



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Analyse mathématique d'un problème
aux limites en thermo-viscoélasticité**

Présenté par:

Belkhir Naziha
Chemsa Kaouthar

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Lattoufa Yacine
Azeb Ahmed Abdelaziz
Hadj Ammar Tedjani

MCA.
MCA.
MCA

Président
Rapporteur
Examineur

Univ. El Oued
Univ. El Oued
Univ. El Oued

إهداء

بسم الله الرحمن الرحيم
(وقل إعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون)
صدق الله العظيم

الحمد لله العلي القدير الذي وفقنا في إنجاز هذا العمل المتواضع الذي كان نجاحنا بيديه
أهدي ثمرة هذا العمل المتواضع :
إلى من خلد الله ذكرها في القرآن يتلى إلى يوم الدين... وجعل الجنة تحت قدميها... إلى من
حملتني وهنا على وهن... أمي الحبيبة
إلى من جرع الكأس فارغاً ليسقيني قطرة حب... إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي
طريق العلم... إلى القلب الكبير... أبي العزيز
إلى من هم أقرب إليّ من روحي... إلى من شاركني حضن الأم... إخوتي..
إلى أزهار النرجس التي تفيض حباً وطفولةً ونقاءً وعطراً... إلى أخواتي الغاليات ...
سمية ... زينب ... فيروز
إلى زوجات إخوتي... زوج أختي... أبناء أختي وإخوتي بنات الخالة والخال
إلى صديقاتي اللواتي تسكن صورهن وأصواتهن أجمل اللحظات والأيام التي عشتها طيلة مشواري
الجامعي ... كوثر ... روضة ... شاهيناز... خلود
إلى الأخوات اللواتي لم تدهن أمي ... صفاء... وسام... ندى
إلى الأقلية النادرة التي أحب ... إلى كل أسرتي من منتسبي الحركة الكشفية... إلى عاشقتها
القائدة هادية
إلى كل من جال مذكرتي ... وسقطو سهوا من قلبي ولم تذكرهم كلمتي... إلى من نسيم القلم
ولم ينسأهم القلب

الطالبة بالخير نزيهة

إهداء

هاهي أيامي تسير نحو المجد و أزين لوحة عمري بأجمل لوحات العمر , لحظة لطلما تمنيتها
وحلمت بها وزرعت أفكارى وورودا لها , لحظة تعبت لأجل أن أنالها واجتهدت وثابرت ...وبهذا
أغتتم هذه الفرصة لأهدي ثمرة جهدي الى اللذين قال فيهما الشاعر :

حبي إليهم لا يضاهى ما عدا
حبي لربي والنبي محمدا
أبويا لو جادوا علينا بالرضا
يكن الطريق الى الجنان ممهدا
أبويا كنتم على الدوام تناضلا
كي تجعلوني بين قومي سيذا

إلى اللذين قال رب الكون في حقهم " سنشد عضدك بأخيك "
إخواني

إلى اللتي لا دنيا تقارن بها , ولا وطن يغني عنها فالعالم يحتاج قلوبا كطهر قلبها أختي
شمسة

إلى زوجة أخي الغالية أميرة

إلى من التقينا غرباء وافترقنا أصدقاء إلكن رفيقاتي
روضة ... شاهيناز ... ميمونة ... خلود

إلى اللتي أقول لها جميل أن يكون لك قلب أنت ملكه وأجمل أن يكون لك صديق أنت قلبه
نزيهة

إلى اللذين يتركون بنا أشياء سعيدة تجعلنا نبتسم حين تبدو حياة كئيبة
جهاد, عبير , هدى , إسلام , وريدة

إلى أرواح رحلوا وذكراهم لم ترحل أبدا جدي
محمد العيد وبن سالم

إلى اللذين وسعتهم الصدور ولم تسعهم السطور

الطالبة شمسة كوثر

كلمة شكر

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم: " من لم يشكر الناس لم يشكر الله "

الحمد لله على إحسانه والشكر له على توفيقه وامتنانه ونشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له تعظيما لشأنه ونشهد أن سيدنا ونبينا محمد عبده ورسوله الداعي إلى رضوانه صلى الله عليه وآله وأصحابه وأتباعه وسلم.

وبعد شكرنا الله الذي وفقنا لإتمام هذا العمل المتواضع، لا بد لنا ونحن نخطو خطواتنا الأخيرة في الحياة الجامعية من وقفة نعود بها إلى أعوام قضيناها في رحاب الجامعة مع أساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين بذلك جهودا كبيرة في بناء جيل الغد لتبعث الأمة من جديد... وقبل أن نمضي تتوجه بأسمى آيات الشكر والامتنان والمحبة إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة... إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة إلى جميع أساتذتنا الأفاضل،

كما نتقدم بخالص الشكر والتقدير والإحترام لأستاذنا الفاضل الدكتور "د.عازب أحمد عبد العزيز" الذي كان له فضل الإشراف على هذه الرسالة فكان نعم المرشد والموجه

كما نتسع دائرة شكرنا إلى الأستاذين الفاضلين "د.بلول السعيد" و "د.عيساوي عادل" على ما قدماه من عون ومساعدة.

وأخيرا لا يفوتنا أن نعبر عن بالغ تحياتنا إلى كل من زرعوا التفاؤل في دربنا، وقدموا لنا المساعدات والتسهيلات والأفكار والمعلومات، ربما دون أن يشعروا بدورهم بذلك، وأخص منهن الزميلتين: ' فردية روضة'... 'باللهوشي شاهيناز'.

"رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي وعلى والدي وأن أعمل صالحا ترضاه وأدخلني برحمتك في عبادك الصالحين"

Table des matières

Introduction générale	1
1 Modélisation	3
1.1 Cadre physique	3
1.2 Modèle mathématique	5
1.3 Lois de comportement	6
1.4 Conditions aux limites	8
1.4.1 La condition aux limites de déplacement	8
1.4.2 La condition aux limites de traction.	8
1.4.3 La condition aux limites de contact bilatérale	8
1.4.4 La condition de contact avec compliance normale	9
1.5 Contact avec ou sans frottement	10
1.5.1 Contact sans frottement	10
1.5.2 Contact avec frottement	10
1.6 Contact avec frottement et adhésion	11
2 OUTILS MATHÉMATIQUES	16
2.1 Espaces fonctionnels	16
2.1.1 Fonctions continues et continûment différentiables	17
2.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$	17
2.1.3 Espace de Sobolev	18
2.2 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence	19
2.3 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	23

2.3.1	Fonctions convexes et semi-continuité inférieure	23
2.3.2	Opérateurs fortement monotones	24
2.3.3	Inéquations quasi-variationnelles elliptiques d'évolution	25
2.4	Enoncés de certains théorèmes	27
2.5	Compléments divers	28
2.5.1	Lemmes de Gronwall	29
3	Position du problème thermo-mécanique et hypothèses	31
3.1	Formulation variationnelle	37
4	Existence et unicité de la solution	41
4.1	Résultat d'existence et d'unicité	41
	Conclusion générale	53
	Bibliography	56

Notations Principales

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 1, 2, 3)$, on note par.

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω
Γ	la frontière de Ω , supposée souvent régulière.
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3}, a, b)$	une partie de la frontière Γ .
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue (d-1) dimensionnelle de Γ_1 .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v définies sur $\overline{\Omega}$.
σ_ν, σ_τ	les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel σ définies sur $\overline{\Omega}$.
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
$D'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω .
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$.
Q	l'espace $L^2_s(\Omega)^{d \times d}$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$.
Q_1	l'espace $\{\sigma \in Q \text{ tel que } \operatorname{div} \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H'_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

H^d	l'espace $\{x = x_i/x_i \in H\}$.
$H_s^{d \times d}$	l'espace $\{x = x_{ij}/x_{ij} = x_{ji} \in H\}$.
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de H .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$	le produit de dualité entre H' et H .
$\ \cdot\ _H$	La norme de H .
H'	l'espace dual de H .

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par :

$C(0, T; H)$	l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ dans H .
$C^1(0, T; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H .
$L^p(0, T; H)$	l'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H . telles que $\int_0^T u(t) _H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	la norme de $L^p(0, T; H)$.
$W^{k, p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p .
$\ \cdot\ _{W^{k, p}(0, T; H)}$	la norme de $W^{k, p}(0, T; H)$.

Pour une fonction u ; on note par

∇u	le gradient de u .
\dot{u}, \ddot{u}	les dérivées première et seconde de u par rapport au temps.
$\partial_i u, u_{,i}$	la dérivées partielle de u fonction .
$\text{Div } u$	la divergence de u .
$\varepsilon(u)$	la partie symétrique du gradient de $u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla^T u)$.
\mathbb{S}^d	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d .
I_d	le tenseur identité du second ordre sur \mathbb{R}^d .
Λ^p	puissance p de l'opérateur Λ .
c	des constantes génériques strictement positives.
$p.p.$	presque partout.

Introduction générale

Les problèmes de contact impliquant des corps déformables sont assez fréquents dans l'industrie ainsi que dans la vie quotidienne et jouent un rôle important dans les systèmes structurels et mécaniques. En raison de l'importance de ce processus, un effort considérable a été fait dans sa modélisation et ses simulations. Une première étude des problèmes de contact avec frottement dans un cadre d'inégalités variationnelles a été réalisée en [9]. Les états mathématiques, mécaniques et numériques de l'art se trouvent dans [18]. Le problème de contact bilatéral avec une loi de frottement non local pour les matériaux viscoélastiques a été étudié dans [1]. Le but de cette mémoire est d'étendre l'étude de ce modèle avec un effet thermique, et de plus, l'adhésion de la surface de contact est prise en compte. Des modèles pour un processus dynamique ou quasi-statique d'un contact adhésif sans frottement entre un corps déformable et une fondation ont été étudiés dans [6, 17]. Des problèmes de contact avec frottement pour les matériaux thermo-viscoélastiques ou thermo-visco-élastoplastiques ont été étudiés dans [2, 8, 13, 21] et récemment dans [4, 5]. Dans [7], un problème de contact quasi-statique unilatéral avec frottement et adhésion a été étudié, et un résultat d'existence pour un coefficient de frottement suffisamment petit a été établi. Comme dans [10] et [11], nous utilisons le champ d'adhésion β comme variable d'état supplémentaire, définie sur la surface de contact de la frontière. La variable est limitée aux valeurs $0 \leq \beta \leq 1$. Lorsque $\beta = 0$, tous les liens sont inactifs et il n'y a pas d'adhésion ; lorsque $\beta = 1$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs ; lorsque $0 < \beta < 1$, c'est le cas d'une adhésion partielle. Nous renvoyons les lecteurs à la bibliographie complète sur le sujet dans [16, 17, 18, 19, 20]. Cette mémoire se compose de quatre chapitres : Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des matériaux thermo-viscoélastiques,

les lois de contact avec ou sans frottement, les conditions aux limites et nous présentons le problème de contact avec adhésion en termo-viscoélasticité . Dans le deuxième chapitre, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence, les espaces des fonctions à valeurs vectorielles les équations, les éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert. Nous rappelons sur quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et le Lemme de Gronwall. Quant au troisième chapitre, nous avons abordé à la formulation du problème de contact avec frottement et adhésion entre un corps termo-viscoélasticite et un fondation, Nous avons également présenté les hypothèses fondamentales pour le problème à étudier.Enfin, nous conclusion le chapitre à l'étude de la formulation variationnelle. Le dernier chapitre est consacré de démontrons l'existence et d'unicité d'une solution faible en utilisant des techniques des inéquations variationnelles elliptiques et du point fixe.

Chapitre 1

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus ou nous allons introduire le cadre physique utilisé dans cette mémoire, il est destiné à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement thermo-viscoélastique. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact avec frottement et adhésion.

1.1 Cadre physique

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique dans ce mémoire et la formulation mathématique appropriée à l'étude de problème de contact avec frottement et adhésion entre un corps thermo-viscoélastique et une fondation.

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une surface frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$, partitionnée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , telles que $mes(\Gamma_1) > 0$. Nous notons par ν la normale unitaire sortante à Γ . Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe.

Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 et dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 et d'une source de chaleur donnée par la fonction q . Nous supposons que f_2 varie très lentement par rapport au temps et par conséquent le processus est quasi-statique. Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec frottement et adhésion avec un obstacle sur la partie Γ_3 . Nous prenons en considération

les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations.

Nous notons par $\mathbb{S}^d (d = 2, 3)$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), "." et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d tels que :

$$\begin{aligned} u.v &= u_i v_i, & \|v\| &= (v.v)^{1/2} \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d, & 1 \leq i, j \leq d, \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij} & \|\tau\| &= (\tau.\tau)^{1/2} \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d, & 1 \leq i, j \leq d. \end{aligned}$$

Nous désignons par u_ν, u_τ les composantes normale et tangentielle d'un vecteur u à la frontière tels que

$$u_\nu = u.\nu, \quad u_\tau = u - u_\nu \nu. \quad (1.1)$$

Nous notons par $\sigma = \sigma(x, t)$ le champ des contraintes, par $u = u(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales tels que $x \in \bar{\Omega}$ et $\beta = \beta(x, t)$ le champ d'adhésion telle que $x \in \Gamma_3$, pour tous $t \in [0, T]$.

