l'équation de la chaleur. Enfin, nous présentons les différentes conditions aux limites de contact qui seront utilisées dans la suite.

2.1 Cadre physique et modèle mathématique

Dans cette section, nous présenterons le cadre physique et le modèle mathématique qui serviront de base à l'étude du problème de contact entre un corps thermo-élasto-viscoplastique déformable et une fondation déformable.

Cadre physique. On considère un corps matériel déformable qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), de frontière lipschitzienne Γ , partitionné en trois parties mesurables Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 , telles que $mes \Gamma_1 > 0$. Le corps peut entrer en contact sur Γ_3 avec une fondation déformable. On note $\boldsymbol{\nu}$ la normale unitaire sortante à Γ . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps considéré. Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions de surface de densité $\boldsymbol{f}_2$ et dans Ω des forces de volume de densité $\boldsymbol{f}_0$. On suppose que $\boldsymbol{f}_2$ et $\boldsymbol{f}_0$ varient très lentement par rapport au temps.

Notations. On note $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), “.”, $|\cdot|$ représentant respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_i v_i, \quad |\mathbf{v}| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d, \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} &= C_{ij} D_{ij}, \quad |\mathbf{D}| = (\mathbf{D} \cdot \mathbf{D})^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathbb{S}^d,\end{aligned}$$

avec la convention d'indice muet.

On note $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ le champ des déplacements, $\mathbf{C} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ le champ des contraintes. $\delta(\mathbf{u})$ est le champ de déformation linéarisé.

Pour le champ de déplacement $\mathbf{u}$, on désigne par u_ν et $\mathbf{u}_\tau$ les composantes normale et tangente de $\mathbf{u}$ sur la frontière donnée par

$$u_\nu = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - u_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (2.1)$$

Nous définissons de manière similaire, C_ν et $\mathbf{C}_\tau$ les composantes normale et tangente du tenseur des contraintes de Cauchy $\mathbf{C}\boldsymbol{\nu}$

$$C_\nu = (C\nu)_\nu, \quad \mathbf{C}_\tau = (\mathbf{C}\boldsymbol{\nu})_\tau,$$

donc

$$C_\nu = (\mathbf{C}\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{C}_\tau = \mathbf{C}\boldsymbol{\nu} - C_\nu \boldsymbol{\nu}.$$

En utilisant (2.1) et les égalités précédentes, nous avons la relation

$$(\mathbf{C}\boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{u} = C_\nu u_\nu + \mathbf{C}_\tau \cdot \mathbf{u}_\tau, \quad (2.2)$$

qui interviendra tout au long de ce mémoire pour établir la formulation variationnelle du problème mécanique.

Dans ce mémoire, pour désigner les dérivées partielles $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$ d'une fonction $\mathbf{u}$, nous adoptons la notation $\mathbf{u}_{,i}$. La dérivée temporelle de $\mathbf{u}$ sera notée $\dot{\mathbf{u}}$.

De plus, $\dot{\mathbf{u}}$ désigne le champ de vitesse et $\ddot{\mathbf{u}}$ désigne le champ d'accélération.

Nous passons maintenant à la description du modèle mathématique associé au cadre physique ci-dessus.

Modèle mathématique. La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus, exprimant l'équivalence entre les forces externes et le tenseur des accélérations pour tout système, conduit à l'équation de Cauchy du mouvement

$$\text{Div } \mathbf{C} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.3)$$

où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la masse volumique.

2.2 Loi de comportement

Dans cette section, nous considérons la loi de comportement des matériaux thermo-élasto-viscoplastiques. Cette loi est utilisée dans de nombreux travaux portant notamment sur l'étude mathématique des problèmes de contact.

Matériaux thermo-élasto-viscoplastiques. Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur de contrainte $\mathbf{C}$ est lié par la loi de comportement

$$\mathbf{C} = \mathcal{V}\boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{E}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) + \int_0^t \mathcal{P}(\mathbf{C}(s) - \mathcal{V}\boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.4)$$

où $\mathbf{C}$ désigne le tenseur des contraintes, $\mathbf{u}$ représente le champ des déplacements, $\dot{\mathbf{u}}$ la vitesse, $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u})$ est le tenseur des petites déformations et α est le champ de température. Ici, $\mathcal{V} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ et $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ sont des opérateurs non linéaires décrivant respectivement les propriétés purement visqueuses et élastiques du matériau. $\mathcal{P} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ est un opérateur non linéaire dépendant de la température et décrivant le comportement viscoplastique du matériau.

Lorsque $\mathcal{P} = 0$, (2.4) se réduit à la loi constitutive viscoélastique de Kelvin-Voigt donnée par

$$\mathbf{C} = \mathcal{V}\boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{E}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}).$$

En particulier, nous supposons que le tenseur de contrainte $\mathbf{C}$ est une fonction linéaire, c'est-à-dire

$$C_{ij} = v_{ijkl}\delta_{kl}(\dot{\mathbf{u}}) + e_{ijkl}\delta_{kl}(\mathbf{u}),$$

où $\mathcal{V} = (v_{ijkl})$ est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes v_{ijkl} sont appelées coefficients de viscosité. $\mathcal{E} = (e_{ijkl})$ est un tenseur d'ordre quatre, ses composantes e_{ijkl} sont appelées coefficients d'élasticité. Dans le cas non homogène v_{ijkl} et e_{ijkl} dépendent du point $\mathbf{x} \in \Omega$ et dans le cas homogène v_{ijkl} et e_{ijkl} sont des constantes.

L'évolution du champ de température est régie par l'équation de la chaleur, obtenue à partir de la conservation de l'énergie, et définie par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\alpha} - k_t \Delta \alpha = r(\dot{\mathbf{u}}) + q \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.5)$$

où k_t représente le coefficient de conductivité thermique; $q(t)$ la densité des sources de chaleur volumiques, et $r(\dot{\mathbf{u}})$ une fonction non linéaire de la vitesse.

2.3 Conditions aux limites

Dans cette section, nous présentons les conditions de contact utilisées dans le problème aux limites que nous aborderons dans ce mémoire. Nous nous plaçons dans le contexte physique ci-dessus. Nous définissons maintenant les conditions aux limites mécaniques et thermiques sur chaque partie de Γ .

La condition limite de déplacement. Le corps est encastré en position fixe sur Γ_1 , le champ des déplacements $\mathbf{y}$ est donc nul

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T). \quad (2.6)$$

La condition limite de traction. Une traction de surface de densité $\mathbf{f}_2$ agit sur Γ_2 et par conséquent le vecteur de contrainte de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu}$ satisfait

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T). \quad (2.7)$$

Contact avec compliance normale et adhésion. Nous supposons que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion

$$-C_\nu = p_\nu(u_\nu) - a_\nu \lambda^2 H_\nu(u_\nu) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.8)$$

où a_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction de compliance normale et $H_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par

$$H_\nu(s) = \begin{cases} R & \text{si } s < -R, \\ -s & \text{si } -R \leq s \leq 0, \\ R & \text{si } s > 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

ici $R > 0$ est la longueur caractéristique des liens.

Nous supposons que la contrainte tangentielle satisfait la condition suivante

$$-\mathbf{C}_\tau = p_\tau(\lambda) \mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.10)$$

où $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction de contact tangentiel et $\mathbf{H}_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un opérateur de troncature défini par

$$\mathbf{H}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } |\mathbf{v}| \leq R, \\ R \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} & \text{si } |\mathbf{v}| > R. \end{cases} \quad (2.11)$$

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme

$$\dot{\lambda} = - \left(\lambda \left[a_\nu (H_\nu(u_\nu))^2 + a_\tau |\mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_\tau)|^2 \right] - \varepsilon_a \right)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.12)$$

$$\lambda(0) = \lambda_0 \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (2.13)$$

où a_τ et ε_a sont des coefficients d'adhésion positifs et λ_0 l'adhésion initial tel que

$$0 \leq \lambda_0 \leq 1, \quad \text{p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \quad (2.14)$$

Remarque 2.1. *Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \lambda \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\lambda} \leq 0$ donc $\lambda \leq \lambda_0 \leq 1$. En outre, si $\lambda = 0$ quand $t = t_0$ donc $\dot{\lambda} = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et d'où $\lambda = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $\mathbf{x} \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \lambda \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $\mathbf{x} \in \Gamma_3$.*

Les conditions limites de température. La condition limite de température sur Γ_3 est décrite par

$$-k_t \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\nu}} = k_e \alpha \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.15)$$

où $\frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ représente la dérivé normale de α et k_e est le coefficient d'échange thermique entre le corps et l'obstacle.

Le champ de température sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est nul, donc

$$\alpha = 0 \quad \text{sur } (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times (0, T), \quad (2.16)$$

Nous utiliserons ces conditions dans le chapitre 3 de ce mémoire.

Deuxième partie

Problème

thermo-élasto-viscoplastique

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude d'un problème thermo-élasto-viscoplastique. Cette partie est divisée en deux chapitres. Dans le premier chapitre, nous étudions analytiquement un problème de contact en thermo-élasto-viscoplasticité dans un processus dynamique avec compliance normale et sans frottement. Pour cela, nous donnons la formulation forte du problème ainsi que les hypothèses sur les données afin d'obtenir la formulation variationnelle du problème. Ensuite, nous fournissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. Ensuite, nous démontrons ce résultat d'existence et d'unicité de la solution faible du problème. Dans le chapitre suivant, nous estimons l'erreur de discrétisation spatiale et temporelle.

