



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique  
جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي  
Université El-Shahid Hamma Lakhdar - El-Oued



# Mémoire pour l'obtention du diplôme de master en mathématiques

**Domaine** : Mathématique-Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Spécialité** : Mathématiques fondamentales et appliquées

## Thème

**Théorème du point fixe sur  
l'espace métrique partiel et  
cônique et applications**

**Préparé par :**

Douche Mohammad Ayman

**Soutenu devant le jury composé de :**

Said Beloul  
Mostefa Djedidi  
Khaled Habita

Université d'El oued  
Université d'El oued  
Université d'El oued

Président  
Encadreur  
Examinateur

Année universitaire 2021 - 2022.

# Dédicaces

Avec un énorme plaisir et une immense joie  
que je dédie ce mémoire à mes parents ma mère et mon père, qui m'ont  
soutenus tout au long de ma vie.

À toute ma famille,  
à tout mes amis,  
à tout mes enseignants, pour leur utiles conseils.

## Résumé

Dans ce travail, on a présenté quelques théorèmes du point fixe pour des contractants vérifiant des conditions suffisantes dans un espace métrique et des généralisations sur des espaces métriques partiels et des espaces métriques cône. On a aussi appliqué quelques résultats pour établir l'existence de solutions de certaines équations différentielles et intégrales non linéaires.

**Mots clés :** point fixe – espace métrique - espace métrique partiel - espace métrique cône .

## ملخص

في هذا العمل، قدمنا بعض نظريات النقطة الثابتة للمؤثرات التي تحقق شروطاً كافية في الفضاء المترى والتعميمات على الفضاءات المترية الجزئية والفضاءات المترية المخروطية. كما قمنا بتطبيق بعض النتائج لإثبات وجود حلول لبعض المعادلات التفاضلية الغير خطية و المعادلات التكاملية.

الكلمات المفتاحية : النقطة الثابتة - الفراغ المترى - الفراغ المترى الجزئي - الفراغ المترى المخروطي.

## Abstract

In this work, we presented some fixed point theorems for contractants satisfying sufficient conditions in a metric space and generalizations on partial metric spaces and cone metric spaces. We have also applied some results to establish the existence of solutions of certain nonlinear differential and integral equations.

**Keywords :** fixed point - metric space - partial metric space - cone metric space.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Espace métrique . . . . .	3
1.1.1 Topologie d'un espace métrique . . . . .	4
1.1.2 Convergence des suites . . . . .	4
1.1.3 Limites et continuité . . . . .	5
1.1.4 Espace complet . . . . .	6
1.1.5 Espace compact . . . . .	6
1.2 Espace vectoriel normé . . . . .	7
<b>2 Théorème du point fixe sur l'espace métrique</b>	<b>8</b>
2.1 Théorème du point fixe de Banach . . . . .	8
2.2 Théorème du point fixe de Kannan . . . . .	10
2.3 Théorème du point fixe de Chatterjea . . . . .	11
2.4 Théorème du point fixe de Reich . . . . .	12
2.5 Théorème du point fixe de Zamfirescu . . . . .	14
2.6 Théorème du point fixe de Caristi . . . . .	14
2.7 Théorème du point fixe de Ćirić . . . . .	17
<b>3 Espace métrique partiel, Espace métrique cônica</b>	<b>19</b>
3.1 Espace métrique partiel . . . . .	19
3.2 Espace métrique cônica . . . . .	21
3.3 Théorème du point fixe sur l'espace métrique partiel . . . . .	25
3.3.1 Théorème du point fixe de Matthew . . . . .	25
3.3.2 Théorème du point fixe de Kannan . . . . .	26
3.3.3 Théorème du point fixe de Chatterjea . . . . .	27
3.3.4 Théorème du point fixe de Reich . . . . .	28
3.3.5 Théorème du point fixe de Caristi . . . . .	29
3.3.6 Théorème du point fixe de Ćirić . . . . .	32
3.4 Théorème du point fixe sur l'espace métrique cônica . . . . .	34
3.4.1 Théorème du point fixe de Banach . . . . .	34
3.4.2 Théorème du point fixe de Kannan . . . . .	37
3.4.3 Théorème du point fixe de Chatterjea . . . . .	38

3.4.4	Théorème du point fixe de Reich . . . . .	41
3.4.5	Théorème du point fixe de Caristi . . . . .	42
3.4.6	Théorème du point fixe de Ćirić . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Applications</b>	<b>46</b>
4.1	Application 1 . . . . .	46
4.2	Application 2 . . . . .	47
4.3	Application 3 . . . . .	48
4.4	Application 4 . . . . .	51
	<b>Conclusion</b>	<b>53</b>
	<b>Références</b>	<b>54</b>

# Introduction

La résolution de plusieurs problèmes mathématiques se ramène souvent à la recherche de point fixe pour certaines application non linéaires, avec nombreuses applications en mathématiques et dans de nombreux domaines différents, en particulier le domaine des équations différentielles et intégrales.

Le point fixe d'une fonction est le point égal à son image par cette fonction  $f(x) = x$ . Si l'application va de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , cette propriété se traduit graphiquement par le fait que la courbe représentative de  $f$  et la première bissectrice du repère se coupent en point  $(x, x)$ , la recherche des points fixes alors est une méthode des approximations successives.

La théorie classique et le travail Banach 1922 dans le cadre de la résolution d'équations intégrales [3], cette théorie donne l'existence et l'unité du point fixe, à partir de cette théorie, elle a été généralisée à d'autres théories telles que la théorème du point fixe de Reich.

Le sujet du point fixe a été étudié sous plusieurs aspects, tels que l'aspect de son existence, son unité..., et selon le type d'espace.

Dans ce mémoire, nous avons mentionné quelques types de théorèmes de point fixe commençant par théorème du point fixe de Banach et les théorèmes donnés seront spécifiques à l'espace métrique, et souvent ils seront donnés dans l'espace métrique complet. En outre, toutes les théories que nous avons évoquées donnent l'existence et l'unité du point fixe, à l'exception des théories de Caristi et de Ćirić qui ne donnent que l'existence.

Dans le première chapitre aborde de définitions des espaces métriques. Dans le deuxième chapitre, nous précortons quelques théorèmes des points fixes sur un espace métrique.

Dans le troisième chapitre, nous avons mentionné une définition des espaces métriques partiels et des espaces côniques, qui sont des espaces qui généralisent l'espace métrique. Ensuite, et une généralisation des théorèmes du point fixe précédemment donnés sur des espaces métriques partiels et côniques.

Dans le dernier chapitre, on appliquera quelques théorèmes pour établir l'existence et l'unicité des solutions des systèmes et des équations intégrales non linéaires.

# Chapitre 1

## Préliminaires

Dans ce chapitre, nous mentionnerons quelques concepts de base de l'espace métrique et l'espace vectoriel normé.

### 1.1 Espace métrique

**Définition 1.1** (Distance). Soit  $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}^+$  une application.

On dit que  $d$  est une distance sur un ensemble  $X$  si

- .  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0 \iff x = y.$
- .  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x).$
- .  $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

**Définition 1.2** (Espace métrique). Si  $d$  est une distance sur  $X$  alors on dit que  $(X, d)$  est un espace métrique.

**Exemple 1.1.**  $\mathbb{R}$  muni de la distance usuelle ( $d(x, y) = |x - y|$ ) est un espace métrique.

**Définition 1.3.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Soit  $Y$  un sous-ensemble de  $X$ , alors  $(Y, d|_Y)$  (l'ensemble  $Y$  avec la métrique de  $X$  restreinte à  $Y$ ) est un sous-espace métrique de  $(X, d)$

**Définition 1.4** (Boule et sphère). Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $a \in X$  et  $r \in ]0, +\infty[$ . On définit la boule ouverte et fermée, centrée en  $a$  et de rayon  $r$  de la manière suivante.

- . Boule ouverte :  $B(a, r) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}.$
- . Boule fermée :  $B_f(a, r) := \{x \in X \mid d(a, x) \leq r\}.$
- . Sphère :  $S(a, r) := B_f(a, r) \setminus B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) = r\}.$

**Définition 1.5** (Partie bornée). Une partie  $A \subset (X, d)$  est dite bornée s'il existe  $x \in X$  et  $M > 0$  tels que  $A \subset B(x, M)$ .

On remarque qu'une boule, ouverte ou fermée, n'est jamais vide car contient toujours son centre  $a$ . Mais une sphère peut être vide.

### 1.1.1 Topologie d'un espace métrique

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On définit l'ensemble  $\mathcal{T}$  constitué de toutes les unions (quelconques) possibles de boules ouvertes, plus précisément :

$$\mathcal{T} := \{ \cup_{i \in I} B(a_i, r_i) \mid I \text{ ensemble quelconque et } \forall i \in I, a_i \in E, r_i > 0 \}$$

où l'on considère qu'une union vide (lorsque  $I = \emptyset$ ) vaut l'ensemble vide  $\emptyset$ .

**Proposition 1.1.** *L'ensemble  $\mathcal{T}$  est une topologie sur  $E$  appelée la topologie engendrée par la distance  $d$ .*

**Définition 1.6** (Ouvert, fermé et voisinage). *On utilise les notions suivantes.*

- . Les éléments de  $\mathcal{T}$  sont appelés les ouverts de  $X$ .
- . Les sous-ensembles de  $X$  qui s'écrivent comme le complémentaire d'un ouvert sont appelés les fermés de  $X$ .
- . Un ensemble  $V \subset X$  est dit un voisinage de  $x \in X$  s'il existe un ouvert  $U \in \mathcal{T}$  tel que  $x \in U \subset V$ .

**Proposition 1.2.**

- . Toute boule ouverte est un ouvert.
- . Toute boule fermée est un fermé.
- . Toute sphère est un fermé.

**Définition 1.7** (Intérieur, adhérence et frontière). *Soit  $A$  une partie de  $X$ .*

- . On dit que  $x \in X$  est un point intérieur de  $A$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset A$ .
- . On appelle intérieur de  $A$  et on note  $\overset{\circ}{A}$  l'ensemble des points intérieurs de  $A$ .
- . On dit que  $x \in E$  est un point adhérent à  $A$  si, pour tout  $r > 0$  on a  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .
- . On appelle adhérence de  $A$  et on note  $\bar{A}$  l'ensemble des points adhérents à  $A$ . L'ensemble  $\bar{A}$  est un fermé : c'est le plus petit fermé contenant  $A$ .

**Définition 1.8** (La distance entre un point et un ensemble). *Si  $A \subset (X, d)$  et  $x \in X$ , on appelle distance de  $x$  à  $A$ , et on note  $d(x, A)$ , le réel*

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, a); a \in A \}.$$

### 1.1.2 Convergence des suites

Soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'un espace métrique  $(X, d)$  et  $x \in X$ .

**Définition 1.9** (Convergence). *On dit que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ , ou que  $x$  est la limite de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

**Définition 1.10** (Limite supérieure et limite inférieure d'une suite). *Soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée de réels, on définit les suites*

$$u_n = \sup\{x_k \mid k \geq n\} \text{ et } v_n = \inf\{x_k \mid k \geq n\}.$$

*Alors*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} x_n = \inf_{n \geq 0} (u_n) \text{ et } \liminf_{n \rightarrow +\infty} x_n = \sup_{n \geq 0} (v_n).$$

**Définition 1.11** (Limite supérieure et limite inférieure d'une fonction). *Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $F \subset X$  sous-espace de  $X$  et  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Pour tout point limite  $a$  de  $F$ ,*

$$\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sup\{f(x) : x \in F \cap B(a, \varepsilon) - \{a\}\})$$

*et*

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\inf\{f(x) : x \in F \cap B(a, \varepsilon) - \{a\}\})$$

*où  $B(a, \varepsilon)$  désigne la boule métrique de rayon  $\varepsilon$  sur  $a$ .*

**Définition 1.12** (Valeur d'adhérence). *On dit que  $x$  est une valeur d'adhérence de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  si*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 \geq 0, \exists n \geq n_0, d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

**Définition 1.13** (Suite de Cauchy). *On dit que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \forall p, q \geq n_0, d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$$

**Proposition 1.3.**

- . *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
- . *Une suite convergente possède une unique valeur d'adhérence qui est sa limite.*
- . *Une suite de Cauchy converge si et seulement si elle possède une valeur d'adhérence.*

### 1.1.3 Limites et continuité

Soient  $(X, d_1)$  et  $(Y, d_2)$  deux espaces métriques,  $f : X \rightarrow Y$  est une application.

**Définition 1.14** (La limite). *Soit  $a \in X$ . On dit que  $f$  admet une limite en  $a$  s'il existe  $\ell \in Y$  tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d(x, a) < \delta \implies d(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

**Définition 1.15** (La continuité). *On dit que  $f$  est continue en  $a \in X$  si  $f$  admet une limite en  $a$  (nécessairement égale à  $f(a)$ ). On dit que  $f$  est continue sur  $X$  si elle est continue en chaque point de  $X$ .*

**Définition 1.16** (Application lipschitzienne). *On dit que  $f$  est lipschitzienne s'il existe  $k \in \mathbb{R}^+$  tel que*

$$\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

**Définition 1.17** (Application contractante). *On dit que  $f$  est contractante s'il existe  $k \in [0, 1[$  tel que*

$$\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

### 1.1.4 Espace complet

**Définition 1.18.** *On dit que  $(X, d)$  est un espace métrique complet si pour toute suite de Cauchy est convergente vers  $x \in X$ .*

**Proposition 1.4.** .

- . *Tout sous-espace complet d'un espace métrique est fermé.*
- . *Tout sous-espace fermé d'un espace complet est complet.*

### 1.1.5 Espace compact

**Définition 1.19** (Espace séparé). *Soit  $(X, \mathcal{T})$  espace topologique. On dit que  $(X, \mathcal{T})$  est un espace séparé si pour tout deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints.*

**Proposition 1.5.** *Tout espace métrique est séparé. En effet, deux points situés à une distance  $\ell$  l'un de l'autre admettent comme voisinages disjoints les boules de rayon  $\ell/3$  centrées sur chacun d'eux.*

**Définition 1.20** (Espace compact). *On dit que  $(X, d)$  est un espace compact s'il est séparé et qu'il vérifie, De tout recouvrement ouvert de  $X$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini. C'est-à-dire que pour toute famille  $\{U_i, i \in I\}$  d'ensembles ouverts recouvrant  $X$ , il existe une partie finie  $J$  de  $I$  telle que la sous-famille  $\{U_i, i \in J\}$  recouvre déjà  $X$ .*

**Proposition 1.6** (Bolzano-Weierstrass). *On dit qu'une partie  $A$  d'un espace métrique est compacte si toute suite de  $A$  possède une suite extraite convergente.*

**Proposition 1.7.**

- . *Toute partie compacte d'un espace séparé est fermée.*
- . *Toute partie fermée d'un espace compact est compacte.*

## 1.2 Espace vectoriel normé

**Définition 1.21** (Espace vectoriel normé). Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif muni d'une valeur absolue et non discret. Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est dit normé lorsqu'il est muni d'une norme, c'est-à-dire d'une application  $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}^+$  satisfaisant les hypothèses suivantes :

- .  $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$ .
- .  $\forall (\lambda, x) \in (\mathbb{K} \times E), \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ .
- .  $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

**Remarque 1.1.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé, l'application  $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par  $d(x, y) = \|x - y\|$  est une distance, appelée distance associée à la norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$ .

**Définition 1.22.** Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé, et  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite dans  $(E, \|\cdot\|)$

- .  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est dite convergente vers  $x \in E$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \|x_n - x\| \leq \varepsilon.$$

- .  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est dite suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

**Définition 1.23.** Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. On appelle  $(E, \|\cdot\|)$  espace de Banach s'il est complet pour la distance associée à sa norme.

**Définition 1.24** (Application linéaire). Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés sur un corps  $\mathbb{K}$ ,  $f: E \rightarrow F$  une application.  $f$  est dite  $\mathbb{K}$ -linéaire si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est généralement noté  $L(E, F)$ .