Pour le champ des contraintes σ nous notons par σ_ν et σ_τ les composantes normale et tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$

Les relations (1.1) nous permettent d'écrire la relation suivante :

$$(\sigma\nu).v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau v_\tau. \quad (1.2)$$

qu'on va l'utiliser pour la démonstration de formulation variationnelle de problème mécanique de contact. Les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps et la virgule représente la dérivée par rapport à la variable spatiale, c'est à dire

$$\dot{u} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}, \quad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

où \dot{u} désigne le champ des vitesses et \ddot{u} désigne le champ des accélérations. Pour le champ de vitesses \dot{u} les notations \dot{u}_ν et \dot{u}_τ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est-à-dire

$$\dot{u}_\nu = \dot{u}.\nu, \quad \dot{u}_\tau = \dot{u} - \dot{u}_\nu \nu.$$

La relation entre le champ des déplacements u et le champ des déformations ε dans l'hypothèse des petites transformations est donnée par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div}\sigma = (\sigma_{ij,j}), \quad 1 \leq i, j \leq d. \quad (1.3)$$

Notons qu'ici et tout au long de la mémoire, un indice qui suit une virgule indique une dérivation partielle par rapport à la composante correspondante à la variable spatiale.

Passons maintenant à la description des modèles mathématiques associées aux cadres physiques ci-dessus.

1.2 Modèle mathématique

Nous commençons avec le modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps dans le cadre physique. Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

On sait qu'en général, l'évolution d'un corps matériel est décrite par l'équation de mouvement de Cauchy

$$\text{Div}\sigma + f_0 = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.4)$$

Où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ désigne la densité de masse. Le processus d'évolution défini par (1.4) s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier. Par exemple, le ce cas, nous introduisons dans ce memoire où le champ des vitesses \dot{u} varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho\ddot{u}$ peut être négligé et l'équation (1.4) devient

$$\text{Div}\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T]. \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) s'appelle l'équation d'équilibre. Le processus d'évolution défini par (1.4) s'appelle processus quasistatique. Nous rappelons que dans le cadre physique f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au temps. Par conséquent, nous supposons que les accélérations

dans le système sont négligeables. Nous nous plaçons donc dans le cas quasistatique et nous utilisons l'équation (1.5).

Puisque le corps est encastré sur Γ_1 , le champ des déplacements s'annule

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0, T]. \quad (1.6)$$

La condition aux limites en tractions est

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times [0, T]. \quad (1.7)$$

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.4)–(1.7) par les conditions de contact sur la partie Γ_3 de la frontière.

Du point de vue mathématique l'équation (1.4) ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre précédent car, par exemple, les d'ui du champ des déplacement ne figurent pas dans cette équation. Par remarquons que l'équation (1.4) exprime une loi univeselle valable pour tout les solides. Donc, soumis à des conditions identique les divers milieux continus auraient des comportements indentique. Ceci est naturellement absurde. Par conséquent, il faut lui ajouter d'autre relations qui caractérise le comportement de chaque type de solide. C'est l'objet des lois de compertement que nous décrirons dans la section suivante.

1.3 Lois de comportement

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charged écharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ , le tenseur des déformations infinitésimales ε et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}$ et $\dot{\varepsilon}$.

Lois de comportement viscoélastique

le corps suit une loi de comportement de Kelvin-Voigt de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u) \quad . \quad (1.8)$$

où \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des fonction constitutives non linéaire, tel que \mathcal{A} représente l'opérateur de viscosité et \mathcal{B} est l'opérateur d'élasticité.

Pour un corps élastique, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(u)) \quad (1.9)$$

On rappelle qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contrainte $\sigma = (\sigma_{ij})$ est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}) + g_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u) \quad (1.10)$$

ou $\mathcal{A} = a_{ijkl}$ est le tenseur de viscosité et $\mathcal{G} = g_{ijkl}$ est le tenseur de viscosité d'élasticité, pour $i, j, k, l = 1, \dots, d$.

Dans le cas viscoélastique avec mémoire long, le corps suit une loi de comportement de Kelvin-Voigt de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{G}\varepsilon(\dot{u}) + \int_0^t \mathcal{B}(t-s)\varepsilon(u(s))ds, \quad (1.11)$$

ou \mathcal{A} et \mathcal{G} sont des fonctions constitutives non linéaires. Ici \mathcal{B} est le tenseur de relaxation d'ordre quatre qui définit le comportement du matériau avec mémoire long lorsque $\mathcal{B} \cong 0$ on retrouve la viscoélasticité de la mémoire courte

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) + \mathcal{G}\varepsilon(\dot{u}) \quad (1.12)$$

Lois de comportement thermo-viscoélastique

Nous citons également parmi les lois thermo-viscoélastiques, une autre loi de comportement qui est même une généralisation de la loi (1.8), et écrit sous la forme

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{M}(\theta(t)) \quad t \in [0, T]. \quad (1.13)$$

où \mathcal{M} est un opérateur de dilatation thermique. L'évolution de champ de température θ est régie par l'équation de la chaleur, obtenue à partir de la conservation de l'énergie, et définie par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\theta} - \operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = \psi(\dot{u}, \theta) + q. \quad (1.14)$$

où $q(x, t)$ est la quantité de chaleur dans la volume Ω durant l'intervalle de temps où $\mathcal{K} = (k_{ij})$ représente le tenseur de conductivité thermique avec $\operatorname{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = (k_{ij}\theta_{,i})_{,i}$ et ψ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la densité du volume de la source température.

1.4 Conditions aux limites

Nous nous plaçons dans le cadre physique et nous présentons en détails les conditions aux limites sur chacune des trois parties Γ_1, Γ_2 , et Γ_3 , avec une discription de l'aspect mathématique et micanique de ces conditions .

1.4.1 La condition aux limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie Γ_1 , le champ des déplacements u est par conséquent nul

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times [0, T]. \quad (1.15)$$

1.4.2 La condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2 agit sur Γ_2 et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$ satisfait à :

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times [0, T]. \quad (1.16)$$

1.4.3 La condition aux limites de contact bilatérale

Quand le contact entre le corps et la base est maintenue en tout temps on dit que c'est un contact bilatéral. C'est généralement le cas dans de nombreuses machines et entre les

pièces et composants d'équipement ou de machines mobiles. Comme il n'y a pas d'écart entre le corps et la base nous avons

$$u_\nu = 0, \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.17)$$

La condition de contact bilatéral (1.17) a été utilisé dans un certain nombre de document, pour plus de détails voir par exemple [12, 15]. On note ici que dans le le troisième chapitre de cette mémoire nous plaçons dans ce type de contact.

1.4.4 La condition de contact avec compliance normale

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition dite de compliance normale

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - g). \quad (1.18)$$

où u_ν est le déplacement normal, g représente l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.

La relation (1.18) est dite condition de compliance normale et signifie que la fondation exerce une pression suivant la normale sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$. Des conditions de contact avec compliance normale ont été utilisées par exemple dans [11, 10, 14].

Remarque 1.4.1. *Dans le cas où l'interstice entre le corps et la fondation est nul on prend $g = 0$.*

Pour la fonction de contrainte normale p_ν on prend comme exemple la fonction suivante

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+ \quad (1.19)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(s) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases} \quad (1.20)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.18) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

1.5 Contact avec ou sans frottement

1.5.1 Contact sans frottement

Dans un contact parfait, où sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact (perpendiculaire au plan tangent commun du contact). Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0.$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle. Si ce n'est pas le cas, on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une loi de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.

1.5.2 Contact avec frottement

Par condition de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes. Par loi de frottement nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle σ_τ et le déplacement tangential u_τ ou la vitesse tangentielle \dot{u}_τ .

Contact bilatéral avec frottement de Tresca

La loi de Tresca présente un seuil de frottement fixe g lorsque le solide et la base rigide sont en contact, la base rigide exerce sur le solide un effort tangential qui ne dépasse pas un certain seuil g :

$$\|\sigma_\tau\| \leq g \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

Tant que la contrainte tangentielle n'a pas atteint le seuil g , le milieu continu ne peut pas se déplacer par rapport à l'obstacle et il y'a blocage, ce qui traduit par :

$$\|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

Lorsque ce seuil est atteint le solide peut se déplacer tangentiellement par rapport à la base rigide et il y'a alors un glissement. La contrainte tangentielle s'oppose à la vitesse. Par conséquent, on a :

$$\|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

En conclusion, les conditions aux limites de type frottement de Tresca s'écrivent alors comme suit :

$$\begin{cases} u_\nu = \mathbf{0} \\ \|\sigma_\tau\| \leq g \\ \|\sigma_\tau\| < g \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau\| = g \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T].$$

où $g > 0$ est le seuil de frottement.

La loi de frottement associée est donnée par

$$-\sigma_\tau = P_\tau(\dot{u}_\tau).$$

Loi de frottement de type Coulomb

C'est une des lois de frottement les plus répandues et elle est plus réaliste. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer sous la forme :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu |\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu |\sigma_\nu| \implies \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu |\sigma_\nu| \implies \exists \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda \dot{u}_\tau. \end{cases} \quad (1.21)$$

où σ_τ est la contrainte tangentielle, $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement, u_ν , u_τ représente le déplacement normale et tangentielle.

1.6 Contact avec frottement et adhésion

Dans quelques modèles étudiés, nous supposons que le corps est en contact adhésif avec frottement sur la partie Γ_3 de la frontière avec une fondation. Ceci se traduit par l'introduction d'une nouvelle variable interne de surface, en se basant sur les idées de Frémond

[10]-[11], appelée champ d'adhésion et notée par $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$; elle décrit l'intensité des couches actives d'adhésion sur la surface de contact et elle vérifie $0 \leq \beta(t) \leq 1$ sur Γ_3 . Lorsque $\beta(t) = 0$, il n'y a plus d'adhésion, lorsque $\beta(t) = 1$ c'est le cas d'une adhésion complète et il y a lieu à une adhésion partielle quand $0 < \beta(t) < 1$ sur Γ_3 . Pour décrire les conditions aux limites correspondantes, nous supposons que le vecteur de contrainte de Cauchy $\sigma\nu$ a une décomposition de la forme

$$\sigma\nu = (\sigma\nu)^{ad} + (\sigma\nu)^{fr}. \quad (1.22)$$

où $(\sigma\nu)^{ad}$ et $(\sigma\nu)^{fr}$ dénotent les parties de $\sigma\nu$ associées à l'adhésion et au frottement, respectivement. Nous dénotons par $\sigma_\nu, \sigma_\nu^{ad}, \sigma_\nu^{fr}$ les composantes normales des vecteurs $\sigma\nu, (\sigma\nu)^{ad}$ et $(\sigma\nu)^{fr}$, qui sont

$$\sigma_\nu \sigma\nu - \sigma_\nu \nu, \quad \sigma_\tau^{ad} = (\sigma\nu)^{ad} - \sigma_\nu^{ad} \nu, \quad \sigma_\tau^{fr} = (\sigma\nu)^{fr} - \sigma_\nu^{fr} \nu. \quad (1.23)$$

et par $\sigma_\tau, \sigma_\tau^{ad}$ et σ_τ^{fr} les composantes tangentielles des mêmes vecteurs, qui sont

$$\sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu, \quad \sigma_\tau^{ad} = (\sigma\nu)^{ad} - \sigma_\nu^{ad} \nu, \quad \sigma_\tau^{fr} = (\sigma\nu)^{fr} - \sigma_\nu^{fr} \nu. \quad (1.24)$$

Nous supposons que la composante normale du vecteur $(\sigma\nu)^{ad}$ satisfait la condition

$$\sigma_\nu = \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu). \quad (1.25)$$

dans laquelle γ_ν est un coefficient positif et $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est l'opérateur de troncation défini par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \quad (1.26)$$

Ici $L > 0$ est la longueur caractéristique du lien, au delà de laquelle il s'étire sans offrir aucune résistance complémentaire. L'introduction de l'opérateur R_ν , ensemble avec l'opérateur R_τ défini ci-dessous, est motivée par les arguments mathématiques mais ce n'est pas restrictif du point de vue physique, puis qu'aucune restriction de la taille du paramètre L n'est faite que dans ce qui suit. Ainsi, en choisissant L très grand, nous pouvons assumer que $R_\nu(u_\nu) = -u_\nu$

et, donc, nous obtenons la condition de compliance normale

$$\sigma_\nu^{ad} = \begin{cases} \gamma\beta^2 u_\nu & \text{si } u_\nu \leq 0, \\ 0 & \text{si } u_\nu > 0. \end{cases}$$

Aussi, nous supposons que la composante normale du vecteur $(\sigma\nu)$ satisfait la condition de contact avec compliance normale

$$-\sigma_\nu^{fr} = p_\nu(u_\nu). \quad (1.27)$$

où u_ν est le déplacement normal et p_ν est la fonction positive prescrite telle que $p_\nu(r) = 0$ pour $r \leq 0$. Combinons les égalités (1.22), (1.23), (1.25) et (1.1), nous dérivons la condition de contact de compliance normale avec adhésion,

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.28)$$

La contribution de l'adhésion à la traction normale est donnée par le terme $\gamma_\nu\beta^2 R_\nu(u_\nu)$.