Chapitre 3

Analyse variationnelle du problème

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude théorique d'un problème dynamique de contact sans frottement entre un corps de loi de comportement thermo-élasto-viscoplastique et un obstacle assimilé à une fondation déformable. Le problème est formulé par un système d'équations aux dérivées partielles contenant la loi de comportement du matériau, les équations d'équilibre du corps, l'équation de mouvement de Cauchy et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre comporte trois sections. Dans la première, nous commençons par formuler le problème mécanique et spécifions les hypothèses appropriées sur les données afin d'obtenir la formulation variationnelle. Ensuite, dans la deuxième section, nous énonçons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans la troisième section, nous présentons et prouvons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. Les techniques employées s'appuient sur les résultats des équations variationnelles d'évolution, la théorie des opérateurs monotones et les arguments du point fixe.

3.1 Énoncé du problème

Nous nous plaçons dans le contexte physique décrit ci-dessus. Nous considérons que le comportement du corps est thermo-élasto-viscoplastique ; plus précisément, nous utilisons une loi de comportement de la forme (2.4). Concernant le contact, nous modélisons par compliance normale sans frottement avec adhésion.

Compte tenu de ces considérations, le problème mécanique que nous étudions est le suivant.

Problème P. *Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\mathbf{C} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ de température $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ d'adhésion $\lambda : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que*

$$\mathbf{C} = \nu \delta(\dot{\mathbf{u}}) + \varepsilon \delta(\mathbf{u}) + \int_0^t \mathcal{P}(\mathbf{C}(s) - \nu \delta(\dot{\mathbf{u}}(s)), \delta(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$\dot{\alpha} - k_t \Delta \alpha = r(\dot{\mathbf{u}}) + q \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$\text{Div} \mathbf{C} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \text{ dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.4)$$

$$\mathbf{C}\nu = \mathbf{f}_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} -C_\nu = p_\nu(u_\nu) - a_\nu \lambda^2 H_\nu(u_\nu) \\ -\mathbf{C}_\tau = p_\tau(\lambda) \mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \\ \dot{\lambda} = -(\lambda [a_\nu (H_\nu(u_\nu))^2 + a_\tau |\mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_\tau)|^2] - \lambda_a)_+ \end{cases} \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.6)$$

$$-k_t \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} = k_e \alpha \text{ sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.7)$$

$$\alpha = 0 \text{ sur } (\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \times (0, T), \quad (3.8)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \alpha(0) = \alpha_0 \text{ dans } \Omega, \quad (3.9)$$

$$\lambda(0) = \lambda_0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (3.10)$$

Les équations (3.1) et (3.2) représentent la loi de comportement du corps. La relation (3.3) représente l'équation du mouvement, tandis que les conditions (3.4) et (3.5) sont respectivement, des conditions aux limites de déplacement-traction. Les conditions (3.6) représentent les conditions aux limites de contact avec compliance normale et adhésion. Les relations (3.7) et (3.8) représentent les conditions aux limites thermiques. (3.9) et (3.10) sont les conditions initiales.

Pour l'étude du problème mécanique (3.1) – (3.10), nous introduisons les espaces de Hilbert L , $\mathcal{L}$, L_1 et $\mathcal{L}_1$ donnés par (1.1) munis des produits scalaires donnés par (1.2). Tout

au long de ce chapitre, nous avons besoins de l'espaces E et F définis par (1.4) et (1.9) munis des produits scalaires donnés par (1.6) et (1.11), respectivement.

D'autre part, pour le champ d'adhésion, nous définissons l'ensemble $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \left\{ \lambda \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3)) \mid 0 \leq \lambda(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0, T], \text{ p.p. sur } \Gamma_3 \right\}.$$

Nous considérons maintenant les hypothèses suivantes : l'opérateur de viscosité $\mathcal{V} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{V}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{V}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}_1) - \mathcal{V}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}_2)| \leq L_{\mathcal{V}} |\boldsymbol{\delta}_1 - \boldsymbol{\delta}_2| \\ \quad \forall \boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{V}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad (\mathcal{V}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}_1) - \mathcal{V}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}_2)) \cdot (\boldsymbol{\delta}_1 - \boldsymbol{\delta}_2) \geq m_{\mathcal{V}} |\boldsymbol{\delta}_1 - \boldsymbol{\delta}_2|^2 \\ \quad \forall \boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{V}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{V}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{L}. \end{array} \right. \quad (3.11)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{E}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}_1) - \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}_2)| \leq L_{\mathcal{E}} |\boldsymbol{\delta}_1 - \boldsymbol{\delta}_2| \\ \quad \forall \boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{E}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \text{ appartient à } \mathcal{L}. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

L'opérateur de visco-plasticité $\mathcal{P} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{\mathcal{P}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad |\mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{C}_1, \boldsymbol{\delta}_1, \alpha_1) - \mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{C}_2, \boldsymbol{\delta}_2, \alpha_2)| \\ \quad \leq L_{\mathcal{P}} (|\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2| + |\boldsymbol{\delta}_1 - \boldsymbol{\delta}_2| + |\alpha_1 - \alpha_2|) \\ \quad \forall \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega. \\ \text{(b) Pour tout } \mathbf{C}, \boldsymbol{\delta} \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{C}, \boldsymbol{\delta}, \alpha) \\ \quad \text{est Lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{x}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, 0) \text{ appartient à } \mathcal{L}. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\nu > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\nu(\mathbf{x}, r_1) - p_\nu(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \rightarrow p_\nu(\mathbf{x}, r) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } p_\nu(\mathbf{x}, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_\tau > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\tau(\mathbf{x}, r_1) - p_\tau(\mathbf{x}, r_2)| \leq L_\tau |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(b) Il existe } m_\tau > 0 \text{ telle que} \\ \quad |p_\tau(\mathbf{x}, r)| \leq m_\tau \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \\ \text{(b) L'application } \mathbf{x} \rightarrow p_\tau(\mathbf{x}, r) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \text{mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } \mathbf{x} \rightarrow p_\tau(\mathbf{x}, 0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (3.15)$$

La densité de masse ρ satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ telle que } \rho(\mathbf{x}) \geq \rho^*, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.16)$$

Les coefficients d'adhésion a_ν, a_τ et ε_a vérifient

$$a_\nu, a_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad a_\nu, a_\tau, \varepsilon_a \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.17)$$

Les forces volumiques $\mathbf{f}_0$ et les tractions surfaciques $\mathbf{f}_2$ ont la régularité

$$\mathbf{f}_0 \in L^2(0, T; L), \quad \mathbf{f}_2 \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (3.18)$$

Pour la densité de la source de chaleur, supposons que

$$q \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.19)$$

Les données initiales et la limite satisfont

$$\mathbf{u}_0 \in E, \quad \mathbf{v}_0 \in L, \quad \alpha_0 \in L^2(\Omega). \quad (3.20)$$

$$k_e > 0, \quad k_t > 0. \quad (3.21)$$

Finalement, le champ initial d'adhésion satisfait

$$\lambda_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \lambda_0 \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.22)$$

La fonction $r : E \rightarrow L^2(\Omega)$ satisfait

$$\begin{cases} \text{Il existe } L_r > 0 \text{ telle que} \\ |r(\mathbf{v}_1) - r(\mathbf{v}_2)|_{L^2(\Omega)} \leq L_r |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|_E, \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in E, \end{cases} \quad (3.23)$$

Nous énonçons maintenant quelques définitions que nous utilisons dans la suite de ce chapitre.

Nous définissons l'opérateur $B_0 : F \rightarrow F'$ par

$$(B_0 \xi, \vartheta)_{F' \times F} = k_t \int_{\Omega} \nabla \xi \cdot \nabla \vartheta dx + k_e \int_{\Gamma_3} \xi \vartheta da \quad \forall \xi, \vartheta \in F. \quad (3.24)$$

Nous utiliserons le produit scalaire modifié sur $L = L^2(\Omega)^d$ donné par

$$((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_L = (\rho \mathbf{u}, \mathbf{v})_L \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \quad (3.25)$$

et soit $\| \cdot \|_L$ la norme associée, c'est-à-dire

$$\| \mathbf{v} \|_L = (\rho \mathbf{v}, \mathbf{v})_L^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{v} \in E. \quad (3.26)$$

De (3.16), il vient que $\| \cdot \|_L$ et $|\cdot|_L$ sont des normes équivalentes sur L . D'autre part, l'application d'inclusion de $(E, |\cdot|_E)$ dans $(L, \| \cdot \|_L)$ est continue et dense. Nous notons par E' le dual de E . Identifiant le dual de L avec lui même, donc, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$E \subset L \subset E'.$$

La notation $(\cdot, \cdot)_{E' \times E}$ désigne le produit de dualité entre E' et E , nous notons par $|\cdot|_{E'}$ la norme sur E' , nous avons

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{E' \times E} = ((\mathbf{u}, \mathbf{v}))_L \quad \forall \mathbf{u} \in L, \quad \forall \mathbf{v} \in E. \quad (3.27)$$

Nous définissons la fonction $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow E'$ par

$$(\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{E' \times E} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2(t) \cdot \mathbf{v} da \text{ p.p. } t \in [0, T], \quad (3.28)$$

La condition (3.18) implique

$$\mathbf{f} \in L^2(0, T; E'). \quad (3.29)$$

Soit $a : L^\infty(\Gamma_3) \times E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle d'adhésion

$$a(\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} (-a_\nu \lambda^2 H_\nu(u_\nu) v_\nu + p_\tau(\lambda) \mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau) da, \quad (3.30)$$

les conditions (3.14) – (3.15) et (3.17) entraînant que l'intégrale (3.30) est bien définie.