**Définition 1.25** (Application continue). Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés sur un corps  $\mathbb{K}$ .  $f: E \rightarrow F$  une application.  $f$  est dite continue en  $x_0$  si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \|x - x_0\|_E < \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_F < \varepsilon.$$

L'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$  est généralement noté  $\mathcal{L}(E, F)$ .

**Définition 1.26** (Opérateur inversible). Soit  $A \in \mathcal{L}(E, F)$ , on dit que  $A$  est inversible s'il existe  $B \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que  $AB = BA$ . On l'appelle opérateur inverse de  $A$  ou plus simplement inverse de  $A$  et on note  $B := A^{-1}$ .

# Chapitre 2

## Théorème du point fixe sur l'espace métrique

Dans ce chapitre, nous allons introduire quelques types de théorèmes de point fixe sur l'espace métrique.

### 2.1 Théorème du point fixe de Banach

Dans cette section, nous présenterons le théorème de point fixe de Banach qui l'a énoncé en 1922 dans le cadre de la résolution d'équations intégrales [3].

**Théorème 2.1.** *Soient  $X$  un espace métrique complet (non vide) et  $T$  une application  $k$ -contractante de  $X$  dans  $X$ , c-à-d*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \quad \forall x, y \in X. \quad (2.1)$$

*Alors il existe un point fixe unique  $x^*$  de  $T$ . De plus, toute suite d'éléments de  $X$  vérifiant la récurrence  $x_{n+1} = T(x_n)$  vérifie la majoration*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$$

*donc converge vers  $x^*$ .*

**Preuve. 1. L'existence :** *Soit  $x_0 \in X$  arbitraire et définir une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . En posant  $x_n = T(x_{n-1})$ . Notons d'abord que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a l'inégalité*

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0).$$

*Cela s'ensuit par induction sur  $n$ , en utilisant le fait que  $T$  est une application de contraction. On peut alors montrer que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. En particulier, soit  $m, n \in \mathbb{N}$  tel que  $m > n$*

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq k^{m-1}d(x_1, x_0) + k^{m-2}d(x_1, x_0) + \cdots + k^n d(x_1, x_0) \\
&= k^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{mn-1} k^i \\
&\leq k^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{\infty} k^i \\
&= k^n d(x_1, x_0) \left( \frac{1}{1-k} \right).
\end{aligned}$$

Soit  $\varepsilon > 0$  arbitraire. Puisque  $k \in [0, 1)$ , on peut trouver un grand  $N \in \mathbb{N}$  pour que  $k^N < \frac{\varepsilon(1-k)}{d(x_1, x_0)}$ . Ainsi, pour  $m$  et  $n$  supérieur à  $N$  on peut écrire

$$d(x_m, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0) \left( \frac{1}{1-k} \right) < \left( \frac{\varepsilon(1-k)}{d(x_1, x_0)} \right) d(x_1, x_0) \left( \frac{1}{1-k} \right) = \varepsilon.$$

Cela prouve que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est Cauchy. Par la complétude de  $(X, d)$ , la suite a une limite  $x^* \in X$ . Par ailleurs,  $x^*$  doit être un point fixe de  $T$

$$x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_{n-1}) = T \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} \right) = T(x^*).$$

**2. L'unicité :** Soit  $x^*$  et  $x^{**}$  deux points fixes de  $T$ , comme  $T$  est contraction on a

$$d(T(x^*), T(x^{**})) = d(x^*, x^{**}) > kd(x^*, x^{**}).$$

alors  $x^* = x^{**}$ .

**Remarque 2.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet. Supposons que l'application  $T : X \rightarrow X$  vérifie pour un nombre  $n \in \mathbb{N}^*$  la condition contractive suivant

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x, y),$$

pour tout  $x, y \in X$ , où  $k \in [0, 1)$  est une constante. Alors  $T$  a un point fixe unique dans  $X$ .

**Exemple 2.1.** Soient  $X = \mathbb{R}$  muni de la distance usuelle  $d(x, y) = |x - y|$ ,  $T : X \rightarrow X$  tel que  $T(x) = \frac{x + \sin(x)}{3}$ . Alors  $\forall x, y \in X$

$$|Tx - Ty| = \left| \frac{x + \sin(x)}{3} - \frac{y + \sin(y)}{3} \right| \leq \frac{1}{3}(|x - y| + |\sin(x) - \sin(y)|)$$

Après l'application du théorème des accroissements finis, on obtient  $\forall x, y \in X$

$$|Tx - Ty| \leq \frac{2}{3}|x - y|,$$

donc  $T$  est une contraction de  $X$  vers  $X$ , comme  $(\mathbb{R}, d)$  est complet, d'après le théorème de point fixe de Banach, alors  $T$  admet un point fixe unique  $x^* = 0$ .

**Remarque 2.2.** Pour que le théorème de point fixe de Banach soit valable, il est crucial que  $T$  soit un contraction, il ne suffit pas pour  $k = 1$  dans (2.1), c'est-à-dire que

$$d(T(x), T(y)) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Par exemple, les applications  $T_1, T_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  données par  $T_1(x) = x + 1$  et  $T_2(x) = x$  satisfont tous deux (2.1) avec  $k = 1$ . L'application  $T_1$  n'a pas de points fixes, alors que  $T_2$  a une infinité de points fixes.

**Théorème 2.2.** Soient  $X$  un espace métrique compact (non vide) et  $T : X \rightarrow X$  une application vérifiant

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X, (x \neq y).$$

Alors  $T$  admet un point fixe unique  $x^*$ . De plus, pour tout  $x_0 \in X$ , la suite d'éléments de  $X$  que vérifiant la récurrence  $x_{n+1} = Tx_n$  converge vers  $x^*$ .

## 2.2 Théorème du point fixe de Kannan

**Théorème 2.3.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet.  $T : X \rightarrow X$  une application. Si  $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$  et

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \tag{2.2}$$

pour tout  $x, y \in X$ , alors  $T$  a un point fixe unique.

**Preuve. 1. L'existence :** Choisissons  $x_0 \in X$ . Posons  $x_1 = Tx_0$ ,  $x_2 = Tx_1, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$ . Nous avons

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq \lambda(d(Tx_n, x_n) + d(Tx_{n-1}, x_{n-1})) \\ &= \lambda(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})), \end{aligned}$$

alors

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1})$$

où  $h = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ , pour  $m > n$

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq h^{m-1}d(x_1, x_0) + h^{m-2}d(x_1, x_0) + \cdots + h^n d(x_1, x_0) \\
&= h^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{m-n-1} h^i \\
&\leq h^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{\infty} h^i \\
&= h^n d(x_1, x_0) \left( \frac{1}{1-h} \right).
\end{aligned}$$

Alors  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ ). Ainsi  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Par la complétude de  $(X, d)$ , il existe  $x^* \in X$  tel que  $x_n \rightarrow x^*$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Depuis

$$\begin{aligned}
d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx^*, Tx_n) + d(Tx_n, x^*) \\
&\leq \lambda(d(x^*, Tx^*) + d(x_n, Tx_n)) + d(x_{n+1}, x^*).
\end{aligned}$$

Donc

$$d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-\lambda}(\lambda d(x_n, Tx_n) + d(x_{n+1}, x^*)),$$

pour  $n \rightarrow \infty$  et comme  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x^*$ , ce implique  $d(x_n, Tx_n) \rightarrow 0$  car  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Donc  $d(Tx^*, x^*) = 0$ . Cela implique  $Tx^* = x^*$ . Donc  $x^*$  est un point fixe de  $T$ .

**2. L'unicité :** Soit  $x^{**} \in X$  tel que  $Tx^{**} = x^{**}$  et  $x^* \neq x^{**}$ ,

$$d(x^*, x^{**}) = d(Tx^*, Tx^{**}) \leq \lambda(d(x^*, Tx^*) + d(x^{**}, Tx^{**})) = 0,$$

donc  $x^* = x^{**}$ . Alors le point fixe de  $T$  est unique.

**Remarque 2.3.** Les conditions (2.2) du théorème de et (2.1) du théorème de Banach sont indépendant.

## 2.3 Théorème du point fixe de Chatterjea

**Théorème 2.4.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet.  $T : X \rightarrow X$  une application. Si  $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$  et

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

pour tout  $x, y \in X$ , alors  $T$  a un point fixe unique.

**Preuve. 1. L'existence :** Choisissons  $x_0 \in X$ . Posons  $x_1 = Tx_0$ ,  $x_2 = Tx_1, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$ . Nous avons

$$\begin{aligned}
d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\
&\leq \lambda(d(Tx_n, x_{n-1}) + d(Tx_{n-1}, x_n)) \\
&= \lambda(d(x_{n+1}, x_{n-1}) + d(x_n, x_n)),
\end{aligned}$$

alors

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1})$$

où  $h = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ , pour  $m > n$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq h^{m-1} d(x_1, x_0) + h^{m-2} d(x_1, x_0) + \cdots + h^n d(x_1, x_0) \\ &= h^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{m-n-1} h^i \\ &\leq h^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{\infty} h^i \\ &= h^n d(x_1, x_0) \left( \frac{1}{1-h} \right). \end{aligned}$$

Ceci donne  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ ). Ainsi  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Par la complétude de  $(X, d)$ , il existe  $x^* \in X$  tel que  $x_n \rightarrow x^*$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Depuis

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx^*, Tx_n) + d(Tx_n, x^*) \\ &\leq \lambda(d(x^*, Tx_n) + d(x_n, Tx^*)) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\leq \lambda(d(x^*, Tx_n) + d(x^*, Tx^*) + d(x_n, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*), \end{aligned}$$

donc

$$d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-\lambda} \lambda(d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*).$$

Pour  $n \rightarrow \infty$  et comme  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x^*$ , on arrive à  $d(Tx^*, x^*) = 0$ . On trouve  $Tx^* = x^*$ . Donc  $x^*$  est un point fixe de  $T$ .

**2. L'unicité :** Soit  $x^{**} \in X$  tel que  $Tx^{**} = x^{**}$  et  $x^* \neq x^{**}$ ,

$$d(x^*, x^{**}) = d(Tx^*, Tx^{**}) \leq \lambda(d(x^*, Tx^{**}) + d(x^{**}, Tx^*)) = 2\lambda d(x^*, x^{**}).$$

Puisque  $\lambda < \frac{1}{2}$ , alors  $x^* = x^{**}$ . Donc le point fixe de  $T$  est unique.

## 2.4 Théorème du point fixe de Reich

Dans cette section, on présente le théorème du point fixe de Reich [14].

**Théorème 2.5.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet.  $T : X \rightarrow X$  une application. S'il existe  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, +\infty)$  tel que  $\alpha + \beta + \gamma < 1$  et

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty) \quad (2.3)$$

pour tout  $x, y \in X$ , alors  $T$  a un point fixe unique.

**Preuve. 1. L'existence :** prenons un point  $x_0 \in X$  et considérons la suite  $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ . On remplace  $x = T^n(x_0)$ ,  $y = T^{n-1}(x_0)$  dans (2.3) on obtient pour  $n \geq 1$ ,

$$d(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \leq \alpha d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)) + \beta d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) \\ + \gamma d(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0)),$$

donc

$$d(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \leq a d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0))$$

où  $a = \frac{\alpha + \gamma}{1 - \beta}$ , on a  $a < 1$ , Il s'ensuit que

$$d(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \leq a^n d(x_0, T(x_0)),$$

et que pour tout  $m > n$ ,

$$d(T^m(x_0), T^n(x_0)) \leq \frac{a^n}{1 - a} d(x_0, T(x_0)),$$

alors  $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy. Comme  $(X, d)$  est complet alors  $T^n(x_0) \rightarrow x^*$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Nous allons maintenant montrer que  $T(x^*) = x^*$ , ce suffit à prouver que  $T^{n+1}(x_0) \rightarrow T(x^*)$ . En effet on a si on prend  $x = T^n(x_0)$ ,  $y = x^*$  dans (2.3)

$$d(T^{n+1}(x_0), T(x^*)) \leq \alpha d(T^n(x_0), x^*) + \beta d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) + \gamma d(x^*, T(x^*)) \\ \leq \alpha d(T^n(x_0), x^*) + \beta d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) + \gamma d(x^*, T^{n+1}(x_0)) + \gamma d(T^{n+1}(x_0), T(x^*)) \\ \leq \alpha d(T^n(x_0), x^*) + a^n \beta d(x_0, T(x_0)) + \gamma d(x^*, T^{n+1}(x_0)) + \gamma d(T^{n+1}(x_0), T(x^*)),$$

donc

$$d(T^{n+1}(x_0), T(x^*)) \leq \frac{1}{1 - \gamma} [\alpha d(T^n(x_0), x^*) + a^n \beta d(x_0, T(x_0)) + \gamma d(x^*, T^{n+1}(x_0))] \\ + \frac{\gamma}{1 - \gamma} d(T^{n+1}(x_0), T(x^*)) \rightarrow 0.$$

Alors  $T(x^*) = x^*$ .

**2. L'unicité :** Soit  $x^*$  et  $x^{**}$  deux points fixes de  $T$ .

$$d(x^*, x^{**}) = d(T(x^*), T(x^{**})) \leq \alpha d(x^*, x^{**}) + \beta d(x^*, x^*) + \gamma d(x^{**}, x^{**}) = \alpha d(x^*, x^{**})$$

nous avons  $1 \leq \alpha$ , c'est une contradiction. Alors  $x^* = x^{**}$ , le point fixe est unique.

**Exemple 2.2.** Soient  $X = [0, 1]$ ,  $T : X \rightarrow X$  tel que  $T(x) = \frac{x}{3}$  pour  $0 \leq x < 1$  et  $T(1) = \frac{1}{6}$ .

$T$  satisfait la condition (2.3) si on pose  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\beta = \frac{1}{6}$ ,  $\gamma = \frac{1}{9}$ .

**Remarque 2.4.** On peut voir que la théorème de Reich est plus générale que théorèmes de Banach et Kannan,  $T$  ne satisfait pas la condition de Banach car elle n'est pas continue en 1. La condition de également n'est pas satisfaisant car  $d(T(0), T(\frac{1}{3})) = \frac{1}{2}(d(0, T(0)) + d(\frac{1}{3}, T(\frac{1}{3})))$ . Mais elle satisfait la condition de Reich.

## 2.5 Théorème du point fixe de Zamfirescu

Dans cette section, On donne le théorème du point fixe de Zamfirescu.

**Théorème 2.6.** *Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet et  $T : X \rightarrow X$  une application. On suppose qu'il existe des nombres réels  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  satisfont  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $0 \leq \beta, \gamma < \frac{1}{2}$  tels que, pour tout  $x, y \in X$ , au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée*

- .  $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$ .
- .  $d(Tx, Ty) \leq \beta[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$ .
- .  $d(Tx, Ty) \leq \beta[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$ .

*alors,  $T$  admet un point fixe unique dans  $X$  et l'itération de Picard  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  définie par*

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

*converge vers ce point, pour tout  $x_0 \in X$ .*

## 2.6 Théorème du point fixe de Caristi

**Définition 2.1** (Semi-continuité supérieure). *Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On dit que  $f$  est semi-continue supérieurement en  $x_0$  si*

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

*où  $\limsup$  désigne la limite supérieure d'une fonction en un point.*

$f$  est dit semi-continue supérieurement s'elle est semi-continue supérieurement en tout point de  $X$ .

**Définition 2.2** (Semi-continuité inférieure). *Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On dit que  $f$  est semi-continue inférieurement en  $x_0$  si*

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

*où  $\liminf$  désigne la limite inférieure d'une fonction en un point.*

$f$  est dit semi-continue inférieurement s'elle est semi-continue inférieurement en tout point de  $X$ .

