



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة الشهيد حمه لخضر الوادي  
كلية العلوم الدقيقة  
قسم الفيزياء

رقم الترتيب:  
رقم التسلسل:

مذكرة تخرج مقدمة لنيل شهادة

مستراكمادي

مجال: علوم المادة

فرع: الفيزياء

تخصص: فيزياء تطبيقية إشعاع و طاقة

من إعداد: فطحيزة عمار سومية

الموضوع:

دراسة خصائص النقل في البلازما:

الناقلية الكهربائية ضمن تقريب زمن الإسترخاء RTA

نوقشت يوم: 2019/06/20

أمام لجنة المناقشة المكونة من:

رئيس

مناقش

مؤطر

أستاذة مساعدة -أ-

أستاذة مساعدة -أ-

أستاذة محاضرة -ب-

الموسم الجامعي: 2018/2019

بوراس ليلي

عسكري سهيلة

نصيرة بديدة

# الفهرس

iii	قائمة الأشكال
iv	قائمة الجداول
v	شكر وعر فان
vi	إهداء
2	مقدمة عامة
5	1 عموميات حول البلازما
5	1.1 تمهيد
5	2.1 تعريف البلازما
6	3.1 وسائط البلازما
6	1.3.1 وسيط الترابط
6	2.3.1 وسيط الانحلال
8	4.1 خصائص البلازما
8	1.4.1 التعادل الكهربائي
11	2.4.1 تردد البلازما
12	3.4.1 معامل لان دو
13	4.4.1 درجة التأين
15	2 التصادمات والناقلية الكهربائية في البلازما
15	1.2 تمهيد
15	2.2 إستجابة البلازما للحقول الكهرومغناطيسية
17	3.2 الفعل الجماعي للبلازما
17	4.2 التصادمات في البلازما
18	1.4.2 التصادم مع الجسيمات المتعادلة

19	التصادم مع الجسيمات المشحونة . . . . .	2.4.2
21	الناقلية الكهربائية للبلازما . . . . .	5.2
24	<b>3 الوصف الحركي للبلازما</b>	
24	تمهيد . . . . .	1.3
25	معادلة بولتزمان . . . . .	2.3
27	حد التصادم 1.2.3 . . . . .	
29	خصائص معادلة بولتزمان . . . . .	3.3
33	حل معادلة بولتزمان عند التوازن . . . . .	4.3
34	حل معادلة بولتزمان في حالة عدم التوازن . . . . .	5.3
34	فرضيات تقريب زمن الإسترخاء . . . . .	1.5.3
35	حل تقريب زمن الإسترخاء . . . . .	2.5.3
38	<b>4 الناقلية الكهربائية ضمن تقريب زمن الإسترخاء</b>	
38	تمهيد . . . . .	1.4
38	حساب الناقلية الكهربائية . . . . .	2.4
40	حساب زمن الاسترخاء . . . . .	1.2.4
47	مناقشة ومقارنة مع مختلف الطرق . . . . .	3.4
52	<b>خلاصة عامة</b>	
54	<b>ملاحق</b>	
54	حساب عبارة الدرود للناقلية . . . . .	1.
55	برهان العلاقة $\cos \theta = q/2p$ . . . . .	2.
57	<b>المراجع</b>	

# قائمة الأشكال

6	يمثل المخطط البلازما كحالة رابعة للمادة. . . . .	1.1
8	يمثل المخطط مختلف تصنيفات البلازما . . . . .	2.1
9	حجب ديبياي لشحنة الإختبار $q_T$ في البلازما. . . . .	3.1
11	منحنى الفرق بين كمون كولوم وكمون الحجب. . . . .	4.1
	حقل كهربائي ناتج عن إنفصال صغير بين الشحنات (الكترن-أيون)	5.1
12	في البلازما. . . . .	
16	يعمل الجزء المغناطيسي لقوة لورنتز على تغيير مسار الجسم. . . . .	2.2
	يعمل الحقل الكهربائي لقوة لورنتز على تسريع الشحنات الموجبة والسالبة	1.2
16	في إتجاهات متعاكسة. . . . .	
18	يمثل المخطط تقسيم البلازما إلى تصادمية وغير تصادمية. . . . .	3.2
20	تصادم كولوم بين أيون وإلكترون في البلازما. . . . .	4.2
29	مخطط عملية التصادم للجسمين $s$ و $d$ بواسطة الكمون $V_{sd}(q)$ . . . . .	1.3
	مخطط مختلف عمليات التصادم المتكافئة بين الجسمين $s$ و $d$ بواسطة الكمون	2.3
31	$V_{sd}(q)$ . . . . .	
	يوضح الشكل توازن دفع التصادم المرن بين الأيون والإلكترون مع زاوية	1.4
44	تشتت $\Theta$ وكمية حركة متبادلة $q$ . . . . .	
	الناقلية الكهربائية حسب عبارة سبيتزر بدلالة الكثافة $n_e$ وعند درجة	2.4
47	حرارة $T = 15000K$ [13]. . . . .	
	الناقلية الكهربائية حسب عبارة سبيتزر بدلالة درجة الحرارة $T$ وعند	3.4
48	كثافة ثابتة $n_e = 10^{18}m^{-3}$ . . . . .	
49	الناقلية الكهربائية حسب عبارة سبيتزر كدالة لوسيط الترابط $\Gamma$ [14]. . . . .	4.4
55	يوضح الشكل الزاوية $\theta$ بين $\vec{q}$ و $\vec{p}$ . . . . .	5

# قائمة الجداول

1.4	مقارنة بين بعض قيم العاملين $f_{ei}$ و $f_{ei+ee}$ المتحصل عليها بطرق حساب
50	مختلفة للبلازما كلاسيكية [9]. . . . .

# شكر و عرفان

أتقدم أولا وأخيرا بالشكر لله عز وجل الذي بنعمته تتم الصالحات، فله الحمد حتى يرضى وله الحمد إذا رضي وله الحمد بعد الرضا.

بأسمى عبارات الشكر والعرفان أتقدم بالشكر الخالص:

إلى أستاذتي الكريمة بديدة نصيرة التي منحتني أفضل فرصة علمية بأن تكون مؤطرة لي، وعلى مساعداتها الجبارة وتحملها من ذلك عبئا كبيرا، وصبرا طويلا في مختلف مراحل إعداد هذه المذكرة.

كما أوجه الشكر للأستاذة عسكري سهيلة على قبولها عضو ممتحنا والمشاركة في لجنة تقييم هذه المذكرة.

كما أشكر كذلك الأستاذة بوراس ليلي على تكرمها بقبول ترؤس لجنة مناقشتي.

أقدم تشكراتي العميقة إلى والدي، وكل شخص من أفراد عائلتي. وكل من قدم لي يد العون.

سومية.

# إهداء

إلى من وهب لي الحياة وكان بسمتها وربيعها وصدرها الحنون والدي الكريمين حفظهما الله .

إلى أعلى ما في الوجود إلى شمعتي المضيئة

**أمي الحبيبة**

إلى مصدر همتي ونفخي إلى سندي في الحياة

**أبي الفالي**

أخواتي الغاليات إخوتي الأعزاء

إلى كل عائلتي

إلى رفيقات الدربي

وإلى كل من لهم في القلب محبة أهدي هذا العمل.

# مقدمة عامة

## مقدمة عامة

توجد المادة في الطبيعة على شكل ثلاث حالات صلبة وسائلة وغازية وهذا هو الشائع عند عامة الناس غير أنه توجد حالة رابعة للمادة والتي نتحصل عليها من خلال رفع درجة حرارة الغاز إلى طاقة تأين الذرات أين يصبح الغاز متأينا بحيث يصبح يحتوي على خليط من الجسيمات المشحونة والجسيمات المتعادلة وهذا ما يعرف بحالة البلازما، تشكل حالة البلازما الحالة الأكثر إنتشارا في الطبيعة، فالعديد من الأجسام المشاهدة مثل النجوم، الكواكب العملاقة وعلى سطح الأرض مثل البرق، طبقة الغلاف المتأين، إلى جانب البلازما الطبيعية هناك العديد من تطبيقات التكنولوجيا للبلازما مثل الصناعة [1].

في الوقت الحالي يعد علم فيزياء البلازما أهم ركائز تكنولوجيا هذا العصر وذلك سواء كان في علوم طاقة الإندماج النووي أو في بلازما المواد أو في بلازما الإلكترونات أو في بلازما الليزر وغيرها ومن بين التطبيقات البلازما للإستعمالات الصناعية نذكر بعضها منها: الصناعات الطبية، فصل النظائر، الطلاء وتنظيف الأسطح المعدنية... إلخ [2].

تعد معرفة معاملات النقل في البلازما مفتاح أساسي في فهم العديد من الظواهر المشاهدة مثل النجوم، والكواكب العملاقة (المشتري وزحل)، مفاعلات الإندماج النووي... إلخ. تكمن أهميتها في كونها تساعد على تشخيص البلازما كما تعطى صورة عن طبيعة التصادمات والتفاعلات داخل البلازما لأن هذه التصادمات هي من تعمل على تيسير عمليات النقل فعلى سبيل المثال الناقلية الكهربائية والتي هي محط إهتمامنا في هذه المذكرة تمثل معيارا لمدى قابلية الوسط لحركة الشحنات تحت تأثير الحقول الكهربائية الخارجية حيث تعمل هذه الحقول الكهربائية على التأثير على الجسيمات مما يتسبب في تغير التفاعلات فيما بينها، ولتحديد الناقلية الكهربائية فإن هذا يستوجب حل معادلة بولتزمان لإيجاد دالة التوزيع التي تصف حركة توزيع الجسيمات في حالة وجود حقل كهربائي ضعيف وذلك بالإستعانة بطريقة تقريب زمن الإسترخاء.

تم تقسيم هذه المذكرة إلى الفصول التالية:

**الفصل الأول :** سنتطرق فيه لعموميات حول البلازما إنطلاقا من مفهوم البلازما، ثم دراسة بعض عناصر ووسائط البلازما وخصائصها.

**الفصل الثاني :** في هذا الفصل سوف نتعرض بشكل مختصر إلى أنواع التصادمات في البلازما المؤينة جزئيا وكليا حيث سننطلق من إستجابة البلازما للحقول الكهرومغناطيسية ثم الفعل الجماعي للبلازما وبعد ذلك إلى التصادمات في البلازما وأخيرا سنتعرض إلى الناقلية الكهربائية في البلازما.

**الفصل الثالث :** يتضمن دراسة الوصف الحركي للبلازما من خلال معرفة معادلة بولتزمان وحد التصادم وكذا خصائصها وحل معادلة بولتزمان عند التوازن.

**الفصل الرابع :** اشتمل على دراسة الناقلية الكهربائية ضمن تقريب زمن الإسترخاء حيث سنعرض فرضيات هذا تقريب ثم سنتطرق لحساب الناقلية الكهربائية، وأخيرا سنقدم مقارنة بين مختلف الطرق لحساب الناقلية.

# الفصل الأول:

عموميات حول البلازما

# الفصل 1

## عموميات حول البلازما

### 1.1 تمهيد

إن كلمة بلازما هي في الأصل يونانية  $\text{πλάσμα}$  وهي تعني شيئاً مكون على نظام معين و أول من إعتبر البلازما كحالة رابعة للمادة هو العالم البريطاني Crookes وذلك سنة 1879 حيث أسماها المادة المشعة، بعد ذلك ببضعة عقود تم إدراج مصطلح "البلازما" من قبل الفيزيائيين الأمريكيين Tonks و Langmuir لوصف هذه الحالة، حيث أجروا أولى تجاربهما على بلازما أنابيب التفريغ الكهربائي، وقد أدت هذه التجارب بالفعل إلى اكتشافات مهمة وعديدة تتعلق بالخواص الأساسية للبلازما، مثل حجب الشحنة وتذبذبات البلازما. فياترى ماهي البلازما؟

### 2.1 تعريف البلازما

تعرف البلازما على أنها عبارة عن غاز مؤين يتكون من إلكترونات وأيونات وذرات بحيث تتفاعل فيما بينها بواسطة حقول كهرومغناطيسية. نحصل على البلازما عن طريق رفع درجة حرارة الغازات المتعادلة والتي تحتوي بشكل عام على أعداد متساوية من حاملات الشحنة الموجبة والسالبة إلى غاية أن تصل درجة حرارة قريبة من طاقات التأين للذرات أو تتجاوزها عندئذ تتأين الذرات معطية إلكترونات سالبة الشحنة وأيونات موجبة الشحنة. طبعا هذه الشحنات هي ليست حرة على أي حال ولكنها تتأثر بشدة الحقول الكهرومغناطيسية الأخرى وتتسم حركتها بالفعل الجماعي [3].

كما تدعى البلازما أيضا بحالة رابعة للمادة وذلك بعد كل من الحالة الغازية والسائلة والصلبة (أنظر الشكل 1.1)، كما أن أكثر من 90% من المادة المرئية في الكون هي في حالة بلازما.



شكل 1.1: يمثل المخطط البلازما كحالة رابعة للمادة.

يمكن أن تتواجد البلازما إما طبيعية كالتي في الفضاء مثل: الشمس، الكواكب العملاقة مثل المشتري، النجوم ... الخ أو كالتي في الأرض مثل: طبقة الأيونوسفير، البرق، الشفق القطبي ... الخ وإما صناعية مثل بلازما: داخل مصابيح الفلورسنت، مفاعلات الاندماج النووي مثل التوكاماك، شعلة اللحام (قوس اللحام) ... الخ.

## 3.1 وسائط البلازما

### 1.3.1 وسيط الترابط

يعرف وسيط الترابط على أنه نسبة بين متوسط الطاقة الكامنة الى متوسط الطاقة الحركية وهو يحدد مدى شدة تأثير تفاعلات كولوم طويلة المدى بين العديد من الجسيمات على ديناميكيتها، فعندما يكون  $\Gamma_c \ll 1$  تكون البلازما ضعيفة الترابط مما يعني أن الجسيمات تمتلك طاقة حركية كافية للتنقل في النظام ( $\Gamma_c = 0$  توافق الغاز المثالي) . ليس لوسيط الترابط بعد وتحدد قيمه كدالة للكثافة  $n_e$  ودرجة الحرارة  $T$ ، حيث يعطى بالعلاقة:

$$\Gamma_c = \frac{(Z_c e)^2}{4\pi\epsilon_0 r_c k_B T} \quad (1.1)$$

حيث  $e$  هي الشحنة العنصرية،  $\epsilon_0$  هي السماحية الكهربائية في الفراغ و  $k_B$  هو ثابت بولتزمان أما  $r_c = (3Z_c/4\pi n_e)^{1/3}$  هو متوسط المسافة بين الشحنات (ويدعى كذلك بنصف قطر Wigner-seitz) ذات الصنف  $c = e, i$ ، أين العدد الشحني. تكون البلازما ضعيفة الترابط وغير مثالية عندما يكون  $\Gamma_c \leq 1$  أما إذا كان  $\Gamma_c > 1$  فنقول عن البلازما أنها شديدة الترابط أو غير مثالية أين الترابطات بين الجسيمات المشحونة تكون قوية جدا.

### 2.3.1 وسيط الإنحلال

يعرف وسيط الإنحلال  $\Theta$  على أنه النسبة بين متوسط الطاقة الحركية على طاقة فيرمي

$$\Theta_e = \frac{k_B T}{E_{F_e}}, \quad (2.1)$$

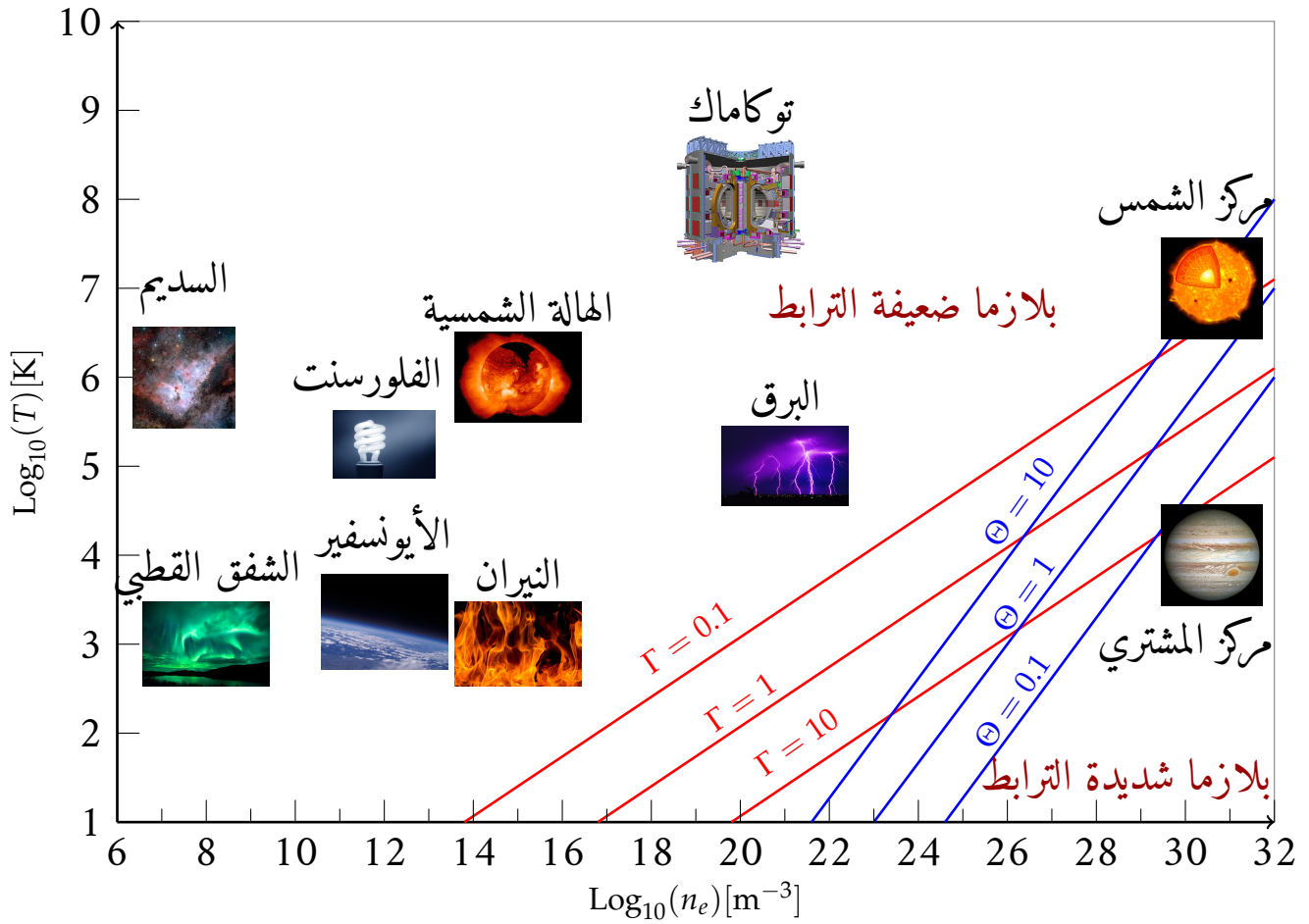
حيث

$$E_{F_e} = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_e} = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 n_e)^{2/3}}{2m_e}. \quad (3.1)$$

حيث  $\hbar$  و  $m_e$  هما على التوالي ثابت بلانك وكتلة الإلكترون. عند الكثافة المنخفضة فإن طاقة فيرمي تكون صغيرة حيث تشغل الإلكترونات مستويات طاقة أعلى من طاقة فيرمي، وبالتالي إنحلال الإلكترونات يكون غير مهم بينما في حالة الكثافة العالية تكون الطاقة الحركية بتقريب مساوية لطاقة فيرمي حيث يكون هناك عدد قليل من الحالات غير شاغرة والتي يمكن للإلكترونات أن تنتقل إليها بعد عمليات التصادم، وبالتالي يكون معامل الإنحلال مهما وتصرف البلازما كغاز إلكترونات.