Ainsi, la traction adhésive est nonnegative et proportionnelle, avec un coefficient de proportionnalité γ_ν , par rapport au carré de l'intensité d'adhésion et le déplacement normal, mais tant que u_ν n'excède pas la longueur du lien L .

Ensuite, nous supposons que la composante tangentielle du vecteur $(\sigma\nu)^{ad}$ satisfait la condition

$$\sigma_\tau^{ad} = -\gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau). \quad (1.29)$$

où, encore, γ_τ est un coefficient positif et $R_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est l'opérateur de troncation défini par

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si } \|v\| \leq L, \\ L \frac{v}{\|v\|} & \text{si } \|v\| > L. \end{cases} \quad (1.30)$$

Cette condition montre que la contrainte tangentielle adhésive sur la surface de contact est proportionnelle au déplacement tangentiel, mais tant qu'il n'excède pas la longueur du lien L .

Le frottement est modélisé par une version statique de la loi de frottement de Coulomb.

Pour cela, considérons la décomposition (1.22) du vecteur de Cauchy et supposons que

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau^{fr}\| \leq -\mu\sigma_\nu^{fr}, \\ \|\sigma_\tau^{fr}\| < -\mu\sigma_\nu^{fr} \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0, \\ \|\sigma_\tau^{fr}\| = -\mu\sigma_\nu^{fr} \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \text{ telle que } \sigma_\tau^{fr} = -\lambda\dot{u}_\tau. \end{cases} \quad (1.31)$$

où μ est le coefficient de frottement, supposé être positif. Combinons les relations (1.23), (1.24), (1.27), (1.29) et (1.31) nous obtenons la loi de frottement avec adhésion

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau(t) + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)\| \leq \mu p_\nu(u_\nu) \\ \|\sigma_\tau(t) + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)\| < \mu p_\nu(u_\nu) \implies \dot{u}_\tau = 0 \\ \|\sigma_\tau(t) + \gamma_\tau\beta^2 R_\tau(u_\tau)\| = \mu p_\nu(u_\nu) \implies \exists \lambda \geq 0 \\ \text{tel que : } \sigma_\tau + \gamma_\tau\beta(t)^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda\dot{u}_\tau \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.32)$$

Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.28) a été déjà utilisée dans [18] et les conditions de frottement similaires à ceux dans (1.35) ont été considérées dans [19] dans le cas particulier $R_\tau(u_\tau) = u_\tau$ et $R_\nu(u_\nu) = -u_\nu$, pour L très grand.

Pour compléter le modèle, nous supposons que l'évolution du champ d'adhésion est gouvernée par une équation différentielle ordinaire

$$\dot{\beta}(t) = - [\beta (\gamma_\tau \|R_\tau(u_\tau)\|^2) - \varepsilon_a]_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.33)$$

A celle-ci, nous rajoutons la condition initiale

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.34)$$

Ici et ci-dessous, en plus des paramètres positives γ_ν et γ_τ déjà introduits dans (1.25) et (1.29), ε_a est un paramètre positif et $r_+ = \max\{0, r\}$. Notons que le processus adhésif est irréversible, en effet, une fois que le décollement se passe le collage ne peut pas être rétabli, puisque $\dot{\beta} \leq 0$. Pour plus de détails concernant la modélisation du contact adhésif, nous référons aux livres [15, 18, 22].

Contact bilatéral avec frottement sec de Coulomb et adhésion

Une version quasistatique de la loi de frottement sec de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\nu = 0 \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| \leq \mu p_\nu(u_\nu), \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| < \mu p_\nu(u_\nu) \implies \dot{u}_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \\ \|\sigma_\tau(t) + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| = \mu p_\nu(u_\nu) \implies \exists \lambda \geq 0 \\ \text{tel que : } \sigma_\tau(t) + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) = -\lambda \dot{u}_\tau \end{array} \right. \quad (1.35)$$

où ν, γ_τ est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction de contact normale et $R_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est l'opérateur de troncature défini dans (1.30).

Chapitre 2

OUTILS MATHÉMATIQUES

Ce chapitre est consacré à la description des espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire et nous rappelons quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, des théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et quelques hypothèses qui facilitent notre problème.

Nous supposons dans ce chapitre que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) le domaine initialement occupé par un corps thermo-viscoélastique. Ω est censé être ouvert et délimité par une frontière suffisamment régulière Γ . Γ est partitionné en trois parties mesurables, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, où Γ_1, Γ_2 et Γ_3 sont des ensembles ouverts disjoints et $mes(\Gamma_1) > 0$.

2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons définir les espaces de fonctions continues, continûment différentiables, les fonctions intégrables et les espaces de Sobolev.

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ d'entiers positifs ou nuls on désigne par

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}. \quad (2.1)$$

où $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$ est la longueur de α .

2.1.1 Fonctions continues et continûment différentiables

L'espace des fonctions uniformément continues sur Ω est noté par $C(\overline{\Omega})$ et il est un espace de Banach pour la norme donnée par

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)|, x \in \overline{\Omega}\}.$$

Toute fonction uniformément continue est bornée et possède une unique extension continue sur $\overline{\Omega}$. Pour tout entier m , l'espace $C^m(\overline{\Omega})$ donné par

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) / D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq m\}.$$

est l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ dont les dérivées d'ordre au plus m sont également continues sur $\overline{\Omega}$. Il est aussi un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha v|_{C(\overline{\Omega})}.$$

L'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables :

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\overline{\Omega}).$$

Nous pouvons maintenant parler de l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur l'ensemble Ω à support compact inclus dans Ω , défini par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) / \text{supp } v \subset \Omega\},$$

où $\text{supp } v = \overline{\{v \in C^\infty(\Omega) / v(x) \neq 0\}}$ est le support de la fonction v . Si $\text{supp } v$ est un sous-ensemble propre de Ω , on dit que v est une fonction à support compact dans Ω .

2.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 2.1.1. (Espace de Lebesgue). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} / v \text{ Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \text{ Lebesgue intégrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.1.3 Espace de Sobolev

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d\}.$$

D'abord, on note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)}.$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \text{et on écrit} \quad \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (2.2)$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 2.1.1. (Rellich)

$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ avec injection compacte.

Théorème 2.1.2. (trace de Sobolev) Il existe une application linéaire et continue $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\gamma u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Remarque 2.1.1. l'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace des fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$. L'application s'appelle application de trace; elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

On note que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

Définition 2.1.2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_{\alpha} \in L^p(\Omega); \text{ tel que } v_{\alpha} = D^{\alpha}u\}.$$

Remarque 2.1.2. *Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α . La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par*

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p \leq \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

2.2 Espaces liés aux opérateurs de déformation et de divergence

On introduit dans cette section les espaces de type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, on montre leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On rappelle aussi quelques espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs dans l'espace de Hilbert. Toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans cette mémoire sont introduits dans cette section. Pour sa rédaction nous nous sommes inspiré de [6, 23, 24, 25, 26] et [20]. Nous désignons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$; “ . ” et $\|\cdot\|$ représentent le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d , respectivement. Ainsi,

$$\begin{aligned} u.v &= u_i v_i, & \|v\| &= (v.v)^{\frac{1}{2}}, & \forall u, v \in \mathbb{R}^d \\ \sigma.\tau &= \sigma_{ij} \tau_{ij}, & \|\tau\| &= (\tau.\tau)^{\frac{1}{2}} & \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Ici et partout dans ce manuscrit nous utilisons la convention de l'indice muet. Par ailleurs, l'indice après une virgule dénote la dérivée par rapport à la composante correspondante de la variable spatiale x . Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné avec une frontière de Lipschitz notée Γ . Pour le champ de déplacements et le champ des contraintes nous utilisons

les espaces suivants

$$\begin{cases} H &= (L^2(\Omega))^d, \\ H_1 &= (H^1(\Omega))^d, \\ Q &= \{\tau = (\tau_{ij}) : \tau_{ij} = \tau_{ji} \text{ } L^2(\Omega)\}, \\ Q_1 &= \{\sigma \in Q : \text{Div } \sigma \in H\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les espaces H, H_1, Q et Q_1 sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés par

$$\begin{cases} \langle u, v \rangle_H &= \int_{\Omega} u_i v_i dx, \\ \langle \sigma, \tau \rangle_Q &= \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx, \\ \langle u, v \rangle_{H_1} &= \langle u, v \rangle_H + \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_Q, \\ \langle \sigma, \tau \rangle_{Q_1} &= \langle \sigma, \tau \rangle_Q + \langle \text{Div } \sigma, \text{Div } \tau \rangle_H. \end{cases} \quad (2.4)$$

où ε et Div sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces H, H_1, Q, Q_1 sont notées par $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{H_1}, \|\cdot\|_Q$ et $\|\cdot\|_{Q_1}$, respectivement. Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace de γv sur Γ , Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. et nous notons par v_ν et v_τ les composantes normales et tangentielles de v sur la frontière données par

$$v_\nu = v \cdot \nu, \quad v_\tau = v - v_\nu \nu.$$

Nous définissons de façon analogue les composantes normale et tangentielle d'un champ régulier $\sigma \in Q_1$ par les formules

$$\sigma_\nu = (\sigma \nu) \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = \sigma \nu - \sigma_\nu \nu.$$

Rappelons aussi la formule de Green ci-dessous :

$$\langle \sigma, \varepsilon(v) \rangle_Q + \langle \text{Div } \sigma, v \rangle_H = \int_{\Gamma} \sigma_\nu v_\nu da, \quad \forall v \in H_1. \quad (2.5)$$

Soit $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$ une partition de Γ , telle que Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 sont disjoints ouverts ensembles et soit V le sous-espace fermé de H_1 défini par :

$$V = \{v \in H_1 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1, v_\nu = 0 \text{ sur } \Gamma_3\}. \quad (2.6)$$

Pour le champ de température, nous définissons l'ensemble E de $H^1(\Omega)$ par

$$E = \{\omega \in H^1(\Omega) \mid \omega = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}. \quad (2.7)$$

Aussi, rappelons que lorsque $D \in L^2(\Omega)^d$ est une fonction régulière, la formule de Green (2.5) est satisfaite :

$$(D, \nabla \zeta)_{L^2(\Omega)^d} + (\text{Div} D, \zeta)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} D \cdot \nu \zeta da, \quad \forall \zeta \in H^1(\Omega). \quad (2.8)$$

Théorème 2.2.1. (Inégalité de Korn)

Si $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$, alors il existe une constante $c_\Omega > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq c_\Omega \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V. \quad (2.9)$$

Sur V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(u, v)_V = \langle \varepsilon(u), \varepsilon(v) \rangle_Q, \quad \forall u, v \in V, \quad (2.10)$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, i.e.

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_Q \quad \forall v \in V. \quad (2.11)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert réel.

Preuve. On a d'après (2.4)

$$(u, v)_{H_1} = \langle u, v \rangle_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_1} &= (\|v\|_H^2 + \|\varepsilon(v)\|_Q^2)^{\frac{1}{2}}, \\ \|v\|_{H_1}^2 &= \|v\|_H^2 + \|\varepsilon(v)\|_Q^2, \end{aligned}$$

$$\|\varepsilon(v)\|_Q^2 \leq \|\varepsilon(v)\|_Q^2 + \|v\|_H^2, \quad (2.12)$$

d'après (2.9) et (2.12) on obtient

$$\begin{aligned} c_\Omega^2 \|v\|_{H_1}^2 &\leq \|\varepsilon(v)\|_Q^2 \leq \|\varepsilon(v)\|_Q^2 + \|v\|_H^2, \\ c_\Omega \|v\|_{H_1} &\leq \|\varepsilon(v)\|_Q \leq \|v\|_{H_1}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Alors $\|\cdot\|_{H_1}$ équivalent $\|\cdot\|_Q$.