3.2 Formulation variationnelle

Dans cette section, nous allons donner la formulation variationnelle du problème P.

Nous supposons dans ce qui suit que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{C}$ sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfaisant (3.1) – (3.6) et (3.9). Soit $\mathbf{v} \in E$, nous utilisons la formule de Green (1.3) et l'équation de mouvement (3.3) pour obtenir

$$\int_{\Omega} \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Gamma} \mathbf{C} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da.$$

Nous divisons l'intégrale de surface Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 . Puisque $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur Γ_1 , $\mathbf{C} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2$ sur Γ_2 , nous déduisons que

$$(\mathbf{C}, \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}))_{\mathcal{L}} + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_3} \mathbf{C} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da.$$

De (3.25), (3.27) et (3.28), nous obtenons

$$(\mathbf{C}, \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}))_{\mathcal{L}} + (\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{E' \times E} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{E' \times E} + \int_{\Gamma_3} \mathbf{C} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da.$$

Sur Γ_3 , nous avons

$$\mathbf{C} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} = C_\nu v_\nu + \mathbf{C}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau,$$

en utilisant (3.6), nous trouvons

$$\mathbf{C} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} = -p_\nu(u_\nu) v_\nu + a_\nu \lambda^2 H_\nu(u_\nu) v_\nu - p_\tau(\lambda) \mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_\tau) \cdot \mathbf{v}_\tau,$$

de cette égalité, (3.30) la définition de la fonctionnelle a et (3.31), nous avons

$$(\mathbf{C}, \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}))_{\mathcal{L}} + (\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{E' \times E} + a(\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{E' \times E}$$

Nous substituons (3.1) dans l'égalité précédente afin de constater que

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{E' \times E} + (\mathcal{V} \boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}))_{\mathcal{L}} + (\mathcal{E} \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}))_{\mathcal{L}} \\ & + \left(\int_0^t \mathcal{P}(\mathbf{C}(s) - \mathcal{V} \boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds, \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{L}} \\ & + a(\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{E' \times E}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ensuite, soit $\alpha \in F$ et pour tout $\vartheta \in F$, de (3.2), nous avons

$$(\dot{\alpha}, \vartheta)_{F' \times F} - k_t (\Delta \alpha, \vartheta)_{L^2(\Omega)} = (r(\dot{\mathbf{u}}) + q, \vartheta)_{F' \times F}. \quad (3.32)$$

En utilisant la formule de Green (1.14), nous trouvons

$$(\Delta \alpha, \vartheta)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla \alpha \cdot \nabla \vartheta dx = \int_{\Gamma} \nabla \alpha \cdot \boldsymbol{\nu} \vartheta da.$$

Puisque $\vartheta = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, nous déduisons que

$$(\Delta \alpha, \vartheta)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla \alpha \cdot \nabla \vartheta dx = \int_{\Gamma_3} \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{\nu}} \vartheta da.$$

En employant (3.7), nous trouvons

$$(\Delta \alpha, \vartheta)_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} \nabla \alpha \cdot \nabla \vartheta dx = -\frac{k_e}{k_t} \int_{\Gamma_3} \alpha \vartheta da.$$

donc

$$-k_t (\Delta \alpha, \vartheta)_{L^2(\Omega)} = k_t \int_{\Omega} \nabla \alpha \cdot \nabla \vartheta dx + k_e \int_{\Gamma_3} \alpha \vartheta da,$$

et de (3.24), il vient que

$$-k_c (\Delta \alpha, \vartheta)_{L^2(\Omega)} = (B_0 \alpha, \vartheta)_{L^2(\Omega)}.$$

En substituant cette égalité dans (3.33) afin d'écrire

$$(\dot{\alpha}, \vartheta)_{F' \times F} + (B_0 \alpha, \vartheta)_{F' \times F} = (r(\dot{\mathbf{u}}) + q, \vartheta)_{F' \times F}. \quad (3.33)$$

De (3.1), (3.31), (3.33), (3.6) et (3.9) – (3.10), nous obtenons la formulation variationnelle suivante du problème P.

Problème PV. *Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow E$, le champ des contraintes $\mathbf{C} : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}$, le champ de température $\alpha : [0, T] \rightarrow F$, et le champ d'adhésion $\lambda : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que*

$$\mathbf{C} = \mathcal{V} \boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{E} \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}) + \int_0^t \mathcal{P}(\mathbf{C}(s) - \mathcal{V} \boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds, \quad (3.34)$$

$$(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v})_{E' \times E} + (\mathcal{V}\delta(\dot{\mathbf{u}}(t)), \delta(\mathbf{v}))_{\mathcal{L}} + (\mathcal{E}\delta(\mathbf{u}(t)), \delta(\mathbf{v}))_{\mathcal{L}} \quad (3.35)$$

$$+ \left(\int_0^t \mathcal{P}(\mathbf{C}(s) - \mathcal{V}\delta(\dot{\mathbf{u}}(s)), \delta(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds, \delta(\mathbf{v}) \right)_{\mathcal{L}} \\ + a(\lambda(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{E' \times E} \quad \forall \mathbf{v} \in E, \quad t \in (0, T),$$

$$(\dot{\alpha}, \vartheta)_{E' \times E} + (B_0 \alpha, \vartheta)_{F' \times F} = (r(\dot{\mathbf{u}}) + q, \vartheta)_{F' \times F} \quad \forall \vartheta \in F, \quad t \in (0, T), \quad (3.36)$$

$$\dot{\lambda}(t) = - \left(\lambda(t) [a_\nu(H_\nu(u_\nu(t)))^2 + a_\tau |\mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_\tau(t))|^2] - \varepsilon_a \right)_+ \quad p.p. \quad t \in (0, T), \quad (3.37)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \lambda(0) = \lambda_0. \quad (3.38)$$

L'élément $\{\mathbf{C}, \mathbf{u}, \alpha, \lambda\}$ qui satisfait (3.34) – (3.38) est appelé solution faible du Problème P.

La solvabilité de ce système fera l'objet de la section suivante.

3.3 Existence et unicité de la solution

L'intérêt principal dans cette section est le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 3.1. *Sous les hypothèses (3.11) – (3.23), le problème PV admet une solution unique $(\mathbf{u}, \mathbf{C}, \alpha, \lambda)$ ayant la régularité*

$$\mathbf{u} \in H^1(0, T; E) \cap C^1(0, T; L), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; E'), \quad (3.39)$$

$$\mathbf{C} \in L^2(0, T; \mathcal{L}), \quad \text{Div} \mathbf{C} \in L^2(0, T; E'), \quad (3.40)$$

$$\alpha \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; F), \quad \dot{\alpha} \in L^2(0, T; F'), \quad (3.41)$$

$$\lambda \in W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{A}. \quad (3.42)$$

La démonstration du Théorème 3.1 sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des équations variationnelles d'évolution, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. Nous supposons dans la suite de cette section que (3.11) – (3.23) sont vérifiés, c désigne une constante positive qui dépend de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \mathbf{K}, p_\nu, p_\tau, a_\nu, a_\tau, \varepsilon_a, R$ et T , et dont la valeur peut changer d'un endroit à un autre.

Soit $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0, T; E')$. Dans la première étape, nous considérons le problème intermédiaire suivant.

Problème PV_η . Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u}_\eta : [0, T] \rightarrow E$ tel que

$$(\ddot{\mathbf{u}}_\eta(t), \mathbf{v})_{E' \times E} + (\mathcal{V}\delta(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \delta(\mathbf{v}))_{\mathcal{L}} + (\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v})_{E' \times E} \quad (3.43)$$

$$= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v})_{E' \times E} \quad \forall \mathbf{v} \in E, \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$\mathbf{u}_\eta(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \quad (3.44)$$

Lemme 3.2. Il existe une solution unique du problème PV_η qui satisfait (3.39).

Preuve. Nous définissons l'opérateur $V : E \rightarrow E'$ par

$$(V\mathbf{u}, \mathbf{v})_{E' \times E} = (\mathcal{V}\delta(\mathbf{u}), \delta(\mathbf{v}))_{\mathcal{L}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E, \quad (3.45)$$

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v} \in E$. De (3.11) et (1.7) avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$|V\mathbf{u} - V\mathbf{v}|_{E'} \leq L_{\mathcal{V}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_E, \quad (3.46)$$

Donc, nous concluons que V est continu, d'où l'application $t \rightarrow V(\mathbf{u} + t\mathbf{v})$ est continue et alors de la définition 1.1 (2), nous déduisons que V est un opérateur hémicontinu.

En outre, de (3.45), (3.11) et (1.7), nous avons

$$(V\mathbf{u} - V\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v})_{E' \times E} \geq m_{\mathcal{V}} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|_E^2, \quad (3.47)$$

donc, E est un opérateur monotone.