نقول أن البلازما غير منحلة وتعالج كلاسيكيا خاضعة لإحصاء بولتزمان عندما يكون  $\Theta > 1$  ، أما لما يكون  $\Theta < 1$  أي في الحالة الكثافة العالية فإن البلازما تكون منحلة والإلكترونات تدرس كغاز فيرمي الكمي [1].

يوضح الشكل (2.1) مختلف أنواع البلازما الطبيعية منها والمخبرية كدالة للكثافة ودرجة الحرارة كما يعطى كلا من وسيطي الترابط والإنحلال .



شكل 2.1: يمثل المخطط مختلف تصنيفات البلازما

## 4.1 خصائص البلازما

### 1.4.1 التعادل الكهربائي

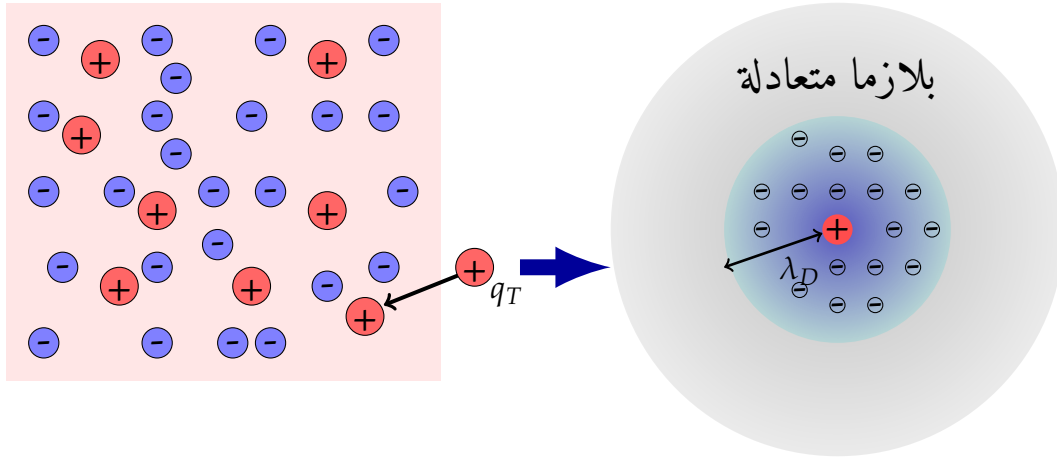
بالرغم من أن البلازما تتكون من مزيج من الشحنات الموجبة والسالبة كما أسلفنا الذكر في (2.1)، إلا أنها تتميز بصفة شبه تعادل كهربائي على المستوى الماكروسكوبي، مما يعني أن كثافة الشحنات الموجبة تساوي كثافة الشحنات السالبة تقريبا:

$$\sum_s \rho_{q_s} = \sum_s n_s q_s = 0 \quad (4.1)$$

حيث  $\rho_{q_s}$  هي كثافة الشحنة و  $q_s$  هي الشحنة الكهربائية ذات الصنف  $s$ . على سبيل المثال في بلازما الهيدروجين فإن (4.1) تعطى:

$$n_e(-e) + n_i(+e) = e(n_i - n_e) \quad (5.1)$$

وعليه فإن كثافة الالكترونات تساوي كثافة الأيونات أي  $n_e = n_i$ .



شكل 3.1: حجب ديبياي لشحنة الإختبار  $q_T$  في البلازما.

غير أن هذا التعادل لا يبدو كذلك على المستوى المجهرى، فهناك انحرافات صغيرة عنه. نفترض أن لدينا شحنة اختبار يتم إدخالها في البلازما شبه متعادلة حيث تستقطب بحقلها الشحنات المخالفة لها، وتدفع الشحنات المماثلة لها، فتتشكل حولها سحابة أغلبها من الشحنات المخالفة بمعنى آخر أن كل شحنة يحدث لها إضطراب في توزيع الشحنات حولها فنقول أن الشحنات المخالفة حجت. بالإضافة إلى ذلك فإن لكل شحنة طاقة حركة حرارية ولكل شحنة من الغيم لديها طاقة كامنة قدرها  $q_s\phi$ . يمكن حساب شكل كمول المعدل بسبب سحابة الإلكترونات من خلال معادلة بواسون للكهربوستاتيكي [4,5]:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_{tot}(x)}{\epsilon_0} \quad (6.1)$$

حيث كثافة الشحنة  $\rho_{tot}$  تتكون من مساهمتين الأولى تأتي من شحنة الإختبار  $q_T(\rho_T)$  والثانية تأتي من الشحنة المستقطبة كإستجابة لشحنة الإختبار  $q_T(\rho_{pol})$  والتي تكتب:

$$\rho_{tot} = q_T\delta(x - x_T) + \rho_{pol}(x) \quad (7.1)$$

حيث  $\delta$  هي دالة دلتا والتي تضمن أن الشحنة  $q_T$  تختفي خارج  $x = x_T$  و  $\rho_{pol} = \sum_s n_s q_s$  هي كثافة الشحنة المستقطبة.

باعتبار أن البلازما عند التوازن الحراري فإنه يمكن إعطاء الكثافة بواسطة توزيع بولتزمان

$$n_s = n_{0s} \exp \left[ -\frac{q_s\phi}{k_B T_e} \right] \quad (8.1)$$

$n_{0s}$ : هي الكثافة العددية عند التوازن في غياب  $q_T$ . باعتبار أن طاقة الكمون ضعيفة أمام الطاقة الحركية  $q_s\phi \ll k_B T_e$  أي في البلازما المثالية عندئذ نقوم بنشر العلاقة (8.1):

$$n_s \simeq n_{0s} \left( 1 - \frac{q_s\phi}{k_B T_s} + \frac{1}{2} \frac{q_s^2\phi^2}{k_B^2 T_s^2} + \dots \right) \quad (9.1)$$

ومنه كثافة الشحنة المستقطبة تصبح:

$$\rho_{pol} = \sum_s n_s q_s \approx \sum_s n_{s0} q_{s0} - \sum_s \frac{n_{0s} q_s^2}{k_B T_s} \phi = - \sum_s \frac{n_{0s} q_s^2}{k_B T_s} \phi \quad (10.1)$$

الحد  $\sum_s n_{s0} q_{s0} = 0$  نتيجة لإعتبار البلازما متعادلة كهربائياً، ومنه معادلة بواسون (6.1) تصبح:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= -\frac{q_T}{\epsilon_0} \delta(x - x_T) + \sum_s \frac{n_{0s} q_s^2}{\epsilon_0 k_B T_s} \phi \\ \nabla^2 \phi - \sum_s \frac{n_{0s} q_s^2}{\epsilon_0 k_B T_s} \phi &= -\frac{q_T}{\epsilon_0} \delta(x - x_T) \\ \nabla^2 \phi - \kappa^2 \phi &= -\frac{q_T}{\epsilon_0} \delta(x - x_T) \end{aligned} \quad (11.1)$$

حيث  $\kappa$  يدعى بوسيط المحب. بأخذ تحويل فوري ( $\int d^3 r e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \dots$ ) للمعادلة (11.1) نجد

$$-k^2 \phi(k) - \kappa^2 \phi(k) = -\frac{q_T}{\epsilon_0} \Rightarrow \phi(k) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q_T}{k^2 + \kappa^2} \quad (12.1)$$

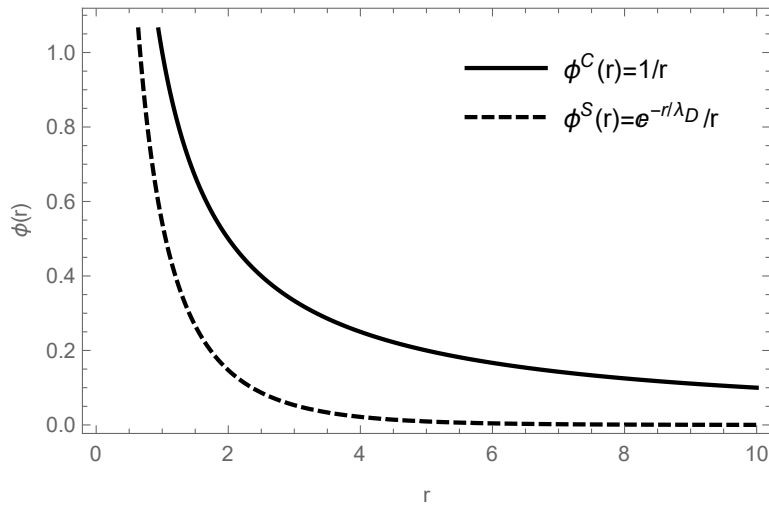
حيث  $k = 2\pi/\lambda$  هو عدد الموجي. بأخذ تحويل فوري العكسي ( $\int (d^3 k / (2\pi)^3) e^{+i\vec{k}\cdot\vec{r}} \dots$ ) لـ  $\phi(k)$  نتحصل على عبارة كمون المحب لديباري

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \frac{q_T}{4\pi\epsilon_0 r} \exp(-\kappa r) \\ &= \frac{q_T}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \end{aligned} \quad (13.1)$$

حيث  $\lambda_D = 1/\kappa$  يسمى بطول ديباري والذي يعطى بـ:

$$\lambda_D = \sqrt{\sum_s \frac{\epsilon_0 k_B T_s}{n_{0s} q_s^2}} \quad (14.1)$$

شكل (1.4.1) يوضح الفرق بين كمون كولوم وكمون المحب أين يعمل هذا الأخير على التقليل من شدة تأثير كمون كولوم بعيد المدى.



شكل 4.1: منحنى الفرق بين كمون كولوم وكمون المحجب.

## 2.4.1 تردد البلازما

تساعد خاصية شبه التعادل للبلازما على توفير حالة الإستقرار لها، غير أنه إذا تم إحداث إضطراب خارجي للبلازما بحيث يؤدي إلى إزاحة مكوناتها عن وضع إزالتها، فإن الشحنات التي فصلت عن بعضها البعض سوف تنتج حقول داخلية تعمل على زيادة الحركة الجماعية للشحنات، أما حقول الإضطراب الخارجي فتعمل على تسريع الأيونات والإلكترونات بصورة جماعية وبسبب فارق الكتلة بين الأيون والإلكترون فإن هذا يؤدي إلى إبتعاد الإلكترونات عن وضع إستقرارها مما ينشأ عنه حقل راد عكس جهة حركتها [2]. يدعى تردد إهتزاز الإلكترون بتردد البلازما، ولإيجاد قيمة هذا التردد ننتقل من معادلة حركة الشحنة  $q$  [4]

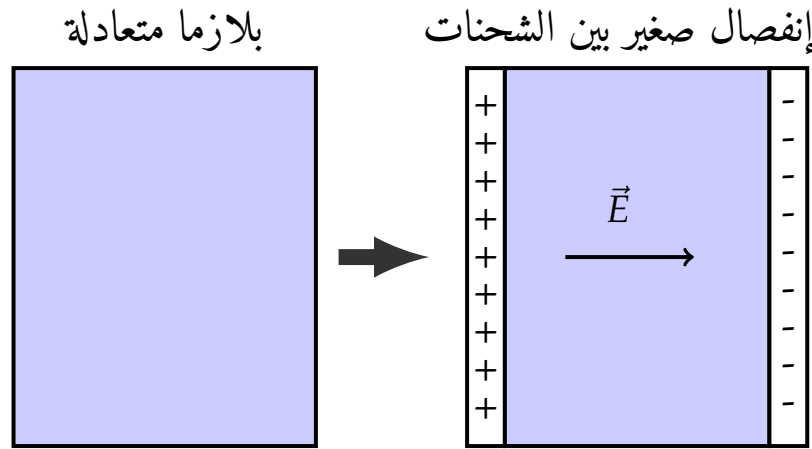
$$m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = q_e \vec{E} \quad (15.1)$$

بالإضافة إلى معادلة حفظ الشحنة:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (16.1)$$

بإفترض أن كتلة الأيونات ثقيلة أمام كتلة الإلكترونات وبالتالي نهمل حركة الأيونات أمام حركة الإلكترونات، فتصبح كثافة التيار:

$$\vec{j} = \rho_e \vec{v}_e = n_e q_e \vec{v}_e \quad (17.1)$$



شكل 5.1: حقل كهربائي ناتج عن انفصال صغير بين الشحنات (الكاترون-أيون) في البلازما.

نعوض عبارة كثافة التيار ثم نقوم بإشتقاق معادلة حفظ الشحنة مع تعويض معادلة الحركة فيها، نحصل على المعادلة التالية:

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \nabla \cdot \frac{neqe}{m_e} \vec{E} = 0 \quad (18.1)$$

بإدخال معادلة ماكسويل لتفرق الحقل الكهربائي نجد

$$\frac{d^2\rho}{dt^2} + \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} + \omega_{pe}^2 \rho = 0 \quad (19.1)$$

ومنه نستنتج أن التردد الالكتروني للبلازما هو

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}} \quad (20.1)$$

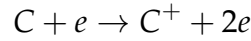
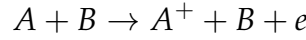
### 3.4.1 معامل لانداو

وهو يمثل المقدار الذي تتساوى فيه الطاقة الكامنة الكولومية المتوسطة للتفاعل الثنائي مع الطاقة الحركية الحرارية المتوسطة، ويستخدم في تحليل ظواهر التصادمات، وارتباطات المواضع في البلازما ويحدد بـ [4]:

$$k_B T = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l} \Rightarrow l = \frac{4\pi\epsilon_0 e^2}{k_B T} \quad (21.1)$$

## 4.4.1 درجة التأين

يكون الغاز في الحالة العادية عازلا كهربائيا، لكن بمجرد أن نطبق عليه حقلا كهربائيا  $\vec{E}$  والذي يؤدي إلى ظهور قوة  $-e\vec{E}$  تتسبب في إحداث تصادمات بين الجسيمات. إذا كان تصادم بين الجسيمات يحدث مع طاقة أعلى من طاقة التأين  $|\epsilon_i|$  وبالتالي تنتزع الإلكترون خلال عمليات التصادم غير المرن [7]، على سبيل المثال



ومنه نسبة بين الجسيمات المشحونة على الذرات المحايدة تعطى إحصائيا بواسطة معادلة ساها:

$$\frac{n_i}{n_0} \approx 2.4 \times 10^{21} \frac{T^{3/2}}{n_i} \exp(-|\epsilon_i/k_B T|) \quad (22.1)$$

وتعرف درجة التأين بالنسبة التالية [8]

$$\alpha_{ion} = \frac{n_e}{n_e + n_0}$$

حيث  $n_0$  كثافة الذرات المحايدة. تتراوح نسبة التأين بين الواحد وصفر بحيث يكون لدينا بلازما مؤينة جزئيا إذا كان  $\alpha_{ion} < 1$  ومؤينة كلياً إذا كان  $\alpha_{ion} = 1$ .