**Remarque 2.5.** *Une fonction est continue en un point si et seulement si elle est semi-continue supérieurement et inférieurement en ce point.*

**Théorème 2.7.** *Soient  $(X, d)$  un espace métrique complet non vide et  $T$  une application de  $X$  dans  $X$  (non nécessairement continue). Pour que  $T$  admette un point fixe, il suffit qu'il existe une application semi-continue inférieurement  $f : X \rightarrow [0, +\infty)$  telle que pour tout point  $x$  de  $X$  :*

$$d(x, T(x)) \leq f(x) - f(T(x)). \quad (2.4)$$

**Preuve** ([18]). Pour tout  $x \in X$ , définir une application  $S : X \rightarrow P(X)$  (la puissance ensemble de  $X$ ) par

$$S(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq f(x) - f(y)\}.$$

Clairement,  $x \in S(x)$  et donc  $S(x) \neq \emptyset$  pour tout  $x \in X$ . Nous affirmons que pour chaque  $y \in S(x)$ , on a  $f(y) \leq f(x)$  et  $S(y) \subseteq S(x)$ . Soit  $y \in S(x)$  donné. Puis  $d(x, y) \leq f(x) - f(y)$ . On a donc  $f(y) \leq f(x)$ . Puisque  $S(y) \neq \emptyset$ , soit  $z \in S(y)$ . Ainsi  $d(y, z) \leq f(y) - f(z)$ . Il s'ensuit que  $f(z) \leq f(y) \leq f(x)$  et donc

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq f(x) - f(z).$$

Donc  $z \in S(x)$ . On prouve donc  $S(y) \subseteq S(x)$ . Nous allons construire une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans  $X$  par récurrence, prendre n'importe quel point  $x_1 \in X$ . Supposons que  $x_n \in X$  est connu. On choisit alors  $x_{n+1} \in S(x_n)$  tel que

$$f(x_{n+1}) \leq \inf_{z \in S(x_n)} f(z) + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , puisque  $x_{n+1} \in S(x_n)$ , on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq f(x_n) - f(x_{n+1}). \quad (2.6)$$

Donc  $f(x_{n+1}) \leq f(x_n)$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque  $f$  est bornée

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) \text{ existe.} \quad (2.7)$$

Pour  $m > n$  avec  $m, n \in \mathbb{N}$ , d'après (2.6) et (2.7), on obtient

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq f(x_n) - \gamma.$$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \gamma$ , on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{d(x_n, x_m) : m > n\} = 0.$$

Donc  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy dans  $X$ . Par la complétude de  $X$ , il existe  $x^* \in X$  tel que  $x_n \rightarrow x^*$  comme  $n \rightarrow \infty$ . Puisque  $f$  est semi-continu inférieur, d'après (2.7), on a

$$f(x^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \inf_{n \in \mathbb{N}} f(x_n) \leq f(x_p), \forall p \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Ensuite, nous montrons que  $\bigcap_{n=1}^{\infty} S(x_n) = \{x^*\}$ . Pour  $m > n$  avec  $m, n \in \mathbb{N}$ , d'après (2.6) et (2.8), t

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq f(x_n) - f(x^*).$$

Puisque  $x_m \rightarrow x^*$  lorsque  $m \rightarrow \infty$  l'inégalité précédente implique

$$d(x_n, x^*) \leq f(x_n) - f(x^*), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par l'inégalité précédente, nous savons  $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S(x_n)$ . D'où  $\bigcap_{n=1}^{\infty} S(x_n) \neq \emptyset$  et  $S(x^*) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} S(x_n)$ .

Pour tout  $w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S(x_n)$ , d'après (2.5), on a

$$\begin{aligned} d(x_n, w) &\leq f(x_n) - f(w) \\ &\leq f(x_n) - \inf_{z \in S(x_n)} f(z) \\ &\leq f(x_n) - f(x_{n+1}) + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, w) = 0$  où, de manière équivalente,  $x_n \rightarrow w$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Par l'unicité de limite d'une suite, on a  $w = x^*$ . Donc  $\bigcap_{n=1}^{\infty} S(x_n) = \{x^*\}$ . Puisque  $S(x^*) \neq \emptyset$  et

$$S(x^*) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} S(x_n) = \{x^*\}$$

donc  $S(x^*) = \{x^*\}$ . Par contre, par (2.7), et comme  $Tx^* \in S(x^*)$ . D'où il doit être  $Tx^* = x^*$ . Donc  $T$  a un point fixe  $x^*$  dans  $X$ .

**Exemple 2.3.** Soit  $X = [0, 1]$  muni de la distance usuelle, soient  $f(x) = x$ ,  $\forall x \in X$  et  $T : X \rightarrow X$  tel que

$$T(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, & x \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

$f$  est continue alors elle est semi-continue inférieurement.

Soit  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $d(x, Tx) = d(x, 0) = x$  et  $f(x) - f(Tx) = f(x) - 0 = x - 0 = x$ .

De la même manière, soit  $x \in (\frac{1}{2}, 1]$ ,  $d(x, Tx) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = f(x) - f(Tx)$  alors  $d(x, Tx) = f(x) - f(Tx)$ ,  $\forall x \in X$ . On a 0 est le seul point fixe de  $T$ .

**Exemple 2.4.** Le but de cet exemple est de voir que le point fixe du théorème 2.7 n'est pas nécessairement unique.

Soient  $X = [-1, 1]$  muni de la distance usuelle,  $T : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$  définit par

$$T(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Soit  $f$  définit par  $f(x) = \frac{3}{4}d(x, Tx)$ ,  $f$  est semi-continue inférieurement, et  $d(x, Tx) = f(x) - f(Tx)$ ,  $\forall x \in X$  car  $d(Tx, T^2x) \leq \frac{1}{4}d(x, Tx)$ .  $T$  admet deux points fixes  $x_0 = 0$  et  $x_1 = -1$ .

## 2.7 Théorème du point fixe de Ćirić

Dans cette section, on va présenter le théorème du point fixe pour les application orbitalement continues sur les espaces métriques orbitalement complets donnés par Ćirić en 1974 [5].

Soient  $X, d$  un espace métrique,  $T : X \rightarrow X$  une application et  $x_0 \in X$ ,

$$O(x_0) = \{T^n x_0 : n = 0, 1, 2, \dots\}$$

est appelée l'orbite de  $x_0$ .

**Définition 2.3.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $T : X \rightarrow X$  une application et  $x_0 \in X$ .

$X$  est dit  $T$ -orbitalement complet si toute suite de Cauchy qui est contenue dans  $O(x)$  pour un point  $x$  dans  $X$  converge dans  $X$ .

Nous observons que tout espace métrique complet est  $T$ -orbitalement complet pour tout  $T$ , mais un espace métrique  $T$ -orbitalement complet n'est pas nécessairement un espace complet.

**Définition 2.4.**  $T$  est dit orbitalement continu en  $x_0 \in X$  si pour tout suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset O(x)$  pour chaque  $x \in X$ ,  $x_n \rightarrow x_0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  implique  $Tx_n \rightarrow Tx_0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Remarque 2.6.** Clairement, tout application continue d'un espace métrique est orbitalement continue, mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

**Théorème 2.8.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $T : X \rightarrow X$  une application orbitalement continue. Si  $X$  est  $T$ -orbitalement complet et  $T$  vérifie la condition suivante

$$\min\{d(Tx, Ty), d(x, Ty)\} - \min\{d(x, Ty), d(y, Tx)\} \leq kd(x, y) \quad (2.9)$$

pour tout  $x, y \in X$  et pour un réel  $k < 1$ . Alors pour chaque  $x_0 \in X$  la suite  $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$  converge vers un point fixe de  $T$ .

**Preuve.** Soit  $x_0 \in X$ , nous montrerons que la suite d'itérations

$$x_1 = Tx_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n$$

à  $x_0$  est une suite de Cauchy. Si  $x_{k-1} = x_k$  pour un nombre  $k \in \mathbb{N}^*$  immédiatement donne  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy.

Supposons que  $x_{n-1} \neq x_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . De (2.9) et pour  $x = x_{n-1}$  et  $y = x_n$  alors

$$\min\{d(Tx_{n-1}, Tx_{n-1}), d(x_{n-1}, Tx_{n-1})\} - \min\{d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d(x_{n-1}, Tx_{n-1})\}$$

$$= \min\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n)\} \leq kd(x_{n-1}, x_n).$$

Puisque  $d(x_{n-1}, x_n) \leq kd(x_{n-1}, x_n)$  est impossible (car  $k < 1$ ), alors

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n).$$

De la même manière on obtient

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq k^2d(x_{n-2}, x_{n-1}) \leq \dots \leq k^n d(x, Tx),$$

donc pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$

$$d(x_n, x_{n+q}) \leq \sum_{i=n}^{n+q-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{n+q-1} k^i d(x, Tx) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, Tx).$$

Puisque  $k^n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , alors  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Comme  $X$  est  $T$ -orbitalement complet alors il existe  $x^* \in X$  tel que  $T^n x \rightarrow x^*$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , puisque  $T$  est orbitalement continue alors

$$Tx^* = \lim_{n \rightarrow +\infty} TT^n x = x^*.$$

C-à-d  $x^*$  est un point fixe de  $T$ .

**Exemple 2.5.** Soit  $X = [0, 1]$  muni de la distance usuelle, soit  $T : X \rightarrow X$  tel que

$$T(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & x \text{ rationnel,} \\ x, & x \text{ irrationnel,} \end{cases}$$

$T$  est orbitalement continue, et satisfait la condition du théorème 2.8,  $T$  possède un nombre infini de points fixes.

# Chapitre 3

## Espace métrique partiel, Espace métrique cône

### 3.1 Espace métrique partiel

Dans cette section, nous présenterons le concept de auto-distance non nulle appelée métrique partielle introduit par Matthews (1994) [12,13].

**Définition 3.1.** *Un espace métrique partiel est une paire  $(X, p)$  tel que  $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifie  $\forall x, y, z \in X$*

$$a_0. 0 \leq p(x, x) \leq p(x, y).$$

$$a_1. p(x, y) = p(y, x).$$

$$a_2. p(x, x) = p(x, y) = p(y, y) \Rightarrow x = y.$$

$$a_3. p(x, z) + p(y, y) \leq p(x, y) + p(y, z).$$

**Exemple 3.1.**

- .  $(\mathbb{R}^+, p)$  où  $p(x, y) = \max\{x, y\} \forall x, y \in \mathbb{R}^+$  est un espace métrique partiel.
- . Soit  $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tel que  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$

$$p(x, y) = \begin{cases} x, & y \leq x, \\ y, & y > x, \end{cases}$$

alors  $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, p)$  est un espace métrique partiel.

**Remarque 3.1.** *Un espace métrique partiel est censé être le moindre généralisation de la notion d'espace métrique, telle que la distance de chaque point à lui-même n'est plus nécessairement nulle. Cette valeur ( $p(x, x)$ ) est appelée auto-distance, taille ou poids de  $x$ .*

L'espace métrique est donc précisément un espace métrique partiel tel que  $p(x, x)$  soit toujours nul. Le cas échéant la taille peut être utilisée pour exprimer la mesure dans la quelle un point est partiellement défini.

**Remarque 3.2.** *De l'application  $p$ , on peut définir une distance sur  $X$  comme suit  $d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \forall x, y, z \in X$ .*

**Preuve.** Pour tout  $x, y, z \in X$

- . De la condition  $(a_0)$ , on a  $0 \leq d_p(x, y)$ .
- . Soit  $d_p(x, y) = 0 \Rightarrow 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 0 \Rightarrow p(x, y) - p(x, x) + p(x, y) - p(y, y) = 0$ , donc et par  $(a_0)$   $p(x, y) = p(x, x) = p(y, y)$ . D'après  $(a_3)$  on obtient  $x = y$ .
- . Soit  $x = y$  alors  $d_p(x, y) = 0$ .
- . D'après  $(a_1)$   $d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) = 2p(y, x) - p(y, y) - p(x, x) \Rightarrow d_p(x, y) = d_p(y, x)$ .
- . D'après  $(a_3)$   $d_p(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y) \leq 2p(x, z) + 2p(z, y) - 2p(z, z) - p(x, x) - p(y, y) = d_p(x, z) + d_p(z, y)$ .

**Définition 3.2.** Un boule ouverte pour une métrique partielle  $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est l'ensemble de la forme,

$$B_\varepsilon(x) := \{y \in X, p(x, y) < \varepsilon\}$$

pour chaque  $\varepsilon > 0$  et  $x \in X$ .

**Théorème 3.1.** L'ensemble de toutes les boules ouvertes d'une métrique partielle  $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $\emptyset$  forme la base d'une topologie sur  $X$ .

**Définition 3.3** (Convergence, suite de Cauchy, complétude). Soient  $(X, p)$  un espace métrique partiel et  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de  $X$ .

- . On dit que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente vers  $x$  dans  $(X, p)$  si  $\forall x \in X \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x) = p(x, x)$  (la convergence dans  $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ).
- . On dit que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy dans  $(X, p)$  s'il existe  $a \geq 0$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0, |p(x_n, x_m) - a| < \varepsilon.$$

- . On dit que  $(X, p)$  est un espace métrique partiel complet si toute suite de Cauchy est convergente.

**Remarque 3.3.** La définition de suite de Cauchy équivalent à

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(x_n, x_m) = a.$$

**Remarque 3.4.** Si  $(X, p)$  est un espace métrique alors  $a = 0$ .

**Lemme 3.1.** Soient  $(X, p)$  un espace métrique partiel,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de  $X$  et  $x \in X$  alors

- .  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est de Cauchy dans  $(X, p)$  si et seulement si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est de Cauchy dans l'espace métrique  $(X, d_p)$ .
- .  $(X, p)$  est complet si et seulement si l'espace métrique  $(X, d_p)$  est complet. En outre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_p(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow p(x, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x, x_n) = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(x_n, x_m).$$

**Lemme 3.2.** Soit  $(X, p)$  un espace métrique partiel complet, alors pour tout  $x, y \in X$

1.  $p(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ .
2.  $x \neq y \Rightarrow p(x, y) > 0$ .

**Preuve.**

1. Soit  $p(x, y) = 0$ , de la condition  $(a_0)$  on a  $p(x, x) \leq p(x, y) = 0$  et  $p(y, y) \leq p(x, y) = 0$ , alors de  $(a_1)$   $x = y$ .
2. Soit  $x \neq y$ , par la définition  $p(x, x) \geq 0 \forall x, y \in X$ . On suppose que  $p(x, y) = 0$ , de la partie (1)  $x = y$ . Cela contredit l'hypothèse et  $p(x, y) > 0$  pour tout  $x \neq y$ .

**Lemme 3.3.** Soient  $(X, p)$  un espace métrique partiel,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de  $X$  et  $x \in X$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \quad \text{et} \quad p(x, x) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, y) = p(x, y) \quad \forall y \in X.$$

**Preuve.** Notons d'abord que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x) = p(x, x) = 0$ . Par l'inégalité triangulaire, on a  $\forall y \in X$

$$p(x_n, y) \leq p(x_n, x) + p(x, y) - p(x, x) = p(x_n, x) + p(x, y)$$

et

$$p(x, y) \leq p(x, x_n) + p(x_n, y) - p(x_n, x_n) \leq p(x, x_n) + p(x_n, y)$$

donc

$$0 \leq |p(x_n, y) - p(x, y)| \leq p(x_n, x),$$

en passant à la limite on arrive au résultat.

## 3.2 Espace métrique cône

Dans cette section, nous présenterons le concept d'espace métrique cône introduit par Huang et Zhang (2007) qui sont généralisé le concept d'espaces métriques, remplaçant l'ensemble de nombres réels par un espace de Banach ordonné [6,15].

Dans la suite  $E$  est un espace de Banach réel et  $P$  un sous-ensemble de  $E$ .

**Définition 3.4** (Cône).  $P$  est appelée un cône si

- .  $P$  est non vide, fermé et  $P \neq \{0\}$ .
- .  $\forall x, y \in P \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \alpha x + \beta y \in P$ .
- .  $x \in P$  et  $-x \in P \Rightarrow x = 0$ .

Étant donné un cône  $P \subset E$ , on définit un ordre partiel  $\leq$  par rapport à  $P$  par  $x \leq y$  si et seulement si  $y - x \in P$ . On écrira  $x < y$  pour indiquer que  $x \leq y$  mais  $x \neq y$ , tandis que  $x \ll y$  sera représentent  $y - x \in \text{int}(P)$  ( $\text{int}(P)$  désigne l'intérieur de  $P$ ).

