

Université HAMMA Lakhdar ELOUED

Département de Mathématiques

Faculté de Sciences



Cours et Exercices D'algèbres Linéaires pour deuxième année Mathématiques L.M.D.

SAÏD AMEUR MEZIANE

Université HAMMA Lakhdar EL OUED

Département de Mathématiques

Faculté de Sciences



Cours et Exercices D'algèbres Linéaires pour deuxième année Mathématiques L.M.D.

SAID AMEUR MEZIANE

Université HAMMA Lakher ELOUED D'Eloued.

Département de Mathématiques

Faculté de Sciences

Cours et Exercices d' Algèbre

2^{eme} Anne.L.M.D.

Rédigées par :Said Ameur Meziane

Préface.

Cet ouvrage est le fruit des cours destinés aux étudiants de la deuxième année LMD Mathématiques qui ont déjà fait leur cours en algèbre linéaire de la première année.

L'algèbre linéaire est devenue une partie essentielle du bagage mathématique nécessaire aux mathématiciens et, plus généralement, à tous les scientifiques dont le travail comporte des aspects quantitatifs. C'est l'étendue des applications, tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines, qui rend ce sujet indispensable. Le cours vise à présenter une introduction à l'algèbre linéaire, utile à tous les étudiants, quelle que soit leur spécialité. Cette introduction touchera aux aspects calculatoires et aux notions plus abstraites du sujet. Pour l'algèbre trois, expose quelques notions et théorèmes nécessaires des formes linéaires et la dualité, (la diagonalisation des endomorphismes, des matrices carrés) et leurs applications aux quelques aspects mathématiques.

constitué de l'algèbre quatre qui traite le sujet de la réduction des formes quadratiques est un outil puissant pour la détermination de plusieurs notions de l'algèbre linéaire comme le rang d'une matrice, la puissance d'une matrice, l'inverse d'une matrice inversible, etc.,

Cet ouvrage est composé en plusieurs chapitres

Le premier chapitre expose quelques notions et théorèmes nécessaires des formes linéaires, leur présentation matricielle dans des différentes bases et la dualité.

Le deuxième chapitre étudie et expose des notations de présentation matricielle carrées différentes et leurs propriétés polynomiales, leurs valeurs propres, diagonalisation et quelques aspects calculatoires et aux notions plus abstraites du sujet.

Le troisième chapitre Réduction de Jordan, exponentielles des matrices, résolutions des équations différentielles .

Le quatrième chapitre traite les formes bilinéaires en général et les formes bilinéaires symétriques en particulier et leur présentation matricielle dans des différentes bases, les noyaux des formes bilinéaires, décomposition d'une forme bilinéaire au produit des formes linéaires, l'orthogonalité pour une forme bilinéaire. les formes quadratiques associées aux formes bilinéaires symétriques, les notions du rang, noyau et orthogonalité, les vecteurs isotropes, les formes quadratiques définies, non définies, positives, négatives, le produit scalaire et l'espace quadratique.

Le cinquième chapitre présente les différentes méthodes de la réduction d'une forme quadratique, la réduction dans une base orthogonale, Le sixième chapitre ;Concerne Les espaces euclidiennes,les définitions des normes ,les distances et ses propriétés et la réduction dans une base orthonormée (méthode de Gram-Schmidt pour l'obtention d'une base orthogonale ou orthonormée selon la base si elle contient des vecteurs isotropes ou non).

Le sixième chapitre réduction par la méthode du carré incomplet (méthode de Gauss).

Table des matières

1		5
1.1	Application linéaires	5
1.2	Matrice d'une application linéaire	8
1.3	Séries des Exercices	10
2		12
2.1	Valeurs et vecteurs propres	12
2.2	polynôme d'endomorphisme	13
2.3	Diagonalisation des endomorphismes	23
2.4	Décomposition de Dunford.	31
2.4.1	Trigonalisation	31
2.5	Séries d'exercices.	42
3		44
3.1	Matrice de Jordan	44
3.2	Exponentielle d'une matrice	49
3.3	Applications de la diagonalisation	50
3.4	Résolution d'équations différentielles	56
3.4.1	Équation homogène 1	56
3.4.2	Équation non homogène 2.	57
3.5	Séries d'exercices	63
4		65
4.1	Formes bilinéaires	65
4.2	Matrice d'une forme bilinéaire	69

4.3	séries Exercices	74
5		76
5.1	Formes quadratiques	76
5.2	Les matrices d'une forme quadratique	78
5.3	Réduction de Gauss	83
5.4	Séries d'exercices	94
6		96
6.1	Espace Euclidienne	96
6.2	Norme euclidienne associée	97
6.3	Distance euclidienne associée	99
6.4	Orthogonalité	100
6.5	Séries d'exercices	104

Chapitre 1

Rappels et compléments Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Application linéaires

Définition 1.1.1.

Une application $f : E \rightarrow F$ entre deux $\mathbb{K}$ -ev est appelée application $\mathbb{K}$ -linéaire, ou plus simplement application linéaire ssi :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y),$$

ou, de manière équivalente, ssi :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2, \quad f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y).$$

Définition 1.1.2

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F . Si $E = F$, on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans lui-même. Une telle application linéaire de E dans lui-même est appelée endomorphisme de E .

Proposition 1.1.1

$\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 1.1.2

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E vers G .

Image et noyau

Définition 1.1.3

Dans ce paragraphe, E et F sont deux espaces vectoriels, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- 1) L'image de f est $\text{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\} = f(E)$;
- 2) Le noyau de f est $\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$.

Lemme 1.1.1

- 1) Soit E' un s.e.v. de E . Alors $f(E')$ est un s.e.v. de F .
- 2) Soit F' un s.e.v. de F . Alors $f^{-1}(F')$ est un s.e.v. de E .

Théorème 1.1.1

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors f est injective ssi : $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Définition 1.1.4

Une forme linéaire sur un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur $\mathbb{K}$ est souvent noté E^* , et appelé dual de E .

Définition.1.1.5

L'espace des formes linéaires $\ell(E, \mathbb{K})$ s'appelle l'espace dual de E , noté E^* .

Théorème 1.1.2

Pour toute base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de E , il existe l'unique base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de E^* satisfaisant la condition : $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}$ s'appelle la base duale de la base $\{v_1, \dots, v_n\}$, souvent notée $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$.

Preuve.

Une forme linéaire est entièrement déterminée par l'image de chaque vecteur de la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de E . Ainsi pour chaque i fixé, les n équations $\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}, j = \overline{1, n}$ définissent de façon unique la forme φ_i .