□

En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $d_\Omega > 0$ dépendant uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{(L^2(\Gamma_3))^d} \leq d_\Omega \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (2.14)$$

Pour $p \in [1, \infty]$, nous utilisons la norme standard de $L^p([0, T], V)$. Nous utilisons également l'espace de Sobolev $W^{1, \infty}([0, T]; V)$ équipé de la norme

$$\|v\|_{W^{1, \infty}([0, T], V)} = \|v\|_{L^\infty([0, T], V)} + \|\dot{v}\|_{L^\infty([0, T], V)}. \quad (2.15)$$

Pour une fonction scalaire β , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble B par

$$B = \{\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3) \text{ tel que } : 0 \leq \beta(t) \leq 1 \forall t \in [0, T], \text{ p.p. } x \in \Gamma_3\}. \quad (2.16)$$

Théorème 2.2.2. (Inégalité de Hölder)

Soit $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ et $1 < p < q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $fg \in L^1(\Omega)$, et

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (2.17)$$

Théorème 2.2.3. (Inégalité de Young)

Soient $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ et $1 < p < q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$fg \leq \frac{1}{p} f^p + \frac{1}{q} g^q. \quad (2.18)$$

Théorème 2.2.4. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit H un espace de Hilbert munit d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) , alors

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}} (v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.19)$$

2.3 Éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

2.3.1 Fonctions convexes et semi-continuité inférieure

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et à valeur dans $] -\infty, +\infty]$. Une telle fonction est dite propre si elle n'est pas identiquement égale à $+\infty$, c'est à dire s'il existe $u_0 \in X$ tel que $\varphi(u_0) < +\infty$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in X, t \in [0, 1].$$

La fonction φ est dite strictement convexe si cette dernière inégalité est stricte pour tout $u, v \in X$ tel que $u \neq v$. Pour toute fonction $\varphi : X \rightarrow] -\infty, +\infty]$, on définit le domaine et l'épigraphe de φ respectivement par :

$$\text{dom } \varphi = \{u \in X \mid \varphi(u) < +\infty\},$$

$$\text{epi } \varphi = \{(u, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \alpha \geq \varphi(u)\}.$$

Il est clair qu'on peut établir les résultats suivants :

1. φ est propre si et seulement si $\text{dom } \varphi \neq \emptyset$.
2. Le domaine de φ est un ensemble convexe de X si φ est convexe.
3. φ est convexe si et seulement si $\text{epi } \varphi$ est un ensemble convexe de $X \times \mathbb{R}$.

Nous supposons maintenant l'espace vectoriel X muni d'une topologie (en général X sera un espace vectoriel normé ou encore plus particulièrement un espace de Hilbert). Une fonction $\varphi : X \rightarrow] -\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) si

$$\liminf_n \varphi(u_n) \geq \varphi(u),$$

pour tout $u \in X$ et $u_n \rightarrow u$ dans X . La propriété de semi-continuité inférieurement peut être caractérisée par :

Lemme 2.3.1. *Soit $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$, alors Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. φ est semi-continue inférieurement.
2. L'épigraphe de φ est fermée dans $X \times \mathbb{R}$.

Puisque dans un espace vectoriel normé tout ensemble convexe est simultanément fermé pour la topologie forte et la topologie faible, le Lemme précédent conduit au résultat suivant :

Théorème 2.3.1. *Soit X un espace de Hilbert et $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et propre. Alors φ est semi-continue inférieurement si et seulement si φ est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie faible de X .*

2.3.2 Opérateurs fortement monotones

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert X munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$. Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire.

Définition 2.3.1. *L'opérateur $A : X \rightarrow X$ est dit :*

1. monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0, \quad \forall u, v \in X.$$

2. fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2, \quad \forall u, v \in X.$$

3. de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

4. est dite hemicontinu si pour toute suite numérique $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a

$$\langle A(u + \lambda_n v), w \rangle_X \rightarrow \langle A(u + \lambda v), w \rangle_X \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant :

Proposition 2.3.1. *tout opérateur de Lipschitz est hémicontinu.*

Proposition 2.3.2. *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire*

$$\begin{cases} (a) \text{ il existe } m > 0 \text{ tel que } (Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2, \quad \forall u, v \in X. \\ (b) \text{ il existe } M > 0 \text{ tel que } \|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X. \end{cases}$$

Alors pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $Au = f$.

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Minty-Browder (Voir par exemple [3]p.88).

Théorème 2.3.2.

Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V$ un opérateur hémicontinue et monotone satisfaisant.

$$\langle Av, v \rangle_{V \times V'} \geq \omega|v|_V^2 + \lambda \quad \forall v \in V, \quad (2.20)$$

$$|Av|_{V'} \leq C(|v|_V + 1) \quad \forall v \in V. \quad (2.21)$$

Pour des constantes $\omega > 0, C > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ Etant donnée $u_0 \in H$ et $f \in L^2([0, T]; V)$, il existe une fonction unique u satisfait

$$u \in L^2([0, T]; V) \cap C([0, T]; V), \quad \dot{u} \in L^2([0, T]; V).$$

$$\dot{u} + Au(t) = f(t) \quad \text{p.p } t \in [0, T].$$

$$u(0) = u_0.$$

2.3.3 Inéquations quasi-variationnelles elliptiques d'évolution

Nous allons rappeler maintenant de résultat sur l'existence et l'unicité de la solution pour l'inéquation variationnelle.

Pour cela, nous considérons un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$ et soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire, $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ et $f \in X$.

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que A est fortement monotone et de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) il existe } m > 0 \text{ tel que} \\ \quad (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m\|u_1 - u_2\|_X^2, \quad \forall u_1, u_2 \in X. \\ \text{(b) il existe } M > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|Au_1 - Au_2\|_X \leq M\|u_1 - u_2\|_X, \quad \forall u_1, u_2 \in X. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

et $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) pour tout } \eta \in X, j(\eta, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X. \\ \text{(b) il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ \quad j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) + j(u_2, v_2) \\ \quad \leq \alpha\|u_1 - u_2\|_X\|v_1 - v_2\|_X, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Plusieurs problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles en mécanique des milieux continus conduisent à des problèmes mathématiques ayant les formes suivantes :

Problème I. Trouver $u : [0, T] \rightarrow X$ tel que :

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in X. \quad (2.24)$$

Théorème 2.3.3. *Supposons que les hypothèses (2.22) et (2.23) sont satisfaites. Alors, si $\alpha < m$, pour tout $f \in X$, il existe une solution unique $u \in X$ au problème (2.24).*

Une démonstration du Théorème se trouve par exemple dans [27] p.83.

Problème II. Trouver $u : [0, T] \rightarrow X$ tel que :

$$\langle Au(t), v - \dot{u}(t) \rangle_X + \langle Bu(t), v - \dot{u}(t) \rangle_X + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X \quad \forall v \in X, t \in [0, T]. \quad (2.25)$$

$$u(0) = u_0. \quad (2.26)$$

La différence entre le problème I et le problème II consiste dans le fait que le dernier problème est évolutif. En effet, f et u dépendent maintenant du temps, la dérivée \dot{u} apparaît dans la formulation du problème et par conséquent, une condition initiale (2.26), est rajoutée.

Pour étudier le problème II, en plus des hypothèses (2.22) et (2.23), nous avons besoin des hypothèses suivantes.

L'opérateur non linéaire $B : X \rightarrow X$ est de Lipschitz, c'est-à-dire

$$\exists L_B > 0 \text{ tel que } \|Bu_1 - Bu_2\|_X \leq L_B \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in X. \quad (2.27)$$

Aussi, nous supposons que

$$f \in C([0, T]; X), \quad u_0 \in X. \quad (2.28)$$

Dans l'étude du problème II, nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.3.4. *Soient (2.22)-(2.23) et (2.27)-(2.28) satisfaites. Alors :*

- 1) *Il existe une unique solution $u \in C^1([0, T], X)$ au problème II.*
- 2) *Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème II correspondant aux données $f_1, f_2 \in C([0, T]; X)$, alors il existe $c > 0$ tel que :*

$$\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_X \leq c(\|f_1(t) - f_2(t)\|_X + \|u_1(t) - u_2(t)\|_X) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.29)$$

- 3) *Si en plus $f \in W^{1,p}([0, T]; X)$ pour $p \in [1, \infty[$ alors la solution satisfait $u \in W^{2,p}([0, T]; X)$.*

Ce résultat d'existence, d'unicité et de régularité a été prouvé dans [14] et peut être aussi trouvé dans [12] p.232-236.

2.4 Enoncés de certains théorèmes

Théorème 2.4.1. (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X \text{ p.p. } t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

il existe $1 \leq p \leq \infty$ tel que $F(\cdot, x) \in L^p([0, T], X) \forall x \in X$.

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ telle que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \text{ p.p. } t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

Théorème 2.4.2. (Théorème de point fixe de Banach)

Soit K un sous ensemble fermé et non-vidé de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que

$\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$\|\Lambda u - \Lambda v\|_X \leq c\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda u = u$. Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}), \quad m \geq 2.$$

Théorème 2.4.3.

Soit K un sous-ensemble fermé et non-vidé de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ et soit $\Lambda : K \rightarrow K$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors, Λ a un point fixe unique dans K .

2.5 Compléments divers

Opérateurs linéaires bornés

Définition 2.5.1. Soit H un espace de Hilbert et un corps \mathbb{K} , qui sera ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Une application $T : H \rightarrow H$ est dite opérateur linéaire si

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y, \quad \forall x, y \in H \quad \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

Définition 2.5.2. On dit qu'un opérateur T défini sur H est borné s'il existe une constante C telle que

$$\|T x\| \leq C\|x\| \quad \forall x \in H.$$

Théorème 2.5.1. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ les normes de T sont donné par

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|T x\|}{\|x\|}, \quad x \in H,$$

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T x\|, \quad x \in H,$$

$$\|T\| = \inf\{c > 0, \forall x \in H, \|T x\| \leq c\|x\|\}.$$

Définition 2.5.3. Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M|u|_X|v|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 2.5.4. Une forme bilinéaire $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$a(u, u) \geq m|u|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 2.5.2. (Lax- Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire, continue et coercive sur H et $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe $u \in H$ solution unique du problème

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H,$$

de plus si a est symétrique u est définie par

$$\frac{1}{2}a(u, u) - L(u) = \min_{u \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) \right\}.$$

Théorème 2.5.3. (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)

Étant donné $\eta \in X'$, il existe $f \in X$ unique telle que

$$(\eta, v)_{X' \times X} = (f, v)_X \quad \forall v \in X,$$

on a de plus

$$\|\eta\|_{X'} = \|f\|_X.$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur X peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire.

2.5.1 Lemmes de Gronwall

Lemme 2.5.1. Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante, et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$.

1. Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

2. Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)ds.$$

Dans le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient :

Corollaire 2.5.1. Soit $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tel que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Lemme 2.5.2. Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$, $n(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$, $a \geq 0$. Soit également $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\psi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\psi(t)dt + \int_0^s n(t)\psi(t)dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors

$$|\psi(s)| \leq \left(a + \int_0^s m(t)dt \right) e^{\int_0^s n(t)dt} \quad \forall s \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $n = 0$, le Lemme précédent devient :

Corollaire 2.5.2. Soit $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tel que $m(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Soit également $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\psi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\psi(t)dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Alors,

$$|\psi(s)| \leq a + \int_0^s m(t)dt \quad \forall s \in [0, T].$$

Chapitre 3

Position du problème thermo-mécanique et hypothèses

Problème \mathcal{P}

Trouver un champ de déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, un champ de contraintes, $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$ et un champ de température $\theta : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{u}) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(u) - \mathcal{M}(\theta) \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.1)$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.2)$$

$$\dot{\theta} - \text{div}(\mathcal{K}\nabla\theta) = \psi(\dot{u}, \theta) + q \quad \text{dans } \Omega \times [0, T], \quad (3.3)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times [0, T], \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.5)$$

$$-k_{ij}\theta_{,i}\nu_j = k_e(\theta - \theta_R) - h_\tau(\|\dot{u}_\tau\|) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (3.6)$$

$$\theta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \times [0, T], \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\nu = 0 \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| \leq \mu |R(\sigma_\nu)| \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| < \mu |R(\sigma_\nu)| \Rightarrow \dot{u}_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)\| = \mu |R(\sigma_\nu)| \implies \exists \lambda \geq 0 \\ \text{tel que : } \dot{u}_\tau = -\lambda(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau)) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$$\dot{\beta} = -(\gamma_\tau \beta \|\mathbf{R}_\tau(u_\tau)\|^2 - \varepsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (3.9)$$

$$u(0) = u_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.10)$$

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.11)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (3.12)$$

Dans ce qui suit, nous fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites. L'équation (3.1) représente la loi de comportement du matériau thermo-viscoélastique. Ici, \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des opérateurs non linéaires décrivant les propriétés purement visqueuses et élastiques du matériau, respectivement et \mathcal{M} représente le tenseur de dilatation thermique. (3.2) est l'équation d'équilibre mécanique. La condition (3.3) représente la conservation de l'énergie avec ψ une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur produite par la travail des forces internes. (3.4) et (3.5) sont les conditions aux limites de déplacement et de traction, l'équation (3.6) représente la condition au bord associée à la température dérivée de la conditions de Fourier avec θ_R est la température de la fondation, k_e représente l'échange de la température entre le corps déformable et la fondation, h_τ la fonction tangentielle. Dans (3.7) la température est nulle sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, (3.8) décrit le contact bilatéral avec une loi de frottement non locale, l'équation (3.9) représente l'équation différentielle ordinaire associée au champ d'adhésion, les conditions (3.10), (3.11) et (3.12) représentent les conditions initiales.

Pour l'étude du problème thermo-mécanique (3.1)-(3.12) on considère les hypothèses suivantes qui facilitent notre problème.