**Définition 3.5** (Normal). *Le cône  $P$  est dit normal s'il existe un nombre  $k > 0$  tel que pour tout  $x, y \in E$*

$$0 \leq x \leq y \Rightarrow \|x\| \leq k\|y\|.$$

*Le plus petit nombre positif satisfaisant la condition ci-dessus est appelé la constante normale de  $P$ .*

**Remarque 3.5.** *Il n'y a pas de cône normal avec une constante normale  $k < 1$ .*

**Définition 3.6** (Régulier). *Le cône  $P$  est dit régulier si toute suite croissante bornée par le haut est convergente. Autrement dit, si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite telle que*

$$x_1 \ll x_2 \ll \dots \ll x_n \ll \dots \ll y$$

*pour un certain  $y \in E$ , alors il existe  $x \in E$  tel que  $\|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .*

**Remarque 3.6.** *La définition précédente est équivalente à : le cône  $P$  est régulier si et seulement si toute suite décroissante bornée par le bas est convergente.*

**Proposition 3.1.** *Tout cône régulier est un cône normal.*

**Preuve.** *Soit  $P$  un cône régulier qui n'est pas normal. Pour chaque  $n \geq 1$ , choisir  $t_n, s_n \in P$  tels que  $t_n - s_n \in P$  et  $n^2\|t_n\| < \|s_n\|$ . Pour chaque  $n \geq 1$ , posons  $x_n = \frac{s_n}{\|t_n\|}$  et  $y_n = \frac{t_n}{\|t_n\|}$ . Alors,  $x_n, y_n, y_n - x_n \in P$ ,  $\|y_n\| = 1$  et  $n^2 < \|x_n\|$ , pour tout  $n \geq 1$ . Puisque la série  $\sum_1^{+\infty} n^2\|y_n\|$  est convergent et  $P$  est fermé, il existe un élément  $y \in P$  tel que  $\sum_1^{+\infty} n^2\|y_n\| = y$ . Maintenant, notons que*

$$0 \leq x_1 \leq x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 \leq x_1 + \frac{1}{2^2}x_2 + \frac{1}{3^2}x_3 \leq \dots \leq y.$$

*Ainsi,  $\sum_1^{+\infty} n^2\|x_n\|$  est convergent car  $P$  est régulier. Ce implique que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}x_n = 0$ , qui est une contradiction.*

Dans la suite on supposera toujours que  $E$  est un espace de Banach,  $P$  est un cône dans  $E$  avec  $\text{int}(P) \neq \emptyset$  et  $\leq$  est un ordre partiel par rapport à  $P$ .

**Définition 3.7** (Espace métrique cônica). *Soit  $X$  un ensemble non vide. Supposons que l'application  $d : X \times X \rightarrow E$  satisfasse,  $\forall x, y, z \in X$*

- .  $0 < d(x, y)$  et  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
- .  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- .  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ,

alors  $d$  est appelé une métrique cônica sur  $X$  et  $(X, d)$  est appelé un espace métrique cônica.

**Remarque 3.7.** Il est évident que les espaces métriques côniques généralisent les espaces métriques.

**Exemple 3.2.** Soient  $E = \mathbb{R}^2$ ,  $P = \{(x, y) \in E \mid x, y \leq 0\} \subset E$ ,  $X = \mathbb{R}$  et  $d : X \times X \rightarrow E$  tel que  $d(x, y) = (|x - y|, \alpha|x - y|)$ , où  $\alpha \geq 0$  est une constante. Alors  $(X, d)$  est un espace métrique cônica.

**Définition 3.8.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique cônica. Le poids scalaire de la métrique cônica  $d$  est défini par,  $d_s(x, y) = \|d(x, y)\|$ .

Notons que pour un cône normal avec la constante normale, le poids scalaire de la métrique cônica  $d_s$  se comporte comme une métrique sur  $X$ .

**Définition 3.9** (Convergence, suite de Cauchy). Soient  $(X, d)$  un espace métrique cônica.  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite dans  $X$  et  $x \in X$ .

- . On dit que la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x \in X$  si

$$\forall c \in \text{int}(P), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq 0, d(x_n, x) \ll c.$$

Nous notons cela par  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$  ou  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ .

- . On dit que la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy si

$$\forall c \in \text{int}(P), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq 0, d(x_n, x_m) \ll c.$$

**Lemme 3.4.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique cônica,  $P$  un cône normal de constante normale  $k$ . Soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite dans  $X$ . Alors  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x$  si et seulement si  $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  (dans  $(E, \|\cdot\|)$ ).

**Preuve.** ( $\Rightarrow$ ) Supposons que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x$ . Pour tout réel  $\varepsilon > 0$ , choisir  $c \in E$  avec  $0 \ll c$  et  $K\|c\| < \varepsilon$ . Alors il y a  $n_0$ , pour tout  $n > n_0$ ,  $d(x_n, x) \ll c$ . Ainsi, lorsque  $n > n_0$ ,  $d(x_n, x) \leq K\|c\| < \varepsilon$ . Cela signifie  $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Inversement, supposons que  $d(x_n, x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Pour  $c \in E$  avec  $0 \ll c$ , il y a  $\delta > 0$ , tel que  $\|x\| < \delta$  implique  $c - x \in \text{int}(P)$ . Pour ce  $\delta$  il existe  $n_0$ , tel que pour tout  $n > n_0$ ,  $\|d(x_n, x)\| < \delta$ . Donc  $c - d(x_n, x) \in \text{int}(P)$ . Cela signifie  $d(x_n, x) \ll c$ . Donc  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x$ .

**Lemme 3.5.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique cônica,  $P$  un cône normal de constante normale  $k$ . Soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite dans  $X$ . Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x$  et  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $y$ , alors  $x = y$ . C'est la limite de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est unique.

**Preuve.** Pour tout  $c \in E$  avec  $0 \ll c$ , il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n > n_0$ ,  $d(x_n, x) \ll c$  et  $d(x_n, y) \ll c$ . Nous avons

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y) \leq 2c$$

Donc  $d(x, y) \leq 2k\|c\|$ . Puisque  $c$  est arbitraire  $d(x, y) = 0$ , donc  $x = y$ .

**Définition 3.10** (Complet). Soit  $(X, d)$  un espace métrique cône, si toute suite de Cauchy est convergente en  $X$ , alors  $X$  est appelé un espace métrique cône complet.

**Lemme 3.6.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique cône,  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite dans  $X$ . Si  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge à  $x$ , alors  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy.

**Lemme 3.7.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique cône,  $P$  un cône normal de constante normale  $k$ . Soit  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite dans  $X$ . Alors  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy si et seulement si  $d(x_n, x_m) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$  (dans  $(E, \|\cdot\|)$ ).

**Lemme 3.8.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique cône,  $P$  un cône normal de constante normale  $k$ . Soient  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  deux suites dans  $X$  et  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ ,  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ . Alors  $d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(x, y)$

**Preuve.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on choisissons  $c \in E$  avec  $0 \ll c$  et  $\|x\| < \frac{\varepsilon}{4k+2}$ . De  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$  et  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$ , il existe  $n_0$  tel que pour tout  $n > n_0$ ,  $d(x_n, x) \ll c$  et  $d(y_n, y) \ll c$ . Nous avons

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y) \leq d(x, y) + 2c,$$

$$d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y) \leq d(x_n, y_n) + 2c.$$

D'où

$$0 \leq d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n) \leq 4c$$

et

$$\|d(x_n, y_n) - d(x, y)\| \leq d(x, y) + 2c - d(x_n, y_n) + \|2c\| \leq (4k + 2)\|c\| < \varepsilon.$$

Donc  $d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d(x, y)$ .

**Définition 3.11.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique cône. Si pour toute suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  dans  $X$ , il y a une sous-suite  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  telle que  $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  est convergente en  $X$ . Alors  $X$  est appelé un espace métrique cône séquentiellement compact.

**Définition 3.12** (Application Lipschitzienne, contractante). Soient  $(X, d_1)$ ,  $(Y, d_2)$  deux espaces métriques cône et  $T : (X, d_1) \rightarrow (Y, d_2)$  une application.

. On dit que  $T$  est une application Lipschitzienne s'il existe  $k \geq 0$  tel que  $\forall x, y \in X$

$$d_2(Tx, Ty) \leq kd_1(x, y).$$

. On dit que  $T$  est contractante s'il est Lipschitzienne et  $0 \leq k < 1$ .

### 3.3 Théorème du point fixe sur l'espace métrique partiel

Dans cette section, on va donner quelques des généralisations du théorème du point fixe dans l'espace métrique partiel et cône.

#### 3.3.1 Théorème du point fixe de Matthew

Dans cette sous-section, nous présenterons dans un espace métrique partiel le théorème de Matthew qui est analogue à principe de Banach (théorème 2.1)[13].

**Théorème 3.2** (Matthew). *Soit  $T$  une application d'un espace métrique partiel complet  $(X, p)$  en lui-même tel qu'il existe un nombre réel  $c$  avec  $0 \leq c < 1$  satisfait*

$$p(T(x), T(y)) \leq cp(x, y) \quad \forall x, y \in X,$$

alors  $T$  admet un point fixe unique  $x^*$  avec  $p(x^*, x^*) = 0$ .

**Preuve.** 1. *L'existence* : Soit  $x_0 \in X$ , alors  $\forall n, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p(T^{n+k+1}x_0, T^n x_0) &\leq p(T^{n+k+1}x_0, T^{n+k}x_0) + p(T^{n+k}x_0, T^n x_0) \\ &\quad - p(T^{n+k}x_0, T^{n+k}x_0) \\ &\leq c^{n+k}p(Tx_0, x_0) + p(T^{n+k}x_0, T^n x_0), \end{aligned}$$

alors  $\forall n, k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p(T^{n+k+1}x_0, T^n x_0) &\leq (c^{n+k} + \dots + c^n)p(Tx_0, x_0) + p(T^n x_0, T^n x_0) \\ &\leq c^n \frac{1 - c^{k+1}}{1 - c} p(Tx_0, x_0) + c^n p(x_0, x_0) \\ &\leq c^n \left( \frac{p(Tx_0, x_0)}{1 - c} + p(x_0, x_0) \right), \end{aligned}$$

ce implique que  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$p(T^{n+k}x_0, T^n x_0) \leq c^n p(x_0, x_0).$$

Alors  $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy tel que

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(T^n x, T^m x) = 0,$$

comme  $(X, p)$  est complet alors il existe  $x^*$  tel que  $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x^*$  et  $p(x^*, x^*) = 0$ . D'autre part  $p(Tx^*, x^*) = 0$  car  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p(Tx^*, x^*) &\leq p(Tx^*, T^{n+1}x) + p(T^{n+1}x_0, x^*) - p(T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0) \\ &\leq cp(x^*, T^n x_0) + p(T^{n+1}x_0, x^*). \end{aligned}$$

Enfin, on déduit que  $Tx^* = x^*$  et  $p(x^*, x^*) = 0$ .

**2. L'unicité :** On suppose qu'il existe  $x^{**} \in X$  tel que  $Tx^{**} = x^{**}$  alors

$$p(x^*, x^{**}) = p(Tx^*, Tx^{**}) \leq cp(x^*, x^{**}),$$

comme  $c < 1$  alors  $p(x^*, x^{**}) = 0$  et  $x^* = x^{**}$ .

### 3.3.2 Théorème du point fixe de Kannan

Dans cette section nous allons présenter analogue de théorème du point fixe de Kannan (théorème 2.3) dans l'espace métrique partiel [16].

**Théorème 3.3.** Soient  $(X, p)$  un espace métrique partiel complet et  $T : X \rightarrow X$  une application. Supposons qu'il existe une constante  $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$  telle que

$$p(Tx, Ty) \leq \lambda[p(x, Tx) + p(y, Ty)]$$

pour tout  $x, y \in X$ , alors  $T$  a un point fixe unique  $x^*$ . De plus  $p(x^*, x^*) = 0$ .

**Preuve. 1. L'existence :** Soit  $x_0 \in X$ , on définit la suite  $\{x_n = T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda[p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n-1}, x_n)],$$

donc

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} p(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq k^n p(x_0, x_1),$$

où  $k = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ , pour  $m > n$

$$\begin{aligned} p(x_m, x_n) &\leq p(x_m, x_{m-1}) + \dots + p(x_{n+1}, x_n) - p(x_{m-1}, x_{m-1}) - \dots \\ &\quad - p(x_{n+1}, x_{n+1}). \\ &\leq p(x_m, x_{m-1}) + \dots \leq p(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (k^{m-1} + \dots + k^n) p(x_0, x_1), \end{aligned}$$

on voit que  $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy tel que

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(T^n x, T^m x) = 0,$$

comme  $(X, p)$  est complet alors il existe  $x^*$  tel que  $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x^*$  et  $p(x^*, x^*) = 0$  D'autre part  $p(Tx^*, x^*) = 0$  car  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p(Tx^*, x^*) &\leq p(Tx^*, T^{n+1}x_0) + p(T^{n+1}x_0, x^*) - p(T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0) \\ &\leq \lambda[p(x_n, x_{n+1}) + p(x^*, Tx^*)] + p(T^{n+1}x_0, x^*), \end{aligned}$$

ceci donne

$$p(Tx^*, x^*) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} (\lambda p(x_n, x_{n+1}) + p(T^{n+1}x_0, x^*)).$$

Enfin, on déduit que  $Tx^* = x^*$  et  $p(x^*, x^*) = 0$ .

**2. L'unicité :** On suppose qu'il existe  $x^{**}$  tel que  $Tx^{**} = x^{**}$  alors

$$p(x^*, x^{**}) = p(Tx^*, Tx^{**}) \leq \lambda[p(x^*, x^*) + p(x^{**}, x^{**})] = 0,$$

alors  $p(x^*, x^{**}) = 0$  et  $x^* = x^{**}$ .

### 3.3.3 Théorème du point fixe de Chatterjea

Dans cette section, nous allons présenter analogue de théorème du point fixe de Chatterjea sur l'espace métrique partiel (théorème 2.4) [16].

**Théorème 3.4.** Soient  $(X, p)$  un espace métrique partiel complet et  $T : X \rightarrow X$  une application. Supposons qu'il existe une constante  $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$  telle que

$$p(Tx, Ty) \leq \lambda[p(x, Ty) + p(y, Tx)]$$

pour tout  $x, y \in X$ , alors  $T$  a un unique point fixe  $x^*$ . De plus  $p(x^*, x^*) = 0$ .

**Preuve. 1. L'existence :** Soit  $x_0 \in X$ , on définit la suite  $\{x_n = T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda[p(x_n, x_n) + p(x_{n-1}, x_{n+1})] \leq \lambda(p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})),$$

donc

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} p(x_{n-1}, x_n),$$

ce implique

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} p(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq k^n p(x_0, x_1),$$

où  $k = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ , pour  $m > n$

$$\begin{aligned} p(x_m, x_n) &\leq p(x_m, x_{m-1}) + \dots + p(x_{n+1}, x_n) - p(x_{m-1}, x_{m-1}) - \dots \\ &\quad - p(x_{n+1}, x_{n+1}). \\ &\leq p(x_m, x_{m-1}) + \dots + p(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (k^{m-1} + \dots + k^n) p(x_0, x_1), \end{aligned}$$

on voit que  $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy tel que

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(T^n x, T^m x) = 0,$$

comme  $(X, p)$  est complet alors il existe  $x^*$  tel que  $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x^*$  et  $p(x^*, x^*) = 0$ . D'autre part  $p(Tx^*, x^*) = 0$  car  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$p(Tx^*, Tx_n) \leq \lambda[p(x_n, Tx^*) + p(x^*, x_{n+1})].$$

Ceci donne

$$p(Tx^*, x_{n+1}) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} p(x^*, x_{n+1}).$$

Par l'unicité de la limite, on déduit que  $Tx^* = x^*$  et  $p(x^*, x^*) = 0$ .

**2. L'unicité :** On suppose qu'il existe  $x^{**}$  tel que  $Tx^{**} = x^{**}$  alors

$$\begin{aligned} p(x^*, x^{**}) &= p(Tx^*, Tx^{**}) \leq \lambda[p(x^*, Tx^{**}) + p(x^{**}, Tx^*)] \\ &= \lambda[p(x^*, x^{**}) + p(x^{**}, x^*)], \end{aligned}$$

alors, comme  $2\lambda < 1$   $p(x^*, x^{**}) = 0$  et  $x^* = x^{**}$ .