Maintenant montrons que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ est une base de E^* . Comme E^* a la même dimension que E , il suffit de montrer que les n formes sont libres.

Soit

$$\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n = 0$$

alors, pour tout $j = \overline{1, n}$, on a

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_1 \varphi_1 + \dots + \alpha_n \varphi_n)(v_j) \\ &= \alpha_1 \varphi_1(v_j) + \dots + \alpha_j \varphi_j(v_j) + \dots + \alpha_n \varphi_n(v_j) \\ &= \alpha_1 \cdot 0 + \dots + \alpha_j \cdot 1 + \dots + \alpha_n \cdot 0 = \alpha_j \end{aligned}$$

(En d'autre manière, de l'isomorphisme entre E et E^* , à chaque v_i de la base de E on correspond l'unique φ_i de la base de E^*).

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la base $\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^n\}$. Pour tout i de $\{0, \dots, n\}$, on définit une forme linéaire f_i sur E par

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, f_i(X^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Exemple 1.1.1

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la base $\mathcal{B} = \{1, X, \dots, X^n\}$. Pour tout i de $\{0, \dots, n\}$, on définit une forme linéaire f_i sur E par

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, f_i(X^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

1. Démontrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^*
2. On considère les deux éléments ϕ et ψ de E^* définis par, pour tout $P \in E$, $\phi(P) = P(1)$ et $\psi(P) = P'(0)$. Déterminer les coordonnées de chacune des formes ϕ et ψ dans la base $(f_0, \dots, f_n)$

Solution 1.1.1

1. Il y a plusieurs façons de répondre. La plus simple est de remarquer que, par définition, $(f_0, \dots, f_n)$ est la base duale de $\mathcal{B}$.
2. Les f_i étant les formes linéaires coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, on va exprimer ϕ et ψ en fonction des coordonnées du polynôme dans la base $\mathcal{B}$.

Considérons donc $P = \sum_{j=0}^n a_j X^j$. On a

$$\phi(P) = P(1) = \sum_{j=0}^n a_j = \sum_{j=0}^n f_j(P)$$

De même,

$$\psi(P) = P'(0) = a_1 = f_1(P)$$

Ainsi, $\phi = \sum_{j=0}^n f_j$ et $\psi = f_1$.

Exemple 1.1.2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E . Soient f_1^*, f_2^* et f_3^* les formes linéaires sur E définies par

$$f_1^* = 2e_1^* + e_2^* + e_3^*, f_2^* = -e_1^* + 2e_3^*, f_3^* = e_1^* + 3e_2^*.$$

Montrer que (f_1^*, f_2^*, f_3^*) est une base de E^* et déterminer la base (f_1, f_2, f_3) de E dont elle est la base duale.

Solution.

Soit M la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées de (f_1^*, f_2^*, f_3^*) dans la base (e_1^*, e_2^*, e_3^*) . Il suffit de prouver que le rang de la matrice M est égal à 3. Par des opérations sur les lignes et les colonnes, on trouve que (f_1, f_2, f_3) est la base de E .

1.2 Matrice d'une application linéaire

Soient E et E' deux espaces vectoriels sur K , de dimension finie n et p , et $f : E \rightarrow E'$ une application linéaire. Choisissons $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\{e'_1, \dots, e'_p\}$ une base de E' . Les images par f des vecteurs $\{e_1, \dots, e_n\}$ se décomposent sur la base $\{e'_1, \dots, e'_p\}$

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{p1}e'_p \\ f(e_2) &= a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{p2}e'_p \\ &= \\ &\vdots \\ &= \\ f(e_n) &= a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{pn}e'_p \end{aligned}$$

Définition 1.2.1 :

On appelle matrice de f dans les bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\{e'_1, \dots, e'_p\}$, la matrice notée par $M(f)_{e_i, e'_j}$ appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(K)$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans la base $\{e'_1, \dots, e'_p\}$:

$$M(f)_{e_i, e'_j} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \vdots & & & & \vdots \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdot & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{matrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_{p-1} \\ e'_p \end{matrix}$$

Il est clair que la matrice associée à f dépend du choix des bases de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{E}'$.

Exemple 1.2.1

Soit $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{e'_1, e'_2\}$ la base canonique $\mathbb{R}^2$.

Considérons l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x - y, z - y)$$

$$M(f)_{e_i, e'_j} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 1.2.2

$$D : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$P \quad DP = P'$$

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}_4[X]$ et $\mathbb{R}_3[X]$

Remarque 1.2.1

Si on prend $E = \mathbb{R}^m, F = \mathbb{R}^n$, et pour $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ les bases canoniques de ces espaces, on note simplement $[f]_{b.c.}$, et on dit qu'il s'agit de la matrice canoniquement associée à f . Inversement, A étant une matrice de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice canoniquement associée. On dit que f est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A .

1.3 Séries des Exercices

Exercice.1.1.1.

- On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$. Montrer dans chaque cas que les vecteurs e_1, e_2 et e_3 forment une base de E et calculer leur base duale.
 - $e_1 = (1; 0; -1), e_2 = (-1; -1; 2), e_3 = (-2; 1; -2)$.
 - $e_1 = (1; 0; 0), e_2 = (1; 1; 0), e_3 = (0; 1; 1)$.
- Dans chaque cas, montrer que les formes linéaires f_1, f_2 et f_3 forment une base de E^* .
 - $f_1 = (1; 1; -1), f_2 = (1; -1; 1), f_3 = (1; 1; 1)$.
 - $f_1 = (1; 2; 3), f_2 = (2; 3; 4), f_3 = (3; 4; 6)$.
 - $f_1 = (0; 1; 1), f_2 = (1; 0; 1), f_3 = (1; 1; 0)$.

Exercice 1.1.2.

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z)$$

- Montrer que u est linéaire.
- Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Calculer $u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)$ et $u(\mathcal{E}_3)$ en fonction de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$.
- Écrire la matrice de u dans les bases canoniques.
- Montrer que $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
- Écrire la matrice de u dans les bases $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ et $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\}$.

Exercice.1.1.3.

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

- Montrer que f est linéaire.
- Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice.1.1.4.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\operatorname{Im}(f)$. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Chapitre 2

Diagonalisations des endomorphismes

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n . Soit f un endomorphisme de E , A sa matrice dans une base de E , x un vecteur non nul de E et $\lambda \in \mathbb{K}$.

2.1 Valeurs et vecteurs propres

Définition 2.1.1

On dit que x est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si et seulement si $f(x) = \lambda x$.

Définition 2.1.2

Écriture matricielle

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

λ est dite valeur propre de la matrice A s'il existe un vecteur non nul $X \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$AX = \lambda X$$

Le vecteur X est alors appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Exemple 2.1.1.

Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Vérifions que $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A . En effet,

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2X_1$$

Donc X_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda_1 = -2$.

Caractérisation des valeurs propres

Voici le résultat fondamental pour déterminer les valeurs propres.

Proposition 2.1.1.

Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

λ est une valeur propre de $A \iff \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Démonstration.

λ est une valeur propre de $A \iff \exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, \quad AX = \lambda X$

$$\iff \exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}, \quad (A - \lambda I_n) X = 0$$

$$\iff \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$$

$\iff A - \lambda I_n$ n'est pas injective $\iff A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

$$\iff \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

2.2 polynôme d'endomorphisme

. Polynôme de matrice, polynôme d'endomorphisme

On note $M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , on note $L(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E . Un élément $f \in L(E)$ est un endomorphisme de E . Dans ce chapitre, E sera de dimension finie.

Polynôme de matrice.

Définition 2.2.1.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice. À X^k , on associe A^k ; à 1, on associe la matrice identité

I_n . Plus généralement, pour un polynôme

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_mX^m \in \mathbb{K}[X]$$

on définit la matrice :

$$P(A) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m \in M_n(\mathbb{K})$$

Exemple 2.2.1.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^4 - 5X^2 - 2X + 1$. On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad A^4 = (A^2)^2 = \begin{pmatrix} 13 & -21 \\ -21 & 34 \end{pmatrix} \quad P(A) = A^4 - 5A^2 - 2A + I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Polynôme d'endomorphisme.

Soit $f \in L(E)$. À X^k , on associe f^k , c'est-à-dire $f \circ f \circ \cdots \circ f$.

1, on associe l'application identité id_E . Plus généralement, pour un polynôme

$$P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_mX^m \in \mathbb{K}[X]$$

on définit l'endomorphisme :

$$P(f) = a_0\text{id}_E + a_1f + a_2f^2 + \cdots + a_mf^m \in L(E)$$

Sous-espaces stables

Définition 2.2.2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$. Le sous-espace vectoriel F de E est stable par f si :

$$\forall x \in F \quad f(x) \in F$$

Autrement dit, F est stable par f si $f(F) \subset F$. Un premier exemple : les sous-espaces propres de f sont stables par f . En effet, si $F = \text{Ker}(f - \lambda\text{id}_E)$ alors :

pour $x \in F$, $f(x) = \lambda x \in F$.

Lemme 2.2.1 .

Si F est un sous-espace vectoriel stable par f alors, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par $P(f)$

Démonstration.

Si $x \in F$, alors $f(x) \in F$ et donc $f(f(x)) \in F$. Par récurrence sur k , on montre que $f^k(x) \in F$, pour tout $k \geq 0$. Maintenant, si $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k$, alors $P(f)$ est l'endomorphisme défini par

$$P(f) = a_0 \text{id}_E + a_1 f + a_2 f^2 + \cdots + a_m f^m$$

Donc

$$P(f)(x) = a_0 x + a_1 f(x) + a_2 f^2(x) + \cdots + a_m f^m(x).$$

Chaque terme $a_k f^k(x) \in F$, donc $P(f)(x) \in F$ car F est un espace vectoriel. Conclusion : F est stable par $P(f)$.

Une autre proposition souvent utile est la suivante :

Proposition 2.2.1.

Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent, c'est-à-dire tels que $f \circ g = g \circ f$. Alors $\text{Ker } g$ et $\text{Im } g$ sont stables par f .

Démonstration.

Soit $x \in \text{Ker } g$. On a $g(x) = 0$, d'où $g(f(x)) = f(g(x)) = f(0) = 0$, donc $f(x) \in \text{Ker } g$. Soit $y \in \text{Im } g$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$, d'où $f(y) = f(g(x)) = g(f(x))$, donc $f(y) \in \text{Im } g$.

Polynôme caractéristique

Nous transformons la caractérisation précédente en un outil pratique :

Définition 2.2.3 .

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique de A est

$$p_A(X) = \det(A - XI_n)$$

La proposition 1 devient alors :

$$A \text{ a } \lambda \text{ valeur propre} \iff p_A(\lambda) = 0$$

Sous espace propres et vecteurs propres

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base de E . Dire que $[f]_{\mathcal{B}} = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ signifie que

pour tout $i \in [1, n]$, $f(b_i) = \lambda_i b_i$. Ainsi :

$$(f - \lambda_i \text{id})(b_i) = 0 \quad \text{soit :} \quad b_i \in \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})$$

En particulier, $\text{Ker}(f - \lambda_i \text{id}) \neq \{0\}$

Réciproquement, si $\lambda \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, alors la matrice de $f - \lambda \text{id}$ dans la base B est :

$$[f - \lambda \text{id}]_B = \text{Diag}(\lambda_1 - \lambda, \lambda_2 - \lambda, \dots, \lambda_n - \lambda)$$

Proposition 2.2.2.

Sil existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle $f = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, alors l'ensemble $\{\lambda_i, i \in [1, n]\}$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \neq 0$$

Définition 2.2.4.

1. Le spectre de f est l'ensemble de ses valeurs propres :

$$\text{Spec}(f) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \neq \{0\}\}$$

2. Un vecteur propre associé à la valeur propre λ est un vecteur non nul de $\text{Ker}(f - \lambda \text{id})$. C'est donc un vecteur non nul x vérifiant : $f(x) = \lambda x$.

3. Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ , généralement noté E_λ , est $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})$. C'est donc l'ensemble des vecteurs propres associés à λ , ajoutés de 0.

4. Si p_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, si $m(\lambda_i)$ est l'ordre de multiplicité de λ_i pour $1 \leq i \leq p$, $\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^p m(\lambda_i) \lambda_i$, $\det(A) = \prod_{i=1}^p \lambda_i^{m(\lambda_i)}$.

Proposition 2.2.3.

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Autrement dit, si $B = P^{-1}AP$ alors $p_A(X) = p_B(X)$.

Démonstration. On écrit

$$B - XI_n = P^{-1}AP - X(P^{-1}I_nP) = P^{-1}(A - XI_n)P$$

Mais on sait que le déterminant vérifie $\det(MN) = \det(M) \cdot \det(N)$ pour toutes matrices M et N et $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$ pour une matrice M inversible. Donc

$$p_B(X) = \det(B - XI_n) = \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A - XI_n) \cdot \det(P) = \det(A - XI_n) = p_A(X)$$

Proposition 2.2.4.