Nous choisissons $\mathbf{v} = \mathbf{0}_E$ dans (3.47), nous obtenons

$$(V\mathbf{u}, \mathbf{u})_{E' \times E} \geq m_{\mathcal{V}} |\mathbf{u}|_E^2 - |V\mathbf{0}_E|_{E'} |\mathbf{u}|_E.$$

Grâce à l'inégalité

$$ab \leq \frac{a^2}{2m_{\mathcal{V}}} + \frac{1}{2}m_{\mathcal{V}}b^2$$

nous avons

$$|V\mathbf{0}_E|_{E'} |\mathbf{u}|_E \leq \frac{1}{2m_{\mathcal{V}}} |V\mathbf{0}_E|_{E'}^2 + \frac{1}{2}m_{\mathcal{V}} |\mathbf{u}|_E^2,$$

donc

$$(V\mathbf{u}, \mathbf{u})_{E' \times E} \geq \frac{1}{2}m_{\mathcal{V}} |\mathbf{u}|_E^2 - \frac{1}{2m_{\mathcal{V}}} |V\mathbf{0}_E|_{E'}^2$$

et d'où

$$(V\mathbf{u}, \mathbf{u})_{E' \times E} \geq \beta |\mathbf{u}|_E^2 + \gamma, \text{ avec } \beta = \frac{1}{2}m_{\mathcal{V}} \text{ et } \gamma = -\frac{1}{2m_{\mathcal{V}}} |V\mathbf{0}_E|_{E'}^2.$$

Nous utilisons (3.46), (3.11) et (1.7), nous trouvons

$$|V\mathbf{u} - V\mathbf{0}|_{E'} \leq L_V |\mathbf{u} - \mathbf{0}|_E = L_V |\mathbf{u}|_E,$$

donc

$$|V\mathbf{u}|_{E'} - |V\mathbf{0}|_{E'} \leq L_V |\mathbf{u}|_E,$$

et d'où

$$|V\mathbf{u}|_{E'} \leq c(|\mathbf{u}|_E + 1).$$

En outre, de (3.20) et (3.29), nous avons

$$\mathbf{f} - \boldsymbol{\eta} \in L^2(0, T; E'), \quad \mathbf{v}_0 \in L.$$

Enfin, nous remarquons que toutes les conditions du Théorème 1.3 sont vérifiées, donc, nous concluons qu'il existe une fonction unique $\mathbf{v}_\eta$ qui satisfait

$$\mathbf{v}_\eta \in L^2(0, T; E) \cap C(0, T; L), \quad \dot{\mathbf{v}}_\eta \in L^2(0, T; E'), \quad (3.48)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_\eta(t) + V\mathbf{v}_\eta(t) + \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{f}(t) \text{ p.p. } t \in (0, T), \quad (3.49)$$

$$\mathbf{v}_\eta(0) = \mathbf{v}_0. \quad (3.50)$$

Nous définissons la fonction $\mathbf{u}_\eta : [0; T] \rightarrow E$ par

$$\mathbf{u}_\eta(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}_\eta(s) ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.51)$$

De (3.51) et (3.48) – (3.50), nous déduisons que $\mathbf{u}_\eta$ est une solution unique du PV_η qui satisfait la régularité (3.39). $\square$

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ des déplacements $\mathbf{u}_\eta$ obtenu dans le Lemme 3.2 et nous considérons le problème variationnel suivant.

Problème PV_λ . *Trouver le champ d'adhésion $\lambda_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que*

$$\dot{\lambda}_\eta(t) = - \left(\lambda_\eta(t) \left[a_\nu (H_\nu(u_{\eta\nu}))^2 + a_\tau |\mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau})|^2 \right] - \varepsilon_a \right)_+, \quad p.p. t \in (0, T), \quad (3.52)$$

$$\lambda_\eta(0) = \lambda_0. \quad (3.53)$$

Pour le problème PV_λ nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3. *Le problème PV_λ admet une solution unique λ_η qui satisfait*

$$\lambda_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{A}. \quad (3.54)$$

Preuve. Nous considérons l'application $A_\eta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ définie par

$$A_\eta(t, \lambda) = - \left(\lambda \left[a_\nu(H_\nu(u_{\eta\nu}(t)))^2 + a_\tau |\mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_{\eta\tau}(t))|^2 \right] - \varepsilon_a \right)_+, \quad \forall t \in [0, T], \quad \lambda \in L^2(\Gamma_3).$$

D'après (3.17) et les propriétés des opérateurs H_ν et $\mathbf{H}_\tau$ qui sont définis par (2.9) et (2.11), respectivement. A_η est de Lipschitz par rapport à λ , uniformément dans le temps. Cependant, pour tout $\lambda \in L^2(\Gamma_3)$, l'application $t \rightarrow A_\eta(t, \lambda)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 1.2), il existe $\lambda_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ solution unique du problème PV_λ . En utilisant des arguments similaires à la Remarque 2.1 avec (3.53), il vient que $0 \leq \lambda_\eta \leq 1 \quad \forall t \in [0, T]$ p.p. sur Γ_3 et d'où $\lambda_\eta \in \mathcal{A}$, ce qui conclut la preuve du Lemme 3.3. $\square$

Dans la troisième étape. Soit $\mathbf{u}_\eta$ la solution unique du PV_η et nous considérons pour le champ de température le problème variationnel suivant.

Problème PV_α . *Trouver le champ de température $\alpha_\eta : [0, T] \rightarrow F$ tel que*

$$(\dot{\alpha}_\eta(t), \vartheta)_{F' \times F} + (B_0 \alpha, \vartheta)_{F' \times F} \quad (3.55)$$

$$= (q(t) + r(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)), \vartheta)_{F' \times F} \quad \forall \vartheta \in F, \quad p.p. t \in (0, T)$$

$$\alpha_\eta(0) = \alpha_0. \quad (3.56)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.4. *Le problème PV_α admet une solution unique α_η telle que*

$$\alpha_\eta \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; F), \quad \dot{\alpha}_\eta \in L^2(0, T; F'). \quad (3.57)$$

Preuve. D'après la définition du sous-espace F , nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$F \subset L^2(\Omega) \subset F'.$$

En utilisant la définition (3.24), l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec (1.13), pour tout $\xi_1, \xi_2, \vartheta \in F$, nous avons

$$\begin{aligned} |(B_0 \xi_1 - B_0 \xi_2, \vartheta)_{F' \times F}| &\leq k_t |\nabla(\xi_1 - \xi_2)|_L |\nabla \vartheta|_L + k_e |\xi_1 - \xi_2|_{L^2(\Gamma_3)} |\vartheta|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq (k_t + k_e c_1^2) |\xi_1 - \xi_2|_F |\vartheta|_F, \end{aligned}$$

donc

$$|B_0\xi_1 - B_0\xi_2|_{F'} \leq (k_t + k_e c_1^2) |\xi_1 - \xi_2|_F,$$

ce qui montre que B_0 est continu et d'où B_0 est hémicontinu.

Ainsi, en utilisant la définition de B_0 et (3.25), nous avons pour tout $\xi_1, \xi_2 \in F$

$$\begin{aligned} (B_0\xi_1 - B_0\xi_2, \xi_1 - \xi_2)_{F' \times F} &\geq k_t |\nabla (\xi_1 - \xi_2)|_L^2 + k_e |\xi_1 - \xi_2|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &\geq k_t |\nabla (\xi_1 - \xi_2)|_L^2 \\ &\geq k_t |\xi_1 - \xi_2|_F^2, \end{aligned}$$

donc B_0 est fortement monotone.

Comme $B_0 0 = 0$, nous pouvons écrire

$$|B_0\xi|_{F'} \leq (k_t + k_e c_1^2) |\xi|_F,$$

et

$$(B_0\xi, \xi)_{F' \times F} \geq k_t |\xi|_F^2,$$

Outre, de (3.19) – (3.20), (3.23) et (3.39), nous avons

$$q + r(\dot{\mathbf{u}}_\eta) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \text{ et } \alpha_0 \in L^2(\Omega).$$

D'après le Théorème 1.3, nous concluons qu'il existe une fonction unique α_η satisfait

$$\alpha_\eta \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; F), \quad \dot{\alpha}_\eta \in L^2(0, T; F').$$

$$\dot{\alpha}_\eta(t) + B_0\alpha_\eta(t) = q(t) + r(\dot{\mathbf{u}}_\eta(t)) \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$\alpha_\eta(0) = \alpha_0.$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 3.4. □

Dans la quatrième étape, pour tout $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0, T; E')$; nous utilisons $\mathbf{u}_\eta$ et α_η , le champ des déplacements et le champ de température obtenus dans les Lemmes 3.2, 3.4. Nous construisons pour le champ des contraintes le problème suivant.

Problème PV_{C_η}. *Trouver le champ des contraintes $\mathbf{C}_\eta : [0, T] \rightarrow \mathcal{L}$ tel que*

$$\mathbf{C}_\eta(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{P}(\mathbf{C}_\eta(s), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}_\eta(s)), \alpha_\eta(s)) ds. \quad (3.58)$$

Pour le problème PV_{C_η} , nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.5. *Le problème PV_{C_η} admet une solution unique C_η qui satisfait $C_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{L})$. En plus, si u_i et C_i représentent les solutions de PV_{η_i} et $PV_{C_{\eta_i}}$, respectivement, correspondant à $\eta_i \in L^2(0, T; E')$, $i = 1, 2$, alors qu'il existe $c > 0$ telle que pour tout $t \in [0, T]$*

$$\begin{aligned} & |C_1(t) - C_2(t)|_{\mathcal{L}}^2 \\ & \leq c \left(|u_1(t) - u_2(t)|_E^2 + \int_0^t |u_1(s) - u_2(s)|_E^2 ds + \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Preuve. Soit l'opérateur $\Lambda_\eta : L^2(0, T; \mathcal{L}) \rightarrow L^2(0, T; \mathcal{L})$ défini par

$$\Lambda_\eta C(t) = \mathcal{E}\delta(u_\eta(t)) + \int_0^t \mathcal{P}(C(s), \delta(u_\eta(s)), \alpha_\eta(s)) ds. \quad (3.60)$$

Pour tout $C_1, C_2 \in L^2(0, T; \mathcal{L})$, nous utilisons (3.60) et (3.13) afin de voir que pour tout $t \in [0, T]$

$$|\Lambda_\eta C_1(t) - \Lambda_\eta C_2(t)|_{\mathcal{L}}^2 \leq c \int_0^t |C_1(s) - C_2(s)|_{\mathcal{L}}^2 ds.$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|\Lambda_\eta^m C_1 - \Lambda_\eta^m C_2|_{0,2,\mathcal{L}}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} |C_1 - C_2|_{0,2,\mathcal{L}}^2,$$

nous déduisons que si m suffisamment grand, l'opérateur Λ_η^m est un contractant sur l'espace de Banach $L^2(0, T; \mathcal{L})$, donc, Λ_η^m possède un point fixe unique $C_\eta \in L^2(0, T; \mathcal{L})$ et par conséquent C_η est le point fixe unique de Λ_η .

