



**République Algérienne Démocratique et
Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique**



Université Echahid Hamma Lakhdar – EL OUED

Faculté de Sciences Exactes

Département de

Mathématiques

**Thèse en vue de l'obtention du diplôme de doctorat LMD en
mathématiques**

Spécialité : Mathématiques appliquées

SUJET DE LA THESE :

Images numériques des opérateurs, spectres étendus et interactions

Présentée Par :

ZAIZ Khaoula

Soutenue le : 20/ 11/2019

Devant le jury composé de :

Lamine Nisse	Prof.	Univ. Eloued	Président
Abdelouahab Mansour	Prof.	Univ. Eloued	Rapporteur
Abderrahmane Zarai	Prof.	Univ. Tebessa	Examineur
Lamine Guedda	M.C.A	Univ. Eloued	Examineur
Said Beloul	M.C.A	Univ. Eloued	Examineur
Smail Bouzneda	M.C.A	Univ. Tebessa	Examineur

Table des matières

Introduction	viii
Notations	xii
1 Notions Préliminaires	1
1.1 Notations et définitions	1
1.1.1 Quelques propriétés des opérateurs linéaires bornés	2
1.1.2 L'inverse d'un opérateur	2
1.1.3 L'adjoint d'un opérateur	3
1.1.4 Commutateur	3
1.1.5 Quelques classes d'opérateurs considérées dans $\mathcal{B}(H)$	4
1.1.6 Spectres et Résolvantes	5
1.1.7 Spectre essentiel	6
1.2 Quelques propriétés des fonctions convexes	8
1.3 Images numériques des opérateurs linéaires bornés	11
1.3.1 Définitions et propriétés	11
1.3.2 Inclusion spectrale	14
1.3.3 Image numérique de quelques classes des opérateurs	16
1.3.4 Rayon numérique des opérateurs	17
1.4 Spectre étendu des opérateurs linéaires bornés	21
1.4.1 Relation avec le spectre ponctuel	25
1.4.2 Relation avec le spectre approché	25
1.4.3 Puissances d'opérateurs	26

1.4.4	Cas de dimension finie	27
1.4.5	Spectre étendu de quelques classe des opérateurs	28
2	Image numérique des fonctions d'opérateurs	30
2.1	Image numérique d'une fonction convexe d'opérateurs	30
2.1.1	Image numérique d'une fonction convexe d'opérateurs en dimension finie	31
2.1.2	Image numérique d'une fonction convexe d'opérateurs en dimension infinie	32
2.2	Rayon numérique d'une fonction convexe des opérateurs	35
2.2.1	Rayon numérique d'une fonction convexe d'opérateurs en dimension finie	35
2.2.2	Rayon numérique d'une fonction convexe d'opérateurs en dimension infinie	36
2.2.3	Généralisation de l'image et rayon numérique d'une fonction convexe d'opérateurs	44
2.3	Image numérique de polynôme d'un opérateur	47
2.4	Propriétés géométriques	53
2.5	Propriétés analytiques	55
3	Quelques Inégalités liées au rayon numérique	57
3.1	Quelques inégalités sur la norme et le rayon numérique	57
3.1.1	Inégalité entre le rayon numérique et la norme des opérateurs	57
3.1.2	Inégalité entre le rayon numérique et autres expressions	62
3.2	Inégalité de Hermite Hadamard	64
3.3	Généralisation de l'inégalité de Hermite Hadamard	66
4	Spectre étendu et spectre essentiel des opérateurs linéaires bornés	71
4.1	Relation entre le spectre étendu el le spectre essentiel	71
4.2	Spectre étendu de la somme de deux opérateurs linéaires bornés	79

5 Applications et exemples	84
5.1 Exemples et Applications en dimension finie	84
5.2 Exemple et Application en dimension infinie	92
Conclusion et perspectives	95
Bibliographie	97