Si une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres alors : La somme des valeurs propres vaut $\text{tra}A$

$$[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On notera $\text{Diag}(\lambda_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Diagonaliser f consiste à donner une telle base ainsi que la matrice de f dans cette base.

Remarque 2.2.1.

La matrice $A - XI_n$ est à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$, donc son déterminant $p_A(X)$ appartient à $\mathbb{K}[X]$.

On notera aussi souvent $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ comme un polynôme en λ , plutôt que $p_A(X)$. Pour tout

$$\lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda I_n - A) = (-1)^n p_A(\lambda)$$

. Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $A \in M_n(K)$. Alors :

$$p_A(A) = 0.$$

De même, soit $f \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie. Alors :

$$p_f(f) = 0.$$

L'égalité $p_A(A) = 0$ signifie que le polynôme caractéristique appliqué à A donne la matrice nulle.

L'égalité $p_f(f) = 0$ signifie que le polynôme caractéristique appliqué à f donne l'application f nulle.

Exemple 2.2.2.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Le polynôme caractéristique de A est

$$p_A(X) = \det(A - XI_2) = \begin{vmatrix} 1-X & -2 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} = (1-X)(-1-X) + 2 = X^2 + 1.$$

Vérifions le théorème de Cayley-Hamilton sur cet exemple, en calculant $p_A(A)$:

$$p_A(A) = A^2 + I_2 = -I_2 + I_2 = 0.$$

Polynôme Minimal

Trouver le polynôme minimal de l'endomorphisme u ou de la matrice A associé à u .
Alors :

1^{er} cas : le polynôme caractéristique de u (ou de A) est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ étant deux à deux distincts, $p_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{m(\lambda_i)}$.

Si u est diagonalisable, $m_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$.

Si u n'est pas diagonalisable, on cherche m_u sous la forme

$$m_u = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

où $\forall i \in 1, p, 1 \leq \alpha_i \leq m(\lambda_i)$, l'un au moins des α_i étant supérieur ou égal à 2.

2^{me} cas : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le polynôme caractéristique de u (ou de A) n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

On suppose que $p_u = \prod_{i=1}^r P_i^{n_i}$, les polynômes $P_1, \dots, P_r$ étant deux à deux distincts unitaires, soit de degré 1, soit de degré 2 à discriminant strictement négatif et $n_i \geq 1$ pour tout $i \in 1, r$.

Chercher le polynôme minimal sous la forme $m_u = \prod_{i=1}^r P_i^{k_i}$ où $\forall i \in 1, r, 1 \leq k_i \leq n_i$.

Exemple 2.2.3.

Soit ;

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminons le polynôme caractéristique de A .
2. Déterminons le polynôme minimal de A .

Solution.

$$\begin{aligned}
 p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)[(3 - \lambda)(1 - \lambda) + 1] \\
 &= (2 - \lambda)(3 - 4\lambda + \lambda^2 + 1) \\
 &= (2 - \lambda)^3
 \end{aligned}$$

Ainsi $p_A(X) = (2 - X)^3$.

2. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. On donc trois polynômes possibles pour m_f :

$$p_1(X) = X - 2 \quad , \quad p_2(X) = (X - 2)^2 \quad , \quad p_3(X) = (X - 2)^3$$

Regardons donc lequel annule A en premier :

$$\begin{aligned}
 A - 2I &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq 0 \\
 (A - 2I)^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Donc le polynôme minimal de A est le polynôme p_2 :

$$m_A(X) = (X - 2)^2$$

[4 pt]

Exemple.2.2.4.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminons le polynôme caractéristique de B .
2. Déterminons le polynôme minimal de B .

Solution.

$$\begin{aligned}
 p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 4-\lambda & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= (4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
 &= \lambda(4-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(4-\lambda) [(1-\lambda)^2 + 1 - 2(1-\lambda)]
 \end{aligned}$$

$$= -\lambda^3(4-\lambda)$$

On a donc $p_A(X) = X^3(X-4)$

D'après le théorème de Cayley- Hamilton, le polynôme minimal de B , m_B divise le polynôme caractéristique p_B et admet les mêmes racines que p_B (en oubliant les multiplicités). On a donc trois possibilités pour

p_B

$$p_1(X) = X(X-4) \quad , \quad p_2(X) = X^2(X-4) \quad , \quad p_3(X) = X^3(X-4)$$

Regardons donc lequel annule B en premier :

$$B(B-4I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $m_B = p_1$:

$$m_B(X) = X(X-4).$$

Exemple 2.2.5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} p_A(X) &= \det(A - XI_3) \\ &= \det \left(\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & 3 & 3 \\ -2 & 11-X & -2 \\ 8 & -7 & 6-X \end{vmatrix} \\ &= \dots \\ &= -X^3 + 18X^2 - 51X - 182 \\ &= -(X+2)(X-7)(X-13). \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres sont : $-2, 7, 13$ et $m_A = p_A = (x+2)(x-7)(x-13)$

Polynômes annulateurs

Définition 2.2.4.

Un polynôme annulateur de f est un polynôme $p \in \mathbb{K}[X]$ tel que $p(f) = 0$, les puissances de f étant les puissances de composition.

Théorème 2.2.1

Soit p un polynôme annulateur de f . Alors toute valeur propre de f est racine de p .

La réciproque est fausse.[4 pt]

Endomorphisme Nilpotent

Définition 2.2.5.

On dit qu'un endomorphisme f (resp. une matrice A) est nilpotent (e) s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$ (resp. $A^k = 0$).

Lemme 2.2.2 .

Si f est nilpotent, alors 0 est son unique valeur propre et on a

$$p_f(X) = (-1)^n X^n$$

Démonstration.

Notons A la matrice de f dans une base. Comme f est nilpotent, il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$. Cela implique $\det(A^k) = 0$, donc $\det(A) = 0$. La matrice A n'est donc pas inversible : cela entraîne que f n'est pas bijectif, et comme f est un endomorphisme, f n'est pas non plus injectif (la dimension de l'espace de départ égale la dimension de l'espace d'arrivée). Ainsi, $\text{Ker } f \neq \{0\}$, ce qui est exactement dire que 0 est une valeur propre de f .

Supposons que λ soit une valeur propre de f : il existe alors $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. Par récurrence sur n , $f^n(x) = \lambda^n x$. Or, f est supposé nilpotent, il existe donc $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$. D'où $\lambda^k x = 0$, ce qui implique $\lambda^k = 0$ (car $x \neq 0$), donc $\lambda = 0$.