En outre, puisque C_η est le point fixe unique de Λ_η , donc

$$\Lambda_\eta C_\eta = C_\eta.$$

Nous combinons (3.60) et l'égalité précédente pour constater que C_η est une solution unique de PV_{C_η} .

Soient $\eta_1, \eta_2 \in L^2(0, T; E')$ et pour $i = 1, 2$, nous adoptons les notations $u_{\eta_i} = u_i$, $C_{\eta_i} = C_i$ et $\alpha_{\eta_i} = \alpha_i$. En utilisant (3.59), nous avons

$$C_i(t) = \mathcal{E}\delta(u_i(t)) + \int_0^t \mathcal{P}(C_i(s), \delta(u_i(s)), \alpha_i(s)) ds. \quad (3.61)$$

d'après (3.11) – (3.13), nous voyons que

$$|C_1(t) - C_2(t)|_{\mathcal{L}}^2$$

$$\begin{aligned} &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_E^2 + \int_0^t |\mathbf{C}_1(s) - \mathbf{C}_2(s)|_{\mathcal{L}}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_E^2 ds + \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right). \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 1.4 de Granwall, pour voir que

$$\begin{aligned} &|\mathbf{C}_1(t) - \mathbf{C}_2(t)|_{\mathcal{L}}^2 \\ &\leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_E^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_E^2 ds + \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right). \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant (3.58), (3.12) – (3.13) et la régularité de $\mathbf{C}_\eta$, $\mathbf{u}_\eta$ et α_η , il s'ensuit que

$$\mathbf{C}_\eta \in W^{1,2}(0, T; \mathcal{L}).$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 3.5. □

Maintenant, pour tout $t \in [0, T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda : L^2(0, T; E') \rightarrow L^2(0, T; E') \quad (3.62)$$

défini pour tout $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0, T; E')$ par l'égalité

$$(\Lambda \boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v})_{E' \times E} = (\mathbf{C}_\eta(t), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}))_{\mathcal{L}} + a(\lambda_\eta(t), \mathbf{u}_\eta(t), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in E, \quad (3.63)$$

Ici, pour tout $\boldsymbol{\eta} \in L^2(0, T; E')$; $\mathbf{u}_\eta$, λ_η et α_η représentent le champ des déplacements, le champ d'adhésion et le champ de température obtenus dans les Lemmes 3.2, 3.3 et 3.4 qui vérifie (3.39) et (3.41) – (3.42).

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.6. *L'opérateur Λ a un point fixe unique $\boldsymbol{\eta}^* \in L^2(0, T; E')$, tel que $\Lambda \boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}^*$.*

Preuve. Soient $t \in [0, T]$ et $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2 \in L^2(0, T; E')$. Nous utilisons les notations $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \dot{\mathbf{u}}_i = \mathbf{v}_i$, $\lambda_{\eta_i} = \lambda_i$, $\alpha_{\eta_i} = \alpha_i$ et $\mathbf{C}_{\eta_i} = \mathbf{C}_i$, pour $i = 1, 2$. En utilisant (3.63), (3.30) et (3.17), nous avons

$$\begin{aligned} &|\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{E'}^2 \leq c (|\mathbf{C}_1(t) - \mathbf{C}_2(t)|_{\mathcal{L}}^2 \\ &\quad + |p_\nu(u_{1\nu}(t)) - p_\nu(u_{2\nu}(t))|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + |\lambda_1^2(t) H_\nu(u_{1\nu}(t)) - \lambda_2^2(t) H_\nu(u_{2\nu}(t))|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &\quad + |p_\tau(\lambda_1(t)) \mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_{1\tau}(t)) - p_\tau(\lambda_2(t)) \mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_{2\tau}(t))|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2). \end{aligned}$$

En employant (3.14) – (3.15) et (1.8) l'inégalité de trace de Sobolev avec (3.59) et les définitions de H_ν et $\mathbf{H}_\tau$, nous avons

$$\begin{aligned} & |\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{E'}^2 \\ & \leq c \left(|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_E^2 + \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_E^2 ds \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds + |\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

D'autre part, de (3.43), nous trouvons

$$\begin{aligned} & (\ddot{\mathbf{u}}_1(t) - \ddot{\mathbf{u}}_2(t), \dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t))_{E' \times E} \\ & + (\mathcal{V} \boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}_1(t)) - \mathcal{V} \boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}_2(t)), \boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}_1(t)) - \boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}_2(t)))_{\mathcal{L}} \\ & = (\boldsymbol{\eta}_2(t) - \boldsymbol{\eta}_1(t), \dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t))_{E' \times E}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Nous intégrons par rapport au temps avec la condition initiale $\dot{\mathbf{u}}_1(0) = \dot{\mathbf{u}}_2(0) = \dot{\mathbf{u}}_0$, et utilisons (3.11), (3.16) et (3.28) pour constater que

$$\int_0^t (\ddot{\mathbf{u}}_1(s) - \ddot{\mathbf{u}}_2(s), \dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s))_{E' \times E} ds = \frac{1}{2} \rho |\dot{\mathbf{u}}_1(t) - \dot{\mathbf{u}}_2(t)|_L^2 \geq 0,$$

et

$$\int_0^t (\mathcal{V} \boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}_1(s)) - \mathcal{V} \boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}_2(s)), \boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}_1(s)) - \boldsymbol{\delta}(\dot{\mathbf{u}}_2(s)))_{\mathcal{L}} ds \geq m_{\mathcal{V}} \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_E^2 ds,$$

donc

$$m_{\mathcal{V}} \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_E^2 ds \leq - \int_0^t (\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s), \dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s))_{E' \times E} ds.$$

En utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{a^2}{2m_{\mathcal{V}}} + \frac{1}{2}m_{\mathcal{V}}b^2$, pour tout $t \in [0, T]$, nous avons

$$\int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_E^2 ds \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{E'}^2 ds. \quad (3.66)$$

Maintenant, nous intégrons (3.52) avec la condition initiale (3.53) pour écrire

$$\lambda_i(t) = \alpha_0 - \int_0^t (\lambda_i(s) [a_\nu(H_\nu(u_{i\nu}(s)))^2 + a_\tau |\mathbf{H}_\tau(u_{i\tau}(s))|^2] - \varepsilon_a)_+ ds$$

et d'où

$$\begin{aligned} |\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \left(\int_0^t |\lambda_1(s) (H_\nu(u_{1\nu}(s)))^2 - \lambda_2(s) (H_\nu(u_{2\nu}(s)))^2|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t |\lambda_1(s) |\mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_{1\tau}(s))|^2 - \lambda_2(s) |\mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_{2\tau}(s))|^2|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right). \end{aligned}$$

En utilisant les définitions de H_ν et $\mathbf{H}_\tau$ avec l'écriture $\lambda_1 = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2$ et l'inégalité $|u_r| \leq |\mathbf{u}|$ ($r = \nu, \tau$) $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^d$ pour trouver

$$\begin{aligned} &|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &\leq c \int_0^t |\lambda_1(s) - \lambda_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 ds + c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2 ds. \end{aligned}$$

En combinant cette inégalité avec le Lemme 1.4 de Gronwall, nous pouvons écrire

$$|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_{L^2(\Gamma_3)^d}^2 ds,$$

et d'après (1.8), nous avons

$$|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t |\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)|_E^2 ds. \quad (3.67)$$

En outre, de (3.55), nous déduisons que

$$\begin{aligned} &(\dot{\alpha}_1(t) - \dot{\alpha}_2(t), \alpha_1(t) - \alpha_2(t))_{F' \times F} + (B_0 \alpha_1(t) - B_0 \alpha_2(t), \alpha_1(t) - \alpha_2(t))_{F' \times F} \\ &= (r(\dot{\mathbf{u}}_1(t)) - r(\dot{\mathbf{u}}_2(t)), \alpha_1(t) - \alpha_2(t))_{F' \times F}. \end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité précédente par rapport à t avec (3.24), (1.14) et les conditions initiales

$$\alpha_1(0) = \alpha_0 \text{ et } \alpha_2(0) = \alpha_0,$$

et en utilisant l'égalité

$$\int_0^t (\dot{\alpha}_1(s) - \dot{\alpha}_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{F' \times F} ds = \frac{1}{2} |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2,$$

et l'inégalité

$$\int_0^t (B_0 \alpha_1(s) - B_0 \alpha_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{F' \times F} ds \geq 0,$$

nous obtenons

$$\frac{1}{2} |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq \int_0^t (r(\dot{\mathbf{u}}_1(s)) - r(\dot{\mathbf{u}}_2(s)), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{L^2(\Omega)} ds.$$