### 3.3.4 Théorème du point fixe de Reich

Dans cette section on va présenter des généralisations de théorème du point fixe de Reich sur un espace métrique partiel (théorème 2.5)[16].

**Théorème 3.5.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique partiel complet.  $T : X \rightarrow X$  une application. S'il existe  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, +\infty)$  et

$$p(Tx, Ty) \leq \alpha p(x, y) + \beta p(x, Tx) + \gamma p(y, Ty)$$

pour tout  $x, y \in X$ , alors  $T$  a un point fixe unique  $x^*$ . De plus  $p(x^*, x^*) = 0$ .

**Preuve. 1. L'existence :** Soit  $x_0 \in X$ , on définit la suite  $\{x_n = T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$p(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \alpha p(x_n, x_{n-1}) + \beta p(x_n, x_{n+1}) + \gamma p(x_{n-1}, x_n),$$

donc

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\alpha + \gamma}{1 - \beta} p(x_{n-1}, x_n),$$

ce implique

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\alpha + \gamma}{1 - \beta} p(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq k^n p(x_0, x_1),$$

où  $k = \frac{\alpha + \gamma}{1 - \beta}$ , pour  $m > n$

$$\begin{aligned} p(x_m, x_n) &\leq p(x_m, x_{m-1}) + \dots + p(x_{n+1}, x_n) - p(x_{m-1}, x_{m-1}) - \dots \\ &\quad - p(x_{n+1}, x_{n+1}). \\ &\leq p(x_m, x_{m-1}) + \dots \leq p(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (k^{m-1} + \dots + k^n) p(x_0, x_1), \end{aligned}$$

comme  $k < 1$ , alors

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(T^n x, T^m x) = 0.$$

On déduit que  $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy, comme  $(X, p)$  est complet alors il existe  $x^*$  tel que  $\{T^n x\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x^*$  et  $p(x^*, x^*) = 0$ . D'autre part  $p(Tx^*, x^*) = 0$  car  $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} p(Tx^*, x^*) &\leq p(Tx^*, T^{n+1}x_0) + p(T^{n+1}x_0, x^*) - p(T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0) \\ &\leq p(Tx^*, T^{n+1}x_0) + p(T^{n+1}x_0, x^*) \\ &\leq \alpha p(x^*, x_n) + \beta p(x^*, Tx^*) + \gamma p(x_n, x_{n+1}) + p(T^{n+1}x_0, x^*). \end{aligned}$$

Ce implique

$$p(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-\beta} (\alpha p(x^*, x_n) + \gamma p(x_n, x_{n+1}) + p(T^{n+1}x_0, x^*)).$$

Enfin, comme  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $x^*$ , on déduit que  $Tx^* = x^*$  et  $p(x^*, x^*) = 0$ .

**2. L'unicité :** On suppose qu'il existe  $x^{**}$  tel que  $Tx^{**} = x^{**}$  donc

$$\begin{aligned} p(x^*, x^{**}) &= p(Tx^*, Tx^{**}) \leq \alpha p(x^*, x^{**}) + \beta p(x^*, Tx^*) + \gamma p(x^{**}, Tx^{**}) \\ &= \alpha p(x^*, x^{**}) + \beta p(x^*, x^*) + \gamma p(x^{**}, x^{**}) \\ &\leq \alpha p(x^*, x^{**}), \end{aligned}$$

alors, comme  $\alpha < 1$   $p(x^*, x^{**}) = 0$  et  $x^* = x^{**}$ .

### 3.3.5 Théorème du point fixe de Caristi

Dans cette partie on va présenter une généralisation du point fixe de Caristi dans un espace métrique partiel (théorème 2.7) [9].

**Définition 3.13** (Semi-continuité inférieure). Soient  $(X, p)$  un espace métrique partiel,  $x_0$  un point de  $X$  et  $f$  une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{R}^+$ . On dit que  $f$  est semi-continue inférieurement en  $x_0$  si  $\forall x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x) = p(x_0, x) \Rightarrow f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \sup_{n \geq 1} \inf_{m \geq n} f(x_m).$$

**Théorème 3.6.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique partiel complet et  $T$  une application de  $X$  dans  $X$  (non nécessairement continue). Pour que  $T$  admette un point fixe, il suffit qu'il existe une application semi-continue inférieurement  $f : X \rightarrow [0, +\infty)$  telle que pour tout point  $x$  de  $X$

$$p(x, T(x)) \leq f(x) - f(T(x)).$$

**Preuve.** Pour tout  $x \in X$ , on définit  $S(x) = \{y \in X : p(x, y) \leq f(x) - f(y)\}$  et  $\alpha(x) = \inf\{f(y) : y \in S(x)\}$ . Comme  $x \in S(x)$ , alors  $S(x) \neq \emptyset$ . Par la définition de  $\alpha(x)$  on a  $0 \leq \alpha(x) \leq f(x)$ .

Soit  $x \in X$ . On construit une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &:= x \\ &\vdots \\ x_{n+1} &\in S(x_n), \quad f(x_{n+1}) \leq \alpha(x_n) + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Alors, on peut facilement observer que  $p(x_n, x_{n+1}) \leq f(x_n) - f(x_{n+1})$  et

$$\alpha(x_n) \leq f(x_{n+1}) \leq \alpha(x_n) + \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (3.1)$$

Notons que (3.1) implique que  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite décroissante de nombres réels, et c'est borné par zéro. Par conséquent, la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente vers un nombre réel positif  $l$ . De (3.1), on a

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha(x_n). \quad (3.2)$$

De (3.1) et (3.2), pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , Il existe  $N_k \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $n \geq N_k$  on a

$$f(x_n) \leq l + \frac{1}{k}.$$

Concernant la monotonie de  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ , pour  $m \geq n \geq N_k$ , on a

$$l \leq f(x_m) \leq f(x_n) \leq l + \frac{1}{k}.$$

Alors, on obtient

$$f(x_n) - f(x_m) < \frac{1}{k}, \quad \forall m \geq n \geq N_k \quad (3.3)$$

D'autre part, on applique (3.1), ainsi que de l'inégalité triangulaire, nous observons que

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+2}) &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) - p(x_{n+2}, x_{n+1}) \\ &\leq p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) \\ &\leq f(x_n) - f(x_{n+1}) + f(x_{n+1}) - f(x_{n+2}) \\ &= f(x_n) - f(x_{n+2}). \end{aligned}$$

De manière analogue,

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+3}) &\leq p(x_n, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, x_{n+3}) - p(x_{n+3}, x_{n+2}) \\ &\leq p(x_n, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, x_{n+3}) \\ &\leq f(x_n) - f(x_{n+2}) + f(x_{n+2}) - f(x_{n+3}) \\ &= f(x_n) - f(x_{n+3}). \end{aligned}$$

On obtient

$$p(x_n, x_m) \leq f(x_n) - f(x_m), \quad \forall m \geq n, \quad (3.4)$$

et compte tenu de (3.3), (3.4) devient

$$p(x_n, x_m) \leq f(x_n) - f(x_m) < \frac{1}{k}, \quad \forall m \geq n \geq N_k. \quad (3.5)$$

Puisque la suite  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente ceci donne la limite tend vers zéro. Par définition,

$$d_p(x_n, x_m) = 2p(x_n, x_m) - p(x_n, x_n) - p(x_m, x_m) \leq 2p(x_n, x_m), \quad (3.6)$$

puisque  $p(x_n, x_m)$  tend vers zéro lorsque  $n, m \rightarrow +\infty$  alors (3.6) donne que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy dans  $(X, d_p)$ . Puisque  $(X, p)$  est complet, d'après le lemme 3.1,  $(X, d_p)$  est complet, et donc la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  est convergente vers  $x_0 \in X$ . Toujours d'après le lemme 3.1,

$$p(x_0, x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n, x_0) = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(x_n, x_m).$$

De cette égalité et comme  $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(x_n, x_m) = 0$ , alors on a  $p(x_0, x_0) = 0$ . Puisque  $f$  est semi-continue inférieurement avec (3.5)

$$\begin{aligned} f(x_0) &\leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \inf f(x_m) \\ &\leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \inf [f(x_n) - p(x_n, x_m)] \\ &= f(x_n) - p(x_n, x_0) \end{aligned}$$

et donc

$$p(x_n, x_0) \leq f(x_n) - f(x_0).$$

Par définition,  $x_0 \in S(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et ainsi  $\alpha(x_n) \leq f(x_0)$ . En prenant (3.2) dans compte, on obtient  $l \leq f(x_0)$ . De plus, comme  $f$  est semi-continue inférieurement et semi-continue inférieurement, on a  $f(x_0) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf f(x_n) = l$ . Par conséquent,  $f(x_0) = l$ . Puisque  $x_0 \in S(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et comme  $p(x, T(x)) \leq f(x) - f(T(x))$  pour tout  $x$  de  $X$ , alors  $Tx_0 \in S(x_0)$  et par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} p(x_n, Tx_0) &\leq p(x_n, x_0) + p(x_0, Tx_0) - p(x_0, x_0) \\ &\leq p(x_n, x_0) + p(x_0, Tx_0) \\ &\leq f(x_n) - f(x_0) + f(x_0) - f(Tx_0) \\ &= f(x_n) - f(Tx_0) \end{aligned}$$

est obtenu. Donc,  $Tx_0 \in S(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et ainsi  $\alpha(x_n) \leq f(Tx_0)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

D'après (3.2), l'inégalité  $f(Tx_0) \geq l$  est obtenu. Par  $f(Tx_0) \leq f(x_0)$ , puisque  $p(x, T(x)) \leq f(x) - f(T(x))$  pour tout  $x$  de  $X$ , et par l'observation  $f(x_0) = l$ , on obtient comme suit

$$f(x_0) = l \leq f(Tx_0) \leq f(x_0),$$

alors  $f(Tx_0) = f(x_0)$ .

Enfin, comme  $p(x, T(x)) \leq f(x) - f(T(x))$  pour tout  $x$  de  $X$ , on a  $p(Tx_0, x_0) = 0$ . En utilisant le lemme 3.2, on obtient à  $Tx_0 = x_0$ .

**Exemple 3.3.** Soit  $X = \mathbb{R}^+$  et soit  $p(x, y) = \max\{x, y\}$ , alors  $(X, p)$  est un espace métrique partiel complet.

supposons que  $T : X \rightarrow X$  tel que  $Tx = \frac{x}{8}$  pour tout  $x \in X$  et  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tel que  $f(t) = 2t$ , alors

$$p(x, Tx) = \max\left\{x, \frac{x}{8}\right\} = x$$

et

$$f(x) - f(Tx) = \frac{7x}{4}.$$

Ainsi, il satisfait toutes les conditions du théorème 3.6. il garantit que  $T$  a un point fixe, en effet  $x = 0$  est le point obtenu.

### 3.3.6 Théorème du point fixe de Ćiric

Dans cette partie on présente un type du théorème du point fixe de Ćiric dans un espace métrique partiel [10].

**Définition 3.14.** Soient  $(X, p)$  un espace métrique partiel.  $T : X \rightarrow X$  Une application.

- .  $(X, p)$  est dit orbitalement complet si toute suite de Cauchy  $\{T^{n_k}x\}_{k=1}^{\infty}$  pour tout  $x \in X$  converge en  $(X, p)$ .
- .  $T$  est dit orbitalement continue si  $\lim_{k \rightarrow \infty} p(T^{n_k}x, y) = p(y, y)$  implique  $\lim_{k \rightarrow \infty} p(TT^{n_k}x, Ty) = p(Ty, Ty)$  pour chaque  $x \in X$ .

**Théorème 3.7.** Soient  $X, d$  un espace métrique partiel,  $T : X \rightarrow X$  une application orbitalement continue. Si  $X$  est orbitalement complet et  $T$  vérifie la condition suivant

$$\min\{p(Tx, Ty), p(x, Tx), p(y, Ty)\} \leq kp(x, y) \quad (3.7)$$

pour tout  $x, y \in X$  et pour un  $k < 1$ . Alors pour chaque  $x_0 \in X$  la suite  $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$  converge vers un point fixe de  $T$ .

**Preuve.** Soit  $x_0 \in X$ , on définit la suite d'itérations  $x_{n+1} = Tx_n = T^n x_0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Immédiatement, si  $x_{k-1} = x_k$  pour certains  $k \in \mathbb{N}^*$  on déduit que  $T$  a un point fixe. Supposons que  $x_{n-1} \neq x_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , De le lemme 3.2 on a  $p(x_n, x_{n+1}) > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  pour  $x = x_{n-1}$  et  $y = x_n$  dans (3.7) et pour  $x = x_n$  et  $y = x_{n+1}$  on obtient

$$\min\{p(Tx_n, Tx_{n+1}), p(x_n, Tx_n), p(x_{n+1}, Tx_{n+1})\} \leq kp(x_n, x_{n+1})$$

ce implique

$$\min\{p(x_{n+1}, x_{n+2}), p(x_n, x_{n+1})\} \leq kp(x_n, x_{n+1}).$$

Puisque  $p(x_n, x_{n+1}) \leq kp(x_n, x_{n+1})$  est impossible (car  $k < 1$ ), alors

$$p(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq kp(x_n, x_{n+1}),$$

pour  $n > m$

$$\begin{aligned} p(x_n, x_m) &\leq p(x_n, x_{n-1}) + \dots + p(x_{m+1}, x_m) \\ &\quad - [p(x_{n-1}, x_{n-1}) + \dots + p(x_{m+1}, x_{m+1})] \\ &\leq p(x_n, x_{n-1}) + \dots + p(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq [k^{n-1} + \dots + k^m]p(x_0, x_1) \\ &= k^m \frac{1 - k^{n-m}}{1 - k} p(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Alors  $\lim_{n,m \rightarrow \infty} p(x_n, x_m) = 0$  et donc  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $(X, p)$ . Comme  $X$  est orbitalement complet alors il existe  $x^* \in X$  tel que

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} p(T^n x, T^m x) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} p(T^n x, x^*) = p(x^*, x^*) = 0.$$

Maintenant, nous allons montrer que  $x^*$  est un point fixe de  $T$ . Comme  $T$  est orbitalement continue alors

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} p(T^n x, x^*) = p(x^*, x^*) \Rightarrow \lim_{n,m \rightarrow \infty} p(TT^n x, Tx^*) = p(Tx^*, Tx^*).$$

De plus, en prenant la limite  $n \rightarrow \infty$  et en utilisant le lemme 3.3, on obtient

$$\begin{aligned} p(x^*, Tx^*) &\leq p(x^*, T^{n+1}x_0) + p(T^{n+1}x_0, Tx^*) - p(T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0) \\ &\leq p(x^*, x_{n+2}) + p(x_{n+2}, Tx^*) - p(x_{n+2}, x_{n+2}), \end{aligned}$$

ceci donne  $p(x^*, Tx^*) \leq p(Tx^*, Tx^*)$ . À partir de (a<sub>0</sub>), on trouve

$$p(x^*, Tx^*) = p(Tx^*, Tx^*).$$

Alors

$$\min\{p(Tx^*, Tx^*), p(x^*, Tx^*), p(x^*, Tx^*)\} \leq kp(x^*, x^*)$$

et

$$p(Tx^*, Tx^*) = p(x^*, Tx^*) \leq kp(x^*, x^*) = 0.$$

On a donc  $p(Tx^*, Tx^*) = p(x^*, Tx^*) = p(x^*, x^*) = 0$  et par (a<sub>2</sub>) on obtient  $x^* = Tx^*$ , et donc  $x^*$  est un point fixe de  $T$ .

**Exemple 3.4.** Soit  $X = [0, 1]$ , définissons  $p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  comme  $p(x, y) = \max\{x, y\}$  avec  $T : X \rightarrow X$ ,  $Tx = \frac{x}{2}$ .