Ainsi, 0 est la seule valeur propre de f , donc la seule racine de son polynôme caractéristique.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on considère l'endomorphisme comme aussi défini sur $\mathbb{C}$. En termes de matrice, cela revient à dire que la matrice à coefficients réels A peut être vue aussi comme à coefficients complexes. Or, sur $\mathbb{C}$, un polynôme dont la seule racine est 0 est de la forme αX^n , donc $\chi_f(X) = (-1)^n X^n$ puisque le coefficient dominant d'un polynôme caractéristique est $(-1)^n$.

2.3 Diagonalisation des endomorphismes

Diagonalisation des endomorphismes (matrices carrées).

Définition 2.3.1

On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale D , donc s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Définition 2.3.2.

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P^{-1}BP$.

Proposition 2.3.1.

Il s'agit d'une relation d'équivalence défini dans l'ensemble des matrices semblables.

Remarque 2.3.1.

Lien avec les changements de base.

Diagonaliser A consiste à :

1. donner la matrice diagonale D ;
2. donner la matrice de passage P ;
3. rappeler l'égalité $D = P^{-1}AP$.

Dans ce qui suit, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et f est l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A .

Proposition 2.3.2.

Les valeurs propres de M sont les racines de p_M (polynôme caractéristique).

Corollaire 2.3.1.

Si les racines de p_M polynôme caractéristique sont simples, M est diagonalisable, et (p_M) est une combinaison linéaire de suites géométriques de raisons ces racines.

Critères de diagonalisation

Théorème 2.3.1.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) $\sum_{\lambda \in \text{Spec}(f)} \dim E_\lambda = \dim E$;
- 2) f est diagonalisable ;
- 3) f est diagonalisable dans une base de vecteurs propres ;

Corollaire 2.3.2

(E de dimension n)

- 1) f admet au plus n valeurs propres distinctes,
- 2) Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Principes et critères de diagonalisation

La diagonalisation de A est équivalente à la diagonalisation de f . En effet :

S'il existe P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale : P est une matrice inversible, donc une matrice de passage, plus exactement la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ formée des colonnes de P . Ainsi :

$$D = P^{-1}AP = [b.c. \rightarrow \mathcal{B}]^{-1}[f]_{b.c.}[b.c. \rightarrow \mathcal{B}] = [f]_{\mathcal{B}}$$

Les critères de diagonalisation, ainsi que les méthodes sont les mêmes. Notamment :

- 1) Si A est triangulaire, les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux.
- 2) Si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.
- 3) A diagonalisable $\iff \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(A)} = \mathbb{K}^n \iff \sum_{\lambda \in \text{Spec}(A)} \dim E_{\lambda} = n$.
- 4) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Si $P(A) = 0$, alors toute valeur propre de A est racine de P .

Théorème 2.3.2.

Toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est :

1. soit égale à λI_2 , pour une certaine valeur $\lambda \in \mathbb{C}$;
2. soit semblable à une matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, où $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sont deux complexes ;

5.2 Propriétés des vecteurs propres et valeurs propres

Théorème 2.3.3.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors on a les équivalences suivantes :

- 1) λ est une valeur propre de A .
- 2) $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible.
- 3) $\det(A - \lambda I) = 0$.

Preuve

: 1) $\implies$ 2) λ est une valeur propre de A entraîne l'existence d'un $x \neq 0_E$ tel que $Ax = \lambda x$ c.à.d $Ax - \lambda x = 0_E$ d'où $(A - \lambda I)x = 0_E(*)$, ce qui entraîne $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible, car si $(A - \lambda I)$ est inversible, en multipliant $(*)$ par $(A - \lambda I)^{-1}$ on aurait $x = 0_E, \implies$ 3) Trivial.

$\implies$ 1) Voir Théorème 2.3.1.

Théorème 2.3.4. :

Le polynôme caractéristique $p_A(\lambda)$ de la matrice A est invariant lorsque l'on remplace A par une matrice semblable (c.à.d $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ pour $B = P^{-1}AP$ et P inversible

Preuve : En effet $B = P^{-1}AP$ entraîne $B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I =$

$$P^{-1}(A - \lambda I)P, \text{ d'où } p_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P =$$

$$\det P^{-1} \det P \det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}P) \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I) = p_A(\lambda)$$

Exemple 2.3.1.

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Solution Le polynôme caractéristique de A vaut

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 4)$$

Il est scindé à racines simples, ce qui assure que A est diagonalisable. Il suffit de chercher pour chaque valeur propre un vecteur propre associé.

D'abord pour $\lambda = 1$, on résout $AX = X$, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $x = y = z$ et un vecteur propre est donc donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On fait de même pour $\lambda = 2$ et $\lambda = -4$, et on trouve respectivement $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est donc semblable à $\text{diag}(1, 2, -4)$, la matrice de passage étant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour suivons avec B dont on calcule le polynôme caractéristique

$$P_B(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$$

est racine évidente, on factorise par $\lambda - 1$ et finalement on trouve

$$p_B(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

On cherche le sous-espace propre associé à 1 en résolvant $BX = X$, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à $x = y = -z$. Ainsi, le sous-espace propre associé à 1 est

de dimension 1, engendré par le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'étude du sous-espace propre associé à $\lambda 2$ conduit au système :

conduit au système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + 2z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Ces trois équations se ramènent à $2x - 3y - 2z = 0$, qui est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$. Le sous-espace propre associé à 2 est donc de dimension 2, et une base est donnée

par les vecteurs $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. B est donc semblable à la matrice $\text{diag}(1, 2, 2)$, la matrice de passage P étant donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique de C est $p_C(\lambda) = -(1-\lambda)^2(2-\lambda)$. On procède exactement comme précédemment, et on trouve que (u_1, u_2) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 1$, avec $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (0, 1, 1)$ et que (u_3) forme une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$, avec $u_3 = (0, 0, 1)$. Ainsi, C s'écrit $C = PDP^{-1}$ avec D la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.3.2.

Soit f l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Le calcul de son polynôme caractéristique est $p_A(X) = -(X+1)^2(X-3)$.

$\ker(A + Id)$ est le plan d'équation $-x + y + 2z = 0$. Une base de ce plan est u_1, u_2 avec $u_1 = (1, 1, 0)$ et $u_2 = (2, 0, 1)$.

Comme la valeur propre 3 est de multiplicité 1, $\dim \ker(A - 3Id) = 1$. Une base de cet

espace est $u_3 = (1, 1, 1)$. Soit $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$. La matrice de f dans $\mathcal{B}$ est diagonale :

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.3.3

Soit f l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Solution :

Le polynôme caractéristique de A est :

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \begin{vmatrix} 3-x & -2 & 0 \\ -2 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 5-x \end{vmatrix} = (5-x) \begin{vmatrix} 3-x & -2 \\ -2 & 3-x \end{vmatrix} \\ &= (5-x) [(3-x)^2 - 4] = (5-x)^2(1-x) \end{aligned}$$

les valeurs propres sont 1 et 5. Les espaces propres sont E_1 et E_5 .