De (3.23), il vient alors que

$$\begin{aligned} & |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq c \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_E |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{L^2(\Omega)} ds, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & |\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq c \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_E^2 ds + c \int_0^t |\alpha_1(s) - \alpha_2(s)|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Nous combinons l'inégalité précédente avec le Lemme 1.4 de Gronwall pour écrire

$$|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_E^2 ds ds. \quad (3.68)$$

Nous savons que

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \dot{\mathbf{u}}_i(s) ds$$

et

$$\mathbf{u}_1(0) = \mathbf{u}_2(0) = \mathbf{u}_0,$$

donc

$$|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)|_E^2 \leq c \int_0^t |\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)|_E^2 ds. \quad (3.69)$$

Alors, depuis (3.64) et (3.66) – (3.69), nous trouvons

$$|\Lambda \boldsymbol{\eta}_1(t) - \Lambda \boldsymbol{\eta}_2(t)|_{E'}^2 \leq c \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{E'}^2 ds.$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, nous obtenons

$$|\Lambda^m \boldsymbol{\eta}_1 - \Lambda^m \boldsymbol{\eta}_2|_{0,2,E'}^2 \leq \frac{(cT)^m}{m!} |\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_2|_{0,2,E'}^2.$$

Ce qui implique que pour m suffisamment grand, l'opérateur Λ^m est un contractant sur l'espace de Banach $L^2(0, T; E')$, donc, Λ possède un point fixe unique $\boldsymbol{\eta}^* \in L^2(0, T; E')$.

□

Enfin, nous pouvons établir la démonstration du Théorème 3.1.

Démonstration du Théorème 3.1.

Existence. Soit $\boldsymbol{\eta}^* \in L^2(0, T; E')$ le point fixe de Λ qui est défini par (3.63), nous adoptons les notations : $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\eta^*}$ est la solution de PV_{η} pour $\eta = \eta^*$, $\lambda = \lambda_{\eta^*}$ est la solution de PV_{λ} pour $\eta = \eta^*$ et $\alpha = \alpha_{\eta^*}$ est la solution de PV_{α^*} pour $\eta = \eta^*$. Soit $\mathbf{C}_{\eta^*}$ la solution du problème $PV_{\mathbf{C}_{\eta}}$ pour $\eta = \eta^*$, nous posons

$$\mathbf{C} = \mathcal{V}\delta(\dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{C}_{\eta^*}$$

En utilisant (3.58), (3.63) et en gardant à l'esprit que $\Lambda\boldsymbol{\eta}^* = \boldsymbol{\eta}^*$, trouver que le quadruplet $(\mathbf{u}, \mathbf{C}, \alpha, \lambda)$ est une solution du problème PV. Cette solution a la régularité exprimée dans (3.39), (3.41) – (3.42) et qui découle des régularités de la solution des problèmes PV_{η} , PV_{λ} , PV_{α} et $PV_{\mathbf{C}_{\eta}}$. De plus, il résulte de (3.39), (3.11) et (3.13) que $\mathbf{C} \in L^2(0, T; \mathcal{L})$. Choisissons maintenant $\mathbf{v} = \pm \mathbf{w}$ dans (3.35), où $\mathbf{w} \in C_0^\infty(\Omega)$; et utilisons (3.16) avec (3.30) pour trouver

$$\text{Div} \mathbf{C}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \rho \ddot{\mathbf{u}}(t) \text{ p.p } t \in (0, T).$$

Maintenant, les hypothèses (3.16), (3.18), le fait que $\ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; E')$ et l'égalité ci-dessus impliquent que $\text{Div} \mathbf{C} \in L^2(0, T; E')$, ce qui montre que $\mathbf{C}$ satisfait (3.40).

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ_{η} qui est défini par (3.60) et de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ qui est défini par (3.63) et l'unicité de solution des problèmes PV_{η} , PV_{λ} , PV_{α} et $PV_{\mathbf{C}_{\eta}}$. $\square$

Chapitre 4

Approximation par éléments finis du problème

Dans ce chapitre, nous considérerons une approximation numérique du problème variationnel PV, basée sur une discrétisation temporelle et spatiale. Pour ces diagrammes discrétisés, nous obtiendrons un résultat d'estimation d'erreur.

4.1 Formulation variationnelle approchée

Soit $[0, T]$ l'intervalle de temps, avec $T > 0$ arbitraire mais fixé. Ainsi, soit N , un entier positif suffisamment grand; nous définissons la taille du pas de temps $k = \frac{T}{N}$ et nous considérons la discrétisation temporelle uniforme

$$t_n = nk, \quad 0 \leq n \leq N,$$

Pour une fonction continue $f(t)$ à valeurs dans un espace fonctionnel, nous écrivons $f_j = f(t_j)$, $0 \leq j \leq N$. Pour la discrétisation spatiale, nous considérons un domaine polygonal Ω .

Pour la discrétisation spatiale, nous considérons un domaine polygonal Ω . $\dot{f}_n = f(t_n)$ est la dérivée de f au nœud t_n , peut être approximée par la différence divisée vers l'arrière, $\partial f_n = (f_n - f_{n-1})/k$, et pour la discrétisation des intégrales du Problème PV, nous utilisons la méthode des rectangles

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(s) ds = k f_j.$$

Soient $\mathcal{L}^h$ et M^h les espaces des éléments finis des constantes par morceaux. Les espaces $\mathcal{L}$ et $L^2(\Gamma_3)$ sont approximés par $\mathcal{L}^h$ et M^h , respectivement.

Les espaces E et F sont approximés respectivement par les espaces des éléments finis suivants :

$$E^h = \left\{ \mathbf{v}^h \in [C(\overline{\Omega})]^d \mid \mathbf{v}^h|_K \in [P_1(K)]^d \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \ \mathbf{v}^h = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\},$$

$$F^h = \left\{ \vartheta^h \in C(\overline{\Omega}) \mid \vartheta^h|_K \in P_1(K) \ \forall K \in \mathcal{T}_h, \ \vartheta^h = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \right\},$$

où $\mathcal{T}_h$ est un élément issu de la triangularisation de $\overline{\Omega}$, $P_1(K)$ est l'espace des polynômes de degré plus petit ou égal à un sur K et h désigne le paramètre de discrétisation spatiale qui est défini comme

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K),$$

où $\text{diam}(K) = \max \{|x - y|; x, y \in K\}$.

Pour tout $\mathbf{D} \in \mathcal{L}$, nous notons $\mathcal{P}_{\mathcal{L}^h} \mathbf{D}$ sa projection orthogonale des éléments finis sur $\mathcal{L}^h$,

$$(\mathcal{P}_{\mathcal{L}^h} \mathbf{D}, \mathbf{D}^h)_{\mathcal{H}} = (\mathbf{D}, \mathbf{D}^h)_{\mathcal{L}} \ \forall \mathbf{D}^h \in \mathcal{L}^h.$$

Il est commode d'introduire le champ de vitesse $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t)$ donc $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0 + \int_0^t \mathbf{v}(s) ds$, $t \in [0, T]$.

Soit $(\mathbf{u}_0^h, \mathbf{v}_0^{hk}, \mathbf{C}_0^h, \alpha_0^h, \lambda_0^h)$ une approximation par des éléments finis de $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{C}_0, \alpha_0, \lambda_0)$ et

$$\mathbf{C}_0 = \mathcal{V} \delta(\mathbf{v}_0) + \mathcal{E} \delta(\mathbf{u}_0), \quad (4.1)$$

avec

$$\mathbf{C}_0^h = \mathcal{P}_{\mathcal{L}^h} \mathcal{V} \delta(\mathbf{v}_0^h) + \mathcal{P}_{\mathcal{L}^h} \mathcal{E} \delta(\mathbf{u}_0^h). \quad (4.2)$$

Nous considérons maintenant le problème variationnel approché suivant.

Problem $\mathbf{PV}^{hk}$. Trouver un champ des vitesses discret $\mathbf{v}^{hk} = \{\mathbf{v}_n^{hk}\}_{n=1}^N \subset E^h$, un champ des contraintes discret $\mathbf{C}^{hk} = \{\mathbf{C}_n^{hk}\}_{n=1}^N \subset \mathcal{L}^h$, un champ de température discret $\alpha^{hk} = \{\alpha_n^{hk}\}_{n=1}^N \subset F^h$ et une fonction d'adhésion discrète $\lambda^{hk} = \{\lambda_n^{hk}\}_{n=1}^N \subset M^h$ tels que pour $n \geq 1$,

$$\mathbf{C}_n^{hk} = \mathcal{P}_{\mathcal{L}^h} \mathcal{V} \delta(\mathbf{v}_n^{hk}) + \mathcal{P}_{\mathcal{L}^h} \mathcal{E} \delta(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}) + k \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{P}_{\mathcal{L}^h} \mathcal{W}_j^{hk} \quad (4.3)$$

$$(\rho \partial \mathbf{v}_n^{hk}, \mathbf{v}^h)_L + (\mathbf{C}_n^{hk}, \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{L}} + a(\lambda_n^{hk}, \mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}^h) = (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h)_{E' \times E} \quad \forall \mathbf{v}^h \in E^h, \quad (4.4)$$

$$(\partial \alpha_n^{hk}, \vartheta^h)_{E' \times E} + (B_0 \alpha_n^{hk}, \vartheta^h)_{F' \times F} = (r(\mathbf{v}_n^{hk}) + q, \vartheta^h)_{F' \times F} \quad \forall \vartheta^h \in F^h, \quad (4.5)$$

$$\lambda_n^{hk} = \lambda_0 - k \sum_{j=0}^{n-1} \left(\lambda_n^{hk} \left[a_\nu (H_\nu(u_{j\nu}^{hk}))^2 + a_\tau |\mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}_{j\tau}^{hk})|^2 \right] - \varepsilon_a \right)_+, \quad (4.6)$$

où

$$\mathbf{u}_n^{hk} = \mathbf{u}_0^h + k \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j^{hk} \quad n \geq 1, \quad (4.7)$$

et

$$\mathcal{W}_j^{hk} = \mathcal{P}(\mathbf{C}_j^{hk} - \nu \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}_j^{hk}), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}_j^{hk}), \alpha_j^{hk})$$