## الفصل الثاني:

التصادمات والناقلية في البلازما

## الفصل 2

# التصادمات والناقلية الكهربائية في البلازما

### 1.2 تمهيد

تنقسم البلازما إلى قسمين بلازما تصادمية وأخرى غير تصادمية حيث في البلازما غير تصادمية يكون حدوث تصادمات فيها نادرة جدا أو يمكن القول أنها تحدث بشكل غير مستمر وبالتالي يمكن إهمال آثارها على ديناميكية البلازما، بينما في البلازما التصادمية فإن التصادمات تحدث بشكل مستمر مما ينتج عنه تبادل كبير لكمية الحركة بين الجسيمات وبالتالي فهي تهيمن على سلوك البلازما [6]. تعمل هذه التصادمات على تسهيل عمليات النقل في البلازما لذا نحاول في هذا الفصل أن نتطرق وبإيجاز إلى طبيعة هذه التصادمات في كل من البلازما المؤينة جزئيا و البلازما المؤينة كليا وكذا الفعل الجماعي للبلازما - كون هذه التصادمات تحدث جماعيا وفي نفس الوقت - ثم نتعرض إلى معاملات النقل وتحديد الناقلية الكهربائية.

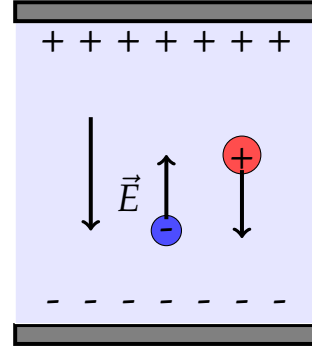
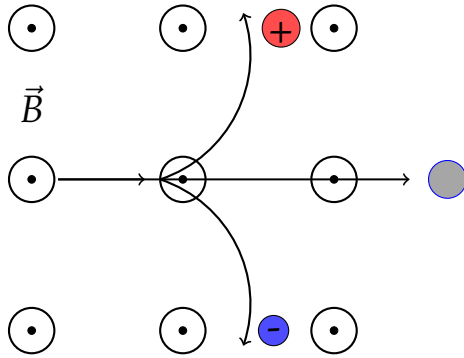
### 2.2 إستجابة البلازما للحقول الكهرومغناطيسية

تستجيب البلازما بقوة للحقول الكهرومغناطيسية، وبالتالي معرفة كيفية تأثير القوى الكهربائية والمغناطيسية على الجسيمات المشحونة ضروري لفهم سلوك البلازما. تعطى معادلة الحركة لجسيم المشحون في البلازما تحت تأثير قوة لورنتز بـ:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.2)$$

حيث  $\vec{E}$ ،  $\vec{B}$  و  $\vec{v}$  هم على الترتيب الحقل الكهربائي، الحقل المغناطيسي و سرعة الجسيم المشحون. إن الحقول الكهربائية والمغناطيسية المستخدمة في عبارة قوة لورنتز هي حقول

داخلية ناشئة عن الجسيمات المشحونة للبلازما كما وتشمل أيضا الحقول الكهربائية والمغناطيسية الخارجية المطبقة.



شكل 2.2: يعمل الجزء المغناطيسي لقوة لورنتز على تغيير مسار الجسيم.

شكل 1.2: يعمل الحقل الكهربائي لقوة لورنتز على تسريع الشحنات الموجبة والسالبة في إتجاهات متعاكسة.

تكون حركة الجسيم المشحون في حالة وجود حقل كهربائي ثابت وحقل مغناطيسي معدوم حركة متغيرة بانتظام حيث معادلة حركته تكتب على النحو التالي:

$$\vec{r}(t) = \frac{q}{2m} \vec{E} t^2 + \vec{v}(0)t + \vec{r}(0),$$

حيث  $\vec{r}(0)$  و  $\vec{v}(0)$  يحددان من الشروط الابتدائية.

يوضح الشكل (1.2) أن الحقل الكهربائي في قوة لورنتز يسرع الشحنات الموجبة والسالبة في إتجاهين متعاكسين، بينما يبين الشكل (2.2) أن الحقل المغناطيسي لقوة لورنتز والذي يكون دوما متعامد على سرعة الجسيم يعمل على تغيير مسار الشحنة ولكنه لا يستطيع العمل عليها (لأن  $dW = d\vec{l} \cdot (q\vec{v} \times \vec{B}) = 0$ ). في حالة وجود فقط حقل مغناطيسي ثابت ومتجانس  $(\vec{B} = B\vec{e}_z)$  فإن معادلة المسار للجسيم المشحون تعطى بـ [4]:

$$x^2 + \left(y + \frac{v_{\perp}(0)}{\omega}\right)^2 = \left(\frac{v_{\parallel}(0)}{\omega}\right)^2 = \text{cst}$$

$$z(t) = v_{\parallel}(0)t$$

حيث تتميز حركة الجسيم بأنها تأخذ نمط الحركة المنتظمة في حالة الحركة الموازية للحقل وبسرعة ثابتة قدرها  $\vec{v}_{\parallel}(0) = v_z(0)\vec{e}_z$ ، حيث تقطع مسافة  $H$  وفق المحور  $oz$  خلال دور والتي مقدارها:

$$H = 2\pi \frac{mv_{\parallel}(0)}{|q|B}$$

أما في حالة الحركة العمودية على الحقل فإنها تكون حركة توافقية، دائرية منتظمة في المستوى العمودي عليه ويتم ذلك بسرعة  $v_{\perp}(0) = v_x(0)\vec{e}_x + v_y(0)\vec{e}_y$  وعلى مسار نصف قطره  $R = \frac{mv_{\perp}(0)}{|q|B}$ ، أما سرعة الزاوية لدوران الشحنة حول الحقل المغناطيسي فقدرها هو  $\omega = |q|$  أي بدور حركة  $T = 2\pi/\omega$ . عموماً فإن الحقول الكهربائية في البلازما تعمل على جرف الشحنات أما الحقول المغناطيسية فتعمل على تدويرها.

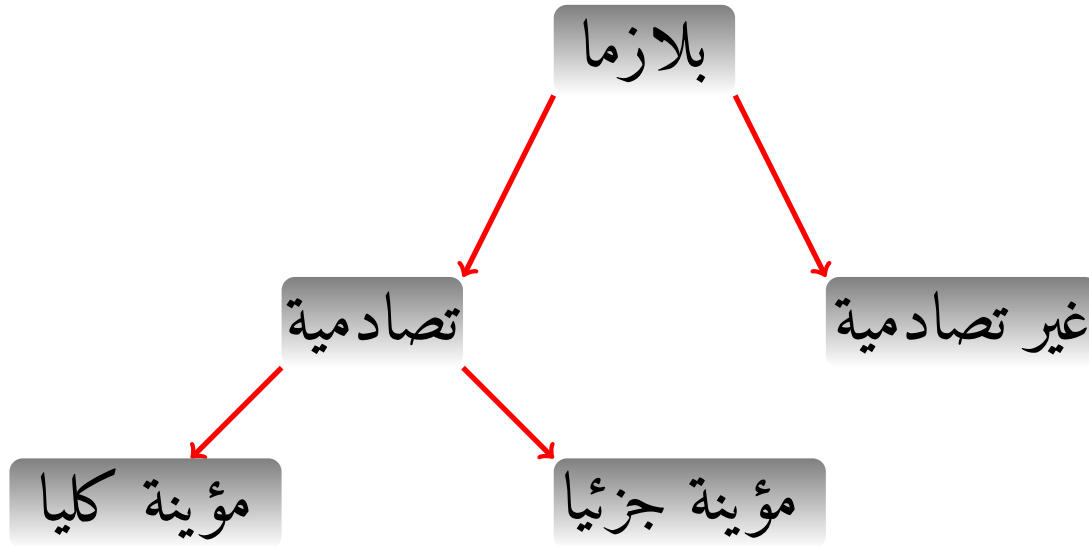
## 3.2 الفعل الجماعي للبلازما

تعد طريقة التفاعل بين جسيمات البلازما من أهم المميزات التي تفرقها عن الغازات الحيادة، فهذه الأخيرة تتفاعل من خلال تصادمات ثنائية مباشرة والتي تؤدي إلى انحرافات كبيرة مما يمكن اعتبارها كتصادمات قوية. على غرار البلازما فإن التفاعلات بين الجسيمات المشحونة في الغالب تحدث من خلال قوى كولوم (تصادمات كولوم) والتي لها تأثير طويل المدى، بمعنى انحراف كل جسيم مشحون يتفاعل في نفس الوقت مع عدد كبير من الجسيمات المشحونة، فغالبيتها تصادمات كولوم تكون ذات زاوية تصادم صغيرة حيث تنحرف الجسيمات المشحونة إنحرافات طفيفة عن مساراتها الأصلية بسبب أن تصادمات كولوم ضعيفة، وهذا ما يطلق عليه بالسلوك أو الفعل الجماعي للبلازما.

## 4.2 التصادمات في البلازما

كما أسلفنا الذكر فإن البلازما تنقسم إلى بلازما تصادمية وأخرى غير تصادمية، بالنسبة إلى البلازما غير تصادمية فهي غالباً ما تكون عند درجات الحرارة العالية والكثافة المنخفضة أين يكون الزمن بين التصادمات أو متوسط المسار الحر أطول من المقاييس الزمنية أو المكانية. أما بالنسبة إلى البلازما التصادمية والتي هي محط إهتمامنا فهي الأخرى بدورها يمكن تقسيمها إلى بلازما مؤينة جزئياً وبلازما مؤينة كلياً (أنظر الشكل 3.2)، حيث في بلازما مؤينة جزئياً أو ضعيفة التأين يكون النوع المهيمن من التصادمات هو ما بين الإلكترونات والذرات، ومن الأمثلة عن بلازما مؤينة جزئياً الطبقات المتأينة من الغلاف الجوي العلوي. بزيادة درجة التأين تصبح التصادمات المهيمنة هي تصادمات كولوم بين الجسيمات المشحونة، وبالتالي في البلازما المؤينة كلياً تحدث التصادمات بين الجسيمات المشحونة والتي تسيطر عليها تفاعلات

قوى كولوم [6].



شكل 3.2: يمثل المخطط تقسيم البلازما إلى تصادمية وغير تصادمية.

## 1.4.2 التصادم مع الجسيمات المتعادلة

تعمل الذرات أو الجزيئات في البلازما المؤينة جزئياً على إعاقة حركة الجسيمات المشحونة (إلكترونات والأيونات) وذلك من خلال تواجدها ككتل ثقيلة معيقة لها، فعندما يصطدم إلكترون (أو أيون) بذرة فإنه يمكن أن يفقد جزئياً أو كلياً من كمية حركته وهذا يتوقف على حسب الزاوية التي يرتد بها، يمكن التعبير عن كمية الحركة المفقودة بدلالة المقطع الفعال للتصادم  $\sigma_a$  للذرة والذي يعبر عن احتمالية التفاعل بين جسيمين. يتناسب تواتر التصادم (معدل التصادم)  $\nu_{e-a}$  بين الإلكترونات والذرات مع الكثافة العددية للذرات  $n_a$  ومتوسط سرعة للإلكترونات  $\langle v \rangle$  وكذا المقطع الفعال للتصادم  $\sigma_a$  حيث يكتب تواتر التصادم كيلي:

$$\nu_{e-a} = n_a \sigma_a \langle v \rangle \quad (2.2)$$

يمكن ببساطة أن يعطى  $\sigma_a$  للذرات على شكل  $\sigma_a = \pi d_0^2$ ، حيث  $d_0$  نصف قطر النواة وعادة ما يؤخذ  $\sigma_a \simeq 10^{-19} \text{m}^2$ ، لكن في أغلب الحالات العامة فإن المقطع الفعال للتصادم هو في حد ذاته يتعلق بسرعة الجسيم الوارد [6].

متوسط المسار الحر يعطى بـ:

$$l_{mfp} = \frac{\langle v \rangle}{v_{e-a}} = \frac{1}{n_a \pi d_0^2} \quad (3.2)$$

وهو عبارة عن متوسط المسافة التي يقطعها الإلكترون قبل أن يتصادم مرة أخرى مع الذرة ويمكن في نفس السياق تعريف متوسط الزمن  $\tau$  بين تصادمين والذي هو مقلوب تواتر التصادم.

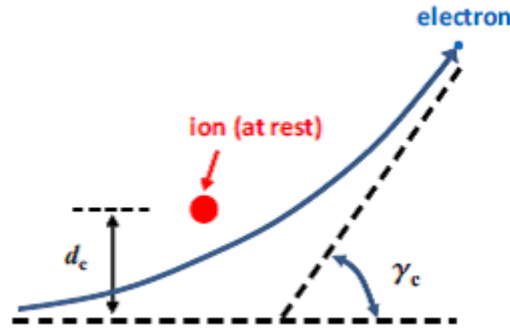
## 2.4.2 التصادم مع الجسيمات المشحونة

إن التصادمات التي تحدث في البلازما المؤينة كليا تكون بين الجسيمات المشحونة والتي تتفاعل عن طريق حقول كولوم الكهربائية وذلك بسبب تأثير قوى كولوم بعيدة المدى، وعادة ما تكون تصادمات كولوم ضعيفة ونادرا ما ينتج عنها إنحرافات كبيرة ويرجع ذلك إلى أن كل جسيم مشحون يتفاعل مع العديد من الشحنات البعيدة في آن واحد في حين التصادمات القريبة التي يكون فيها المسار يتغير بشكل كبير تكون أقل حدوثا، وتم هذه الإنحرافات عندما تقترب الجسيمات من بعضها البعض عند مسافات تكون أكبر بكثير من نصف القطر الذري. إن تفاعل كولوم يعزز من المقطع العرضي للجسيمات المشحونة المتصادمة، وبالتالي يعد تحديد المقطع العرضي للتصادمات كولوم مسألة جد صعبة [5]. في البلازما الكثيفة يكون كمون كولوم محجوبا وينحصر تقريبا تأثير الحقل الكهربائي في كرة ديبياي وعليه يمكن أن نأخذ المقطع العرضي الفعال بتقريب يساوي إلى  $\pi \lambda_D^2$ . غير أن هذا ليس دقيقا تماما لأن الجسيمات التي تأتي بطاقة كافية يمكنها أن تخترق كرة ديبياي وبسبب أن الكمون يزداد بشكل حاد داخل كرة ديبياي، فإن معظم الانحرافات تحدث داخلها، بحيث تكون الإنحرافات ذات الزوايا الصغيرة أكثر احتمالا من الانحرافات ذات الزوايا الكبيرة [6]. يمكن كتابة تواتر تصادم كولوم في البلازما المؤينة بالكامل في شكل مماثل لـ (2.2) كمايلي:

$$v_{e-i} = n_e \sigma_c \langle v_e \rangle \quad (4.2)$$

حيث في البلازما المؤينة كليا تكون  $n_e = n_i$  بسبب التعادل الشحني. لتقدير القيمة العددية لـ  $v_{e-i}$  يجب على المرء أولا تحديد المقطع العرضي  $\sigma_c$  لتشتت كولوم وذلك من خلال معالجة مسألة تصادم إلكترون مع أيون موجب الشحنة، إذن سوف نعتبر

الحالة الموضحة في الشكل (2.4.2) أين لدينا إلكترون يقترب من أيون ثقيل وبما أن الأيونات أكبر بكثير من الإلكترونات، فإننا يمكن أن نعتبر أن الأيون في حالة سكون ومنه مسار الإلكترون سوف ينحرف نتيجة لجاذبيته نحو الأيون. تكون درجة حرارة البلازما المؤينة كليا مرتفعة بما فيه الكفاية بحيث لا يمكن للأيون أن يحبس أو أن يحصر الإلكترون، والذي سيتحرك ببساطة حول الأيون ثم يبتعد منحرفا بزواوية صغيرة  $\gamma_c$ . في الحقيقة يتبع مسار الإلكترون شكل القطع الزائد، غير أنه يمكن تقريبه كمسارات مستقيمة على مسافات كبيرة من الأيون. تسمى المسافة  $d_c$  في الشكل (2.4.2) بوسيط الصدم وهو يمثل أقرب مسافة بين الإلكترون والأيون.



شكل 4.2: تصادم كولوم بين أيون وإلكترون في البلازما.