Clairement,  $(X, p)$  est un espace métrique partiel. Maintenant, soit  $x \leq y$ . Alors  $p(x, Tx) = x$ ,  $p(y, Ty) = y$ ,  $p(Tx, Ty) = \frac{y}{2}$  et  $p(x, y) = y$ . Par conséquent, nous avons

$$\min\{p(x, Tx), p(y, Ty), p(Tx, Ty)\} = \min\{x, y, \frac{y}{2}\}$$

. si  $\min\{x, y, \frac{y}{2}\} = \frac{y}{2}$  alors

$$\min\{p(x, Tx), p(y, Ty), p(Tx, Ty)\} = \frac{y}{2} \leq \frac{1}{2}p(x, y).$$

. si  $\min\{x, y, \frac{y}{2}\} = x$  alors évidemment  $x \leq \frac{y}{2}$  et

$$\min\{p(x, Tx), p(y, Ty), p(Tx, Ty)\} = x \leq \frac{1}{2}p(x, y).$$

Alors  $T$  satisfait les conditions du théorème 3.7 avec  $k = \frac{1}{2}$ . Par conséquent, la suite  $\{T^n x = \frac{x}{2^n}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers le point fixe  $x^* = 0$  de l'opérateur  $T$  pour tout  $x \in X$ .

### 3.4 Théorème du point fixe sur l'espace métrique cône

Dans cette partie, on va présenter quelques généralisations des théorèmes données dans un espace métrique cône.

#### 3.4.1 Théorème du point fixe de Banach

Dans cette section nous allons présenter une généralisation du théorème de point fixe de Banach dans l'espace métrique cône (théorème 2.1 et théorème 2.2) [6].

**Théorème 3.8.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique cône complet,  $P$  un cône normal de normale constante  $q$ . Supposons que l'application  $T : X \rightarrow X$  vérifie la condition contractive suivant

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

pour tout  $x, y \in X$ , où  $k \in [0, 1)$  est une constante. Alors  $T$  a un unique point fixe dans  $X$ . Et pour tout  $x_0 \in X$ , la suite itérative  $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers ce point fixe.

**Preuve. 1. L'existence :** Choisissons  $x_0 \in X$ . Posons  $x_1 = Tx_0$ ,  $x_2 = Tx_1$ , ...,  $x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$ , ....

Nous avons

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq kd(Tx_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^2 d(Tx_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\vdots \\ &\leq k^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Alors pour  $m > n$

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq k^{m-1}d(x_1, x_0) + k^{m-2}d(x_1, x_0) + \cdots + k^n d(x_1, x_0) \\
&= k^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \\
&\leq k^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{\infty} k^i \\
&= k^n d(x_1, x_0) \left( \frac{1}{1-k} \right).
\end{aligned}$$

On a  $\|d(x_m, x_n)\| \leq q \frac{k^n}{1-k} \|d(x_1, x_0)\|$  on obtient  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ ). Ainsi  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Par la complétude de  $(X, d)$ , il existe  $x^* \in X$  tel que  $x_n \rightarrow x^*$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Depuis

$$\begin{aligned}
d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx^*, Tx_n) + d(Tx_n, x^*) \\
&\leq k(d(x^*, x_n) + d(x_{n+1}, x^*)),
\end{aligned}$$

alors

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq qk(\|d(x^*, x_n)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc  $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$ , ceci donne  $Tx^* = x^*$ . Donc  $x^*$  est un point fixe de  $T$ .

**2. L'unicité :** On suppose qu'il existe  $x^{**}$  tel que  $Tx^{**} = x^{**}$  alors

$$d(x^*, x^{**}) = d(Tx^*, Tx^{**}) \leq kd(x^*, x^{**}),$$

donc  $\|d(x^*, x^{**})\| = 0$ , cela implique  $x^* = x^{**}$ . Donc le point fixe de  $T$  est unique.

**Exemple 3.5.** Soient  $E = \mathbb{R}^2$ , le plan euclidien,  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x, y \geq 0\}$  un cône normal dans  $P$ . Soit  $X = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, x) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1\}$ .

L'application  $d : X \times X \rightarrow E$  est défini par

$$d((x, 0), (y, 0)) = \left( \frac{4}{3}|x - y|, |x - y| \right),$$

$$d((0, x), (0, y)) = \left( |x - y|, \frac{2}{3}|x - y| \right),$$

$$d((x, 0), (0, y)) = d((0, y), (x, 0)) = \left( \frac{4}{3}x + y, x + \frac{2}{3}y \right).$$

Alors  $(X, d)$  est un espace métrique cônique complet. Soit  $T : X \rightarrow X$  une application tel que

$$T((x, 0)) = (0, x), \quad T((0, x)) = \left( \frac{2}{3}x, 0 \right),$$

alors  $T$  satisfait la condition contractive

$$d(T(x_1x_2), T(y_1, y_2)) \leq kd((x_1x_2), (y_1, y_2)) \quad \forall (x_1x_2), (y_1, y_2) \in X,$$

avec constante  $k = \frac{3}{4} \in [0, 1)$ . Il est évident que  $T$  a un unique point fixe  $(0, 0) \in X$ . D'autre part, on obtient que  $T$  n'est pas une application contractive dans la métrique euclidienne sur  $X$ .

**Remarque 3.8.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique cônica complet,  $P$  un cône normal de normale constante  $q$ . Supposons que l'application  $T : X \rightarrow X$  vérifie pour un nombre  $n \in \mathbb{N}^*$  la condition contractive suivant

$$d(T^n x, T^n y) \leq kd(x, y)$$

pour tout  $x, y \in X$ , où  $k \in [0, 1)$  est une constante. Alors  $T$  a un unique point fixe dans  $X$ .

**Preuve.** D'après le théorème 3.8  $T^n$  admet un unique point fixe  $x^*$ . Mais  $T^n(Tx^*) = T(T^n x^*) = Tx^*$ , donc  $Tx^*$  est aussi un point fixe de  $T^n$ . Donc  $Tx^* = x^*$ ,  $x^*$  est un point fixe de  $T$ . Depuis le point fixe de  $T^n$  est aussi point fixe de  $T$ , le point fixe de  $T$  est unique.

**Théorème 3.9.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique cônica séquentiellement compact,  $P$  un cône régulier. Supposons que l'application  $T : X \rightarrow X$  vérifie la condition suivant

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

pour tout  $x, y \in X$ ,  $x \neq y$ . Alors  $T$  a un point fixe unique dans  $X$ .

**Preuve. 1. L'existence :** Choisissons  $x_0 \in X$ . Posons  $x_1 = Tx_0$ ,  $x_2 = Tx_1$ , ...,  $x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$ . Si pour un nombre  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_{n+1} = x_n$ , alors  $x_n$  est un point fixe de  $T$ , la preuve est complet. Donc on suppose que pour tout  $n$ ,  $x_{n+1} \neq x_n$ . Posons  $d_n = d(x_n, x_{n+1})$ , alors

$$d_{n+1} = d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(Tx_n, Tx_{n+1}) < d(x_n, x_{n+1}) = d_n.$$

Donc  $d_n$  est une suite décroissante bornée en dessous par 0. Comme  $P$  est régulier, il y a  $d^* \in E$  tel que  $d_n \rightarrow d^*$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Comme  $X$  est séquentiellement compact, il y a sous-suite  $\{x_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  de  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $x^* \in X$  telle que  $x_{n_i} \rightarrow x^*$  ( $i \rightarrow \infty$ ). Nous avons

$$d(Tx_{n_i}, Tx^*) \leq d(x_{n_i}, x^*), i = 1, 2, \dots$$

Alors

$$\|d(Tx_{n_i}, Tx^*)\| \leq qd(x_{n_i}, x^*) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$$

où  $q$  est la constante normale de  $E$ . D'où  $Tx_{n_i} \rightarrow Tx^*$  ( $i \rightarrow \infty$ ). De même  $T^2x_{n_i} \rightarrow T^2x^*$  ( $i \rightarrow \infty$ ). En utilisant le lemme 3.8, on a  $d(Tx_{n_i}, x_{n_i}) \rightarrow d(Tx^*, x^*)$  ( $i \rightarrow \infty$ ) et  $d(T^2x_{n_i}, Tx_{n_i}) \rightarrow d(T^2x^*, Tx^*)$

( $i \rightarrow \infty$ ). Il est évident que  $d(Tx_{n_i}, x_{n_i}) = d_{n_i} \rightarrow d^* = d(Tx^*, x^*)$  ( $i \rightarrow \infty$ ). Maintenant, nous allons prouver que  $Tx^* = x^*$ . Si  $Tx^* \neq x^*$ , alors  $d^* \neq 0$ .

Et

$$d^* = d(Tx^*, x^*) > d(T^2x^*, Tx^*) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(T^2x_{n_i}, Tx_{n_i}) = \lim_{i \rightarrow \infty} d_{n_i+1} = d^*.$$

On a une contradiction, donc  $Tx^* = x^*$ . C'est-à-dire que  $x^*$  est un point fixe de  $T$ .

**2. L'unicité :** Soit  $x^{**} \in X$  tel que  $Tx^{**} = x^{**}$  et  $x^* \neq x^{**}$ ,

$$d(x^*, x^{**}) = d(Tx^*, Tx^{**}) \leq d(x^*, x^{**}).$$

C'est une contradiction, donc  $x^* = x^{**}$ .

### 3.4.2 Théorème du point fixe de Kannan

Maintenant on va présenter une généralisation du théorème de point fixe de Kannan dans l'espace métrique cône (théorème 2.3) [6].

**Théorème 3.10.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique cône complet,  $P$  un cône normal de normale constante  $q$ . Supposons que l'application  $T : X \rightarrow X$  vérifie la condition suivante

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda[d(x, Tx) + d(y, Ty)] \quad \forall x, y \in X$$

et pour un nombre  $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ , alors  $T$  a un unique point fixe. Aussi, pour tout  $x_0 \in X$  la suite d'itérations  $(T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers ce point fixe.

**Preuve.** Choisissons  $x_0 \in X$ . Posons  $x_1 = Tx_0$ ,  $x_2 = Tx_1$ , ...,  $x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$ , .... Nous avons

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq \lambda(d(Tx_n, x_n) + d(Tx_{n-1}, x_{n-1})), \\ &= \lambda(d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1})), \end{aligned}$$

alors

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1})$$

où  $h = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ , pour  $m > n$

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\
&\leq h^{m-1}d(x_1, x_0) + h^{m-2}d(x_1, x_0) + \cdots + h^n d(x_1, x_0) \\
&= h^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{m-n-1} h^i \\
&\leq h^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{\infty} h^i \\
&= h^n d(x_1, x_0) \left( \frac{1}{1-h} \right).
\end{aligned}$$

On a  $\|d(x_m, x_n)\| \leq q \frac{h^n}{1-h} \|d(x_1, x_0)\|$  cela implique  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ ). Ainsi  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Par la complétude de  $(X, d)$ , il existe  $x^* \in X$  tel que  $x_n \rightarrow x^*$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

Depuis

$$\begin{aligned}
d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx^*, Tx_n) + d(Tx_n, x^*) \\
&\quad \lambda(d(x^*, Tx^*) + d(x_n, Tx_n)) + d(x_{n+1}, x^*) \\
d(Tx^*, x^*) &\leq \frac{1}{1-\lambda} (\lambda d(x_n, Tx_n) + d(x_{n+1}, x^*)),
\end{aligned}$$

alors

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq q \frac{1}{1-\lambda} (\| \lambda d(x_n, Tx_n) \| + \| d(x_{n+1}, x^*) \|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc  $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$ . On trouve  $Tx^* = x^*$ . Donc  $x^*$  est un point fixe de  $T$ .

**2. L'unicité :** Soit  $x^{**} \in X$  tel que  $Tx^{**} = x^{**}$  et  $x^* \neq x^{**}$ ,

$$d(x^*, x^{**}) = d(Tx^*, Tx^{**}) \leq \lambda(d(x^*, Tx^*) + d(x^{**}, Tx^{**})) = 0,$$

donc  $x^* = x^{**}$ . Alors le point fixe de  $T$  est unique.

### 3.4.3 Théorème du point fixe de Chatterjea

**Théorème 3.11.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique cônica complet,  $P$  un cône normal de normale constante  $q$ . Supposons que l'application  $T : X \rightarrow X$  vérifie la condition suivant

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda[d(y, Tx) + d(x, Ty)] \quad \forall x, y \in X,$$

et pour un nombre  $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ , alors  $T$  a un unique point fixe. Aussi, pour tout  $x_0 \in X$  la suite d'itérations  $(T^n x_0)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers ce point fixe.

**Preuve.** Choisissons  $x_0 \in X$ . Posons  $x_1 = Tx_0$ ,  $x_2 = Tx_1$ , ...,  $x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$ , .... Nous avons

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq \lambda(d(Tx_n, x_{n-1}) + d(Tx_{n-1}, x_n)), \\ &= \lambda(d(x_{n+1}, x_{n-1}) + d(x_n, x_n)), \end{aligned}$$

alors

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} d(x_n, x_{n-1}) = h d(x_n, x_{n-1})$$

où  $h = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ , pour  $m > n$

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq h^{m-1}d(x_1, x_0) + h^{m-2}d(x_1, x_0) + \cdots + h^n d(x_1, x_0) \\ &= h^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{m-n-1} h^i \\ &\leq h^n d(x_1, x_0) \sum_{i=0}^{\infty} h^i \\ &= h^n d(x_1, x_0) \left( \frac{1}{1-h} \right). \end{aligned}$$

On a  $\|d(x_m, x_n)\| \leq q \frac{h^n}{1-h} \|d(x_1, x_0)\|$  cela implique  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ ). Ainsi  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy. Par la complétude de  $(X, d)$ , il existe  $x^* \in X$  tel que  $x_n \rightarrow x^*$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Depuis

$$\begin{aligned} d(Tx^*, x^*) &\leq d(Tx^*, Tx_n) + d(Tx_n, x^*) \\ &\lambda(d(x^*, Tx_n) + d(x_n, Tx^*)) + d(x_{n+1}, x^*) \\ &\lambda(d(x^*, Tx_n) + d(x^*, Tx^*) + d(x_n, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*), \end{aligned}$$

donc

$$d(Tx^*, x^*) \leq \frac{1}{1-\lambda} \lambda(d(x_n, x^*) + d(x_{n+1}, x^*)) + d(x_{n+1}, x^*),$$

alors

$$\|d(Tx^*, x^*)\| \leq q \frac{1}{1-\lambda} \lambda(\|d(x_n, x^*)\| + \|d(x_{n+1}, x^*)\|) + \|d(x_{n+1}, x^*)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc  $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$ . On trouve  $Tx^* = x^*$ . Donc  $x^*$  est un point fixe de  $T$ .

**2. L'unicité :** Soit  $x^{**} \in X$  tel que  $Tx^{**} = x^{**}$  et  $x^* \neq x^{**}$ ,

$$d(x^*, x^{**}) = d(Tx^*, Tx^{**}) \leq \lambda(d(x^*, Tx^{**}) + d(x^{**}, Tx^*)) = 2\lambda d(x^*, x^{**}),$$

Puisque  $\lambda < \frac{1}{2}$ , alors  $x^* = x^{**}$ . Donc le point fixe de  $T$  est unique.

Le théorème suivant présente une généralisation de théorème du point fixe de Banach [15].

**Théorème 3.12.** *Soient  $(X, d)$  un espace métrique cône complet.  $P$  un cône et  $T : X \rightarrow X$  une application. S'il existe  $\alpha, \beta, \in [0, 1)$  tel que*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(y, Tx) \quad (3.8)$$

*pour tout  $x, y \in X$ , alors  $T$  a un point fixe. De plus, le point fixe est unique si  $\alpha + \beta < 1$ .*

**Preuve. 1. L'existence :** prenons un point  $x_0 \in X$  et considérons la suite  $x_n = \{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ . Pour  $n \geq 1$  et  $\alpha \leq \beta$

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq \alpha(d(x_{n-1}, x_n) + d(Tx_{n-1}, x_n)) \\ &= \alpha d(x_{n-1}, x_n) \leq \alpha^n d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

donc, pour  $n > m$  on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \leq (\alpha^{n-1} + \dots + \alpha^m) d(x_1, x_0) \\ &\leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Soit  $c \in E$  tel que  $0 \ll c$ , on choisissons un nombre naturel  $N_0$  tel que  $\frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(x_1, x_0) \ll c$  pour tout  $m \geq N_0$ . Alors  $d(x_n, x_m) \ll c$  pour tout  $n > m$ .