L'opérateur de viscosité \mathcal{A} satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b)} \text{ Il existe une constante } M_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)\| \leq M_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c)} \text{ Il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad (\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)) \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(d)} \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e)} \quad x \rightarrow \mathcal{A}(x, 0) \in Q. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

L'opérateur d'élasticité \mathcal{B} satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b)} \text{ Il existe une constante } M_{\mathcal{B}} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad \|\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2)\| \leq M_{\mathcal{B}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c)} \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{B}(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d)} \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{B}(x, 0) \in Q. \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Le tenseur thermique \mathcal{M} satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \mathcal{M} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b)} \text{ Il existe } L_{\mathcal{M}} > 0 \text{ telle que :} \\ \quad \|\mathcal{M}(x, \theta_1) - \mathcal{M}(x, \theta_2)\| \leq L_{\mathcal{M}} |\theta_1 - \theta_2| \text{ pour tout } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega. \\ \text{(c)} \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{M}(x, \theta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}. \\ \text{(d)} \text{ L'application } x \rightarrow \mathcal{M}(x, 0) \in Q. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

La fonction constitutive non linéaire $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} \psi : \Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \\ \text{(b)} \text{ Il existe } L_\psi > 0 \text{ telle que :} \\ \quad \|\psi(x, \xi_1, \theta_1) - \psi(x, \xi_2, \theta_2)\| \leq L_\psi(\|\xi_1 - \xi_2\| + |\theta_1 - \theta_2|) \text{ pour tout } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^d \\ \quad \text{et pour tout } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega; \\ \text{(c)} \text{ L'application } x \rightarrow \psi(x, \xi, \theta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ pour tout } \theta \in \mathbb{R}, \\ \text{(d)} \text{ L'application } x \rightarrow \psi(x, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.16)$$

Nous supposons aussi que la fonction tangentielle h_τ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a)} h_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+. \\ \text{(b)} \text{ Il existe } L^\tau > 0 \text{ telle que } \|h_\tau(x, r_1) - h_\tau(x, r_2)\| \leq L^\tau |r_1 - r_2| \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3; \\ \text{(c)} \text{ L'application } x \rightarrow h_\tau(x, r) \in L^2(\Gamma_3) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Par la suite, nous supposons aussi que les forces volumiques f_0 , les tractions surfaciques, f_2 et la densité de la source de chaleur externe satisfont les régularités

$$f_0 \in C([0, T]; H), \quad f_2 \in C([0, T]; L^2(\Gamma_2)^d), \quad q \in W^{1, \infty}([0, T]; L^2(\Omega)). \quad (3.18)$$

Les coefficients d'adhésion γ_τ et ε_a satisfont :

$$\gamma_\tau, \varepsilon_a \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \gamma_\tau, \varepsilon_a \geq 0 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \quad (3.19)$$

et le coefficient de frottement μ satisfait

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.20)$$

La lipschitzialité de l'opérateur de troncature R_τ :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^d \quad \|R_\tau(a) - R_\tau(b)\| \leq \|a - b\|. \quad (3.21)$$

L'opérateur de régularisation $R : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ est continu et pour tout $\sigma \in Q_1$:

$$\text{Il existe une constante } C_R > 0 \text{ telle que } \|R(\sigma_\nu)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C_R \|\sigma\|_{Q_1}. \quad (3.22)$$

Les données initiales satisfont les conditions suivantes :

$$u_0 \in V, \quad (3.23)$$

$$\theta_0 \in E, \quad (3.24)$$

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.25)$$

$$\theta_R \in L^2([0, T]; L^2(\Gamma_3)), \quad (3.26)$$

$$k_e \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+). \quad (3.27)$$

Pour certains $C_{\mathcal{K}} > 0$, pour tout $(\xi_i) \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{K} = (k_{ij}), \quad k_{ij} = k_{ji} \in L^\infty(\Omega), \quad k_{ij}\xi_i\xi_j \geq C_{\mathcal{K}}\xi_i\xi_j. \quad (3.28)$$

Finalement, nous définissons les formes linéaire $\chi : [0, T] \rightarrow E'$, $\mathcal{R} : E \rightarrow E'$ et aussi $\Theta : V \times E \rightarrow E'$ par :

$$\langle \chi, \omega \rangle_{E' \times E} = \int_{\Omega} q(t)\omega dx + \int_{\Gamma_3} k_e \theta_R(t)\omega da \quad \forall \omega \in E, \quad (3.29)$$

$$\langle \mathcal{R}\tau, \omega \rangle_{E' \times E} = \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{ij}\tau_{,j}\omega_{,i} dx + \int_{\Omega} k_e \tau \omega dx \quad \forall \tau, \omega \in E, \quad (3.30)$$

$$\langle \Theta(v, \zeta), \omega \rangle_{E' \times E} = \int_{\Omega} \psi(v, \zeta)\omega dx + \int_{\Gamma_3} h_\tau(\|v_\tau\|_V)\omega da \quad \forall v \in V \quad \forall \zeta, \omega \in E. \quad (3.31)$$

Nous finissons cette section avec une autre notation qui est nécessaire dans l'étude du problème, ainsi dans la suite de cette mémoire. On sait que l'inclusion $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est continue et dense. et nous avons alors

$$\langle \zeta, \xi \rangle_{E' \times E} = (\zeta, \xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \zeta \in L^2(\Omega), \quad \forall \xi \in E. \quad (3.32)$$

Le théorème de représentation de Riesz, nous permet de définir la fonction $f : [0, T] \rightarrow V$ comme suit :

$$\langle f(t), v \rangle_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v dx + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \quad (3.33)$$

Les conditions (3.18) impliquent

$$f \in C([0, T]; V). \quad (3.34)$$

Soient $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, et $j_{fr} : Q_1 \times V \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctionnelles d'adhésion et de frottement, définies par

$$j_{ad}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau) \cdot v_\tau da, \quad (3.35)$$

$$j_{fr}(\sigma, v) = \int_{\Gamma_3} \mu |R(\sigma_\nu)| \|v_\tau\| da. \quad (3.36)$$

Nous présentons quelques inégalités comprenant les fonctionnelles j_{ad} et j_{fr} , qui seront utilisées dans les sections suivantes.

Ci-dessous dans cette section, β_1 et β_2 dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1$ p.p. sur (Γ_3) , u_1, u_2, v_1, v_2, u et v représentent des éléments de V , $\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ dénotent des éléments de H_1 et c est une constante positive générique qui peut dépendre de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \gamma_\tau$ et L , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega \cup \Gamma_3$. D'abord, nous remarquons que j_{ad} et j_{fr} sont linéaires par rapport au dernier argument, donc

$$j_{ad}(\beta, u, -v) = -j_{ad}(\beta, u, v), \quad (3.37)$$

$$j_{fr}(\sigma, -v) = -j_{fr}(\sigma, v). \quad (3.38)$$

En utilisant (2.16), (3.35) et les inégalités $\|R_\tau(u_\tau)\| \leq L, |\beta_1| \leq 1, |\beta_2| \leq 1$, nous déduisons que

$$\begin{aligned} j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) &= \int_{\Gamma_3} [\gamma_\tau \beta_1^2 R_\tau(u_1) \cdot (u_2 - u_1) \\ &\quad + \gamma_\tau \beta_2^2 R_\tau(u_2) \cdot (u_1 - u_2)] da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} (c_\tau L |\beta_1^2 - \beta_2^2| |u_1 - u_2|) da \\ &= \int_{\Gamma_3} (c_\tau L |\beta_1 - \beta_2| |\beta_1 + \beta_2| |u_1 - u_2|) da \\ &\leq 2c_\tau L \int_{\Gamma_3} (|\beta_1 - \beta_2| |u_1 - u_2|) da \\ &\leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| |u_1 - u_2| da. \end{aligned}$$

où $c_\tau = \sup\{\gamma_\tau\}$.

Donc

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| |u_1 - u_2| da.$$

en combinant cette inégalité avec l'inégalité de Cauchy-Schwartz (2.19), on obtient (voir [16])

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V. \quad (3.39)$$

Puis, nous choisissons $\beta = \beta_1 = \beta_2$ dans (3.39) pour trouver

$$j_{ad}(\beta, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta, u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \quad (3.40)$$

Par des manipulations semblables basées sur les propriétés de opérateur R_τ , on montre que

$$|j_{ad}(\beta, u_1, v) - j_{ad}(\beta, u_2, v)| \leq c \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V. \quad (3.41)$$

En prenant $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (3.40) et nous employons les égalités $R_\tau(0) = 0$ pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, v, v) \geq 0. \quad (3.42)$$

Maintenant, nous utilisons (3.36), nous déduisons que :

$$j_{fr}(\sigma_1, v_2) - j_{fr}(\sigma_1, v_1) + j_{fr}(\sigma_2, v_1) - j_{fr}(\sigma_2, v_2) \leq C_R d_\Omega \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_Q \|v_1 - v_2\|_V. \quad (3.43)$$

Enfin, d'après la définition de l'opérateur R , il est clair que j_{fr} est convexe.

3.1 Formulation variationnelle

En utilisant la formule de Green (2.5), on obtient

$$\langle \sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)) \rangle_Q + (\text{Div } \sigma(t), v - \dot{u}(t))_H = \int_\Gamma \sigma(t) \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) \, da, \quad \forall v \in H_1, t \in [0, T].$$

on trouve

$$\begin{aligned} \langle \sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)) \rangle_Q + (\text{Div } \sigma(t), v - \dot{u}(t))_H &= \int_{\Gamma_1} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) \, da + \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) \, da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) \, da, \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

En utilisant la définition (2.6) de l'espace V combinée avec les condition (3.2), (3.5) et (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)) \rangle_Q - \int_{\Omega} f_0 \cdot (v - \dot{u}(t)) dx &= \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - \dot{u}(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - \dot{u}(t)) da, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.44)$$

En utilisant la décomposition du tenseur de Cauchy (1.2) :

$$\sigma \nu (v - \dot{u}) = \sigma_{\nu} (v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) + \sigma_{\tau} (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}).$$

d'après (3.8) on obtient

$$\begin{aligned} \sigma \nu (v - \dot{u}) &= \sigma_{\tau} (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}). \\ &= (\sigma_{\tau} + \gamma_{\tau} \beta^2 R_{\tau}(u_{\tau})) (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}) - \gamma_{\tau} \beta^2 R_{\tau}(u_{\tau}) (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Gardant à l'esprit (3.33), on remplace (3.45) dans (3.44), on peut écrire l'inégalité (3.44) comme suit :

$$\begin{aligned} \langle \sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)) \rangle_Q &= (f, v - \dot{u}(t))_V + \int_{\Gamma_3} (\sigma_{\tau} + \gamma_{\tau} \beta^2 R_{\tau}(u_{\tau}(t))) \cdot (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}) da \\ &- \int_{\Gamma_3} \gamma_{\tau} \beta^2 R_{\tau}(u_{\tau}(t)) \cdot (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}) da. \end{aligned}$$

Alors, de (3.35) et (3.36), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)) \rangle_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - \dot{u}(t)) \\ - \int_{\Gamma_3} (\sigma_{\tau} + \gamma_{\tau} \beta^2 R_{\tau}(u_{\tau}(t))) \cdot (v_{\tau} - \dot{u}_{\tau}) da &= (f(t), v - \dot{u}(t))_V. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Par contre, en utilisant (3.8), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} (\sigma_{\tau} + \gamma_{\tau} \beta^2 R_{\tau}(u_{\tau}(t))) \cdot \dot{u}_{\tau} da &= - \int_{\Gamma_3} \|\sigma_{\tau} + \gamma_{\tau} \beta^2 R_{\tau}(u_{\tau}(t))\| \|\dot{u}_{\tau}\| da \\ &= - \int_{\Gamma_3} \mu \|R(\sigma_{\nu})\| \|\dot{u}_{\tau}\| da, \end{aligned}$$

et encore, nous avons

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_3} (\sigma_{\tau} + \gamma_{\tau} \beta^2 R_{\tau}(u_{\tau}(t))) \cdot v_{\tau} da &\leq \int_{\Gamma_3} \|\sigma_{\tau} + \gamma_{\tau} \beta^2 R_{\tau}(u_{\tau}(t))\| \|v_{\tau}\| da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} \mu \|R(\sigma_{\nu})\| \|v_{\tau}\| da, \end{aligned}$$

et on trouve

$$\int_{\Gamma_3} \mu \|R(\sigma_\nu)\| (\|v_\tau\| - \|\dot{u}_\tau\|) da \geq - \int_{\Gamma_3} (\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau(u_\tau(t))). (v_\tau - \dot{u}_\tau) da. \quad (3.47)$$

Combinant maintenant (3.46) et (3.47), on trouve

$$\begin{aligned} & \langle \sigma(t), \varepsilon(v - \dot{u}(t)) \rangle_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - \dot{u}(t)) \\ & + j_{fr}(\sigma(t), v) - j_{fr}(\sigma(t), \dot{u}(t)) \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.48)$$