إنطلاقاً من قوة كوكوم المؤثرة على الإلكترون والمعطاة بالعلاقة الآتية:

$$F_c = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d_c^2} \quad (5.2)$$

يشعر الإلكترون بهذه القوة فقط خلال متوسط زمن قدره بتقريب  $\tau \simeq d_c/v_e$  وذلك عندما يمر بالقرب من الأيون. خلال هذا الزمن تتغير كمية حركته بمقدار  $|F_c| \tau$ :

$$|\Delta(m_e v_e)| \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 v_e d_c} \quad (6.2)$$

لأجل زوايا تصادم كبيرة ( $\gamma_c \simeq 90$ ) فإن  $|\Delta(m_e v_e)|$  سيكون له نفس طوليلة الدفع الكلي للإلكترون  $m_e v_e$  وبالتالي العلاقة (6.2) تصبح:

$$d_c \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_e^2} \quad (7.2)$$

ومنه يمكن تقريب المقطع العرضي كالتالي :

$$\sigma_c = \pi d_c^2 \approx \frac{e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m_e^2 \langle v_e \rangle^4} \quad (8.2)$$

بإستبدال  $v_e$  بمتوسط السرعة  $\langle v_e \rangle$  تصبح عبارة تواتر تصادم كولوم كالتالي:

$$v_{e-i} = n_e \sigma_c \langle v_e \rangle \approx \frac{n_e e^4}{16\pi\epsilon_0^2 m_e^2 \langle v_e \rangle^3} \quad (9.2)$$

وبتعويض متوسط سرعة الالكترونات بمتوسط طاقتها الحرارية  $k_B T_e = m_e \langle v_e \rangle^2 / 2$  وبإعادة كتابة تواتر تصادم بدلالة تردد البلازما  $\omega_{pe}$  فإننا نحصل على العبارة التالية :

$$v_{e-i} \approx \frac{\sqrt{2}}{64\pi} \frac{\omega_{pe}^4}{n_e} \left( \frac{k_B T_e}{m_e} \right)^{-3/2} \quad (10.2)$$

نلاحظ أن تواتر تصادم يتناسب مع الكثافة (لأن  $\omega_{pe}^4 \propto n_e^2$ ) وعكسيا مع  $T^{3/2}$ . إن المعادلة (10.2) ليست سوى نتيجة تقريبية، لكن في الحقيقة أغلبية تصادمات تحدث بزوايا صغيرة وبالتالي عند تصحيح الزوايا الصغيرة يتم إدراج وسيط البلازما الآتي  $\Lambda = n_e \lambda_D^3$  في الحساب وعليه تصبح المعادلة (10.2) كمايلي :

$$v_{e-i} \approx \frac{\omega_{pe}}{32\pi} \frac{\ln \Lambda}{\Lambda} \quad (11.2)$$

حيث يسمى  $\ln \Lambda$  بلوغاريتم كولوم. يكتب متوسط المسير الحر الموافق لهذا التواتر على نحو التالي:

$$l_{mfp} = \frac{\langle v_e \rangle}{v_{e-i}} \approx 64\pi\lambda_D \frac{\Lambda}{\ln \Lambda}. \quad (12.2)$$

## 5.2 الناقلية الكهربائية للبلازما

الناقلية الكهربائية هي من بين أحد أهم معاملات النقل في البلازما، إذ تحضى بإهتمام كبير من الجانبين النظري والتجريبي [1] وذلك لكونها معاملا مهما في تشخيص البلازما لأنها عادة ما تتعلق بالكثافة ودرجة الحرارة من خلال تعلقها بتواتر التصادم وبإضافة لكونها تساعد على فهم ووصف طبيعة التصادمات الحادثة في البلازما، فالناقلية الكهربائية تتأثر بشكل كبير بالتصادمات بين الجسيمات المشحونة. تعد الناقلية الكهربائية معيارا لمدى قابلية الوسط لحركة

الشحنات الكهربائية وهي تمثل نسبة كثافة التيار على شدة الحقل الكهربائي والتي تعطى من خلال قانون أوم:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (13.2)$$

حيث  $\sigma$ ،  $\vec{J}$  و  $\vec{E}$  هم على التوالي ناقلية البلازما، كثافة التيار و الحقل الكهربائي. من ناحية أخرى يمكن تعريف كثافة تيار الشحنات بالعلاقة التالية:

$$\vec{J} = qn\vec{v} \quad (14.2)$$

حيث  $\vec{v}$  هي سرعة الشحنة  $q$ . تعطى معادلة الحركة في البلازما بالعلاقة التالية:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - m\nu_c(\vec{v} - \vec{u}) \quad (15.2)$$

حيث  $\nu_c$  هو تواتر التصادم و  $\vec{u}$  هي سرعة أهداف الإصطدام. الحد الثاني في معادلة الحركة أدخل كقوة إحتكاك معيقة للحركة بسبب التصادمات. في حالة بلازما غير ممغنطة أي  $B = 0$  وباعتبار الأهداف ثابتة أي  $u = 0$ ، كما نعتبر جميع الإلكترونات تمتلك نفس السرعة  $\vec{v}_e$  أي بلازما باردة. علاوة على ذلك نعتبر أن النظام قد وصل إلى الحالة المستقرة بمعنى  $d\vec{v}/dt = 0$  ومنه حل معادلة الحركة هو:

$$\vec{E} = -\frac{m_e\nu_c}{e}\vec{v}_e \quad (16.2)$$

وبالتعويض في عبارة كثافة التيار (14.2) نجد:

$$\vec{J} = -en_e\vec{v}_e = \frac{n_e e^2}{m_e\nu_c}\vec{E} \quad (17.2)$$

بالمقارنة مع قانون اوم نجد أن عبارة الناقلية الكهربائية هي:

$$\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e\nu_c} \quad (18.2)$$

لاحقا سوف نرى كيف يمكن حساب الناقلية الكهربائية للبلازما إنطلاقا من حل معادلة النقل. في حالة وجود حقل مغناطيسي ثابت والذي ينتج عنه عدم تماثل في الفضاء يصبح معامل الناقلية الكهربائية يعبر عنه بموتر.

## الفصل الثالث:

الوصف الحركي للبلازما

## الفصل 3

# الوصف الحركي للبلازما

### 1.3 تمهيد

تختلف دراسة حالة البلازما حسب كثافتها، فهي تعامل ككائع اذا كانت الكثافة عالية لأن التصادمات تزداد وبالتالي يكفي استخدام المعادلات الهيدروديناميكية المبسطة لدراستها [2] ، أما إذا كانت البلازما خفيفة الكثافة فيمكن دراستها على شكل جسيمات مستقلة تتحرك في وسط حقول كهربائية ومغناطيسية بكل حرية أي التصادمات البينية تكون مهملة، مثلما هو الحال بالنسبة للأجسام في غاز مثالي، ويدعى هذا النمط من الدراسة بنموذج الجسم المفرد [4]. لكن تعريف البلازما يتطلب أن يكون هناك عدد كبير من الجسيمات داخل كرة ديباي  $N_D = 4\pi n\lambda_D^3/3 \gg 1$  ، وبالتالي سيكون حساب حركة جميع الجسيمات في البلازما من خلال معادلات ماكسويل وقوة لورنتز مهمة مستحيلة. لذلك نلجأ إلى الوصف الحركي للبلازما المستمد من الفيزياء الإحصائية والذي يوفر وصفاً أكثر دقة لحالة البلازما وقابلية لتتبع تطور النظام. إن وصف ديناميكية النظام يتوجب إنشاء معادلة توازن لدالة توزيع الجسيم  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  نكسوة أولى، والتي تمكننا من وصف جميع المقادير الفيزيائية من خلال حساب المتوسطات

$$\langle a(t) \rangle = \int d^3r \int \frac{d^3p}{h^3} a(\vec{r}, \vec{p}, t) f(\vec{r}, \vec{p}, t).$$

عند تأثير حقول خارجية على البلازما فإن هذا يتسبب في تغيير للتفاعلات (التصادمات) بين الجسيمات داخل الحجم مما يقتضي تحديد دالة التوزيع الموافقة لحالة عدم التوازن الإحصائي عن طريق استخدام معادلة التوازن والتي تدعى بمعادلة بولتزمان.

## 2.3 معادلة بولتزمان

تتم معادلة بولتزمان بدراسة حركة توزيع الجسيمات وليس بالحركة الفردية لها. فعادة ما يكون الغاز متكون من خليط من الجسيمات ولكل نوع من هذه الجسيمات  $s$  دالة توزيع تصفه  $f_s$ ، والتي تعبر عن عدد الجسيمات ذات الصنف  $s$  عند اللحظة  $t$  و المتموضعة في الحجم فضاء الطور  $d^3r$  وفي  $d^3v_s$ . يحدد تطور دالة توزيع تدفق الجسيمات في فضاء الطور تحت تأثير كل من القوى الخارجية وفعال التصادمات وللوصول إلى هذه المعادلة فإننا ننتقل من تعريف الكثافة المحلية كالتالي:

$$n_s(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3p}{h^3} f_s(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (1.3)$$

تعطى عدد الجسيمات في وحدة الحجم بـ:

$$N_s(t) = \int d^3r n_s(\vec{r}, t) \quad (2.3)$$

لايجاد دالة التوزيع في حالة إضطراب النظام سوف نأخذ بعض الإعتبارات [10,9] لتسهيل الأمر وهي كالتالي:

- نعتبر أنه لا توجد تصادمات في البلازما بحيث يتحرك كل جسيم بشكل حر أي بلازما مثالية.
- نعتبر أن النظام مغلق بمعنى أن عدد الجسيمات يبقى محفوظ أي  $N = cst$  بمعنى آخر:

$$N(t) = N(t')$$

وبالتالي:

$$\begin{aligned} N_s(t) &= \int d^3r \int \frac{d^3p}{h^3} f_s(\vec{r}, \vec{p}, t) = N_s(t') \\ &= \int d^3r' \int \frac{d^3p'}{h^3} f_s(\vec{r}', \vec{p}', t') \end{aligned} \quad (3.3)$$

نعرف المتغيرات  $\vec{r}', \vec{p}', t'$  كالتالي:

$$t' = t + \Delta t$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \Delta \vec{r}$$

$$\vec{p}' = \vec{p} + \Delta \vec{p}$$

فتصبح دالة التوزيع  $f_s(\vec{r}', \vec{p}', t')$  كمايلي:

$$\begin{aligned} f_s(\vec{r}', \vec{p}', t') &= f_s(\vec{r} + \Delta\vec{r}, \vec{p} + \Delta\vec{p}, t + \Delta t) \\ &= f_s(\vec{r}, \vec{p}, t) + \frac{df_s}{dt} \Delta t \end{aligned} \quad (4.3)$$

معدل التغير في دالة التوزيع يعطى بـ:

$$\frac{df_s}{dt} = \frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f_s + \vec{F} \cdot \nabla_p f_s \quad (5.3)$$

حيث  $\nabla_r$  و  $\nabla_p$  هما على التوالي: التدرج في كل من الفضاء والدفع الخطي. وبالتالي فإن التغير في الزمن لدالة التوزيع سوف يصحبه تغير للمتغيرات الأخرى (الموضع والسرعة) بالنسبة لكل لحظة. الآن نعوض العبارة التالية:

$$f_s(\vec{r}', \vec{p}', t') = f_s(\vec{r}, \vec{p}, t) + \left[ \frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f_s + \vec{F} \cdot \nabla_p f_s \right] \Delta t$$

في المعادلة (3.3)

$$\begin{aligned} N_s(t) &= \int d^3r \int \frac{d^3p}{h^3} f_s(\vec{r}, \vec{p}, t) = N_s(t') \\ &= \int d^3r' \int \frac{d^3p'}{h^3} \left[ f_s(\vec{r}, \vec{p}, t) + \left( \frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f_s + \vec{F} \cdot \nabla_p f_s \right) \Delta t \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$

مع  $d^3r d^3p = d^3r' d^3p'$  حسب نظرية ليوفيل للموائع غير قابلة للانضغاط (كثافتها ثابتة لا تتغير مع الزمن  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ ) وعليه

$$\begin{aligned} N(t) &= \int d^3r \int \frac{d^3p}{h^3} f_s = \int d^3r \int \frac{d^3p}{h^3} f_s + \\ &\quad \int d^3r \int \frac{d^3p}{h^3} \left( \frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f_s + \vec{F} \cdot \nabla_p f_s \right) \Delta t \quad (7.3) \\ &= N(t') \end{aligned}$$

ليتساوى الطرفين يجب أن يكون الحد

$$\underbrace{\frac{\partial f_s}{\partial t}}_{\substack{\text{تعلق} \\ \text{صريح} \\ \text{بالزمن}}} + \vec{v} \cdot \underbrace{\nabla_r f_s}_{\substack{\text{عدم} \\ \text{انتظام} \\ \text{في الفضاء}}} + \vec{F} \cdot \underbrace{\nabla_p f_s}_{\substack{\text{عدم انتظام} \\ \text{في فضاء الدفع} \\ \text{بسبب القوة} \\ \vec{F}}} = 0 \quad (8.3)$$

تدعى هذه المعادلة بمعادلة فلاسوف *Vlasov* والتي هي صالحة للبلازما منخفضة الكثافة على سبيل المثال في عدم وجود قوة خارجية  $\vec{F} = 0$  فإن معادلة فلاسوف تصبح

$$\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial \vec{r}} = 0 \quad (9.3)$$

نكامل على الدفع الخطي  $\int d^3p/h^3$  فنجد معادلة الإستمرار المحليه

$$\frac{\partial n(\vec{r}, t)}{\partial t} + \nabla_r \cdot \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (10.3)$$

والتي توضح أن التغير في الكثافة خلال الزمن يرفقه تفرق في تيار الجسيمات. الآن إذا قنا برفع الكثافة فإن المسافة بين الجسيمات سوف تقل وبالتالي سوف تكون هناك تصادمات بين الجسيمات فيما بينها. ومنه فإن الإلكترونات لن تتبع الحقل بشكل كلاسيكي ولكن سوف تتأثر بالتصادمات، بمعنى أن هذه التصادمات لن تترك الإلكترون يمر في خط كلاسيكي مستقيم بل سوف يتبعثر ويغير اتجاهه ويتبادل دفع خطي وطاقة عند كل نقطة تصادم حيث تكون الطاقة والدفع محفوظين عند كل نقطة تبادل وعليه فإن معادلة فلاسوف تتغير تبعا لهذه التصادمات كالاتي:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \nabla_r f + \vec{F} \cdot \nabla_p f = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} \quad (11.3)$$

يمثل التغير في دالة توزيع بسبب التصادمات بين الجسيمات، إن هذا الحد يبقى مجهولا وسنحاول إيجاد تقريبات له. وتدعى هذه المعادلة بمعادلة بولتزمان.

### 1.2.3 حد التصادم

يمثل حد التصادم في الجانب الأيمن من معادلة بولتزمان التغير في دالة التوزيع بسبب التصادمات بين الجسيمات، كما يدعى حد التصادم أيضا بحد الجرف لأنه يصف التغير في دالة التوزيع بسبب تفاعل الجسيمات مع الحقول الخارجية.

بغية حساب هذا الحد سوف نعتبر البلازما ذات كثافة منخفضة وبالتالي يمكن اعتبار التصادمات التي تحدث بين الجسيمات هي من نوع تصادمات ثنائية *approximation binary collision*، وعليه فإن طرق نظرية التشتت يمكن استخدامها في الحساب. الآن سوف نعتبر أبسط حالة لحالة عدم التوازن وهي الحالة المستقرة في وجود حقل كهربائي خارجي ثابت (قانون أوم) حيث:

• الحالة مستقرة أي  $\partial f_s(\vec{r}, \vec{p}, t) / \partial t = 0$

• التوزيع متجانس في الفضاء أي  $\vec{\nabla}_r f(\vec{r}, \vec{p}, t) = 0$

• وجود حقل كهربائي خارجي (ضعيف) أي قوة  $\vec{F} = q_s \vec{E}$

وعليه فإن معادلة بولتزمان (11.3) تصبح :

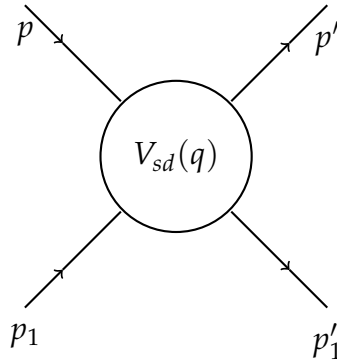
$$q_s \vec{E} \cdot \frac{\partial f_s(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial \vec{p}} = \left( \frac{\partial f_s(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial t} \right)_{coll} \quad (12.3)$$

يمثل الحد الأيسر من المعادلة (12.3) تسارع الإلكترونات في وجود حقل خارجي ويمثل الحد الأيمن تبدد الطاقة إلى الجسيمات الأخرى. فعلى سبيل المثال الإلكترونات والأيونات بعد فترة طويلة بما فيه الكفاية وفي حالة وجود حقول ضعيفة من قبل النظام (بمعنى إستجابة خطية) فإنها تصل إلى حالة المستقرة أين تكون درجة الحرارة للإلكترونات والأيونات متساوية  $T_e = T_i$ . تعطي عبارة حد التصادم بالعلاقة التالية [10]:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f_s(p)}{\partial t} \right) &= - \sum_d \int \frac{d^3 \dot{p}}{h^3} \int \frac{d^3 p_1}{h^3} \int \frac{d^3 \dot{p}_1}{h^3} W_{sd}(pp_1 \dot{p} \dot{p}_1) \times \\ &\quad \{ f_s(p) f_d(p_1) [1 - f_s(\dot{p})] [1 - f_d(\dot{p}_1)] - [1 - f_s(p)] [1 - f_d(p_1)] f_s(\dot{p}) f_d(\dot{p}_1) \} \\ &= \text{الخسارة} - \text{ربح} \end{aligned} \quad (13.3)$$

تحتوي الحاضنتين  $\{\dots\}$  على حدين حيث يمثل الحد الأول تشتت الخروج من الحالة  $|p\rangle$  (يمثل الخسارة)، أما الحد الثاني يمثل تشتت الدخول في الحالة  $|p\rangle$  (يمثل الربح) أنظر الشكل (1.3)  $W(pp_1 \dot{p} \dot{p}_1)$  يمثل احتمال حدوث التشتت وهو يتناسب مع الحالات المشغولة عند الدخول  $|p_1\rangle |p\rangle$  والخروج  $|\dot{p}_1\rangle |\dot{p}\rangle$  مع وزنها الإحصائي  $f_d(p_1) f_s(p)$  يدعى  $(1-f)$  بحد الحظر لباولي لأنه يصف في الحقيقة الإنتقالات إلى الحالات التي يتم شغلها بالفعل من قبل الفرميونات وهي محظورة بسبب مبدأ باولي الذي لا يسمح بأخذ إلكترونين نفس الحالة الكمومية. وبالتالي فإن عملية التشتت في حد ذاتها تعطي بإحتمال الإنتقال  $W$  بين الحالات المعنية والتي تمكنا من استخدام قاعدة فرمي الذهبية.

$$\begin{aligned} W(pp_1 \dot{p} \dot{p}_1) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^6} |V_{12}(p - \dot{p})|^2 \delta(p + p_1 - \dot{p} + \dot{p}_1) \times \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_{12} - E'_{12}) \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} | \langle pp_1 | T_{12}(E + i\epsilon) | \dot{p}_1 \dot{p} \rangle |^2 \delta(E_{12} - E'_{12}) \end{aligned} \quad (14.3)$$



شكل 1.3: مخطط عملية التصادم للجسمين  $s$  و  $d$  بواسطة الكون  $V_{sd}(q)$ .