Donc  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy dans  $(X, d)$  qui est complet, alors  $x_n \rightarrow x^*$  ( $n \rightarrow \infty$ ), donc on choisissons un nombre naturel  $N_1$  tel que  $d(x_n, x^*) \ll \frac{c}{3}$  pour tout  $n \geq N_1$ . Alors,

$$\begin{aligned} d(T(x^*), x^*) &\leq d(T(x^*), T^n x_0) + d(x^*, T^n x_0) \\ &\leq \alpha d(x^*, x_{n-1}) + \beta d(Tx_{n-1}, x_0) + d(x^*, T^n(x_0)) \\ &\leq \alpha d(x^*, x_{n-1}) + \beta d(x_n, x^*) + d(x^*, x_n). \end{aligned}$$

Donc

$$d(T(x^*), x^*) \ll \frac{c}{3} + \frac{c}{3} + \frac{c}{3} = c,$$

ceci donne  $d(x^*, T(x^*)) \ll \frac{c}{m}$ , pour tous  $m \geq 1$ . Autrement dit,  $\frac{c}{m} - d(x^*, T(x^*)) \in P$ , pour tout  $m \geq 1$ . De plus, puisque  $\frac{c}{m} \rightarrow 0$  ( $m \rightarrow +\infty$ ) et  $P$  est fermé, alors  $-d(x^*, T(x^*)) \in P$ . Mais d'autre part, on a  $d(x^*, T(x^*)) \in P$ . Par conséquent,  $d(x^*, T(x^*)) = 0$ , d'où  $T(x^*) = x^*$ .

**2. L'unicité :** soit  $x^*$  et  $x^{**}$  deux points fixes de  $T$ .

$$d(x^*, x^{**}) = d(Tx^*, Tx^{**}) \leq \alpha d(x^*, x^{**}) + \beta d(Tx^*, x^{**}) = (\alpha + \beta) d(x^*, x^{**}).$$

Nous avons  $1 \leq \alpha$ , comme  $\alpha + \beta < 1$ . Alors  $x^* = x^{**}$ , le point fixe est unique.

### 3.4.4 Théorème du point fixe de Reich

Maintenant on va présenter une généralisation du théorème de point fixe de Reich sur un espace métrique cône (théorème 2.5) [15,17].

**Théorème 3.13.** *Soient  $(X, d)$  un espace métrique cône complet.  $P$  un cône et  $T : X \rightarrow X$  une application. S'il existe  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, +\infty)$  tel que  $\alpha + \beta + \gamma < 1$  et*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty) \quad (3.9)$$

pour tout  $x, y \in X$ , alors  $T$  a point fixe unique.

**Preuve. 1. L'existence :** prenons un point  $x_0 \in X$  et considérons la suite  $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ . On remplace  $x = T^n(x_0)$ ,  $y = T^{n-1}(x_0)$  en (3.9) on obtient pour  $n \geq 1$ ,

$$d(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \leq \alpha d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0)) + \beta d(T^n(x_0), T^{n+1}(x_0)) + \gamma d(T^{n-1}(x_0), T^n(x_0))$$

donc

$$d(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \leq a d(T^n(x_0), T^{n-1}(x_0))$$

où  $a = \frac{\alpha + \gamma}{1 - \beta}$ , on a  $a < 1$ , Il s'ensuit que

$$d(T^{n+1}(x_0), T^n(x_0)) \leq a^n d(x_0, T(x_0)),$$

et que pour tout  $m > n$ ,

$$d(T^m(x_0), T^n(x_0)) \leq \frac{a^n}{1 - a} d(x_0, T(x_0)).$$

De plus, pour tout  $c \in E$  avec  $0 \ll c$ , alors on peut trouver  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $m \geq N_0$  on obtient  $\frac{a^m}{1 - a} d(x_0, T(x_0)) \ll c$ . Donc pour  $n > m$  on trouve  $d(T^m(x_0), T^n(x_0)) \ll c$ . En d'autres termes,  $\{T^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans l'espace métrique cône complet  $(X, d)$ . alors  $T^n(x_0) \rightarrow x^*$  ( $n \rightarrow \infty$ ). De la définition 3.9, Il existe un nombre  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $d(x^*, T^n(x_0)) \ll \frac{c(1 - \gamma)}{1 - a}$ . Pour tout  $n \geq N_1$ . Donc pour  $n \geq N_1$  on obtient

$$\begin{aligned} d(T(x^*), x^*) &\leq d(T(x^*), Tx_n) + d(Tx_n, x^*) \\ &\leq \alpha d(x^*, x_n) + \beta d(x^*, Tx^*) + \gamma d(x_n, T(x_n)), \end{aligned}$$

alors

$$d(x^*, T(x^*)) \leq \frac{1}{1 - \gamma} ((\alpha + \beta)d(x_n, x^*) + \beta d(x_{n+1}, x^*)),$$

donc

$$d(x^*, T(x^*)) \leq \frac{1}{1 - \gamma} (2d(x_n, x^*) + 2d(x_{n+1}, x^*)),$$

et

$$d(x^*, T(x^*)) \ll \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c,$$

ce qui donne  $d(x^*, T(x^*)) \ll \frac{c}{m}$ , pour tous  $m \geq 1$ . Autrement on a,  $\frac{c}{m} - d(x^*, T(x^*)) \in P$ , pour tout  $m \geq 1$ . De plus, parce que  $\frac{c}{m} \rightarrow 0 (m \rightarrow +\infty)$  et  $P$  est un cône (donc  $P$  est fermé), alors  $-d(x^*, T(x^*)) \in P$ . Mais nous avons que  $d(x^*, T(x^*)) \in P$ . Par conséquent, la seule possibilité est  $d(x^*, T(x^*)) = 0$ , D'où  $T(x^*) = x^*$ .

**2. L'unicité :** soit  $x^*$  et  $x^{**}$  deux points fixes de  $T$ .

$$\begin{aligned} d(x^*, x^{**}) &= d(T(x^*), T(x^{**})) \leq \alpha d(x^*, x^{**}) + \beta d(x^*, x^*) + \gamma d(x^{**}, x^{**}) \\ &= \alpha d(x^*, x^{**}), \end{aligned}$$

nous  $1 \leq \alpha$ , c'est une contradiction. Alors  $x^* = x^{**}$ , le point fixe est unique.

### 3.4.5 Théorème du point fixe de Caristi

Dans cette sous-section nous allons présenter une généralisation du théorème de point fixe de Caristi sur un espace métrique cône (théorème 2.7) [1].

**Définition 3.15** (Semi-continu inférieurement).

Soient  $(X, d)$  un espace métrique cône,  $C \subset X$  et  $f : C \rightarrow E$  une fonction sur  $X$ . Alors, la fonction  $f$  est appelée une semi-continu inférieurement sur  $C$  si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \Rightarrow f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \sup_{n \geq 1} \inf_{m \geq n} f(x_m).$$

**Définition 3.16.**  $P$  est appelé cône minihedral si  $\sup\{x, y\}$  existe pour tout  $x, y \in E$ , et fortement minihedral si chaque sous-ensemble de  $E$  qui est borné par le haut a un supremum.

**Remarque 3.9.** Tout cône normal fortement minihedral est régulier.

**Théorème 3.14.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique cône complet,  $P \subset E$  est un cône normal fortement minihedral, et  $T$  une application de  $X$  dans  $X$  (non nécessairement continue). Pour que  $T$  admette un point fixe, il suffit qu'il existe une semi-continue inférieurement  $f : X \rightarrow P$  telle que pour tout point  $x$  de  $X$

$$d(x, T(x)) \leq f(x) - f(T(x)). \quad (3.10)$$

**Preuve.** Soit  $k$  la constant normal de  $P$ , on définit  $S(x) = \{y \in X : d(x, y) \leq f(x) - f(y)\}$  et  $\alpha(x) = \inf\{f(y) : y \in S(x)\}$ .

Comme  $x \in S(x)$ , alors  $S(x) \neq \emptyset$ . Par la définition de  $\alpha(x)$  on a

$$0 \leq \alpha(x) \leq f(x).$$

Soit  $x \in X$ . On construit une suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  de la manière suivante :

$$x_1 := x$$

⋮

$$x_{n+1} \in S(x_n), \quad f(x_{n+1}) \leq \alpha(x_n) + \frac{c_0}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

où  $c_0 \in \text{int}(P) \neq \emptyset$ . Alors, on peut facilement observer que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq f(x_n) - f(x_{n+1}) \quad (3.11)$$

et

$$\alpha(x_n) \leq f(x_{n+1}) \leq \alpha(x_n) + \frac{c_0}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.12)$$

Notons que (3.11) donne  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite décroissante dans  $E$ ,  $P$  est un cône régulier, alors la suite  $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente, donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , Il existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ , tel que pour tous  $n, m \geq N_\varepsilon$  on a

$$\|f(x_n) - f(x_m)\| \leq \frac{\varepsilon}{k}.$$

Ainsi que de l'inégalité triangulaire, on a

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq f(x_n) - f(x_m). \quad (3.13)$$

Par conséquent,  $\|d(x, y)\| \leq k\|f(x_n) - f(x_m)\| \leq k \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$ , par le lemme 3.7,  $\|d(x_n, x_m)\| \rightarrow 0$ , alors ce donne que  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de Cauchy dans  $(X, d)$  qui est complet, donc  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$  est convergente vers  $x^* \in X$ .

De (3.13),  $f(x_n) - f(x_m) - d(x_n, x_m) \in P$  et alors

$$f(x_m) \leq f(x_n) - d(x_n, x_m),$$

pour tout  $m \geq n$  et d'après l'inégalité précédente et le lemme 3.8 et comme  $f$  est semi-continue inférieurement, on a

$$f(x^*) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \inf f(x_m) \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \inf [f(x_n) - d(x_n, x_m)] = f(x_n) - d(x_n, x^*)$$

et donc  $\forall n \geq 1$

$$d(x_n, x^*) \leq f(x_n) - f(x^*).$$

Par définition,  $x^* \in S(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et ainsi  $\alpha(x_n) \leq f(x^*)$ . Notons que (3.13) donne

$$\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad (3.14)$$

Alors,  $\alpha \leq f(x_n) \forall n \geq 1$ . D'autre part, comme  $f$  est semi-continue inférieurement, on a  $f(x^*) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf f(x_n) = \alpha$ . Par conséquent,

$f(x^*) = \alpha$ . Puisque  $x_0 \in S(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $Tx^* \in S(x^*)$  et par l'inégalité triangulaire on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, Tx^*) &\leq d(x_n, x^*) + d(x_0, Tx^*) \\ &\leq f(x_n) - f(x^*) + f(x^*) - f(Tx^*) \\ &= f(x_n) - f(Tx^*). \end{aligned}$$

Donc,  $Tx^* \in S(x_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et ainsi  $\alpha(x_n) \leq f(Tx^*)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

D'après (3.14), l'inégalité  $f(Tx^*) \geq \alpha$  est obtenu. d'après (3.10) on a  $f(Tx^*) \leq f(x^*)$ , et par l'équation  $f(x^*) = \alpha$ , on obtient comme suit

$$f(x^*) = \alpha \leq f(Tx^*) \leq f(x^*),$$

alors  $f(Tx^*) = f(x^*)$ .

Enfin, d'après (3.10), on a  $d(Tx^*, x^*) = 0$ . Alors  $Tx^* = x^*$ .

### 3.4.6 Théorème du point fixe de Ćirić

Dans cette partie on va présenter une généralisation d'une théorème de point fixe de Ćirić sur un espace métrique cônica [8].

**Définition 3.17.** Soient  $X, d$  un espace métrique cônica,  $T : X \rightarrow X$  une application et  $x_0 \in X$ .

- .  $X$  est dit  $T$ -orbitalement complet si toute suite de Cauchy qui est contenue dans  $O(x)$  pour un certain  $x$  dans  $X$  converge dans  $X$ .
- .  $T$  est dit orbitalement continu en  $x_0 \in X$  si pour tout suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset O(x)$  pour chaque  $x \in X$ ,  $x_n \rightarrow x_0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  implique  $Tx_n \rightarrow Tx_0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

**Théorème 3.15.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique cônica sur un cône normal fortement minihedral  $P \subset E$ ,  $T : X \rightarrow X$  une application orbitalement continue. Si  $X$  est  $T$ -orbitalement complet et  $T$  vérifie la condition suivante

$$u(x, y) - \inf\{d(x, Ty), d(y, Tx)\} \leq kd(x, y) \quad (3.15)$$

pour tout  $x, y \in X$ , où  $u(x, y) \in \{d(Tx, Ty), d(x, Tx), d(y, Ty)\}$  et pour un nombre  $k < 1$ . Alors pour chaque  $x_0 \in X$  la suite  $\{T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$  converge vers un point fixe de  $T$ .

**Preuve.** Soit  $x_0 \in X$ , pour  $n \geq 1$  on définit  $x_{n+1} = Tx_n$ . Evidemment on a la suite  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy lorsque l'équation  $x_{n+1} = x_n$  est vraie pour un certain  $n \in \mathbb{N}$ . Considérons le cas  $x_{n+1} \neq x_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En remplaçant  $x$  et  $y$  par  $x_{n-1}$  et  $x_n$ , respectivement, dans (3.15), on peut obtenir

$$\begin{aligned} u(x_{n-1}, x_n) - \inf\{d(x_{n-1}, Tx_n), d(x_n, Tx_{n-1})\} &= \{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n), \end{aligned}$$

où  $u(x_{n-1}, y) \in \{d(Tx_{n-1}, Tx_n), d(x_{n-1}, Tx_{n-1}), d(x_n, Tx_n)\}$ , puisque  $k < 1$ , le cas  $d(x_{n-1}, x_n) \leq kd(x_{n-1}, x_n)$  donne contradiction. Par suite,  $d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n)$ . Récursivement, on peut observer que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq kd(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq k^n d(x_0, Tx_0).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on peut obtenir

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (k^n + \dots + k^{n+p-1})d(Tx_0, x_0) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k}d(Tx_0, x_0). \end{aligned}$$

Soit  $c \in E$  tel que  $0 \ll c$ , on choisissons un nombre naturel  $N_0$  tel que  $\frac{k^n}{1-k}d(Tx_0, x_0) \ll c$  pour tout  $n \geq N_0$ . Alors  $d(x_n, x_{n+p}) \ll c$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$  et  $n \geq N_0$ . Donc  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $(X, d)$ . Comme  $(X, d)$  est  $T$ -orbitalement complet, il existe  $x^* \in X$  tel que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n x_0 = x^*$ . Concernant la continuité orbitale de  $T$ ,  $T(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1} x_0 = x^*$ , c'est-à-dire que  $x^*$  est un point fixe de  $T$ .

# Chapitre 4

## Applications

### 4.1 Application 1

Dans ce application, nous utiliserons le théorème du point fixe de Banach pour prouver l'existence et l'unicité de Picard-Lindelöf.

**Théorème 4.1** (Picard-Lindelöf).

Soit  $f$  une fonction continue dans un rectangle  $R = \{(t, x) : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$  et bornée en  $R$ ,  $f(x, t) \leq c$ . Supposons que  $f$  est  $k$ -Lipschitzienne sur  $R$  par rapport à son second variable. Alors, il existe  $\varepsilon > 0$  tels que le problème de la valeur initiale

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (4.1)$$

a une solution unique  $y$  sur l'intervalle  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ , où

$$\varepsilon < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}. \quad (4.2)$$

**Preuve.**

On observe d'abord que si la fonction  $y \in C^1([t_0 - a, t_0 + a])$  est une solution de problème précédent, alors nécessairement

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds, \quad (4.3)$$

par l'intégration. D'autre part, si  $x \in C([t_0 - a, t_0 + a])$  vérifie (4.3), alors  $x$  est une solution continûment différentiable de (4.1) (cela découle du Fondamental Théorème de calcul). Ainsi, le problème de la valeur initiale (4.1) pour  $x \in C^1([t_0 - a, t_0 + a])$  est équivalent à (4.3) pour  $x \in C([t_0 - a, t_0 + a])$ .