Nous utilisons aussi les notations

$$\begin{cases} \mathcal{W}(s) = \mathcal{P}(\mathbf{C}(s) - \nu \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}(s)), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)), \\ \mathcal{W}_j = \mathcal{P}(\mathbf{C}_j - \nu \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}_j), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}_j), \alpha_j). \end{cases}$$

Maintenant, nous annonçons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Théorème 4.1. *Supposons que les conditions énoncées dans le Théorème 3.1 soient satisfaites. Alors le problème PV^{hk} a une solution unique.*

Preuve. Nous montrons qu'avec $\{(\mathbf{C}_j^{hk}, \mathbf{v}_j^{hk}, \alpha_j^{hk}, \lambda_j^{hk})\}_{j \leq n-1} \subset \mathcal{L}^h \times E^h \times F^h \times M^h$ connu, (4.3) – (4.6) détermine de manière unique $(\mathbf{C}_n^{hk}, \mathbf{v}_n^{hk}, \alpha_n^{hk}, \lambda_n^{hk}) \subset \mathcal{L}^h \times E^h \times F^h \times M^h$. Étant donné $\{(\mathbf{u}_j^{hk}, \lambda_j^{hk})\}_{j \leq n-1} \in E^h \times M^h$, $\lambda_n^{hk} \in M^h$ est calculé à partir de (4.6). En combinant (4.3) et (4.4), nous obtenons

$$(\rho \partial \mathbf{v}_n^{hk}, \mathbf{v}^h)_L + (\mathcal{P}_{\mathcal{L}^h} \nu \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}_n^{hk}), \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}^h))_{\mathcal{L}} = (\mathbf{s}_n, \mathbf{v}^h)_{E' \times E} \quad \forall \mathbf{v}^h \in E^h, \quad (4.8)$$

où

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}_n, \mathbf{v}^h)_{E' \times E} &= (\mathbf{f}_n, \mathbf{v}^h)_{E' \times E} - a(\lambda_n^{hk}, \mathbf{u}_{n-1}^{hk}, \mathbf{v}^h) \\ &\quad - \left(\mathcal{P}_{\mathcal{L}^h} \mathcal{E} \boldsymbol{\delta}(\mathbf{u}_{n-1}^{hk}) + k \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{P}_{\mathcal{L}^h} \mathcal{W}_j^{hk}, \boldsymbol{\delta}(\mathbf{v}^h) \right)_{\mathcal{L}}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Par un résultat standard sur les équation variationnelles d'évolution, il existe un élément unique $\mathbf{v}_n^{hk} \in E^h$ satisfaisant (4.8) – (4.9) et nous calculons $\mathbf{C}_n^{hk}$ à partir de (4.3). Enfin, un analogue discret du Lemme 3.4 montre que (4.5) a une solution unique $\alpha_n^{hk} \in F^h$.

□

Nous passons maintenant à l'analyse de l'erreur entre les solutions des Problèmes PV et PV^{hk} .

4.2 Estimation d'erreur

Tout d'abord, nous supposons les hypothèses de régularité de la solution suivantes :

$$(\mathbf{v}, \mathbf{C}, \lambda) \in C(0, T; E \times \mathcal{L} \times F), \quad (4.10)$$

$$(\mathbf{v}, \alpha) \in C(0, T; H^2(\Omega)^d \times H^2(\Omega)) \cap H^2(0, T; L \times L^2(\Omega)), \quad (4.11)$$

$$\mathbf{C} \in C(0, T; H^1(\Omega)^{d \times d}), \quad \lambda \in C^1(0, T; H^2(\Gamma_3)), \quad (4.12)$$

$$\mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega)^d. \quad (4.13)$$

Dans ce qui suit, c désigne une constante positive générique dont la valeur peut changer d'une occurrence à l'autre, mais est indépendante des paramètres de discrétisation h et k .

Corollaire 4.2. *Supposons que (4.10)–(4.13) soit vraie. Soient $(\mathbf{C}, \mathbf{v}, \alpha, \lambda)$ et $(\mathbf{C}_n^{hk}, \mathbf{v}_n^{hk}, \alpha_n^{hk}, \lambda_n^{hk})$, les solutions des problèmes PV et PV^{hk} , respectivement. Alors, les estimations d'erreur suivantes sont vraies pour tout $\mathbf{v}^h = \{\mathbf{v}_j^h\}_{j=1}^{j=N} \subset E^h$ et $\vartheta^h = \{\vartheta_j^h\}_{j=1}^{j=N} \subset F^h$:*

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & \max_{1 \leq n \leq N} \left(|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}|_L^2 + |\alpha_n - \alpha_n^{hk}|_{L^2(\Omega)}^2 + |\lambda_n - \lambda_n^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right) \\ & k \left(\sum_{j=1}^{j=N} |\mathbf{C}_j - \mathbf{C}_j^{hk}|_{\mathcal{L}}^2 + \sum_{j=1}^{j=N} |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^{hk}|_E^2 + \sum_{j=1}^{j=N} |\alpha_j - \alpha_j^{hk}|_F^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.14) \\ & \leq \left\{ \begin{aligned} & c \left(|\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h|_E^2 + |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_E^2 + |\alpha_0 - \alpha_0^h|_{L^2(\Omega)}^2 + |\lambda_0 - \lambda_0^h|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + |(I - \mathcal{P}_{\mathcal{L}^h}) \mathbf{C}_0|_{\mathcal{L}}^2 \right) \\ & + c \left(k \sum_{j=1}^{j=N} |(I - \mathcal{P}_{\mathcal{L}^h}) \mathbf{C}_n|_{\mathcal{L}}^2 + \max_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^h|_L^2 + \max_{1 \leq n \leq N} |\alpha_n - \vartheta_n^h|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & + \frac{c}{k} \sum_{j=1}^{j=N-1} |\alpha_j - \vartheta_j^h - (\alpha_{j+1} - \vartheta_{j+1}^h)|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{c}{k} \sum_{j=1}^{j=N-1} |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)|_L^2 \\ & + ck^2 + ck \sum_{j=1}^{j=N} \left[|\dot{\alpha}_j - \partial \alpha_j|_{L^2(\Omega)}^2 + |\alpha_j - \vartheta_j^h|_F^2 + |\dot{\mathbf{v}}_j - \partial \mathbf{v}_j|_L^2 + |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^h|_E^2 \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Preuve. La preuve est faite en utilisant exactement les mêmes arguments et étapes utilisés dans la preuve du Théorème 3.2 dans la Référence [13]. $\square$

Théorème 4.3. *Supposons que (4.10)–(4.13) soit vérifiée. Soient $(\mathbf{C}, \mathbf{v}, \alpha, \lambda)$ et $(\mathbf{C}_n^{hk}, \mathbf{v}_n^{hk}, \alpha_n^{hk}, \lambda_n^{hk})$, les solutions des problèmes PV et PV^{hk} , respectivement. La convergence de l'algorithme est obtenue ; autrement dit, il existe une constante $c > 0$, indépendante des paramètres de discrétisation h et k , telle que*

$$\left\{ \begin{aligned} & \max_{0 \leq n \leq N} \left(|\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^{hk}|_L + |\alpha_n - \alpha_n^{hk}|_{L^2(\Omega)} + |\lambda_n - \lambda_n^{hk}|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \\ & + \left(k \sum_{j=1}^N |\mathbf{C}_j - \mathbf{C}_j^{hk}|_{\mathcal{L}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(k \sum_{j=1}^N |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^{hk}|_E^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & + \left(k \sum_{j=1}^N |\alpha_j - \alpha_j^{hk}|_F^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \leq c(h + k). \quad (4.15)$$

Preuve. On note d'abord $\Pi_E^h : H^2(\Omega)^d \rightarrow E^h$, $\Pi_F^h : H^2(\Omega) \rightarrow F^h$ et $\Pi_{L^2(\Gamma_3)}^h : H^2(\Gamma_3) \rightarrow M^h$ l'opérateur d'interpolation par éléments finis correspondant. On choisit ensuite dans (4.14) les éléments

$$\mathbf{u}_0^h = \Pi_E^h \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v}_0^h = \Pi_E^h \mathbf{v}_0, \quad \alpha_0^h = \Pi_F^h \alpha_0, \quad \lambda_0^h = \Pi_{L^2(\Gamma_3)}^h \lambda_0.$$

et

$$\mathbf{v}_j^h = \Pi_E^h \mathbf{v}_j, \quad \vartheta_j^h = \Pi_F^h \alpha_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Sous les hypothèses de régularité de la solution (4.10)–(4.13), nous pouvons appliquer des estimations d'erreur d'interpolation par éléments finis standard (voir par exemple [3, 4, 10, 21]) pour voir que