حيث  $\langle | T_{12} | \rangle$  هي مصفوفة  $T$  لنظرية التشتت التي يمكن تحديدها من معادلة ليبمان شوينجر.

$$T_{12}(\omega + i\epsilon) = V_{12} + V_{12} \frac{1}{\omega - H_{12}^0 + i\epsilon} T_{12}(\omega + i\epsilon) \quad (15.3)$$

في حالة الحقول الضعيفة فإن احتمال الإنتقال يمكن أن يمثل بالعنصر المصفوفي لكون التفاعل في حالة تقريب بورن

$$W_{sd}(pp_1\acute{p}\acute{p}_1) \propto | \langle pp_1 | V_{sd}^{sc}(r) | \acute{p}\acute{p}_1 \rangle | \quad (16.3)$$

حيث  $V_{sd}^{sc}(r)$  هو كون المحب لديباي. والعلاقة التي تربط بين المقطع الفعال التفاضلي للتصادم والعنصر المصفوفي تعطى بـ

$$\frac{d\sigma_{sd}}{d\Omega} \sim (2\pi)^4 \hbar^2 m_e^2 | \langle pp_1 | V_{sd}^{sc}(r) | \acute{p}\acute{p}_1 \rangle |^2 \quad (17.3)$$

يمكن القول أن حد التصادم يوفر توازن لجميع عمليات التشتت المحتملة في الحالة  $| p \rangle$  وعليه فإنه يجب حل معادلة بولتزمان مع حد التصادم لإيجاد دالة التوزيع خارج التوازن وبعد ذلك يمكن أخذ المتوسط على كميات فيزيائية.

### 3.3 خصائص معادلة بولتزمان

نعرض في هذا العنصر بعض من خصائص معادلة بولتزمان [11]:

- معادلة بولتزمان هي معادلة تكاملية-تفاضلية غير خطية لدالة توزيع جسيم مفرد في الحالة الكلاسيكية، أما في الحالة الكمية يمكن استخدام مصفوفة الكثافة.

- معادلة بولتزمان هي معادلة صالحة عند الكثافة المنخفضة أين يمكن إعتبار فقط التصادمات الثنائية، بينما عند الكثافات العالية فإن التصادم بين ثلاثة أجسام يجب أن يؤخذ بعين الإعتبار، بالإضافة إلى تأثيرات الكثافة مثل تشكل أشباه الجسيمات (quasiparticles) والحالات المقيدة واللذان يجب إعتبارهما.
- برهنت نظرية بولتزمان  $H$  زيادة الأنتروبي وذلك بأخذ تعريف الأنتروبي على النحو التالي

$$S = -k_B \int f \ln f dp dr$$

وتم الوصول إلى أن:

$$\frac{dS}{dt} \geq 0$$

- تؤدي معادلة بولتزمان إلى قوانين الحفظ لكل من الكثافة العددية، الدفع والطاقة الحركية. في هذه الخاصية نعرض فقط برهان الوصول إلى معادلة الإستمرار أو معادلة حفظ الكثافة للجسيمات . نعتبر دالة كيفيه  $h(p)$  ونعتبر فقط الإلكترونات في البلازما لأن الأيونات ثقيلة (تقريب الأديباتيكي) . كما تأخذ دالة توزيع الإلكترون في حالة عدم التوازن

$f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  . الآن نعرف مؤثر  $K[h, f]$  يتعلق بـ  $h(p)$  و  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$

$$K[h, f] = \int \frac{d^3 p}{h^3} h(p) \left( \frac{\partial f(p)}{\partial t} \right)_{coll} \quad (18.3)$$

حيث  $K[h, f]$  متناظر بمعنى أن إحتمال التصادم هونفسه في كل جهة أي

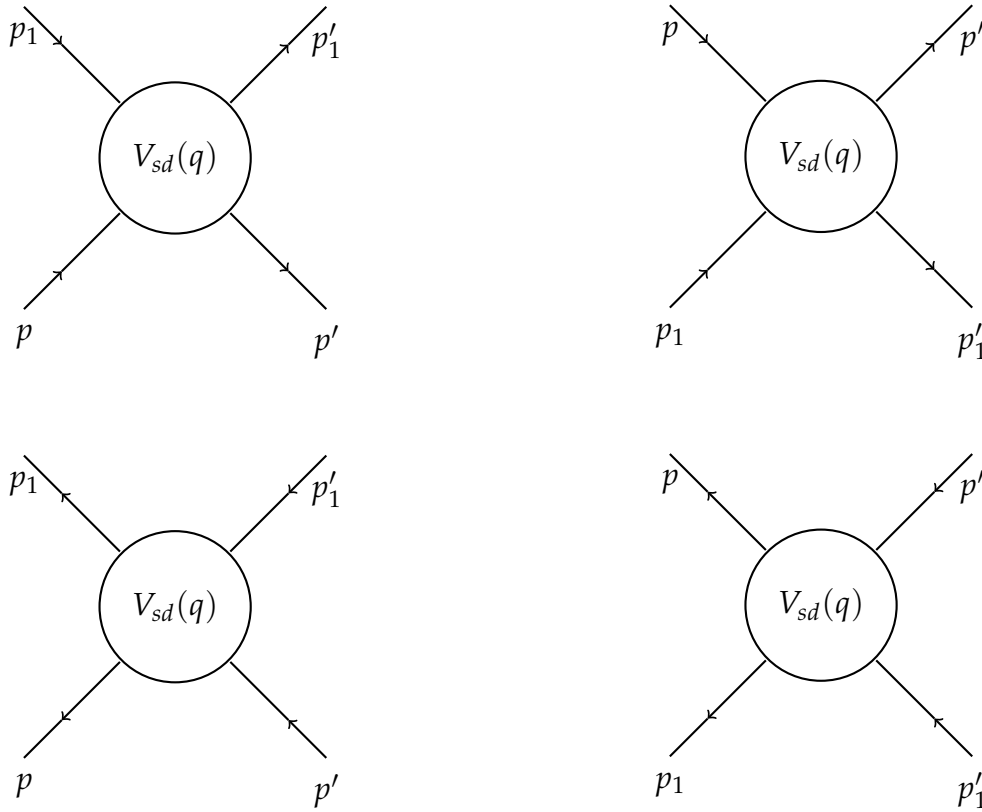
$$W(pp_1, \acute{p}\acute{p}_1) = W(p_1p, \acute{p}_1\acute{p}) = W(\acute{p}_1\acute{p}, p_1p) = W(\acute{p}\acute{p}_1, pp_1) \quad (19.3)$$

وهذا بسبب قابلية تبادل أطراف التصادم وكذا قابلية الإنعكاس الميكروسكوبي وبالتالي فإن المؤثر  $K[h, f]$  يعاد كتابته على النحو التالي :

$$4K[h, f] = \int \frac{d^3 p}{h^3} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} \{h(p) + h(p_1) - h(\acute{p}) - h(\acute{p}_1)\} \quad (20.3)$$

هنا تم ضرب المؤثر  $K[h, t]$  في 4 وهذا يمثل حالات التصادم الممكنة وعليه يمكن حساب حالة واحدة فقط (بسبب التناظر).

$$K[h, f] = -\frac{1}{4} \int \frac{d^3 p}{h^3} \int \frac{d^3 p_1}{h^3} \int \frac{d^3 \acute{p}}{h^3} \int \frac{d^3 \acute{p}_1}{h^3} W(pp_1, \acute{p}\acute{p}_1) \times \\ \{h + h_1 - \acute{h} - \acute{h}_1\} (ff_1(1-f)(1-f_1) - \acute{f}\acute{f}_1(1-f)(1-f_1)) \quad (21.3)$$



شكل 2.3: مخطط مختلف عمليات التصادم المتكافئة بين الجسمين  $s$  و  $d$  بواسطة الكمون  $V_{sd}(q)$ .

الآن نعتبر دالة خاصة  $h(p) = \psi(p)$  والتي لها الخاصية التالية

$$\psi(p) + \psi(p_1) = \psi(p') + \psi(p'_1) \quad (22.3)$$

والتي تعطي معادلات الإستمرار لعمليات التصادم. هناك 5 دوال تحقق الخاصية (22.3) وهي  $\alpha = 1, \dots, 5$

$$\psi_\alpha(p) = \left\{ 1, \frac{p^2}{m}, \vec{p} \right\} \quad (23.3)$$

وبالتالي:

$$K[\psi_\alpha, f] = 0 \quad (24.3)$$

لأن  $(\psi + \psi_1 - \psi' - \psi'_1) = 0$  وإنطلاقاً من هذه الدوال الخمسة نصل إلى قوانين الحفظ

$$K[\psi_\alpha, f] = \int \frac{d^3p}{h^3} \psi_\alpha(p) \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = 0 \quad (25.3)$$

بالرجوع إلى معادلة بولتزمان وتعويض حد التصادم بحد الانجراف نجد

$$\int \frac{d^3p}{h^3} \psi_\alpha(p) \left\{ \frac{\partial f_p}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \nabla_r f_p + \vec{F} \cdot \nabla_p f_p \right\} = 0 \quad (26.3)$$

نأخذ الحالة  $\alpha = 1$  أي  $\psi_1(p) = 1$  فنجد

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{d^3p}{h^3} f_p + \nabla_r \cdot \int \frac{d^3p}{h^3} \frac{\vec{p}}{m} f_p + \underbrace{\int \frac{d^3p}{h^3} \vec{F} \cdot \nabla_p f_p}_{=0} = 0 \quad (27.3)$$

الحد الثالث معدوم لأنه يساوي

$$\int \frac{d^3p}{h^3} \vec{F} \cdot \nabla_p f_p = \underbrace{\int \frac{d^3p}{h^3} \nabla_p \cdot (\vec{F} f_p)}_I - \underbrace{\int \frac{d^3p}{h^3} f_p \nabla_p \vec{F}}_{II} \quad (28.3)$$

حيث التكامل I معدوم لأن تكامل على حجم  $V = \infty$  أين تكون  $f_p(\infty) = 0$ ، أما التكامل II فهو معدوم لأن القوة  $\vec{F}$  هي قوة محافظة ولا تتعلق بسرعة ومنه (27.3) تعطى معادلة الإستمرار لأجل كثافة عدد الجسيمات :

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\vec{r}, t) + \text{div} \vec{j}(\vec{r}, t) = 0 \quad (29.3)$$

في حالة  $\alpha = 2$  أي  $\psi_2(p) = \frac{p^2}{2m}$  نجد

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon(\vec{r}, t) + \text{div} \vec{j}_E(\vec{r}, t) = a(\vec{r}, t) \quad (30.3)$$

حيث

$$\epsilon(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3p}{h^3} \frac{p^2}{2m} f_p \text{ هي كثافة الطاقة الحركية .}$$

$$\vec{j}_E(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3p}{h^3} \frac{p^2}{2m} \frac{\vec{p}}{m} f_p \text{ هي تيار كثافة الطاقة الحركية .}$$

$$a(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3p}{h^3} \frac{p^2}{2m} \cdot \vec{F} f_p \text{ هي كثافة الطاقة (العمل) بسبب القوة الخارجية .}$$

لأجل مركبات الدفع  $\alpha = 3, 4, 5$  مع  $\psi_\alpha = P$  نجد معادلات الإستمرار التالية لأجل  $i = 1, 2, 3$  والتي تمثل على التوالي المركبات  $(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} g_i(\vec{r}, t) + \text{div} \vec{j}_{p_i} = \bar{f}_i(\vec{r}, t) \quad (31.3)$$

حيث

$$g_i(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3p}{h^3} P_i f_p \text{ كثافة الدفع .}$$

$$\vec{j}_{p_i}(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 p}{h^3} P_i \frac{\vec{p}}{m} f_p \quad \text{كثافة تيار الدفع .}$$

$$\vec{f}_i(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{فإن } \vec{F} = 0 \quad \text{معدومة القوة الخارجية معدومة إذا كانت القوة الخارجية معدومة}$$

وبالتالي نحصل على معادلات إنحفاظ الدفع.

### 4.3 حل معادلة بولتزمان عند التوازن

في حالة التوازن الترموديناميكي (لا وجود للحقول خارجيه وليس هناك تعلق بالزمن ) فإن حل معادلة بولتزمان معروف فهو إما  $f^{MB}$  دالة ماكسويل-بولتزمان في الحالة الكلاسيكية أو في الحالة الكمية . نعرف دالة خاصة

$$h(p) = \ln \frac{f_p^0}{1 - f_p^0} \quad (32.3)$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} h + h_1 - \hat{h} - \hat{h}_1 &= \ln \frac{f_p^0}{1 - f_p^0} + \ln \frac{f_{p_1}^0}{1 - f_{p_1}^0} - \ln \frac{f_{\hat{p}}^0}{1 - f_{\hat{p}}^0} - \ln \frac{f_{\hat{p}_1}^0}{1 - f_{\hat{p}_1}^0} \\ &= \ln \frac{f_p^0 f_{p_1}^0 (1 - f_{\hat{p}}^0) (1 - f_{\hat{p}_1}^0)}{f_{\hat{p}}^0 f_{\hat{p}_1}^0 (1 - f_p^0) (1 - f_{p_1}^0)} \equiv \ln \frac{x}{y} \end{aligned} \quad (33.3)$$

حيث

$$\begin{cases} x = f_p^0 f_{p_1}^0 (1 - f_{\hat{p}}^0) (1 - f_{\hat{p}_1}^0) \\ y = f_{\hat{p}}^0 f_{\hat{p}_1}^0 (1 - f_p^0) (1 - f_{p_1}^0) \end{cases}$$

يعبر كل من البسط والمقام عن العوامل الإحصائية في عملية التشتت بحيث يصف  $x$  عمليات التشتت الخارجة من الحالة  $|p\rangle$  و  $y$  يمثل عمليات التشتت الداخلة إلى الحالة  $|p\rangle$  . ومنه يمكن أن نرى أن معادلة بولتزمان تصف التصادمات الداخلة في الحالة  $|p\rangle$  وعلاقتها بتصادمات الخارجة من الحالة  $|p\rangle$  وهي تمثل توازن بين العمليات، عند التوازن الحراري فإن حد الجرف يكون معدوم أي المؤثر

$$(34.3)$$

$$K \left[ h = \ln \frac{x}{y}, f_p^0 \right] = -\frac{1}{4} \int \frac{d^3 p}{h^3} \int \frac{d^3 p_1}{h^3} \int \frac{d^3 \hat{p}}{h^3} \int \frac{d^3 \hat{p}_1}{h^3} W(p p_1, \hat{p} \hat{p}_1) \times \ln \left[ \frac{x}{y} \right] (x - y) = 0$$

حيث

$$\begin{cases} (x - y) \ln \frac{x}{y} \geq 0 & \forall x \neq y \\ (x - y) \ln \frac{x}{y} = 0, & \text{لأجل } x = y \quad \forall |p\rangle \quad (*) \end{cases} \quad (35.3)$$

يمثل الحد (\*) حالة التوازن بين عمليات التشتت حالة الخروج (out) ودخول (into) للحالة  $|p\rangle$  وهذا ينطبق على كل حالة  $|p\rangle$  ، بالإضافة إلى هذا فإن الدالة  $\psi = \ln \frac{f_p^0}{1-f_p^0}$  تحقق الشرط  $K[\psi, f_p^0] = 0$  وبالتالي السؤال المطروح هو:- ماهي دالة التوزيع  $f_p^0$  في حالة التوازن الترموديناميكي ؟ الإجابة هي دالة مكتوبة على شكل مزج خطي للحلول السابقة لـ  $\psi_\alpha$  مع  $\alpha = 1 \dots 5$  أي

$$\psi = \ln \frac{f_p^0}{1-f_p^0} = A + B \frac{p^2}{2m} + \vec{C} \cdot \vec{p} \quad (36.3)$$

الثوابت  $A, B$  و  $\vec{C}$  يمكن تحديدها من خلال قوانين الحفظ. كتقريب لدالة التوزيع مع سرعة جرف للنظام  $\vec{u}$  نأخذ مثلا الوصف الهيدروديناميكي للبلازما (حالة العامة)

$$f_p^0 = \{ \exp [E_p - \mu - \vec{p} \cdot \vec{u}] + 1 \}^{-1} \quad (37.3)$$

وبالتعويض في علاقة لوغاريتم نجد :

$$\ln \frac{f_p^0}{1-f_p^0} = \ln \frac{\{ \exp [\beta(E_p - \mu - \vec{p} \cdot \vec{u})] + 1 \}^{-1}}{1 - \{ \exp [\beta(E_p - \mu - \vec{p} \cdot \vec{u})] + 1 \}^{-1}} \ln \frac{f_p^0}{1-f_p^0} = -\beta(E_p - \mu - \vec{p} \cdot \vec{u})$$

بالمطابقة مع (36.3) نجد  $\vec{C} = \beta \vec{u}$  و  $A = \beta \mu$  ،  $B = -\beta$  ، حيث  $\beta = \frac{1}{K_B T}$  و  $\mu$  هو الكمون الكيميائي ومنه في الحالة الكلاسيكية أين  $(T \rightarrow \infty \Rightarrow \mu \rightarrow -\infty)$  نحصل على توزيع ماكسويل-بولتزمان

$$f_p^0(\mu \rightarrow -\infty) = f^{MB}(v) = \frac{n\lambda^3}{2} \exp \left[ -\frac{m}{2K_B T} (v^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{u}) \right] \quad (39.3)$$

## 5.3 حل معادلة بولتزمان في حالة عدم التوازن

نعتبر بلازما ضعيفة الترابط وتحت تأثير حقل كهربائي خارجي ضعيف بحيث تكون إستجابة النظام خطية. نود الآن إيجاد دالة التوزيع في حالة خروج النظام عن وضع التوازن. هناك عدة طرق لحل معادلة بولتزمان وفي هذا العمل نود التطرق إلى طريقة تدعى بتقريب زمن الإسترخاء.