Maintenant, construire un opérateur  $T$  sur un espace complet auquel on peut appliquer théorème du point fixe de Banach, pour  $J = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  et  $y \in C(J)$ , définir l'opérateur

$$T(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \quad t \in J.$$

Considérons l'ensemble

$$X = \{y \in C(J) : y(t_0) = x_0, \sup_{t \in J} |y(t) - x_0| \leq c\varepsilon\},$$

c'est un sous-espace fermé de  $C(J)$  (muni de la métrique  $d_\infty$ ), donc  $(X, d_\infty)$  est complet.

Montrons que  $T : X \rightarrow X$ , soit  $y \in X$  on a  $T(y)(t_0) = x_0$ , De plus

$$|T(y)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \right| \leq |t - t_0| \max_{t \in J} |f(t, y(t))| \leq c\varepsilon$$

donc  $T(y) \in X$ .

Dans ce qui suit,  $T$  est une contraction, soit  $y_1, y_2 \in X$ . On a

$$\begin{aligned} |T(y_1)(t) - T(y_2)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)) ds \right| = | \\ &\leq |t - t_0| \max_{t \in J} |y_1(t) - y_2(t)| \\ &\leq k\varepsilon d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

La côté droite ci-dessus est indépendant de  $t$ , donc en prenant le maximum sur  $t \in J$  des deux côtés, on obtient

$$d(T(y_1), T(y_2)) \leq k\varepsilon d(y_1, y_2).$$

En rappelant (4.2), on voit que  $k\varepsilon < 1$ , donc  $T$  est une contraction sur  $X$ . Alors, d'après théorème du point fixe de Banach  $T$  a un point fixe unique  $x \in X$  tel que

$$x(t) = T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds.$$

Donc, (4.1) a unique solution continue  $x$  sur l'intervalle  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ .

En plus de l'existence et de l'unicité d'une solution, le théorème du point fixe de Banach nous fournit une procédure itérative pour trouver la solution.

**Remarque 4.1** (Itération de Picard).

Sous les hypothèses du théorème de Picard-Lindelöf, la suite donnée par

$$x_0 = x(t_0), \quad x_{n+1}(t) = T(x_n)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_n(s)) ds \quad n = 1, 2, \dots$$

converge uniformément vers l'unique solution  $x(t)$  sur  $J = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ .

## 4.2 Application 2

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$x(t) = y(t) + \mu \int_a^b k(t, s)x(s)ds.$$

On va montrer que l'équation intégrale de Fredholm admet une solution unique sur  $[a, b]$ . On suppose que  $K(t, s)$  est continue par rapport les deux variables  $a \leq t \leq b$  et  $a \leq s \leq b$ , soit  $y \in C[a, b]$ . Alors,  $|k(t, s)| \leq \lambda$  pour tout  $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$ . On considère d'abord l'équation intégrale sur  $C[a, b]$  l'espace de tout applications Continues sur l'intervalle  $[a, b]$  avec la distance

$$d(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|,$$

nous avons que cette espace est complet car  $[a, b]$  est complet.

Maintenant, écrivons l'équation intégrale donnée sous la forme  $Tx = x$  où  $Tx(t) = y(t) + \mu \int_a^b k(t, s)x(s)ds, \forall t \in [a, b]$ . Puisque le noyau  $K$  et la fonction  $y$  sont continues, il s'ensuit que l'équation précédente définit un opérateur  $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  il s'ensuit que

$$\begin{aligned} d(Tx, Ty) &= \max_{t \in [a, b]} |Tx(t) - Ty(t)| \\ &= \max_{t \in [a, b]} \left| y(t) + \mu \int_a^b k(t, s)x(s)ds - y(t) - \mu \int_a^b k(t, s)y(s)ds \right| \\ &= \max_{t \in [a, b]} \left| \mu \int_a^b k(t, s)[x(s) - y(s)]ds \right| \\ &= |\mu| \max_{t \in [a, b]} \left| \int_a^b k(t, s)[x(s) - y(s)]ds \right| \\ \Rightarrow d(Tx, Ty) &\leq |\mu| \max_{t \in [a, b]} \int_a^b |k(t, s)||x(s) - y(s)|ds \\ &\leq |\mu| \lambda \max_{t \in [a, b]} |x(s) - y(s)| \int_a^b ds \\ &\leq |\mu| \lambda \max_{t \in [a, b]} |x(s) - y(s)|(b - a). \end{aligned}$$

Alors

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y), \forall x, y \in C[a, b], \quad k = |\mu| \lambda (b - a)$$

pour  $k < 1$  c'est-à-dire que  $|\mu| \lambda (b - a) < 1 \Rightarrow |\mu| < \frac{1}{\lambda(b-a)}$ , alors  $T$  devient contraction. Sous cette condition et par rapport le théorème du point fixe de Banach, on conclut que  $T$  admet une solution unique  $x$  sur  $C[a, b]$ .

### 4.3 Application 3

Considérons l'équation différentielle du troisième ordre suivante

$$y''' = f(t, y(t)), t \in [a, b] \tag{4.4}$$

avec les conditions aux limites

$$y(a) = A, y(b) = B \tag{4.5}$$

et la condition initiale

$$y''(t_0) = y_0, \quad (4.6)$$

où  $t_0 \in [a, b]$ ,  $A, B, y_0 \in \mathbb{R}$  et  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue. A partir de (4.4) et (4.6), on obtient un problème aux valeurs initiales

$$\begin{cases} z' = f(t, y(t)), & t \in [a, b] \\ z(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $z = y''$ . Ainsi, (4.4) + (4.6) est équivalent à (4.7) et il peut être mis sous la forme intégral-différentielle

$$y''(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds := F(t, y(t)), t \in [a, b]. \quad (4.8)$$

Un problème aux limites à deux points (4.5)+(4.8) peut être mis dans une équation intégrale équivalente de type Fredholm

$$y(t) = L(t) + \int_a^b G(t, s).F(s, y(s)) ds, t \in [a, b],$$

où  $L : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$L(t) = \frac{t-a}{b-a}B + \frac{b-t}{b-a}A, \text{ pour tout } t \in [a, b]$$

et  $G : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définit par

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(s-a)(b-t)}{b-a}, & \text{si } a \leq s \leq t \leq b \\ \frac{(t-a)(b-s)}{b-a}, & \text{si } a \leq t \leq s \leq b, \end{cases}$$

est la fonction de Green associée au problème homogène

$$G(t, s) = \begin{cases} y'' = 0, \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases}$$

Maintenant, le problème (4.4)+(4.5)+(4.6) est équivalent à

$$(y''(t), y(t)) = (y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, L(t) + \int_a^b G(t, s).F(s, y(s)) ds), t \in [a, b], \quad (4.9)$$

où  $y \in C[a, b]$ . Maintenant, le but est de résoudre l'équation (4.9). Pour ça, on remarque que le problème (4.4)+(4.5)+(4.6) est équivalent à

$$y(t) = L(t) + \int_a^b G(t, s)(y_0 + \int_{t_0}^s f(\tau, y(\tau)) d\tau) ds, t \in [a, b].$$

**Théorème 4.2.** *Considérons le problème (4.4)-(4.6) avec  $f : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue. Supposons qu'il existe  $L > 0$  tel que*

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|, \text{ pour tout } t \in [a, b] \text{ et } u, v \in \mathbb{R}.$$

*Alors le problème (4.4)-(4.6) a une solution unique dans  $C[a, b]$ .*

**Preuve.** Parce que la solution au problème de valeur aux limites de Dirichlet

$$\begin{cases} T_1(u) = -u''(t) = f(t) \\ u(a) = A, \\ u(b) = B, \end{cases}$$

est l'unique fonction  $C^2$  qui vérifie les conditions aux limites indiquées et minimise la fonctionnelle énergétique  $P(u) = \int_a^b [\frac{1}{2}u'(t)^2 - f(t)u(t)]dt$ , on a que  $T_1$  est inversible et on note  $S_1$  son inverse.

Si le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} T_2(u) = u'(t) = f(t) \\ u(a) = y_0, \end{cases}$$

admet une solution unique, alors on peut définir l'opérateur inverse de  $T_2$  et le noter  $S_2$ .

Soit  $X = C^3[a, b]$  l'ensemble de toutes les fonctions continues sur  $[a, b]$  qui ont les trois premières dérivées continues. Sur  $X$ , nous considérons la métrique suivante

$$d(u, v) = (\|S_1u - S_1v\|, \|S_2S_1u - S_2S_1v\|) \quad \text{pour tout } u, v \in X.$$

Nous avons que  $(X, \mathbb{R}_+^2, d)$  est un espace métrique cône.

Maintenant, nous considérons l'opérateur  $T : X \rightarrow X$  donné par

$$T(y)(t) = L(t) + \int_a^b G(t, s)(y_0 + \int_{t_0}^s f(\tau, y(\tau))d\tau)ds,$$

il est facile de voir que  $T = T_1T_2$  avec

$$T_1 : C[a, b] \rightarrow C[a, b],$$

$$T_1(u)(t) = L(t) + \int_a^b G(t, s)u(s)ds, \quad \text{pour tout } t \in [a, b]$$

et

$$T_2 : C[a, b] \rightarrow C[a, b],$$

$$T_2(u)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds \quad \text{pour tout } t \in [a, b].$$

Pour tout  $u \in X$  on a

$$S_1Tu(t) = T_2(u)(t), t \in [a, b]$$

et

$$S_2S_1Tu(t) = f(t, u(t)), t \in [a, b]$$

et donc, pour tout  $u, v \in X$  on a

$$d(Tu, Tv) = (\|T_2u - T_2v\|, \|Fu - Fv\|),$$

où  $F : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  donnée par  $Fu(t) = f(t, u(t))$ , pour tout  $t \in [a, b]$ .

La condition contractuelle du théorème 4.2 tient si pour tout  $u, v \in X$  on a  $\|T_2u - T_2v\| \leq a\|S_1u - S_1v\|$  et  $\|Fu - Fv\| \leq a\|S_2S_1u - S_2S_1v\|$  avec  $a \in [0, 1)$ . La dernière inégalité peut être transformée en une condition de contraction satisfaite par  $T$  et la première inégalité ci-dessus est assurée par la condition de Lipschitz imposée à  $f$ . Donc, c'est une contraction dans l'espace métrique cônica  $(X, \mathbb{R}_+^2, d)$ , donc d'après le théorème 4.2  $T$  a un point fixe unique.

## 4.4 Application 4

Maintenant on va trouver la solution du système de  $n$  équations algébriques linéaires à  $n$  inconnues

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (4.10)$$

Le système (4.10) peut être écrit comme

$$\begin{cases} x_1 = (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1n}x_n + b_1 \\ x_2 = -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 - \cdots - a_{2n}x_n + b_2 \\ \vdots \\ x_n = -a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + (1 - a_{nn})x_n + b_n. \end{cases} \quad (4.11)$$

Soit  $a_{ij} = -a_{ij} + \delta_{ij}$  où  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$ . Alors le système (4.11) peut être écrit sous la forme équivalente suivante.

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Si  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , alors l'équation (4.10) peut être écrite sous la forme  $Tx = x$ , où  $T$  est défini par  $Tx = y$  où  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , et

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ici,  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $(a_{ij})$  est  $n \times n$  matrice.

Trouver les solutions du système (4.10) revient donc à trouver les points fixes de l'opérateur  $Tx = y$ . Pour trouver un point fixe unique de  $T$ , c'est-à-dire un solution unique de (4.10), on applique le principe de contraction

de Banach, l'équation (4.10) a une solution unique, si

$$\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq k < 1, i = 1, 2, \dots, n.$$

Pour  $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ,  $y' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_n)$  on a  $\|Tx - Tx'\| = \|y - y'\|$ ,

$$y'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j + b_i, i = 1, 2, \dots, n.$$

Aussi, pour  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on a  $\|x\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ . Alors

$$\begin{aligned} \|Tx - Tx'\| &= \|y - y'\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |y_i - y'_i| \\ &= \sup_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i - \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j + b_i \right) \right| \\ &= \sup_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - x'_j) \right| \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j - x'_j| \\ &\leq \sup_{1 \leq i \leq n} |x_j - x'_j| \sup_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, \end{aligned}$$

alors,

$$\|Tx - Tx'\| \leq k \|x - x'\|.$$

Cela montre que  $T$  est une application contractante d'une espace de Banach sur lui-même. Ainsi, par le principe de contraction de Banach, il existe un point fixe unique  $x^*$  de  $T$  dans  $\mathbb{R}^n$ , c'est-à-dire que  $x^*$  est une solution de l'équation (4.10).

# Conclusion

La théorie de point fixe est très importante pour la résolution des problèmes non linéaire. Dans notre travail, on a présenté quelques théorèmes du point fixe pour des contractantes vérifiant des conditions suffisantes dans un espace métrique et des généralisations sur des espaces métriques partiels et des espaces métriques coniques.

On a aussi appliqué quelques résultats pour établir l'existence de solutions de certaines équations différentielles et intégrales non linéaire.

# Références

- [1] Abdeljawad, T. et Karapinar, E. (2009) Quasicone Metric Spaces and Generalizations of Caristi Kirk's Theorem. Fixed Point Theory Appl 2009, vol 2009, Article ID 574387.
- [2] Abdeljawad T, Karapinar E, Tas K. (2011) Existence and uniqueness of a common fixed point on partial metric spaces. Appl Math Lett 2011, vol.24 (11),1900-1904.
- [3] Banach S. (1922) Sur les operations dans les ensembles abstraits et Leur application aux équations integrales,Fund. Math, vol. 3, 133-181.
- [4] Bollenbacher, A.,et Hicks, T. L (Communicated by John B. Conway). (1988) A Fixed Point Theorem Revisited. Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 102,n. 4, 898-900.
- [5] Ćirić. L.B. (1974) On some maps with a nonunique fixed point. Publ. Inst. Math, 17(31), 52–58.
- [6] Huang L.-G. et Zhang. X.(2007) Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 332, no.2.
- [7] Kannan, R. (1969). Some Results on Fixed Points-II. The American Mathematical Monthly, 76(4), 405–408.
- [8] Karapinar,E. (2010) Some Nonunique Fixed Point Theorems of Ćirić Type on Cone Metric Spaces. Abstract and Applied Analysis, vol. 2010, Article ID 123094, 14 pages.
- [9] Karapinar, E. (2011) Generalizations of Caristi Kirk's Theorem on Partial Metric Spaces. Fixed Point Theory Appl 2011, n.4.
- [10] Karapinar,E., Inci M. Erhan. (2011),Fixed point theorems for operators on partial metric spaces.Applied Mathematics Letters, 24,1894-1899.
- [11] Mannan, Md.A., Rahman, Md.R., Akter, H., Nahar, N. and Mondal, S. (2021) A Study of Banach Fixed Point Theorem and It's

Applications. American Journal of Computational Mathematics, 11, 157-174.

- [12] Matthews, S. G. (1992) Partial metric spaces. University of Warwick. Department of Computer Science. (Department of Computer Science Research Report).
- [13] Matthews, S.G. (1994) Partial metric topology, in : Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, Annals of the New York Academi of Sciences, vol. 728, pp. 183–197
- [14] Reich. S. (1971) Some remarks concerning contraction mappings. Canadian Mathematical Bulletin. vol.14 (1),121-124.
- [15] Rezapour .S et Hamlbarani .R. (2008) Some notes on the paper cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. J. Math. Anal. Appl, 345,719-724.
- [16] Samet, B., Vetro, C. et Vetro, F. (2013) From metric spaces to partial metric spaces. Fixed Point Theory Appl, 5.
- [17] Sunarsini et al 2021 J. Phys. : Conf. Ser. 1821 012003.
- [18] Wei-Shih Du. (2016) A Direct Proof of Caristi's Fixed Point Theorem. Applied Mathematical Sciences, vol. 10,n. 46, 2289 - 2294.