On multiplie scalairement l'équation (3.3) par $\omega \in E$ ($\omega = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$), en appliquant la formule de Green(2.8) on obtient

$$\int_{\Omega} \dot{\theta}(t) \omega dx + (\mathcal{K} \nabla \theta(t), \nabla \omega)_{L^2(\Omega)^d} - \int_{\Gamma} \mathcal{K} \nabla \theta(t) \cdot \nu \omega da = \int_{\Omega} (\psi(\dot{u}(t), \theta(t)) + q(t)) \omega dx. \quad (3.49)$$

d'où

$$(\dot{\theta}(t), \omega)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{i,j} \theta_{,j} \omega_{,i} dx - \int_{\Gamma_3} k_{i,j} \theta_{,i} \nu_j \omega da = \int_{\Omega} (\psi(\dot{u}(t), \theta(t)) + q(t)) \omega dx. \quad (3.50)$$

On remplace par (3.6) on trouve

$$\begin{aligned} & (\dot{\theta}, \omega)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} k_{i,j} \theta_{,j} \gamma_{,i} dx + \int_{\Gamma_3} k_e (\theta - \theta_R) - h_\tau (\|\dot{u}\|_V) \omega da \\ & = \int_{\Omega} \psi(\dot{u}, \theta(t)) \omega dx + \int_{\Omega} q(t) \omega dx. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Nous utilisons les définitions (3.29), (3.30) et (3.31) de \mathcal{R}, Θ et $\chi(t)$ respectivement, avec (3.32) on écrit

$$\dot{\theta}(t) + \mathcal{R}\theta(t) = \Theta(\dot{u}(t), \theta(t)) + \chi(t) \quad \text{dans } E'. \quad (3.52)$$

Problème \mathcal{P}_V

Trouver un champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, un champ de contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow Q_1$ et un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$, et la champ de température $\theta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{M}(\theta(t)) \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} & \langle \sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_Q + j_{fr}(\sigma(t), v) - j_{fr}(\sigma(t), \dot{u}(t)) \\ & + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T] \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\dot{\theta}(t) + \mathcal{R}\theta(t) = \Theta(\dot{u}(t), \theta(t)) + \chi(t) \quad \text{dans } E'. \quad (3.55)$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\gamma_\tau \beta(t) \|R_\tau(u_\tau(t))\|^2 - \varepsilon_a)_+ \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad (3.56)$$

$$u(0) = u_0, \quad (3.57)$$

$$\beta(0) = \beta_0, \quad (3.58)$$

$$\theta(0) = \theta_0. \quad (3.59)$$

Chapitre 4

Existence et unicité de la solution

4.1 Résultat d'existence et d'unicité

Le résultat principal de cette section est le suivant

Théorème 4.1.1. *Supposons que (3.13)-(3.28) sont vérifiées. Alors, il existe $\mu_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3$ et R tel que, si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, alors le problème \mathcal{P}_V admet une solution unique. De plus, la solution satisfait*

$$u \in C^1([0, T]; V). \quad (4.1)$$

$$\beta \in W^{1, \infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3)) \cap B. \quad (4.2)$$

$$\theta \in L^2([0, T]; E) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap W^{1, 2}([0, T]; E'). \quad (4.3)$$

Un quadruple de fonctions $(u, \sigma, \beta, \theta)$ qui vérifie (3.53)-(3.59) est appelée solution faible du problème mécanique \mathcal{P} . Nous concluons par le Théorème 4.1.1 que, sous les hypothèses (3.13)-(3.28) le problème \mathcal{P} possède une solution faible unique.

Pour préciser la régularité de la solution faible, nous notons que la relation constitutive (3.1), les hypothèses (3.13)-(3.15) la régularité (4.1) et (4.3) implique que $\sigma \in C([0, T]; Q)$. En prenant $w = v \pm z$ ou $z \in (C_0^\infty(\Omega))^d$ dans (3.54) et en utilisant les définitions des f, j_{ad} et j_{fr} nous obtenons

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + f_0(t) = 0. \quad (4.4)$$

pour tout $t \in [0, T]$. Il s'ensuit maintenant de (3.18) que $\text{Div } \sigma \in C([0, T]; Q_1)$ ce qui montre que

$$\sigma \in C([0, T]; Q_1). \quad (4.5)$$

Nous concluons que la solution faible $(u, \sigma, \beta, \theta)$ du problème de contact avec adhésion et frottement \mathcal{P} possède régularité (4.1)-(4.3) et (4.5).

La démonstration du Théorème 4.1.1 sera effectuée en plusieurs étapes et elle est basée sur les résultats abstraits donnés par le Théorème 2.3.4. A cet effet nous supposons dans la suite que (3.13)-(3.28) sont satisfaites ; ci après, c est une constante générique positive qui peut dépendre de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, L$ et R , dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre. Pour raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite des diverses fonctions sur $x \in \Omega \cup \Gamma$.

Soit $\eta \in C([0, T]; V)$ et $g \in C([0, T]; Q_1)$ des fonctions données et soit

$$\sigma_{\eta g}(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{\eta g}(t)) + \varepsilon(\eta(t)). \quad (4.6)$$

Dans la première étape, nous considérons le problème intermédiaire suivant :

Problème $\mathcal{P}_{\eta g}$

Trouver un champ de déplacement $v_{\eta g} : [0, T] \rightarrow V$, tel que

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_{\eta g}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}_{\eta g}(t)) \rangle_Q + j_{fr}(g(t), v) - j_{fr}(g(t), \dot{u}_{\eta g}(t)) + (\eta(t), v - \dot{u}_{\eta g}(t))_V \\ & \geq (f(t), v - \dot{u}_{\eta g}(t))_V \quad \forall v \in V \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$u_{\eta g}(0) = u(0). \quad (4.8)$$

Dans l'étude du problème variationnel $\mathcal{P}_{\eta g}$ nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.1.1. *Supposons que (3.13)-(3.15) sont vérifiées. Alors, le problème mathcalP_{\eta g} admet une solution unique, de plus la solution satisfait*

$$u_{\eta g} \in C^1([0, T]; V). \quad (4.9)$$

Démonstration En utilisant le théorème de représentation de Riesz on peut définir l'opérateur $A : V \rightarrow V$ comme suit :

$$(Au(t), v)_V = \langle \mathcal{A}\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v) \rangle_Q \quad \forall u, v \in V. \quad (4.10)$$

Soient $t \in [0, T]$ et $u_1, u_2 \in V$. Nous utilisons (4.10) pour trouver

$$(Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V = \langle \mathcal{A}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(u_1(t)) - \varepsilon(u_2(t)) \rangle_Q.$$

Moyennant maintenant (3.13)(c)

$$(Au_1(t) - Au_2(t), u_1(t) - u_2(t))_V \geq m_{\mathcal{A}} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2. \quad (4.11)$$

Soit $v \in V$ en utilisant (4.10) nous avons

$$(Au_1(t) - Au_2(t), v)_V = \langle \mathcal{A}\varepsilon(u_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(u_2(t)), \varepsilon(v) \rangle_Q \quad \forall v \in V. \quad (4.12)$$

Combinons l'inégalité précédente avec (3.13)(b) et (2.19) pour trouver

$$(Au_1(t) - Au_2(t), v)_V \leq M_{\mathcal{A}} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (4.13)$$

Mettons ensuite $v = Au_1(t) - Au_2(t)$ dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$\|Au_1(t) - Au_2(t)\|_V \leq M_{\mathcal{A}} \|u_1(t) - u_2(t)\|_V. \quad (4.14)$$

Nous concluons de (4.11) et (4.14) que A est un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. La fonctionnelle $j_{fr}(g(t), \cdot)$ une fonctionnelle propre, convexe et semi-continue inférieurement. Alors, en utilisant des arguments classiques sur les inéquations variationnelles elliptiques (voir Théorème 2.3.4) nous déduisons qu'il existe une fonction unique $v_{\eta g} \in V$ qui vérifie

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{A}\varepsilon(v_{\eta g}), \varepsilon(v) - \varepsilon(v_{\eta g}) \rangle_Q + j_{fr}(g(t), v) - j_{fr}(g(t), v_{\eta g}(t)) \\ & \geq (f(t) - \eta(t), v - (v_{\eta g}(t)))_V \quad \forall v \in V, \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nous montrons maintenant que $v_{\eta g} \in C([0, T]; V)$. En utilisant (4.15), (3.13)(c), (3.36) et après quelque manipulation algébriques on peut montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|v_{\eta g}(t_1) - v_{\eta g}(t_2)\|_V \leq c(\|f(t_1) - f(t_2)\|_V + \|\eta(t_1) - \eta(t_2)\|_V + \|g(t_1) - g(t_2)\|_{Q_1}). \quad (4.16)$$

Compte tenu que $f \in C([0, T]; V)$, $\eta \in C([0, T]; V)$, $g \in C([0, T]; Q_1)$, nous concluons de l'inégalité précédente que

$$v_{\eta g} \in C([0, T]; V). \quad (4.17)$$

Soit maintenant $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ la fonction définie par

$$u_\eta(t) = u_\eta(0) + \int_0^t v_{\eta g}(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (4.18)$$

Il vient de (4.10), (4.15), (4.17) et (4.18) que $u_{\eta g}(t)$ est la solution unique du problème $\mathcal{P}_{\eta g}$ qui satisfait

$$u_{\eta g} \in C^1([0, T]; V).$$

Notons que le relation (4.6), l'hypothèse (3.13) et les régularités $\eta \in C([0, T]; V)$, $v_{\eta g} \in C([0, T]; V)$ implique que $\sigma_{\eta g} \in C([0, T]; Q_1)$ et en prenant maintenant $v = \dot{u}_{\eta g}(t) \pm z$ ou $z \in (C_0^\infty(\Omega))^d$ dans (4.7) et en utilisant (4.6) et les définitions des f, j_{ad} et j_{fr} nous obtenons

$$\text{Div } \sigma_{\eta g}(t) + f_0(t) = 0 \quad (4.19)$$

pour tout $t \in [0, T]$. Il vient maintenant de (3.18) que $\text{Div } \sigma_{\eta g}(t) \in C([0, T]; Q)$ ce qui montre que

$$\sigma_{\eta g} \in C([0, T]; Q_1). \quad (4.20)$$

Soit l'opérateur $\Lambda_\eta : C([0, T], Q_1) \rightarrow C([0, T], Q_1)$ défini par

$$\Lambda_\eta g = \sigma_{\eta g} \quad \forall g \in C([0, T], Q_1). \quad (4.21)$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.1.2. *Pour tout $g \in C([0, T]; Q_1)$, il existe μ_0 dépendant uniquement de $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, L$ et R telle que si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$. La fonction $\Lambda_\eta g : [0, T] \rightarrow Q_1$ appartient à $C([0, T]; Q_1)$, et l'opérateur Λ_η possède un unique point fixe $g_\eta \in C([0, T]; Q_1)$.*

Démonstration. Soit g_1 et $g_2 \in C([0, T]; Q_1)$ et soit $v_{\eta g_i}$ la solution du problème $\mathcal{P}_{\eta g_i}$ pour $(i = 1, 2)$ et pour raison simplicité, nous écrivons $v_{\eta g_i} = v_i, \sigma_{\eta g_i} = \sigma_i, (i = 1, 2)$. En utilisant (4.19) nous avons $\text{Div } \sigma_1(t) = \text{Div } \sigma_2(t)$ ce qui implique

$$\|\Lambda_\eta g_1 - \Lambda_\eta g_2\|_{Q_1} = \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_Q. \quad (4.22)$$

De plus, en utilisant (4.15), nous avons

$$\langle \mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2) \rangle_Q \leq j_{fr}(g_1, v_2) - j_{fr}(g_1, v_1) + j_{fr}(g_2, v_1) - j_{fr}(g_2, v_2). \quad (4.23)$$

Combinons l'inégalité précédente avec l'inégalité (3.43) pour trouver

$$\langle \mathcal{A}\varepsilon(v_1(t)) - \mathcal{A}\varepsilon(v_2(t)), \varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2) \rangle_Q \leq C_R d_\Omega \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|g_1 - g_2\|_{Q_1} \|v_1 - v_2\|_V. \quad (4.24)$$

En utilisant maintenant (3.13)(c) nous obtenons

$$m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon(v_1) - \varepsilon(v_2)\|_Q^2 \leq C_R d_\Omega \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|g_1 - g_2\|_{Q_1} \|v_1 - v_2\|_V. \quad (4.25)$$

Maintenant, par (2.11) et (4.25) il vient que

$$m_{\mathcal{A}} \|v_1 - v_2\|_V \leq C_R d_\Omega \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|g_1 - g_2\|_{Q_1}. \quad (4.26)$$

En utilisant maintenant (4.6), (3.13)(b) et (2.11) on obtient

$$\|\sigma_1 - \sigma_2\|_Q \leq M_{\mathcal{A}} \|v_1 - v_2\|_V. \quad (4.27)$$

Combinons (4.22), (4.27) et (4.26) pour obtenir

$$\|\Lambda_\eta g_1 - \Lambda_\eta g_2\|_{C([0, T]; Q_1)} \leq \frac{M_{\mathcal{A}} C_R d_\Omega \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}}{m_{\mathcal{A}}} \|g_1 - g_2\|_{Q_1}, \quad (4.28)$$

ce qui montre que Λ_η est une contraction sur $C([0, T]; Q_1)$ à condition que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, où μ_0 est donnée par

$$\mu_0 = \frac{m_{\mathcal{A}}}{M_{\mathcal{A}} C_R d_\Omega}. \quad (4.29)$$

Alors nous concluons par l'utilisation du théorème du point fixe de Banach que si

$\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$ l'opérateur Λ_η admet un point fixe unique g_η tel que

$$\Lambda_\eta g_\eta = g_\eta. \quad (4.30)$$

Il est clair que μ_0 dépend seulement de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, L$ et R .