### 1.5.3 فرضيات تقريب زمن الإسترخاء

تعتمد هذه الطريقة على الفرضيات التالية:

(1) تتكون البلازما من  $s = e$  إلكترونات متحركة و  $s = i$  أيونات ثقيلة وساكنة أي تقريبا أديباتيكي أو تقريبا Born - Oppenheimer (بورن-أوينهيمر).

(2) إعتبار الحقل الخارجى ضعيف  $\vec{F} = e\vec{E}$  بحيث تكون إستجابة النظام خطية له، بالتالى يعمل هذا الحقل على إخراج دالة التوزيع قليلا عن حالة توازن  $1 \ll f - f^0$ .

(3) أخذ بعين الإعتبار تفاعل إلكترون-أيون وإهمال التفاعل إلكترون - إلكترون بمعنى نموذج غاز لورنتز (غاز إلكترونات).

(4) إعتبار دالة التوزيع مستقلة عن الزمن أي أنها في الحالة المستقرة  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ .

(5) إعتبار الفضاء متجانس وبالتالى مشتق الموضع لدالة التوزيع يساوي 0 أي  $\vec{\nabla}_r f = 0$ .

### 2.5.3 حل تقريبا زمن الإسترخاء

بعد كل هذه الإعتبارات السابقة تصبح معادلة بولتزمان كالتالى

$$\vec{F} \vec{\nabla}_r f_e = \left( \frac{\partial f_e}{\partial t} \right)_{coll} \equiv -\frac{f_e(p) - f_e^0(p)}{\tau(p)} \quad (40.3)$$

حيث

$f_e(p)$  دالة التوزيع للنظام في حالة عدم التوازن .

$f_e^0$  دالة التوزيع للنظام في حالة التوازن.

$\tau(p)$  زمن الإسترخاء.

إذن من خلال المعادلة (40.3) نحاول إيجاد عبارة دالة التوزيع  $f_e(p)$  وذلك بتعويض القوة  $\vec{F} = -e\vec{E}$  في العلاقة السابقة

$$\begin{aligned} e\vec{E} \frac{\partial f}{\partial p} &= \frac{f_e - f_e^0(p)}{\tau(p)} \left( e\vec{E} \frac{\partial f_e(p)}{\partial p} \right) \tau(p) \\ &= f_e(p) - f_e^0(p) f_e(p) \\ &= f_e^0(p) + e\tau(p) \vec{E} \cdot \left( \frac{\partial f_e(p)}{\partial p} \right) \end{aligned} \quad (41.3)$$

الآن نود أن نعبر عن حل معادلة بولتزمان بدلالة الطاقة

$$\begin{aligned} E_p = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2mE_p}, \quad dE_p = \frac{2\vec{p}dp}{2m} = \frac{\vec{p}}{m} dp \Rightarrow dE_p = \frac{\vec{p}}{m} dp \\ \frac{\partial f_e(p)}{\partial p} = \frac{\partial f_e(p)}{\partial E_p} \frac{\partial E_p}{\partial p} \Rightarrow \frac{\partial f_e(p)}{\partial p} = \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial E_p} \end{aligned}$$

ومنه يكون حل معادلة بولتزمان كالآتي

$$f_e(p) = f_e^0(p) + e\tau(p)\vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_e(p)}{\partial E_p} \quad (42.3)$$

نلاحظ أن هناك تعلق ذاتي في دالة توزيع  $f_e(p)$  بنفسها ولحل هذا نعوض  $f_e(p)$  في حد الإشتقاق بحل معادلة بولتزمان ونأخذ بعين الاعتبار الإستجابة الخطية للنظام

$$\begin{aligned} f_e(p) &= f_e^0(p) + e\tau(p)\vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial}{\partial E_p} \left( f_e^0(p) + e\tau(p)\vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_e(p)}{\partial E_p} \right) \\ &= f_e^0(p) + e\tau(p)\vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} + e^2\tau^2(p)(\vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m})^2 \frac{\partial^2 f_e}{\partial E_p^2} \end{aligned} \quad (43.3)$$

ومنه عبارة الحل تصبح

$$f_e(p) = f_e^0(p) + e\tau(p)\vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} \quad (44.3)$$

حيث  $\vec{p}$  هو الدفع الخطي للإلكترون. بعد إيجاد عبارة الحل لمعادلة بولتزمان أصبح من الممكن حساب القيم المتوسطة على الكميات الفيزيائية.

## الفصل الرابع:

حساب الناقلية الكهربائية ضمن تقريب زمن الإسترخاء

## الفصل 4

# الناقلية الكهربائية ضمن تقريب زمن الإسترخاء

### 1.4 تمهيد

بعد أن تطرقنا في الفصل السابق إلى معادلة بولتزمان وكذا حلها في حالة عدم التوازن، الآن نود في هذا الفصل أن نتعرض إلى تحديد معامل الناقلية الكهربائية للبلازما في حالة وجود حقل كهربائي خارجي ضعيف وذلك بالإستعانة بعبارة دالة التوزيع في حالة توازن التي تم إيجادها ضمن تقريب زمن الإسترخاء.

### 2.4 حساب الناقلية الكهربائية

يمكن حساب الناقلية الكهربائية من خلال قانون أوم

$$\vec{j}_e = \sigma \cdot \vec{E} \quad (1.4)$$

ومن جهة أخرى كثافة التيار تساوي

$$\vec{j}_e = -en_e \frac{\vec{p}}{m} \quad (2.4)$$

تعطى الكثافة العددية للالكترونات بـ

$$n_e = g_e \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} f_e(p) n_e = 2 \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} f_e(p) \quad (3.4)$$

حيث  $g_e$  درجة الإنحلال .

$$\vec{j}_e = -2e \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\vec{p}}{m} f_e(p) \quad (4.4)$$

نعوض عبارة دالة التوزيع

$$\begin{aligned}\vec{j}_e &= -2e \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\vec{p}}{m} \left[ f_e^0(p) + e\tau(p)\vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} \right] \\ &= -2e \underbrace{\left( \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\vec{p}}{m} f_e^0(p) \right)}_{=0} - 2e \left( \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} e\tau(p)\vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} \right)\end{aligned}\quad (5.4)$$

التكامل الأول يساوي صفر لأنه لا يوجد تيارات في حالة توازن ترموديناميكي . ومنه تصبح عبارة كثافة التيار

$$\vec{j}_e = -2e^2 \left( \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tau(p) \frac{\vec{p}}{m} (\vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m}) \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} \right)\quad (6.4)$$

نفترض أن الحقل الكهربائي موازي للمحور (oz) أي  $\vec{E} = E\vec{e}_z$  وبالتالي  $\vec{E} \parallel \vec{e}_z$  ولحفظ مقدار الكمية لكل الإتجاهات فإننا نقسم على 1/3 لأن الفضاء متساوي المناحي ومنه تصبح

$$\vec{j}_e = -\frac{2}{3}e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tau(p) \frac{\vec{p}^2}{m^2} \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} \times \vec{E}\quad (7.4)$$

الآن نعبر عن عبارة كثافة التيار بدلالة الطاقة

$$dE_p = \sqrt{\frac{2E_p}{m}} dp, \quad E_p = \frac{p^2}{2m}$$

$$\begin{aligned}\int d^3p &= 4\pi \int_0^\infty p^2 dp \\ &= 4\pi(2m) \int_0^\infty \frac{p^2}{2m} dp \\ &= 8\pi m \int_0^\infty E_p \sqrt{\frac{m}{2E_p}} dE_p \\ &= 2^{5/2} \times \pi m^{3/2} \int_0^\infty \sqrt{E_p} dE_p\end{aligned}\quad (8.4)$$

نعوض هذه التغيرات في المعادلة

$$\begin{aligned}\vec{j}_e &= \left( -\frac{2}{3}e^2 \int \frac{2^{5/2} \times \pi \cdot m^{3/2} \times \sqrt{E_p}}{(2\pi\hbar)^3} \tau(E_p) \frac{2}{m} E_p \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} dE_p \right) \times \vec{E} \\ &= \left[ -\frac{2^{3/2}}{3} \frac{e^2}{\pi^2} \frac{m^{1/2}}{\hbar^3} \int_0^\infty \tau(E_p) E_p^{3/2} \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} dE_p \right] \times \vec{E}\end{aligned}\quad (9.4)$$

بالمقارنة مع قانون أوم (1.4) فإننا نجد أن الناقلية تساوي

$$\sigma = -\frac{2^{3/2} e^2 m^{1/2}}{3 \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \tau(E_p) E_p^{3/2} \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} dE_p \quad (10.4)$$

لنتمكن من حساب الناقلية الكهربائية يجب علينا تحديد زمن الإسترخاء  $\tau(E_p)$ .

### 1.2.4 حساب زمن الاسترخاء

يعرف زمن الإسترخاء على أنه الوقت الذي يأخذه النظام لكي يسترخي ويعود إلى وضع التوازن بعد إيقاف تشغيل الحقل الخارجي، عندما يتم الغلق على الحقل الكهربائي فإن حد الإنجراف في الطرف الأول من المعادلة (40.3) سوف يساوي الصفر

$$\left( \frac{\partial f_e(p)}{\partial t} \right)_{coll} = -\frac{f_e(p) - f_e^0(p)}{\tau(p)} \quad (11.4)$$

وبالتالي يمكن تحديد زمن الإسترخاء من خلال حساب حد التصادم

$$\left( \frac{\partial f_p}{\partial t} \right)_{coll} \quad \text{حساب حد التصادمات}$$

$$\left( \frac{\partial f_e(p)}{\partial t} \right)_{coll} = - \int \frac{d^3 \dot{p}}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 \dot{p}_1}{(2\pi\hbar)^3} W(pp_1, \dot{p}\dot{p}_1) \times \\ [f_e(p) f_i(p_1) (1 - f_e(\dot{p})) (1 - f_i(\dot{p}_1)) - f_e(\dot{p}) f_i(\dot{p}_1) (1 - f_e(p)) (1 - f_i(p_1))] \quad (12.4)$$

وفقا لتقريب الأديباتيكي أين الأيونات تعتبر ثقيلة الكتلة ( $m_i \rightarrow \infty$ ) وساكنة بمعنى تتركز في مواقع ثابتة. وعليه خلال عملية التصادم فإن طاقتها ودفعها يبقيان محفوظان :

$$E_{p_1} = E_{\dot{p}_1} \approx 0, \quad p_1 - \dot{p}_1 = 0$$

◀ ومنه يمكن تقريب حد الدلتا في عبارة  $W(pp_1, \dot{p}\dot{p}_1)$  إلى

$$\delta(p + p_1 - \dot{p} - \dot{p}_1) \approx \delta(p_1 - \dot{p}_1) \quad (13.4)$$

حيث  $p_1$  و  $\dot{p}_1$  هما دفع الأيون قبل و بعد التصادم أما  $p$  و  $\dot{p}$  فهما دفع الإلكترون قبل وبعد التصادم

◀ تعالج الأيونات كلاسيكيا أي أن:

$$f_i \ll 1 \Rightarrow (1 - f_i) \approx 1,$$

باستخدام هذه التبسيطات فإن الأيونات تعمل كمراكز لبعثرة الإلكترونات وعليه فإننا نعتبر فقط التصادمات المرنة بين الإلكترون والأيون ( $p_1 = p_1$ ) ونهمل التصادمات إلكترون-إلكترون وذلك بسبب الفارق الكبير بين كتلتهما ( $m_i \gg m_e$ ) بتعويض  $W(p, p_1, p, p_1)$  بـ

$$\frac{2\pi}{\hbar} |V_{ei}(p - \hat{p})|^2 \delta(p_1 - p_1) \delta(E_p - E_{p_1})$$

تصبح المعادلة

$$\left(\frac{\partial f_e(p)}{\partial t}\right)_{coll} = -\frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d^3 \hat{p}}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 \hat{p}_1}{(2\pi\hbar)^3} |V_{ei}(\vec{p} - \vec{\hat{p}})|^2 \delta(p_1 - \hat{p}_1) \delta(E_p - E_{\hat{p}_1}) \times [f_e(p) f_i(p_1) (1 - f_e(\hat{p})) (1 - f_i(\hat{p}_1)) - f_e(\hat{p}) f_i(\hat{p}_1) (1 - f_e(p)) (1 - f_i(p_1))] \quad (14.4)$$

بوضع  $f_i(p_1) = f_i(\hat{p}) = f_i^0(p_1)$  تصبح العبارة

$$\left(\frac{\partial f_e(p)}{\partial t}\right)_{coll} = -\frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d^3 \hat{p}}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 \hat{p}_1}{(2\pi\hbar)^3} |V_{ei}(\vec{p} - \vec{\hat{p}})|^2 \delta(p_1 - \hat{p}_1) \delta(E_p - E_{\hat{p}_1}) f_i^0(p_1) [f_e(p) \times (1 - f_e(\hat{p})) - f_e(\hat{p}) (1 - f_e(p))] \quad (15.4)$$

باستخدام  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - y) dx = f(y)$

$$\left(\frac{\partial f_e(p)}{\partial t}\right)_{coll} = -\frac{2\pi}{\hbar} \int \frac{d^3 \hat{p}}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} f_i^0(p_1) |V_{ei}(\vec{p} - \vec{\hat{p}})|^2 \delta(E_p - E_{\hat{p}_1}) \times [f_e(p) \times (1 - f_e(\hat{p})) - f_e(\hat{p}) (1 - f_e(p))] \quad (16.4)$$

إذن التكامل القائم على دفع الأيونات يفضي إلى الكثافة الأيونية  $n_i$

$$\int \frac{d^3 p_1}{(2\pi\hbar)^3} f_i^0(p_1) = n_i \quad (17.4)$$

ومنه عبارة حد التصادم تصبح

$$\left(\frac{\partial f_e(p)}{\partial t}\right)_{coll} = -2n_i \int \frac{d^3 \hat{p}}{(2\pi\hbar)^3} W(p, \hat{p}) [f_e(p) (1 - f_e(\hat{p})) - f_e(\hat{p}) (1 - f_e(p))] \quad (18.4)$$

لتبسيط الكتابة نضع  $f_e(p) = f_p$  لأنها أصبحت تخص الإلكترون فقط. من خلال هذه العبارة واضح أن حد التصادم يتناسب مع كثافة الأيونات وإحتمال الانتقال  $W(p, \hat{p})$  للحالتين  $p$  و  $\hat{p}$  وإحتلال الحالة الواردة  $f_p$  والصادرة  $f_{\hat{p}}$  مع معاملي باولي  $(1 - f_p)$  و  $(1 - f_{\hat{p}})$ . الآن نقوم

بتبسيط الحد الموجود [...] وذلك بتعويض دالة التوزيع بحل معادلة بولتزمان في تقريب RTA والمعطى بـ:

$$f_p = f_p^0 + \tau_p e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_p^0}{\partial E_p} \quad (19.4)$$

حيث  $f_e(p) = f_p$

$$\begin{aligned} [f_p(1 - f_{\hat{p}}) - f_{\hat{p}}(1 - f_p)] &= (f_p^0 + \tau_p e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_p^0}{\partial E_p})(1 - f_{\hat{p}}^0 - \tau_{\hat{p}} e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_{\hat{p}}^0}{\partial E_{\hat{p}}}) - \\ & (f_{\hat{p}}^0 + \tau_{\hat{p}} e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_{\hat{p}}^0}{\partial E_{\hat{p}}^0})(1 - f_p^0 - \tau_p e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_p^0}{\partial E_p}) \\ &= f_p^0 - f_{\hat{p}}^0 f_{\hat{p}}^0 - f_p^0 (\tau_{\hat{p}} e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_{\hat{p}}^0}{\partial E_{\hat{p}}}) + \tau_p e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_p^0}{\partial E_p} - f_{\hat{p}}^0 (\tau_p e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_{\hat{p}}^0}{\partial E_{\hat{p}}}) \\ & - \underbrace{(\tau_p e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_p^0}{\partial E_p})(\tau_{\hat{p}} e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_{\hat{p}}^0}{\partial E_{\hat{p}}})}_{\propto E^2} - f_{\hat{p}}^0 + f_{\hat{p}}^0 f_p^0 + \underbrace{f_{\hat{p}}^0 (\tau_p e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_{\hat{p}}^0}{\partial E_{\hat{p}}})}_{\propto E^2} + \\ & \underbrace{(\tau_p e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_p^0}{\partial E_p})(\tau_{\hat{p}} e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_{\hat{p}}^0}{\partial E_{\hat{p}}})}_{\propto E^2} - \tau_p e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_{\hat{p}}^0}{\partial E_{\hat{p}}} + \underbrace{f_p^0 (\tau_{\hat{p}} e \vec{E} \cdot \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_{\hat{p}}^0}{\partial E_{\hat{p}}})}_{\propto E^2} \\ &= f_p^0 - f_{\hat{p}}^0 + e \vec{E} \cdot (\tau_p \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_p^0}{\partial E_p} - \tau_{\hat{p}} \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f_{\hat{p}}^0}{\partial E_{\hat{p}}}) + O(E^2) \quad (20.4) \end{aligned}$$