$\underline{E_\lambda} : x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de A correspondant à λ ssi x n'est pas une

solution triviale de $(A - \lambda I)x = 0$ c'est à dire

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $\lambda = 5$, alors

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d'où $-2x_1 - 2x_2 = 0$, c'est à dire $x_2 = -x_1$ donc

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c'est à dire E_5 est engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

et $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si $\lambda = 1(5.10)$ devient

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On résout le système pour trouver $x_1 = x_2$ et $x_3 = 0$, alors

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc E_1 est engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

On en déduit que A est

donc E_1 est engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. On en déduit que A est diagonalisable,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc E_1 est engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. On en déduit que A est

donc E_1 est engendré par $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. On en déduit que A est diagonalisable,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.4 Décomposition de Dunford.

Nous avons vu que les matrices ne sont pas toutes diagonalisables. On peut néanmoins décomposer certaines d'entre elles, en une forme la plus simple possible. Nous verrons trois décompositions.

- a) La trigonalisation : transformer une matrice en une matrice triangulaire.
- b) La décomposition de Dunford : écrire une matrice comme la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente.
- c) La réduction de Jordan : transformer une matrice en une matrice diagonale par blocs.

2.4.1 Trigonalisation

On rappelle qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est triangulaire supérieure si $a_{i,j} = 0$ dès que $i > j$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les coefficients sous la diagonale sont tous nuls. Ceux sur la diagonale ou au-dessus peuvent être nuls ou pas.

Définition 2.4.1.

- Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.
- Un endomorphisme f de E est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit triangulaire supérieure.

Théorème 2.4.1. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ (resp. un endomorphisme f) est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si son polynôme caractéristique p_A (resp. p_f) est scindé sur $\mathbb{K}$.

Démonstration.

- $\implies$. Si f est trigonalisable, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$p_f(X) = \chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (a_{i,i} - X),$$

ce qui prouve que p_f se décompose en produit de facteurs linéaires dans $\mathbb{K}[X]$.

• $\Leftarrow$. La démonstration se fait par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel E . Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat vrai pour $n - 1, n \geq 2$ étant arbitrairement fixé. Le polynôme p_f ayant au moins une racine dans $\mathbb{K}$, notons λ l'une d'entre elles et v_1 un vecteur propre associé. Soit F l'hyperplan supplémentaire de la droite $\mathbb{K}v_1$: on a donc $E = \mathbb{K}v_1 \oplus F$. On considère alors une base $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ de E avec, pour $2 \leq i \leq n, v_i \in F$. La matrice de f dans cette base s'écrit

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda & \cdots \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array} \right)$$

où B est une matrice carrée de taille $(n - 1) \times (n - 1)$. On a

$$p_f(X) = (\lambda - X) \det(B - XI_{n-1}) = (\lambda - X)_B(X)$$

Notons g la restriction de f à F : la matrice de g dans la base $(v_2, \dots, v_n)$ est égale à B . Par hypothèse de récurrence, g (et donc B) est trigonalisable : en effet, $p_f(X) = (\lambda - X)p_g(X)$, et comme p_f est supposé scindé sur $\mathbb{K}$, p_g l'est également. Par conséquent, il existe une base $(w_2, \dots, w_n)$ de F dans laquelle la matrice de g est triangulaire supérieure.

Ainsi, dans la base $(v_1, w_2, \dots, w_n)$, la matrice de f est triangulaire supérieure.

Exemple 2.4.1.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Démontrons que A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et trouvons une matrice P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire supérieure.

Solution

le polynôme caractéristique de A :

$$p_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 4 & -2 \\ 0 & 6-X & -3 \\ -1 & 4 & -X \end{vmatrix} = \dots = (3-X)(2-X)^2$$

Comme p_A est scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Les racines du polynôme caractéristique sont les réels 3 (avec la multiplicité 1), et 2 (avec la multiplicité 2).

Déterminons les sous-espaces propres associés.

Soit E_3 le sous-espace propre associé à la valeur propre simple 3 : $E_3 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 3v\}$

$$v \in E_3 \iff Av = 3v \iff \begin{cases} x + 4y - 2z = 3x \\ 6y - 3z = 3y \\ -x + 4y = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x + 4y - 2z = 3x \\ 6y - 3z = 3y \\ -x + 4y = 3z \end{cases} \iff x = y = z$$

E_3 est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_1 = (1, 1, 1)$.

Soit E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre double 2 : $E_2 = \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 2v\}$

$$v \in E_2 \iff Av = 2v \iff \begin{cases} x + 4y - 2z = 2x \\ 6y - 3z = 2y \\ -x + 4y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x + 4y - 2z = 2x \\ 6y - 3z = 2y \\ -x + 4y = 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ 4y = 3z \end{cases}$$

E_2 est donc la droite vectorielle engendrée par $v_2 = (4, 3, 4)$. La dimension de E_2 est égale à 1 alors que la multiplicité de la valeur propre 2 correspondante est égale à 2. Par conséquent, on sait que la matrice A ne sera pas diagonalisable.

Soit $v_3 = (0, 0, 1)$. Les vecteurs (v_1, v_2, v_3) forment une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de passage (constituée des v_i écrits en colonne) est

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $Av_1 = 3v_1$ et $Av_2 = 2v_2$. Il reste à exprimer Av_3 dans la base (v_1, v_2, v_3) :

$$Av_3 = A(0, 0, 1) = (-2, -3, 0) = -2(-3v_1 + v_2 - v_3) - 3(4v_1 - v_2) = -6v_1 + v_2 + 2v_3$$

Ainsi, l'endomorphisme qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ a pour matrice T dans la base (v_1, v_2, v_3) , où

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Lemme des noyaux 2.4.1.

Soit f un endomorphisme de E . Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, premiers entre eux. Alors :

$$\text{Ker}(PQ)(f) = \text{Ker } P(f) \oplus \text{Ker } Q(f)$$

Démonstration.

Soient P et Q deux polynômes premiers entre eux. Alors, d'après le théorème de Bézout, il existe des polynômes A et B tels que $AP + BQ = 1$. On a donc, pour tout endomorphisme f :

$$A(f) \circ P(f) + B(f) \circ Q(f) = \text{id}_E$$

Autrement dit, pour tout $x \in E$:

$$A(f) \circ P(f)(x) + B(f) \circ Q(f)(x) = x.$$

Montrons que $\text{Ker } P(f) \cap \text{Ker } Q(f) = \{0\}$.