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^h|_L &\leq ch^2 |\mathbf{v}|_{C(0,T;H^2(\Omega)^d)}, \quad \max_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_n^h|_E \leq ch |\mathbf{v}|_{C(0,T;H^2(\Omega)^d)}, \\ \max_{1 \leq n \leq N} |\alpha_n - \vartheta_n^h|_{L^2(\Omega)} &\leq ch^2 |\alpha|_{C(0,T;H^2(\Omega))}, \quad \max_{1 \leq n \leq N} |\alpha_n - \vartheta_n^h|_F \leq ch |\alpha|_{C(0,T;H^2(\Omega))}, \\ \max_{1 \leq n \leq N} |\mathbf{C}_n - \mathcal{P}_{\mathcal{L}^h} \mathbf{C}_n|_{\mathcal{L}} &\leq ch |\mathbf{C}|_{C(0,T;H^1(\Omega)^{d \times d})}. \end{aligned}$$

De plus, à partir de la définition de l'opérateur d'interpolation par éléments finis Π^h , il résulte que

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^h|_E &\leq ch |\mathbf{v}_0|_{H^2(\Omega)^d}, \quad |\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h|_E \leq ch |\mathbf{u}_0|_{H^2(\Omega)^d}, \\ |\alpha_0 - \alpha_0^h|_{L^2(\Omega)} &\leq ch^2 |\alpha_0|_{H^2(\Omega)}, \quad |\lambda_0 - \lambda_0^h|_{L^2(\Gamma_3)} \leq ch^2 |\lambda_0|_{H^2(\Gamma_3)}, \\ |\mathbf{C}_0 - \mathcal{P}_{\mathcal{L}^h} \mathbf{C}_0|_{\mathcal{L}} &\leq ch |\mathbf{C}_0|_{H^1(\Omega)^{d \times d}}. \end{aligned}$$

En utilisant la régularité des solutions (4.10) – (4.12) pour voir que

$$k \sum_{j=1}^{j=N} |\dot{\mathbf{v}}_j - \partial \mathbf{v}_j|_L^2 \leq ck^2 |\mathbf{v}|_{H^2(0,T;L)}^2, \quad k \sum_{j=1}^{j=N} |\dot{\alpha}_j - \partial \alpha_j|_{L^2(\Omega)}^2 \leq ck^2 |\alpha|_{H^2(0,T;L^2(\Omega))}^2$$

nous constatons que (voir [10] pour plus de détails)

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{j=N-1} |\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_j^h - (\mathbf{v}_{j+1} - \mathbf{v}_{j+1}^h)|_L^2 &\leq ch^2 |\mathbf{v}|_{H^1(0,T;E)}^2, \\ \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{j=N-1} |\alpha_j - \vartheta_j^h - (\alpha_{j+1} - \vartheta_{j+1}^h)|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq ch^2 |\alpha|_{H^1(0,T;F)}^2. \end{aligned}$$

Finalement, en combinant les estimations précédentes et (4.14), cela conduit à (4.15). $\square$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons traité un problème de contact sans frottement entre un corps déformable et une fondation déformable à compliance normale. Nous avons considéré le cas des matériaux électroélastiques. Dans un premier temps, nous avons proposé une formulation variationnelle du modèle de contact. Ensuite, nous avons obtenu un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. Pour ce faire, nous avons utilisé des arguments issus d'équations variationnelles d'évolution et de point fixe. Nous avons considéré une approximation numérique du problème de contact, utilisant une discrétisation temporelle uniforme et une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis. À l'issue de cette discrétisation, nous avons démontré l'existence et l'unicité du problème variationnel approché. Enfin, pour ce schéma, nous avons obtenu un résultat d'estimation d'erreur sous hypothèses de régularité de la solution.

Bibliographie

- [1] O.Chau, J. R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea. Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion, J. Comput. Appl. Math. 159 (2003), 431-465.
- [2] O.Chau, M. Shillor and M. Sofonea. Dynamic frictionless contact with adhesion, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 55 (2004), 32-47.
- [3] P. G. CIARLET. The Finite Element Method for Elliptic Problems. North Holland, Amsterdam, 1978.
- [4] P. G. CIARLET. Basic error estimates for elliptic problems. Handbook of Numerical Analysis, v. 2, p. 17-351, 1991.
- [5] M. Cocu and R. Rocca. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion, Math. Model. Num. Anal. 34 (2000), 981-1001.
- [6] J. R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea. Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion, Math. Comput. Modelling 37 (2003), 1317-1333.
- [7] M. Frémond. Equilibre des structures qui adhèrent à leur support, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 295 (1982), 913-916.
- [8] M. Frémond. Adhérence des solides, J. Mécanique Théorique et Appliquée 6 (1987), 383-407.
- [9] W. Han, K. L. Kuttler, M. Shillor and M. Sofonea. Elastic beam in adhesive contact, Int. J. Solids Structures 39 (2002), 1145-1164.

- [10] W. Han, M. Shillor, M. Sofonea. Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic problem with normal compliance, friction and damage. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 137, p. 377–398, 2001.
- [11] W. Han and M. Sofonea. On a dynamic contact problem for elastic-visco-plastic materials, *Applied Numerical Mathematics* 57 (2007), 498-509
- [12] L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea. A viscoelastic bilateral frictionless contact problem with adhesion, *Appl. Anal.* 80 (2001), 233-255.
- [13] M. S. Mesai Aoun, B. Dehda and B. Douib. Numerical study of a thermo-elasto-viscoplastic contact problem with adhesion using a hybrid method. *Studies in Engineering and Exact Sciences, Curitiba*, v.5, n.2, p. 01-28, 2024.
- [14] F. Patrulescu. A mixed variational formulation of a contact problem with adhesion. *Appl. Anal.* 97 (8), (2018), 1246-1260.
- [15] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocu. A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.* 177 (1999), 383-399.
- [16] J. Rojek and J. J. Telega. Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. I : General developments, *J. Theor. Appl. Mech.* 39 (2001), 655-677.
- [17] M. Selmani and L. Selmani. A dynamic frictionless contact problem with adhesion and damage, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* 55 (2007), 17-34.
- [18] M. Selmani and L. Selmani. On a frictional contact problem with adhesion in piezoelectricity, *Bull. Belg. Math. Simon Stevin Volume* 23 (2016), 263-284
- [19] M. Selmani and M. Sofonea. Viscoelastic frictionless contact problem with adhesion. *J. Inequal. Appl.* 2006, 36130 (2006).
- [20] M. Shillor, M. Sofonea and J. J. Telega. Models and analysis of quasistatic contact, variational approach, *Lect. Notes Phys.* 655, Springer, Berlin Heidelberg 2004.
- [21] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor. *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*. New York : Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [22] M. Sofonea and A. Matei. Elastic antiplane contact problem with adhesion, *J. of Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 53 (2002), 962-972.

Abstract: In this memoir, we are interested in the modeling, the variational analysis and numerical analysis of a contact problem, for thermo-elasto-viscoplastics materials. The first part of this memoir concern some preliminary results, in particular the mathematical and mechanical tools necessary to carry out the continuation of this work. The second part is devoted to the study of a contact problem under various conditions of contact without friction. For this problem, we introduce strong formulation and variational formulation. Then, we obtain existence and uniqueness results for weak solutions. Finally, we propose a numerical approximation of a problem using a discretized scheme. For this scheme, we obtain an error estimation result.

Key words: thermo-elasto-viscoplastic, contact without friction, normal compliance, variational equation of evolution, error estimate.

Résumé: Dans ce mémoire, nous nous intéressons à la modélisation, à l'analyse variationnelle et à l'analyse numérique d'un problème de contact, pour les matériaux thermo-élasto-viscoplastiques. La première partie de ce mémoire concerne quelques résultats préliminaires, notamment les outils mathématiques et mécaniques nécessaires pour mener à bien la suite de ces travaux. La deuxième partie est consacrée à l'étude d'un problème de contact dans diverses conditions de contact sans frottement. Pour ce problème, nous introduisons la formulation forte et la formulation variationnelle. Ensuite, nous obtenons un résultat d'existence et d'unicité pour la solution faible. Enfin, nous proposons une approximation numérique du problème à l'aide d'un schéma discrétisé. Pour ce schéma, nous obtenons un résultat d'estimation d'erreur.

Mots clés: thermo-élasto-viscoplastique, contact sans frottement, compliance normale, équation variationnelle d'évolution, estimation d'erreur.

ملخص: في هذه المذكرة، نحن مهتمون بالتمذجة والتحليل التبايري والتحليل العددي لمسألة اتصال للمواد الحرارية البلاستيكية المرنة اللزجة. يتعلق الجزء الأول من هذه المذكرة ببعض النتائج الأولية، ولا سيما الأدوات الرياضية والميكانيكية اللازمة لمواصلة العمل. أما الجزء الثاني فقد خصص لدراسة مسألة تلامس في ظل ظروف التلامس المختلفة دون احتكاك. لهذه المسألة، نقدم صياغة قوية وصياغة تبايرية. ومن ثم نحصل على نتائج الوجود والتفرد للحل الضعيف. وأخيراً، نقترح تقريب عددي للمسألة باستخدام مخطط متقطع. بالنسبة لهذا المخطط، نحصل على نتيجة تقدير الخطأ.

كلمات مفتاحية: المرونة الحرارية البلاستيكية اللزجة، الاتصال بدون احتكاك، الامتثال الطبيعي، المساواة التبايرية التحولية، تقدير الخطأ.