باعتبار أن التصادم بين الإلكترون والأيون مرن ومتماثل المناحي أي : لأجل أي زاوية تصادم فإن  $f_p^0 = f_{\hat{p}}^0$  و  $E_p = E_{\hat{p}}$  ،  $|\vec{p}| = |\vec{\hat{p}}|$  زاوية التشتت (التبعثر)  $\Theta$  :

$$\vec{E} \cdot \vec{p} = E p \cos \Theta,$$

$$\sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) = \frac{q}{2p}$$

و

$$\vec{E} \parallel \vec{p}$$

وبما أن  $\tau_p$  مقدار سلمي فإن العبارة :

$$[f_p(1 - f_{\hat{p}}) - f_{\hat{p}}(1 - f_p)] = e E \tau_p \frac{p}{m} (1 - \cos \Theta) \cdot \frac{\partial f_p^0}{\partial E_p} \quad (21.4)$$

بتعويض احتمال التصادم

$$W(p, p_1) = \frac{\pi}{\hbar} |V_{ei}(\vec{p} - \vec{\hat{p}})|^2 \delta(E_p - E_{\hat{p}}) \quad (22.4)$$

وكذا العبارة (20.4) في حد التصادم (18.4) نجد

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial f_p}{\partial t}\right)_{coll} &= -2n_i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\pi}{\hbar} |V_{ei}(\vec{p} - \vec{p}')|^2 \delta(E_p - E_{p'}) \times \left\{ eE\tau_p \frac{p}{m} (1 - \cos \Theta) \frac{\partial f_p^0}{\partial t} \right\} \\
 &= -\frac{f_p - f_p^0}{\tau_p} \\
 &= -\frac{f_p^0 + e\tau_p E \frac{p}{m} \frac{\partial f_p^0}{\partial E_p} - f_p^0}{\tau_p} \\
 \Rightarrow \frac{1}{\tau_p} &= 2n_i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\pi}{\hbar} |V_{ei}(\vec{p} - \vec{p}')|^2 \delta(E_p - E_{p'}) (1 - \cos \Theta) \quad (23.4)
 \end{aligned}$$

يمكن وصف عبارة زمن الإسترخاء (23.4) بدلالة كمية الحركة المحولة  $q$  كما هو موضح في الشكل (1.4) حيث

$$1 - \cos \Theta = 2 \frac{\sin^2 \Theta}{2} = 2 \left( \frac{q}{2p^2} \right) \text{ و } \vec{p}' = \vec{p} - \vec{q}$$

وعليه عبارة زمن الإسترخاء تصبح

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau_p} = 2n_i \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\pi}{\hbar} |V_{ei}(q)|^2 \delta(E_p - E_{p'}) \left[ 2 \left( \frac{q}{2p^2} \right) \right] \quad (24.4)$$

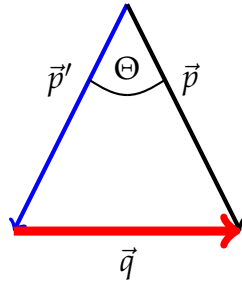
يمكن تبسيط عبارة  $\delta(E_p - E_{p'})$  لحفظ الطاقة إذن

$$\begin{aligned}
 \delta(E_p - E_{p'}) &= \delta\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{(\vec{p} - \vec{q})^2}{2m}\right) \\
 &= \delta\left(\frac{p^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{2m} + \frac{2\vec{p} \cdot \vec{q}}{2m}\right) \\
 &= \delta\left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{m} - \frac{q^2}{2m}\right) \\
 &= \delta\left(\frac{pq \cos \theta}{m} - \frac{q^2}{2m}\right) \\
 &= \frac{m}{pq} \delta\left(\cos \theta - \frac{q}{2p}\right) \quad (25.4)
 \end{aligned}$$

$$\delta(E_p - E_{p'}) = \frac{m}{pq} \delta\left(\cos \theta - \frac{q}{2p}\right) \quad (26.4)$$

بما أن

$$-1 \leq \cos \theta = \frac{q}{2p} \leq 1 \quad \Rightarrow q \leq 2p$$



شكل 1.4: يوضح الشكل توازن دفع التصادم المرن بين الأيون والإلكترون مع زاوية تشتت  $\Theta$  وكمية حركة متبادلة  $q$ .

وبالتالي :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tau_p} &= 2n_i \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\pi}{\hbar} |V_{ei}(q)|^2 2\left(\frac{q}{2p}\right)^2 \times \frac{m}{pq} \delta(\cos\theta - \frac{q}{2p}) \\
 &= 2n_i \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d(-\cos\theta) \int_0^\infty \frac{dq}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\pi}{\hbar} |V_{ei}(q)|^2 \times \\
 &\quad q^2 \cdot 2\left(\frac{q}{2p}\right)^2 \frac{m}{pq} \delta(\cos\theta - \frac{q}{2p}) \\
 &= 2n_i \times \frac{1}{2\pi\hbar^4} \frac{m}{4p^3} \int_0^{2p} q^3 dq \times |V_{ei}(q)|^2 \quad (27.4)
 \end{aligned}$$

لتحديد زمن الإسترخاء يتعين علينا تحديد احتمال الإنتقال المعطى بدلالة كمية الحركة المتبادلة  $q$  والتي يتم مكاملتها من 0 إلى أقصى نبضة إرسال منبعثة عن التشتت المرتد  $\Theta = 180^\circ$  وبالتالي  $q = 2p$ .

بالنسبة لـ  $|V_{ei}(q)|^2$  في تقريب بورن فإننا نأخذ تحويل فوري لكامون حجب ديبياي  $V_{ei}(q) = \frac{-e^2\hbar^2}{\epsilon_0 q^2}$  في فضاء دفع الخطي  $q$  لأن الكمون كولوم يتباعد بسبب تأثير بعيد المدى.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\tau_p} &= 2n_i \times \frac{1}{2\pi\hbar^4} \times \frac{m}{4p^3} \int_0^{2p} q^3 \frac{e^4\hbar^4}{\epsilon_0^2 q^4} dq \\
 &= n_i \frac{me^4}{4\pi\epsilon_0^2 p^3} \int_0^{2p} \frac{dq}{q} \\
 &= n_i \frac{me^4}{4\pi\epsilon_0^2 p^3} [\ln(q)]_0^{2p} \\
 &= n_i \frac{me^4}{4\pi\epsilon_0^2 p^3} [\ln]_0^\infty
 \end{aligned}$$

نلاحظ أنه لدينا تباعد لقيمة زمن الإسترخاء في كل من الحدين العلوي والسفلي لأن الإلكترونات موزعة حراريا وبالتالي الحد العلوي  $p \rightarrow \infty$  ونفس الشيء عند الحد السفلي  $p \rightarrow 0$  يحدث التباعد مما يعني أن النتيجة غير فيزيائية ولحل هذا علينا إدخال ما يعرف بطريقة القطع أي

$$\frac{1}{\tau_p} \sim [\ln q]_{q_{min}}^{q_{max}} \quad (28.4)$$

حيث

$q_{min}$  : يوافق أقصى إمتداد للكوم والمقدر بطول ديبي  $\frac{1}{\lambda_D}$ ،  
 $q_{max}$  : يحدد بأدنى مسافة لتبعثر والمعطاة بطول لانداو  $\frac{1}{l}$ ، ومنه الكمية

$$\ln \frac{q_{max}}{q_{min}} = \ln \frac{2\lambda_D}{l} = \ln \Lambda \quad (29.4)$$

$\ln \Lambda$  هو لوغاريتم كولوم، يتم أخذ  $2\lambda_D$  وذلك لتغطية كامل منطقة تأثير الكوم. بما أن طول لانداو يتعلق بدرجة الحرارة  $l(T)$  وطول ديبي بالحرارة  $\lambda_D(T, n)$ ، وبالتالي فإن زمن الإسترخاء هو الآخر يتحدد بدلالة وسائط البلازما درجة الحرارة  $T$  والكثافة  $n$  ومقلوب زمن الإسترخاء  $\frac{1}{\tau_p}$  هو تواتر التصادمات حيث :

$$\frac{1}{\tau_p} = n_i \frac{e^4 m}{4\pi\epsilon_0^2 p^3} \ln \Lambda \quad (30.4)$$

$$= \nu_p \quad (31.4)$$

وعليه عبارة الناقلية الكهربائية  $\sigma$  لأجل بلازما الهيدروجين متأينة كليا أين  $n_e = n_i$  تصبح:

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{2}{3} \frac{e^2 \sqrt{2m}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \tau(E_p) E_p^{3/2} \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} dE_p \\ &= -\frac{2}{3} \frac{e^2 \sqrt{2m}}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty E_p^{3/2} \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} dE_p \times \frac{4\pi\epsilon_0^2 p^3}{n_i e^4 m \ln \Lambda} \\ &= -\frac{2^{3/2}}{3} \frac{1}{\pi^2 \hbar^3} \frac{4\pi\epsilon_0^2}{n_i e^2 \sqrt{m} \ln \Lambda} \int_0^\infty E_p^{3/2} p^3 \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} dE_p \end{aligned} \quad (32.4)$$

ولأجل الحصول على نتيجة الناقلية في الحالة الكلاسيكية للبلازما ( $T \rightarrow \infty$ ) فإننا نجري هذا التغيير:

$$\frac{\partial f_p^0}{\partial p} = -\beta f_p^0 (1 - f_p^0) \quad (33.4)$$

حيث

$$f_p^0 = \frac{1}{e^{\beta(E_p - \mu_e)} + 1}$$

و  $\mu_e = k_B T \ln[n_e \lambda_e^3 / 2]$  ، وبالتالي

$$\begin{aligned} -\beta f_p^0 (1 - f_p^0) &\approx -\beta f_p^0 \\ &\approx \frac{-1}{k_B T} \underbrace{\exp \beta \mu_e}_{\frac{n_e \lambda_e^3}{2}} \exp[-\beta E_p] \end{aligned} \quad (34.4)$$

حيث  $\lambda_e^3 = \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m k_B T} \right)^{3/2}$  هو طول الموجي الحراري، بأخذ  $p = (2mE_p)^{1/2}$  وبالتالي حد التكامل يعطى

$$\int_0^\infty dE E^3 \exp[-\beta E] = 6(k_B T)^4 \quad (35.4)$$

ومنه عبارة الناقلية تصبح :

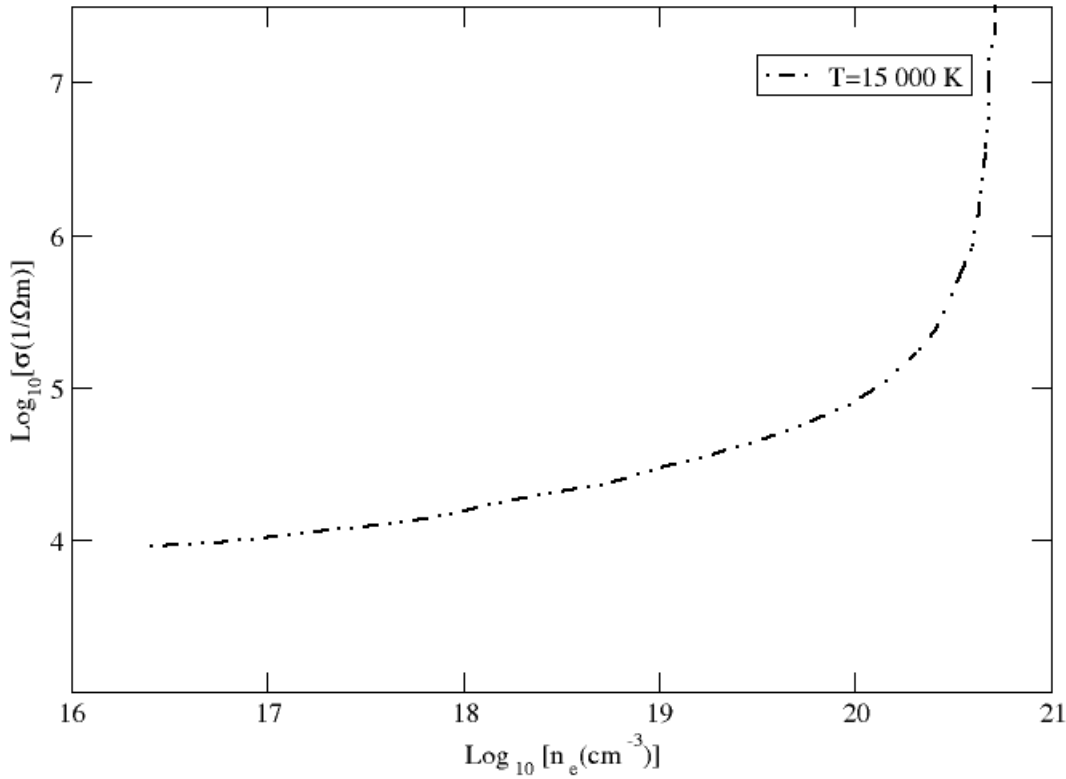
$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{(2)^{3/2}}{3} \times \frac{4\pi\epsilon_0^2}{e^2 m^{1/2} \pi^2 \hbar^3 \ln \Lambda} \frac{(2m)^{3/2}}{k_B T} \frac{n_e \lambda_e^3}{2} 6(k_B T)^4 \\ &= \frac{(4\pi\epsilon_0^2)^2 m}{e^2 \pi^3 \hbar^3 \ln \Lambda} \left( \frac{2\pi \hbar^2}{m k_B T} \right)^{3/2} 2(k_B T)^3 \\ &= 2 \left( \frac{2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 (k_B T)^{3/2}}{e^2 m^{1/2}} \frac{1}{\ln \Lambda} \\ &= f \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 (k_B T)^{3/2}}{e^2 m^{1/2}} \frac{1}{\ln \Lambda} \\ &= f \sigma^* \frac{1}{\ln \Lambda} \end{aligned} \quad (36.4)$$

حيث  $f = 2(2/\pi)^{3/2} = 1.0159$  وهو معامل سبيتزر Spitzer و

$$\sigma^* = \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 (k_B T)^{3/2}}{e^2 m^{1/2}} \quad (37.4)$$

$$= 820 \left[ \frac{T}{10^3 k} \right]^{3/2} \left( \frac{1}{\Omega m} \right) \quad (38.4)$$

العبارة (36.4) للناقلية الكهربائية هي عبارة عن نتيجة كلاسيكية لتوصيليه البلازما في نموذج غاز لورنتز (تفاعل e-i فقط) وتعرف هذه العلاقة بعبارة سبيتزر Spitzer [12]، وهي صالحة لأجل بلازما ذات كثافة منخفضة أدنى من  $n_e = 10^{-18} \text{cm}^{-3}$  [13].



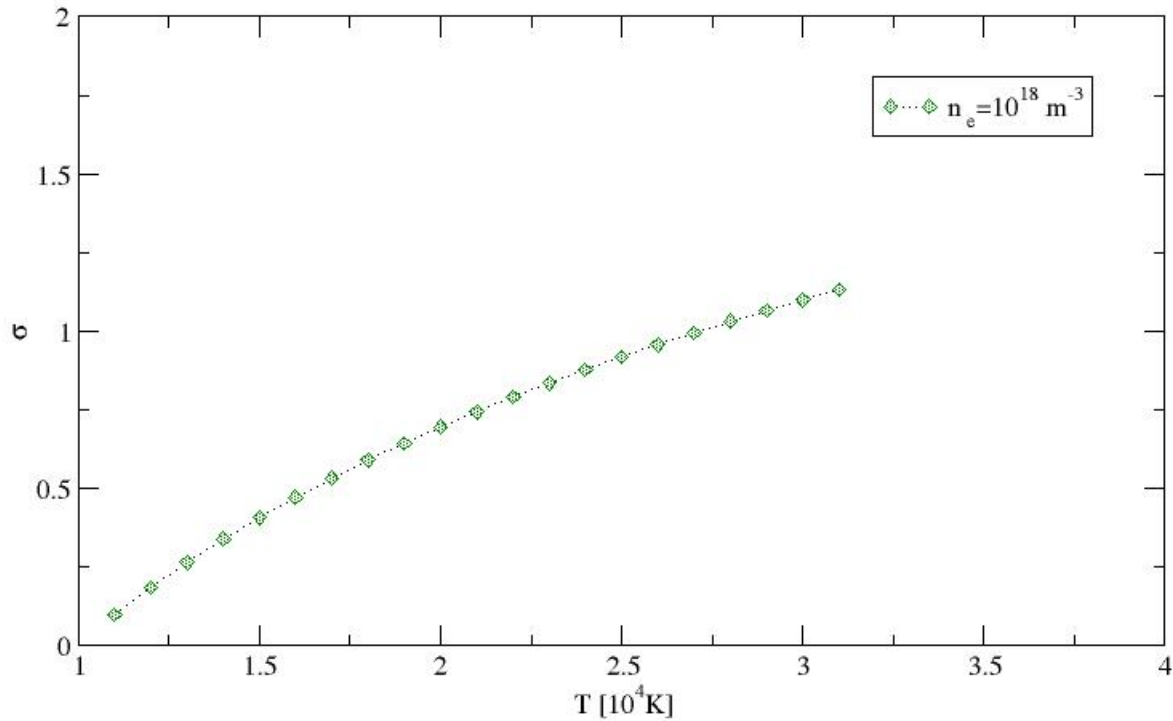
شكل 2.4: الناقلية الكهربائية حسب عبارة سبيتزر بدلالة الكثافة  $n_e$  وعند درجة حرارة  $T = 15000\text{K}$  [13].