Dans l'étape suivante nous utilisons la solution $u_{\eta g}$ obtenue dans Lemme 4.1.1.

Problème $\mathcal{P}_{\beta_{\eta g}}$

Trouver un champ d'adhésion $\beta_{\eta g} : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tel que :

$$\dot{\beta}_{\eta g}(t) = -(\beta_{\eta g}(t)\gamma_\tau \|R_\tau(u_{\eta g\tau})\|^2 - \varepsilon_a)_+ \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad (4.31)$$

$$\beta_{\eta g}(0) = \beta_0. \quad (4.32)$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 4.1.3. *Le problème $\mathcal{P}_{\beta_{\eta g}}$ possède une solution unique qui satisfait la régularité*

$$\beta_{\eta g} \in W^{1,\infty}([0, T]; L^2(\Gamma_3)) \cap B.$$

Démonstration

Soit $k > 0$ et considérons l'espace X défini comme :

$$X = \{\beta \in C([0, T]; L^2(\Gamma_3)), \quad \sup_{t \in [0, T]} e^{-kt} \|\beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} < +\infty\}.$$

est un espace de Banach avec la norme

$$\|\beta\|_X = \sup_{t \in [0, T]} e^{-kt} \|\beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)},$$

qui est équivalent à la norme standard $\|\cdot\|_{C([0, T]; L^2(\Gamma_3))}$. Maintenant, nous considérons l'opérateur $\mathcal{L} : X \rightarrow X$ donné par

$$\mathcal{L}\beta(t) = \beta_0 - \int_0^t (\gamma_\tau \beta(s) \|R_\tau(u_{\eta\tau}(s))\|^2 - \varepsilon_a)_+ ds. \quad (4.33)$$

On utilise (4.33) et $\|R_\tau(u_{\eta\tau})\| \leq L$, il s'ensuit qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\|\mathcal{L}\beta_1(t) - \mathcal{L}\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \quad (4.34)$$

Depuis

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds &= \int_0^t e^{ks} (e^{-ks} \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)}) ds \\ &\leq \left(\sup_{t \in [0, T]} e^{-kt} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \right) \int_0^t e^{ks} ds \\ &= \frac{e^{kt} - 1}{k} \|\beta_1 - \beta_2\|_X, \end{aligned}$$

cette inégalité implique que

$$\|\mathcal{L}\beta_1 - \mathcal{L}\beta_2\|_X \leq \frac{c'}{k} \|\beta_1 - \beta_2\|_X, \quad (4.35)$$

tel que $c' = \frac{c(e^{kt} - 1)}{k}$.

L'inégalité (4.35) montre que pour $k > c'$, \mathcal{L} est une contraction. Ensuite, on déduit par le théorème du point fixe de Banach selon lequel \mathcal{L} a un point fixe unique β_{ng} , qui satisfait (4.31) et (4.32).

Notons que la restriction $0 \leq \beta \leq 1$ est incluse implicitement dans le problème variationnel \mathcal{P}_V . En effet, la condition (3.25) nous garantit que $\beta(t) \leq \beta_0$ et donc montre que $\beta(t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. sur Γ_3 . D'un autre côté, si $\beta(t_0) = 0$ à $t = t_0$, alors il s'ensuit de (3.20) et (3.25) que $\dot{\beta}(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et donc, $\beta(t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. sur Γ_3 . Nous concluons que $0 \leq \beta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. sur Γ_3 . Il résulte de la définition de l'ensemble B , que $\beta_{ng} \in B$, ce qui conclut la preuve du Lemme 4.1.3.

Dans la troisième étape, soit $\lambda \in C([0, T]; E')$ et nous considérons le problème de valeur initial suivant :

Problème $\mathcal{P}_{\theta_\lambda}$

Trouver un champ de température $\theta_\lambda : [0, T] \rightarrow E$ tel que

$$\dot{\theta}(t) + \mathcal{R}\theta_\lambda(t) = \lambda(t) + \chi(t) \text{ p.p. } t \in [0, T], \quad (4.36)$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0. \quad (4.37)$$

Lemme 4.1.4. *Il existe une solution unique θ_λ du problème $\mathcal{P}_{\theta_\lambda}$ qui satisfait la régularité.*

Démonstration. Le résultat découle de l'évolution d'équation classique du premier ordre donné. Nous allons le Théorème 2.3.2. Ici, le triple de Gelfand est donné par

$$E \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset E'. \quad (4.38)$$

L'opérateur \mathcal{R} est linéaire et coercitive. Par l'inégalité de Korn, nous avons

$$\langle \mathcal{R}\tau, \tau \rangle_{E \times E'} \geq C \|\tau\|_E^2. \quad (4.39)$$

Moyennant (3.30) et pour tout $\tau, \omega \in E$ on a

$$\langle \mathcal{R}\tau, \omega \rangle_{E' \times E} \leq \sum_{i,j=1}^d \|k_{i,j}\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\tau_{,i}\|_{L^2(\Omega)} \|\omega_{,i}\|_{L^2(\Omega)} + \|k_e\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\omega\|_{L^2(\Omega)}. \quad (4.40)$$

En utilisant (2.2) on trouve

$$\langle \mathcal{R}\tau, \omega \rangle_{E' \times E} \leq C \|\tau\|_E \|\omega\|_E. \quad (4.41)$$

D'un autre coté, d'après la définition de χ on déduit que

$$\chi_\lambda = \lambda + \chi \in L^2([0, T]; E'). \quad (4.42)$$

Les inégalités (4.39), (4.41) et la régularité (4.42), $\theta_0 \in L^2(\Omega)$ implique que toutes les conductions du Théorème 2.3.2 sont vérifiées, donc nous concluons qu'il existe une unique fonction θ_λ et qui satisfait

$$\theta_\lambda \in L^2([0, T]; E) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)), \quad \dot{\theta}_\lambda \in L^2([0, T]; E'), \quad (4.43)$$

$$\dot{\theta}_\lambda(t) + \mathcal{R}\theta_\lambda(t) = \chi_\lambda(t) \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad (4.44)$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0. \quad (4.45)$$

Dans la suite nous supposons que $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$. Pour tout $\eta \in C([0, T]; V)$ dénotons par g_η le point fixe de l'opérateur Λ_η défini dans (4.21), par u_η la solution de problème $\mathcal{P}_{\eta g}$ donnée par Lemme 4.1.1, par $\beta_{\eta g}$ la solution du problème $\mathcal{P}_{\beta_{\eta g}}$ fournie par Lemme 4.1.3 et par θ_λ la solution de problème $\mathcal{P}_{\theta_\lambda}$ donnée par Lemme 4.1.4. En utilisant le théorème de représentation de Riesz. on peut définir l'opérateur $\Lambda : C([0, T]; V \times E') \rightarrow C([0, T]; V \times E')$ comme suit :

$$\Lambda(\eta(t), \lambda(t)) = (\Lambda_0(\eta(t), \lambda(t)), \Lambda_1(\eta(t), \lambda(t))) \quad (4.46)$$

Où $v \in V$, $t \in [0, T]$ avec les operateurs Λ_0 et Λ_1 est donné par

$$(\Lambda_0(\eta(t), \lambda(t)), v)_V = \langle \mathcal{B}\varepsilon(u_\eta(t)) - \mathcal{M}(\theta_\lambda(t)), \varepsilon(v) \rangle_Q + j_{ad}(\beta_\eta(t), u_\eta(t))\varepsilon(v). \quad (4.47)$$

$$\Lambda_1(\eta(t), \lambda(t)) = \Theta(\dot{u}_\eta(t), \theta_\lambda(t)). \quad (4.48)$$

Lemme 4.1.5. *Pour tout $(\eta, \lambda) \in C([0, T]; V \times E')$ l'opérateur $\Lambda : [0, T] \rightarrow V$ est continue. De plus, il existe un unique élément $(\eta^*, \lambda^*) \in C([0, T]; V \times E')$.*

Démonstration. Soient (η_1, λ_1) et $(\eta_2, \lambda_2) \in C([0, T]; V \times E')$: Au début, on utilise les hypothèses (3.14), (3.15) et (3.41) et après quelque manipulation algébriques impliquant la lipschitzialité de l'opérateur de traction R la relation (3.21) et l'inégalité $0 \leq \beta \leq 1$ on obtient

$$\begin{aligned} & \|\Lambda_0(\eta_1(t), \lambda_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \lambda_2(t))\|_V \\ & \leq C(\|u_{\eta_1}(t) - u_{\eta_2}(t)\|_V + \|\beta_{\eta_1}(t) - \beta_{\eta_2}(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|\theta_{\lambda_1}(t) - \theta_{\lambda_2}(t)\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Soit maintenant $\eta_1, \eta_2 \in C([0, T]; V)$, et soit $u_i = u_{\eta_i}, \dot{u}_i = \dot{u}_{\eta_i}, \sigma_i = g_{\eta_i}, \beta_i = \beta_{\eta_i}$ et $\theta_i = \theta_{\lambda_i}$ pour $(i = 1, 2)$. D'une part, nous intégrons (3.9) avec la condition initiale (3.12), pour obtenir : $\exists c > 0$ tel que

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \int_0^t (\beta_1(s) - \|R_\tau(u_{1\tau}(s))\|^2 - \beta_2(s) \|R_\tau(u_{2\tau}(s))\|^2)_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

En utilisant les propriétés des opérateurs de troncation R_τ et écrivant $\beta_1 = \beta_1 - \beta_2 + \beta_2$, nous arrivons à :

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + cd_\Omega \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds.$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwall, il s'ensuit que :

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

Combinons cette dernière inégalité avec (2.14), pour obtenir :

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds. \quad (4.50)$$

Ensuite, par (4.49) et (4.50) nous avons

$$\begin{aligned} & \|\Lambda_0(\eta_1(t), \lambda_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \lambda_2(t))\|_V \\ & \leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \quad (4.51)$$

De plus, puisque u_1 et u_2 ont la même condition initial, il s'ensuit que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.52)$$

Combinons l'inégalité (4.52) avec (4.51) pour obtenir

$$\|\Lambda_0(\eta_1(t), \lambda_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \lambda_2(t))\|_V \leq C\left(\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}\right) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.53)$$

En utilisant l'inégalité (4.7) pour $\eta = \eta_1, v = \dot{u}_2, \sigma_1 = g_{\eta_1}$ et $\eta = \eta_2, v = \dot{u}_1, \sigma_2 = g_{\eta_2}$

$$\langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_2), \varepsilon(\dot{u}_2) - \varepsilon(\dot{u}_1) \rangle_Q + (\eta_1 - \eta_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_V \quad (4.54)$$

$$j_{fr}(\sigma_1, \dot{u}_2) - j_{fr}(\sigma_1, \dot{u}_1) + j_{fr}(\sigma_2, \dot{u}_1) - j_{fr}(\sigma_2, \dot{u}_2) \geq 0. \quad (4.55)$$

Combinons cette dernière inégalité avec (3.13)(c) et (3.43), nous trouvons

$$m_{\mathcal{A}} \|\dot{u}_1 - \dot{u}_2\|_V \leq \|\eta_1 - \eta_2\|_V + C_R d_{\Omega} \|\mu\|_{L^{\infty}(\Gamma_3)} \|\sigma_2 - \sigma_1\|_Q. \quad (4.56)$$

De plus, puisque $\text{Div } \sigma_1(t) = \text{Div } \sigma_2(t)$ (voir(1.17)), en utilisant encore une fois (4.7), (3.13)(b) et (2.14)

$$\|\sigma_2 - \sigma_1\|_Q = \|\sigma_2 - \sigma_1\|_{Q_1} \leq M_{\mathcal{A}} \|\dot{u}_1 - \dot{u}_2\|_V + \|\eta_1 - \eta_2\|_V. \quad (4.57)$$

Pour conclure, à partir de (4.56) et (4.57) il vient que

$$(m_{\mathcal{A}} - M_{\mathcal{A}} C_R d_{\Omega} \|\mu\|_{L^{\infty}(\Gamma_3)}) \|\dot{u}_1 - \dot{u}_2\|_V \leq (1 + C_R d_{\Omega} \|\mu\|_{L^{\infty}(\Gamma_3)}) \|\eta_1 - \eta_2\|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.58)$$