Soit $x \in \text{Ker } P(f) \cap \text{Ker } Q(f)$. On a

$$A(f) \circ \underbrace{P(f)(x)}_{=0} + B(f) \circ \underbrace{Q(f)(x)}_{=0} = x,$$

donc $x = 0$, ce qui prouve $\text{Ker } P(f) \cap \text{Ker } Q(f) = \{0\}$.

Montrons que $\text{Ker}(PQ)(f) = \text{Ker } P(f) + \text{Ker } Q(f)$ par double inclusion. Preuve de $\text{Ker}(PQ)(f) \subset \text{Ker } P(f) + \text{Ker } Q(f)$ Soit $x \in \text{Ker}(PQ)(f)$. On a, toujours en raison du théorème de Bézout,

$$x = A(f) \circ P(f)(x) + B(f) \circ Q(f)(x).$$

Montrons que $A(f) \circ P(f)(x) \in \text{Ker } Q(f)$. En effet :

$$Q(f) \circ A(f) \circ P(f)(x) = A(f) \circ P(f) \circ Q(f)(x) = A(f) \circ ((PQ)(f))(x) = 0$$

On a utilisé que les polynômes d'endomorphisme en f commutent et que $(PQ)(f)(x) = 0$. De même, $B(f) \circ Q(f)(x) \in \text{Ker } P(f)$. Ainsi,

$$x = \underbrace{A(f) \circ P(f)(x)}_{\in \text{Ker } Q(f)} + \underbrace{B(f) \circ Q(f)(x)}_{\in \text{Ker } P(f)},$$

et donc $x \in \text{Ker } P(f) + \text{Ker } Q(f)$.

Preuve de $\text{Ker } P(f) + \text{Ker } Q(f) \subset \text{Ker}(PQ)(f)$.

Soient $y \in \text{Ker } P(f)$ et $z \in \text{Ker } Q(f)$. Alors :

$$PQ(f)(y + z) = Q(f) \circ \underbrace{P(f)(y)}_{=0} + P(f) \circ \underbrace{Q(f)(z)}_{=0} = 0,$$

et donc $y + z \in \text{Ker}(PQ)(f)$.

Conclusion : $\text{Ker}(PQ)(f) = \text{Ker } P(f) \oplus \text{Ker } Q(f)$.

Sous-espaces caractéristiques

Nous avons vu que, lorsque f est diagonalisable, on a :

$E = E_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_r}$ avec $E_{\lambda_i} = \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id}_E)$, le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i .

Nous allons démontrer que même si f n'est pas diagonalisable, mais si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$, on peut écrire

$$E = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id}_E)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_r \text{id}_E)^{m_r}$$

où m_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i comme racine du polynôme caractéristique de f .

Définition 2.4.2.

Soit f un endomorphisme de E . Soit λ une valeur propre de f et soit m sa multiplicité en tant que racine de p_f . Le sous-espace caractéristique de f pour la valeur propre λ est

$$N_\lambda = \text{Ker}((f - \lambda \text{id}_E)^m).$$

Pour λ valeur propre de f , on a $E_\lambda \subset N_\lambda$, car $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E) \subset \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)^k$ quel que soit $k \geq 1$.

Théorème 2.4.1.

Soit f un endomorphisme de E tel que p_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Notons $p_f(X) = \pm (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$ et, pour $1 \leq i \leq r$, N_{λ_i} le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre λ_i . Alors :

1. Chaque N_{λ_i} est stable par f .
2. $E = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_r}$.
3. $\dim N_{\lambda_i} = m_i$.

Démonstration.

1. Soit $x \in N_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)^m$. On a $(f - \lambda \text{id}_E)^m(x) = 0$. Or

$$(f - \lambda \text{id}_E)^m \circ f(x) = f \circ (f - \lambda \text{id}_E)^m(x) = 0,$$

d'où $f(x) \in N_\lambda$.

2. C'est une application du lemme des noyaux. On rappelle que

$$p_f(X) = \pm (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

Les polynômes $(X - \lambda_i)^{m_i}$ sont premiers entre eux puisque les valeurs propres sont distinctes. Par le lemme des noyaux, on obtient

$$\text{Ker } p_f(f) = \text{Ker}(f - \lambda_1 \text{id}_E)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(f - \lambda_r \text{id}_E)^{m_r} = N_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus N_{\lambda_r}.$$

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $p_f(f) = 0$, donc $\text{Ker } p_f(f) = E$, d'où le résultat.

3. Notons $g_i = f|_{N_{\lambda_i}}$ pour $1 \leq i \leq r$. Pour $i \neq j$, $N_{\lambda_i} \cap N_{\lambda_j} = \{0\}$. Or $E_{\lambda_i} \subset N_{\lambda_i}$, donc la seule valeur propre possible de g_i est λ_i . Le polynôme caractéristique de g_i est scindé (car il divise celui de f) et sa seule racine est la seule valeur propre de g_i , c'est-à-dire

λ_i . Ainsi, $p_{g_1}(X) = \pm (X - \lambda_i)^{n_i}$ (où $n_i = \dim N_{\lambda_i}$). De plus,

$$\pm (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r} = p_f(X) = p_{g_1}(X) \cdots p_{g_r}(X) = \pm (X - \lambda_1)^{n_1} \cdots (X - \lambda_r)^{n_r}$$

D'où, en identifiant les exposants des facteurs irréductibles, $n_i = \dim N_i = m_i$, pour $1 \leq i \leq r$.

Théorème 2.4.3.

Soit f un endomorphisme de E tel que p_f soit scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (n, d) d'endomorphismes tel que :

- 1) n est nilpotent et d est diagonalisable,
- 2) $f = n + d$,
- 3) $n \circ d = d \circ n$.

De plus, on pourrait montrer que d et n sont des polynômes en f . En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cette décomposition existe toujours. Le théorème peut encore s'écrire :

Théorème 2.4.4.

Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ ayant un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, il existe une unique matrice N nilpotente et une unique matrice Δ diagonalisable telles que

$$A = N + \Delta \quad \text{et} \quad N\Delta = \Delta N$$

Pratique de la décomposition ;

La méthode pour trouver la décomposition de Dunford d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ consiste à suivre les étapes de la preuve.