### 3.4 مناقشة ومقارنة مع مختلف الطرق

تعد نتيجة الناقلية الكهربائية لسبيتزر (36.4) خاصة بالبلازما الكلاسيكية كما هو مبين في الشكل (3.4) حيث نلاحظ أن هذه العبارة تتباعد عندما تصبح البلازما غير مثالية وذلك عند الكثافات العالية، وبالتالي فإنه من الضروري إدخال تحسينات وإعتبرات في الحسابان ونذكر منها على سبيل المثال:

- يجب إعتبار التصادمات القوية بين الجسيمات، وبالتالي يجب استبدال تقريب بورن بالمصفوفة  $T$ .

- يحدث التأين الكلي للبلازما عند درجات الحرارة العالية فقط. لكن عموماً تكون درجة التأين  $\alpha_{ion} \leq 1$ ، لذلك يجب أخذ التأين الجزئي للبلازما بعين الاعتبار حيث تقلل



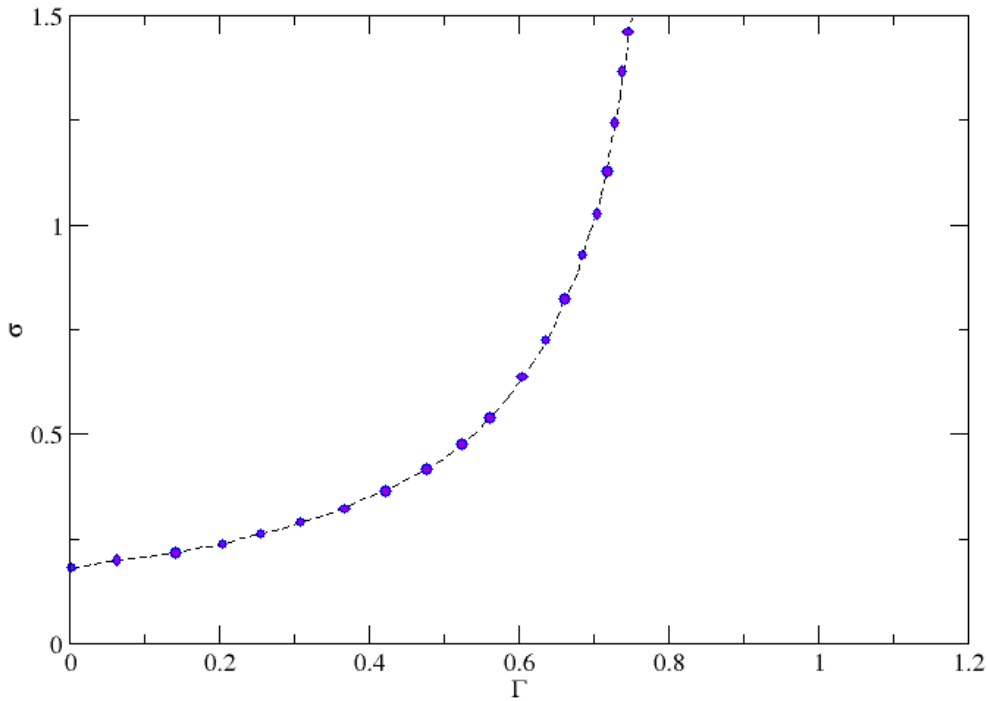
شكل 3.4: الناقلية الكهربائية حسب عبارة سبيتزر بدلالة درجة الحرارة  $T$  وعند كثافة ثابتة  $n_e = 10^{18} \text{m}^{-3}$ .

التصادمات مع الجزيئات أو الذرات من عدد ناقلات الشحنة الحرة وكذلك من تنقلها خلال عمليات التشتت الموائية.

• عند إعتبار التفاعل إلكترون-إلكترون في حساب الناقلية فإن معامل سبيتزر يصبح  $f^{ei+ee} = 0,5908$  وهذا يعني أن إدراج هذا التفاعل سوف يقلل من قيمة الناقلية الكهربائية بنسبة 60%.

في حالة زمن الإسترخاء ثابت فإن العلاقة (10.4) تؤدي إلى عبارة الناقلية لدرود Drude (أنظر الملحق 1.)

$$\sigma = \frac{\tau n_e e^2}{m} \quad (39.4)$$



شكل 4.4: الناقلية الكهربائية حسب عبارة سبيتزر كدالة لوسيط الترابط  $\Gamma$  [14].

هناك طرق أخرى لحل معادلة بولتزمان منها على سبيل المثال طريقة شابمان - إنزوكوغ Chapman - Enskog والتي تعتمد على نشر دالة التوزيع حالة الإضطراب على كثير حدود سونين Sonine [15] وكذلك طريقة غراد Grad والتي تعتمد على نفس طريقة شابمان لكن بإستخدام كثير حدود هرميت Hermite [16] ، بالإضافة إلى نظرية الإستجابة الخطية LRT والمعتمدة على صيغة زوبروف Zubarev [17] في تعميم معادلة بولتزمان والتي نتعامل مع دوال الترابط حيث تعطى عبارة الناقلية بدلالة دالة الترابط للقوة - قوة [18]. الجدول (1.4) أدناه يعرض قيم المعامل  $f_{ei}$  بأخذ فقط تفاعل إلكترون - أيون والمعامل  $f_{ei+ee}$  في حالة إدراج التفاعل إلكترون - إلكترون لطرق مختلفة في حساب الناقلية أين نلاحظ بعض الفروقات الصغيرة بينها في قيم المعامل المضروب في عبارة الناقلية (36.4).

$f^{ei+ee}$	$f^{ei}$	الطريقة
-	1.0159	RTA
0.5908	1.0159	نظرية سبيتزر
0.578	0.972	طريقة غراد
0.5892	1.0158	LRT عند درجة العزم 4

جدول 1.4: مقارنة بين بعض قيم المعاملين  $f^{ei}$  و  $f^{ei+ee}$  المتحصل عليها بطرق حساب مختلفة للبلازما كلاسيكية [9].

في حالة البلازما عالية الكثافة فإن عبارة سبيتزر تصبح غير صالحة وتحل مكانها عبارة زيمان Ziman والمعطاة بالعبارة التالية [19]:

$$\sigma_{Ziman} = \frac{12\pi^3 e^2 n_e^2 \hbar^3}{n_i m^2} \left[ \int_0^{2k_F} dq q^3 |V(q)|^2 \right]^{-1} \quad (40.4)$$

لأن في حالة الكثافة العالية ودرجة الحرارة منخفضة يكون لدينا  $k_B T \ll E_F$  وبالتالي الإلكترونات تكون منحلة ، بالنسبة إلى أخذ تقريب بورن لحساب مصفوفة الاضطراب فإنه يبقى صالحا كون البلازما عالية الكثافة تزيد من شدة الحجب وبالتالي يصبح الكمون أقل تأثيرا.

# خلاصة عامة

## خلاصة عامة

تعد معاملات النقل ذات أهمية كبيرة في تشخيص البلازما حيث تعطي فكرة عن طبيعة التصادمات والتفاعلات داخل البلازما كما يمكننا من خلال هذه معاملات معرفة خصائص الداخلية للكواكب العملاقة أو الأقزام البيضاء، كما تحدد هذه المعاملات الخصائص الفيزيائية للبلازما. في هذه المذكرة قمنا بحساب معامل الناقلية الكهربائية للبلازما في وجود حقل كهربائي خارجي ضعيف أين تكون إستجابة النظام لهذا الحقل خطية وذلك إنطلاقاً من قانون أوم أين عبرنا عن الناقلية الكهربائية بدلالة مشتق دالة التوزيع في حالة عدم التوازن، لتحديد دالة التوزيع قمنا بحل معادلة بولتزمان باستخدام ما يدعى بتقريب زمن الإسترخاء والذي هو مبني على إفتراض أن الأيونات ثقيلة وتشكل خلفيه لتعادل البلازما وبالتالي نتعامل فقط مع الإلكترونات (تقريب أديباتيكي) أي أخذ نموذج لورنتز وكذلك إعتبار دالة التوزيع مستقلة عن الزمن أي أنها في الحالة المستقرة وكذا أخذ الفضاء متجانس أين مشتق الموضع بالنسبة لدالة التوزيع يساوي الصفر.

لتحديد زمن الإسترخاء قمنا بحساب حد التصادم وذلك بأخذ الإعتبارات التالية: نعتبر الإلكترونات متحركة والأيونات ثقيلة الكتلة و ساكنة بمعنى تتركز في مواقع ثابتة وعليه خلال عملية التصادم فإن الطاقة والدفع يبقيان محفوظان أي تعالج الأيونات كلاسيكياً بالإضافة إلى إعتبار فقط التصادمات المرنة بين الإلكترونات والأيونات وإهمال التصادمات بين إلكترون-إلكترون وذلك بسبب الفارق الكبير بين كتلتهما. أخيراً تحصلنا على نتيجة الناقلية الكهربائية للبلازما مؤينه كلياً وهي معروفة باسم عبارة الناقلية الكهربائية لسبيتزر وهي صالحه فقط لوصف بلازما منخفضة الكثافة أي أدنى من  $n_e = 10^{18} \text{cm}^{-3}$  [13]. أما عند البلازما عالية الكثافة أين تكون الإلكترونات منحلة (معالجة كمية) فإن عبارة زيمان هي الأنسب لوصف ناقلية البلازما.

ملاحق

# ملاحق

## 1. حساب عبارة الدرد للناقلية

إنطلاقاً من المعادلة (10.4):

$$\sigma = \frac{-2^{3/2} e^2 m^{1/2}}{3 \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \tau(E_p) E_p^{3/2} \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} dE_p \quad (41)$$

حيث نعتبر زمن الإسترخاء ثابت أي  $\tau(E_p) = \tau = cst$

$$\sigma = \frac{-2^{3/2} e^2 m^{1/2}}{3 \pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \tau E_p^{3/2} \frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} dE_p \quad (42)$$

وبأخذ نهاية الكلاسيكية فإن حد إشتقاق دالة التوزيع يعطى

$$\frac{\partial f_e^0(p)}{\partial E_p} = \frac{-1}{K_B T} \left( \frac{n_e \lambda_e^3}{2} \right) \exp[-\beta E_p] \quad (43)$$

بالتعويض في العلاقة (42) نجد

$$\sigma = \frac{2^{3/2} e^2 m^{1/2}}{3 \pi^2 \hbar^3} \tau \frac{1}{K_B T} \frac{n_e \lambda_e^3}{2} \int_0^\infty E_p^{3/2} \exp[-\beta E_p] dE_p \quad (44)$$

بتعويض الطول الموجي الحراري بعبارته  $\lambda_e^3 = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mK_B T} \right)^{3/2}$  في العلاقة السابقة نجد:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2^{3/2} e^2 m^{1/2}}{3 \pi^2 \hbar^3} \tau \frac{1}{K_B T} \frac{n_e}{2} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mK_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty E_p^{3/2} \exp[-\beta E_p] dE_p \\ &= \frac{2^{3/2} e^2 m^{1/2}}{3 \pi^2 \hbar^3} \tau \frac{1}{K_B T} \frac{n_e}{2} \frac{2^{3/2} \pi^{3/2} (\hbar^2)^{3/2}}{m^{3/2} (K_B T)^{3/2}} \int_0^\infty E_p^{3/2} \exp[-\beta E_p] dE_p \\ &= \frac{4e^2 n_e \tau}{3\pi^{1/2} m (K_B T)^{5/2}} \int_0^\infty E_p^{3/2} \exp[-\beta E_p] dE_p \end{aligned} \quad (45)$$

حيث التكامل على الطاقة يعطى

$$\int_0^{\infty} E_p^{3/2} \exp[-\beta E_p] dE_p = \frac{3\pi^{1/2}}{4} (K_B T)^{5/2} \quad (46)$$

ومنه تصبح عبارة الناقلية (45) كالتالي :

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{4e^2 n_e \tau}{3\pi^{1/2} m (K_B T)^{5/2}} \frac{3\pi^{3/2}}{4} (K_B T)^{5/2} \\ &= \frac{\tau n_e e^2}{m} \end{aligned} \quad (47)$$

تدعى العبارة (47) للناقلية بعبارة درود للناقلية الكهربائية.

## 2. برهان العلاقة $\cos \theta = q/2p$

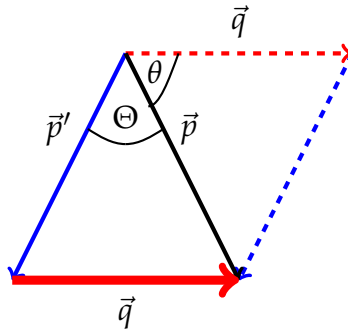
من خلال الشكل

$$\vec{q} + \vec{p}' - \vec{p} = 0 \quad (48)$$

$$(\vec{p}')^2 = (\vec{p} - \vec{q})^2 \quad (49)$$

$$p'^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta \quad (50)$$

$$q^2 = 2pq \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{q}{2p} \quad (51)$$



شكل 5: يوضح الشكل الزاوية  $\theta$  بين  $\vec{p}$  و  $\vec{q}$ .

# قائمة المراجع

# المراجع

[1] J. R. Adams. Magnetotransport properties of dense plasmas, Ph. D thesis at Rostock University, 2007.

[2] وليد مصطفى الصهيوني. مقدمة في فيزياء البلازما. دار الفكر المعاصر 2007

[3] R. Fitzpatrick. Plasma Physics an Introduction, (CRC Press: New York) 2015.

[4] سعد الله إبراهيم. محاضرات في البلازما. جامعة الوادي 2018

[5] E. Kilpua & H. Koskinen. Introduction to Plasma Physics, Lecture notes. University of Helsinki, Finland (2015).

[6] J. A. Bittencourt, Fundamentals of Plasma Physics, 3rd edn (New York: Springer-Verlag) 2004.

[7] D.Bauer. Plasma & Astrophysics, Lecture notes. Rostock University, Germany (2005).

[8] MA.Lieberman A.J.Lichtenberg. Principles of Plasma Discharges and Materials Processing (New York:John Wiley & Sons,1994),1-22.

[9] R. Redmer. Einführung in die Plasma-und Astrophysik, Lecture notes. Rostock University, Germany (2018).

[10] D.Kremp, M.Schlages and W.-D.Kraeft. Quantum Statistics of Nonideal Plasmas Processing (Springer, Berlin, 2005).

[11] G. Röpke. Non-equilibrium Statistical Physics Processing (Wiley -VCH, Weinheim, 2013).

[12] L. Spitzer & R. Härm . Phys. Rev.,89. 977, 1953.

[13] H. Reinholz et al. Phys. Rev. E, 52. 5368, 1995.

[14] J. R. Adams et al. Phy of Plasmas. 14. 062303, 2007.

[15] S. Chapman and T.G. Cowling. The Mathematical Theory of Non-uniform Gases. Cambridge University Press, Cambridge, 1953.

[16] H. Grad. Principles of the kinetic theory of gases. In S. Flügge, editor, Handbuch der Physik, Bd. XXII. Springer, Berlin, 1958.

- [17] D.N. Zubarev. Statistische Thermodynamik des Nichtgleichgewichts. Akademie-Verlag, Berlin, 1976.
- [18] V. Christoph & G. Röpke. Theory of inverse linear response coefficients. Phys. Stat. Sol. (b), 131. 11, 1985.
- [19] J.M. Ziman. A theory of the electrical properties of liquid metals. I: The monovalent metals. Phil. Mag., 6. 1013, 1961.

## ملخص

قنا في هذه العمل بحساب معامل الناقلية الكهربائية لبلازما مؤينة كليا وذلك إنطلاقا من قانون أوم حيث تم التعبير عن الناقلية الكهربائية بدلالة مشتق دالة التوزيع للنظام في حالة عدم التوازن. لإيجاد هذه الأخيرة قنا بحل معادلة بولتزمان في حالة وجود حقل كهربائي خارجي ضعيف، بحيث تكون إستجابة النظام خطيه مع إعتبار أن  $\nabla_r f=0$  و  $\partial f/\partial t=0$  وذلك بإستخدام ما يعرف بتقريب زمن الإسترخاء والمعتمد على إعتبار أن الأيونات ثقيلة تكون الحركة فقط للإلكترونات (نموذج غاز لورنتز) بالإضافة إلى إعتبار تفاعل أيون - إلكترون فقط. في الأخير وجدنا أن نتيجة الناقلية الكهربائيه المتحصل عليها تعرف باسم عبارة سبيتزر للناقلية الكهربائيه والتي تصلح فقط لوصف البلازما منخفضة الكثافة، أما عند البلازما عالية الكثافة حيث تظهر الأفعال الكمية فإن عبارة زيمان هي الأنسب لوصف الناقلية الكهربائيه للبلازما.

الكلمات المفتاحية : الناقلية الكهربائيه للبلازما - معادلة بولتزمان - تقريب زمن الإسترخاء - حد التصادم.

## Abstract

In this work, we calculated the electrical conductivity coefficient for a fully ionized plasma based on Ohm's law, where the electrical conductivity was expressed in terms of the derivative of the distribution function of the system in non-equilibrium case. To find the latter, we have solved the Boltzmann equation in the case of a weak external electric field which ensure the response of the system to be linear, also we have considered that  $\nabla_r f=0$  and  $\partial f/\partial t=0$  by using the so-called the relaxation time approximation, which is based on the fact that ions are heavy and therefore we consider only motion of electrons (the Lorentz gas model) as well as considering only ion-electron interaction. Finally, we obtained an expression for electrical conductivity known as the Spitzer formula, which is solely suitable for the description of low-density plasma. For high density plasma where the quantum effects are take place, the Ziman formula is valid instead to describe the electrical conductivity of the plasma.

**Keywords:** Electrical conductivity of plasma - Boltzmann equation - Relaxation time approximation - collision term.