Et puisque $\|\mu\|_{L^{\infty}(\Gamma_3)} < \mu_0$, de (4.58) et (4.29) nous déduisons que

$$\|\dot{u}_1 - \dot{u}_2\|_V \leq \frac{1 + C_R d_{\Omega} \|\mu\|_{L^{\infty}(\Gamma_3)}}{m_{\mathcal{A}} - M_{\mathcal{A}} C_R d_{\Omega} \|\mu\|_{L^{\infty}(\Gamma_3)}} \|\eta_1 - \eta_2\|_V \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.59)$$

Donc

$$\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.60)$$

De plus, si on prend la substitution $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2$ dans (4.36) est on choisit $v = \theta_1 - \theta_2$ la fonction de test

$$\begin{aligned} & \langle \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t) \rangle_{E' \times E} + \langle \mathcal{R}\theta_1(t) - \mathcal{R}\theta_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t) \rangle_{E' \times E} \\ & = \langle \lambda_1(t) - \lambda_2(t), \theta_1(t) - \theta_2(t) \rangle_{E' \times E} \quad \text{p.p } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

On intègre l'inégalité précédente, en utilisant(3.32) les conditions initial $\theta_{\lambda_1} = \theta_{\lambda_2} = \theta_0$ et comme \mathcal{R} est linéaire et coercive, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2 ds \\ & \leq \int_0^t \langle \lambda_1(s) - \lambda_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s) \rangle_{E' \times E} ds. \end{aligned}$$

Employant les inégalité de Hölder et Young, on en déduit que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2 ds \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^t (\|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{E'}^2 + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2) ds. \end{aligned}$$

Moyennant une version des lemmes de Gronwall (Corollaire 2.5.1), il s'insuit que

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_E^2 ds \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{E'}^2 ds. \quad (4.61)$$

De (4.53), (4.60) et (4.61) on à

$$\begin{aligned} & \|\Lambda_0(\eta_1(t), \lambda_1(t)) - \Lambda_0(\eta_2(t), \lambda_2(t))\|_V^2 \\ & \leq C \int_0^t (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V^2 + \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{E'}^2) ds \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

D'après la difinition (3.31) de Θ et les hypothèses (3.16) et (3.17) on obtient

$$\begin{aligned} & \|\Lambda_1(\eta_1(t), \lambda_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), \lambda_2(t))\|_{E'}^2 \\ & = \|\Theta(\dot{u}_1(t), \theta_1(t)) - \Theta(\dot{u}_2(t), \theta_2(t))\|_{E'}^2 \quad \text{p.p } t \in [0, T]. \\ & \leq C(\|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E'}^2) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Cela nous permet de déduire, via (4.60) et (4.61) que

$$\begin{aligned} & \|\Lambda_1(\eta_1(t), \lambda_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), \lambda_2(t))\|_{E'}^2 \\ & \leq C(\|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V^2 + \|\lambda_1(t) - \lambda_2(t)\|_{E'}^2). \end{aligned} \quad (4.64)$$

De (4.62) et (4.64), nous conclusion qu'il existe une constante positive $C > 0$ vérifier

$$\|\Lambda(\eta_1, \lambda_1) - \Lambda(\eta_2, \lambda_2)\|_{C([0, T]; V \times E')}^2 \leq C \|\eta_1 - \eta_2, \lambda_1 - \lambda_2\|_{C([0, T]; V \times E')}^2. \quad (4.65)$$

En réitérant l'intégralité (4.65) n fois on obtient

$$\|\Lambda^n(\eta_1, \lambda_1) - \Lambda^n(\eta_2, \lambda_2)\|_{C([0, T]; V \times E')}^2 \leq \frac{C^n}{n!} \|\eta_1 - \eta_2, \lambda_1 - \lambda_2\|_{C([0, T]; V \times E')}^2. \quad (4.66)$$

on sais que $(\frac{C^n}{n!})$ converge vers 0, ainsi pour n assez grande $\frac{C^n}{n!} < 1$. C'est -à-dire que l'opérateur Λ^n est une contraction dans $C([0, T]; V \times E')$.

Donc, du théorème du point fixe de Banach Λ admet unique point fixe $(\eta^*, \lambda^*) \in C([0, T]; V \times E')$.

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour prouver le Théorème 4.1.1

Démonstration du Théorème 4.1.1

Soit $(\eta^*, \lambda^*) \in C([0, T]; V \times E')$ et $g_{\eta^*} \in C([0, T]; V)$ les points fixe de opérateurs Λ, Λ_η respectivement. Soient (u, β, θ) les solutions définies dans les lemmes 4.1.1, 4.1.3 et 4.1.4 respectivement pour $\eta = \eta^*$, c'est-à-dire

$$(a)u = u_{\eta^*} = u_{\eta^* g_{\eta^*}}, \quad (b)\beta = \beta_{\eta^*} = \beta_{\eta^* g_{\eta^*}} \quad (c)\theta = \theta_{\lambda^*}. \quad (4.67)$$

Donc, en choisissant $\eta = \eta^*, g = g_{\eta^*}$ dans (4.7), on obtient

$$\begin{cases} \langle \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)), \varepsilon(v) - \varepsilon(\dot{u}(t)) \rangle_Q + (\eta^*(t), v - \dot{u}(t))_V + j_{fr}(g_{\eta^*}(t), v) \\ -j_{fr}(g_{\eta^*}(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_V, \quad \forall v \in V, \quad \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (4.68)$$

Les égalités $\Lambda_0(\eta^*, \lambda^*) = \eta^*, \Lambda_1(\eta^*, \lambda^*) = \lambda^*$ combinés avec (4.67) montrent que

$$\langle \eta^*(t), v \rangle_V = (\mathcal{B}\varepsilon(u(t)) - \mathcal{M}(\theta(t)), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), \varepsilon(v)). \quad (4.69)$$

$$\lambda^*(t) = \Theta(\dot{u}_{\eta^*}, \theta_{\lambda^*}) \quad (4.70)$$

Maintenant, nous substituons (4.69) dans (4.68), et l'utilisation (3.53) de voir que (3.55) est satisfaite. Nous écrivons (4.36) pour $\lambda = \lambda^*$ avec l'utilisation (4.67)(c) et (4.70) de constater que (3.55) satisfait. Suivant (3.57)-(3.59) et la régularité (4.1), (4.2) et (4.3) proviennent des Lemmes 4.1.1, 4.1.3 et 4.1.4 respectivement.

Unicité : L'unicité de la solution est une conséquences de l'unicité des points fixes des opérateur Λ et Λ_η et de l'unique solvabilité des problèmes $\mathcal{P}_{\eta g}, \mathcal{P}_{\beta_{\eta g}}$ et $\mathcal{P}_{\theta_\lambda}$.

Conclusion générale

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'étude un problème de contact entre un corps déformable et une fondation. Le contact est bilatéral et modélisé avec une loi de frottement non locale, dans laquelle l'adhésion est prise en compte. L'évolution du champ de liaison est décrite par une équation différentielle du premier ordre. Le comportement des matériaux est modélisé avec une loi de comportement thermo-viscoélastique non linéaire. Une formulation variationnelle du problème thermo-mécanique est dérivée, et l'existence et l'unicité de la solution faible peuvent être prouvées si le coefficient de frottement est suffisamment petit.

La preuve est basée sur les arguments des inégalités variationnelles dépendantes du temps, des équations différentielles et du théorème de Banach à point fixe.

Enfin, ce problème peut être approché numériquement en utilisant les méthodes itératives des éléments finis et des différences finies.

Bibliographie

- [1] B. Awbi, *Analyse Variationnelle de Quelques Problèmes Viscoélastiques et Viscoplastiques Avec Frottement*, Ph. D. disserdation, Université de Perpignan (2001).
- [2] A. Azeb Ahmed, S. Boutechebak, *of a dynamic thermo-elasto-viscoplastic contact problem. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2013, No. 71, 1-17; December 2013.
- [3] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, Paris (1987).
- [4] I. Boukaroura, S. Djabi, *A dynamic Tresca's frictional contact problem with damage for thermo elastic-viscoplastic bodies. Studia Univ. Babeş Bolayai, Mathematica* : accepted in January. (2019).
- [5] O. Chau, *Numerical analysis of a thermal contact problem with adhesion. Comp. Appl. Math.* 37, 5424-5455 (2018).
- [6] O. Chau, J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion. Journal of Computational and Applied Mathematics* 159(2), 43-465 (2003).
- [7] L. Cangémi, *Frottement et Adhérence : Modèle, Traitement Numérique et Application à l'interface Fibre/Matrice*, Ph. D. disserdation, Université de la Méditerranée, Marseille, France (1997).
- [8] A. Djabi, Abdelbaki et Aissaoui, Adel (2015) *A frictional contact problem with wear involving elastic-viscoplastic materials with damage and thermal effects. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2015 (27). pp. 1-18.
- [9] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris (1972).

-
- [10] M. Frémond, *Adhérence des solides. Journal of Mécanique Théorique et Appliquée* 6, 383-407(1987).
- [11] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II, 295, pp. 913-916, 1982.*
- [12] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity, Studies in Advanced Mathematics 30, American Mathematical Society, Providence, RI - Intl. Press, Sommerville, MA, 2002.*
- [13] M. Selmani and L. Selmani, *contact problem for elastic-viscoplastic materials with thermal effect. Applied Mathematics and Mechanics, 34(6), 761-776. (2013).*
- [14] W. Han, M. Sofonea, *Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, SIAM Journal of Numerical Analysis 38 (2000), 556-579.*
- [15] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and variational analysis of quasistatic contact. Lecture Notes in Physics, Vol. 655, Springer, Berlin (2004).*
- [16] M. Sofonea, R. Arhab and R. Tarraf, *of electroelastic frictionless contact problems with adhesion. Journal of Applied Mathematics, Article ID 64217, 1-25 (2006) DOI 10.1155/JAM/2006/64217.*
- [17] M. Sofonea and T.V. Hoarau-Mantel, *Elastic frictionless contact problems with adhesion. Advances in Mathematical Sciences and Applications 15(1), 49-68 (2005).*
- [18] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage, Pure and Applied Mathematics 276, Chapman- Hall/CRC Press, New York 2006.*
- [19] M. Raous, L. Cangémi and M. A Cocu, *consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 177, 383-399 (1999).*
- [20] M. Cocou and R. Rocca, *Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. Modélisation Mathématique et Analyse Numérique 34, 981-1001 (2000).*
- [21] *Dynamic nonsmooth frictional contact problems with damage in thermoviscoelasticity. Math Mech Solids 21 :525-538(2016).*

- [22] M. Frémond, *Non-Smooth Thermomechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [23] P. Alart and A. Curnier, *A generalized Newton method for contact problems with friction*. *J. Theor. Appl. Mech* 7, 67-82 (1988).
- [24] H.T. Banks, R.C. Smith and Y. Wang, *Smart Material Structures : Modeling, Estimation and Control*, Masson, Wiley, 1996.
- [25] T. Cazenave, A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Ellipses, Paris, 1990.
- [26] P.G. Ciarlet, *Basic Error Estimates for Elliptic Problem*. Dans P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds, *Handbook of Numerical Analysis, Vol. II*, pages 17-351. North Holland, Amsterdam, 1991.
- [27] M. Sofonea, A. Matei, *Variational inequalities with applications, A study of antiplane frictional contact problems*, Springer, New York (à paraître).

Résumé

Notre travail représente une contribution à l'analyse d'un problème de contact en tenant compte de l'effet thermique du matériau. Sous l'hypothèse de petite transformation nous étudions un processus quasistatique, pour de matériau thermo-viscoélastique. Le contact est bilatéral avec frottement et adhésion. Notre étude de phénomène de contact comprend les étapes suivantes : la modélisation mathématique puis l'analyse variationnelle incluant de résultat d'existence et d'unicité de la solution faible du problème.

Mots clés:thermo-viscoélastique, adhésion, inéquation d'évolution, inéquation quasi variationnelle, solution faible, point fixe.

Abstract

Our work represents a contribution to the analysis of a contact problem taking into account the thermal effect of the material. Under the small transformation hypothesis, we study a quasistatic process, for thermo-viscoelastic material. Contact is bilateral with friction and adhesion. Our study of contact phenomenon includes the following steps: mathematical modeling, then variational analysis including of existence result and uniqueness of the weak solution of the problem.

Key words:thermo-viscoelastic, adhesion, evolution inequality, quasi-variational inequality, weak solution, fixed point.

المخلص

يمثل عملنا مساهمة في تحليل مسألة الاتصال مع مراعاة التأثير الحراري للمادة. تحت فرضية التحول الصغيرة ندرس عملية شبه استاتيكية للمواد الحرارية اللزجة. الاتصال ثنائي مع الاحتكاك والالتصاق. تشمل دراستنا لظاهرة الاتصال المراحل التالية: النمذجة الرياضية ثم التحليل التبايني بما في ذلك نتيجة الوجود وتفرد الحل الضعيف للمشكلة. كلمات مفتاحية: اللزوجة الحرارية ، الالتصاق ، المتباينة التطورية ، المتباينة شبه التغيرية ، الحل الضعيف ، النقطة الثابتة.