- 1) On calcule le polynôme caractéristique p_A de A : il doit être scindé. On calcule ses racines, qui sont les valeurs propres de A .
- 2) Pour chaque valeur propre λ , de multiplicité m comme racine de p_A , on note $N_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)^m$. C'est un espace vectoriel de dimension m . On détermine m vecteurs formant une base de N_λ . L'union de toutes les bases B_λ des N_λ forme une base $B = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{K}^n$.
- 3) On définit l'endomorphisme d par $d(v_i) = \lambda v_i$ pour chaque $v_i \in N_\lambda$. (Dans la base B , la matrice de d est diagonale.) On note $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. (A est la matrice de l'endomorphisme f dans la base B_0 .) Δ sera la matrice de d dans la base B_0 , c'est-à-dire que les colonnes de Δ sont les coordonnées des $d(e_i)$ exprimées

dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

4) On pose $N = A - \Delta$. Par la démonstration du théorème (2.4.2), Δ est diagonalisable, N est nilpotente et $\Delta N = N\Delta$. La matrice de passage P de la base B vers la base canonique B_0 transforme Δ en une matrice diagonale $D = P^{-1}\Delta P$.

Exemple 2.4.1.

Calculons la décomposition de Dunford de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Évitons le piège d'écrire :

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\tilde{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{N}}$$

$\tilde{D}$ est diagonale (donc diagonalisable) et $\tilde{N}$ est nilpotente, mais on peut vérifier que les matrices ne commutent pas : $\tilde{D}\tilde{N} \neq \tilde{N}\tilde{D}$.

Calculons maintenant la décomposition de Dunford de A .

1. Le polynôme caractéristique p_A est égal à

$$p_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = -(X-1)^2(X-2)$$

Nous avons donc deux valeurs propres qui sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. La valeur propre 1 est de multiplicité $m_1 = 2$, alors que, pour la valeur propre 2, $m_2 = 1$.

2) On note $N_1 = \text{Ker}(A - I_3)^2$ et $N_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ s'écrit comme somme directe

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(A - I_3)^2 \oplus \text{Ker}(A - 2I_3)$$

Déterminons ces sous-espaces caractéristiques.

Calcul de $N_1 = \text{Ker}(A - I_3)^2$.

On sait que c'est un espace vectoriel de dimension $m_1 = 2$. On calcule

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi $N_1 = \text{Ker}(A - I_3)^2$ est le plan vectoriel engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0)$. Donc

$$N_1 = \text{Ker}(A - I_3)^2 = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$$

Au passage, notons que la matrice A n'est pas diagonalisable : en effet, la valeur propre 1 est de multiplicité 2, mais $E_1 = \text{Ker}(A - I_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = v\}$ est de dimension seulement 1 (en fait $E_1 = \mathbb{R}v_1$).

Calcul de $N_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)$. On sait que c'est un espace vectoriel de dimension $m_2 = 1$.

Pour déterminer le noyau $\text{Ker}(A - 2I_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 2v\}$, si $v = (x, y, z)$, on résout :

Le sous-espace $N_2 = \text{Ker}(A - 2I_3)$ est donc la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_3 = (2, 1, 1)$: $N_2 = \mathbb{R}v_3$

La famille $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{\mathbb{R}v_1 \oplus \mathbb{R}v_2}_{N_1} \oplus \underbrace{\mathbb{R}v_3}_{N_2}.$$

3) On définit l'endomorphisme d par $d(v_1) = v_1, d(v_2) = v_2$ (car $v_1, v_2 \in N_1$) et $d(v_3) = 2v_3$ (car $v_3 \in N_2$).

Dans la base B , la matrice de D est donc la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

. Or nous voulons la matrice de D dans la base canonique $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$. (Les calculs vont être assez simples car $e_1 = v_1$ et $e_2 = v_2$.) $d(e_1) = d(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = e_1$. $d(e_2) = d(0, 1, 0) = (0, 1, 0) = e_2$.

On a $v_3 = (2, 1, 1) = 2e_1 + e_2 + e_3$ et aussi $e_3 = (0, 0, 1) = -2v_1 - v_2 + v_3$. Donc

$$\Delta = \text{Mat}_{S_0} d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4) On pose

$$N = A - \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La décomposition de Dunford est $A = \Delta + N$. La preuve du théorème de la décomposition affirme que Δ est diagonalisable, N est nilpotente et $\Delta N = N \Delta$ (c'est un bon exercice de le vérifier à la main).

On note P la matrice de passage de la base B_0 vers la base B . P contient donc, en colonnes, les vecteurs de la nouvelle base $B = (v_1, v_2, v_3)$ exprimés dans l'ancienne base $B_0 = (e_1, e_2, e_3)$. Comme $v_1 = e_1, v_2 = e_2$ et $v_3 = 2e_1 + e_2 + e_3$, alors

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si besoin, on peut diagonaliser Δ :

$$D = P^{-1} \Delta P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Application au calcul de puissance.

La décomposition de Dunford est utile pour calculer les puissances d'une matrice. Nous verrons d'autres applications dans le chapitre « Systèmes différentiels ». Voyons les étapes pour calculer A^p , où $A \in M_n(\mathbb{K})$:

1. Écrire la décomposition de Dunford $A = \Delta + N$.
2. Diagonaliser Δ : $D = P^{-1} \Delta P$ avec D matrice diagonale. Comme D est une matrice diagonale, on calcule facilement D^k , pour tout $k \geq 0$.

3. On note $N' = P^{-1}NP$. La matrice N' est encore une matrice nilpotente. On calcule les puissances successives $N'^2, N'^3, \dots$ sachant qu'à partir d'un certain rang tous les N'^k sont nuls.

4. Comme D et N' commutent (car Δ et N commutent), alors on applique la formule du binôme de Newton :

$$(D + N')^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} D^{p-k} N'^k.$$

On a vu qu'à partir d'un certain rang les matrices N'^k sont toutes nulles. La somme a donc peu de termes non nuls.

$$5. On a $A = \Delta + N = PDP^{-1} + PN'P^{-1} = P(D + N')P^{-1}.$$$

$$\text{Donc } A^p = (P(D + N')P^{-1})^p = P(D + N')^p P^{-1}$$

2.5 Séries d'exercices.

Exercice 2.1.1.

On considère la matrice réelle

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Calculer son polynôme caractéristique et son carré. En utilisant Cayley Hamilton, trouver son inverse.

Exercice 2.1.2.

Trouver les valeurs propres de f canoniquement associée de matrice $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.1.3.

Calculer les valeurs propres et déterminer les sous-espaces propres associées à les vecteurs propres de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.1.4.

Étudier la diagonalisation de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercice 2.1 5.

Les matrices suivantes sont-elles semblables ?, diagonalisables ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.1.6.

Déterminer les puissances et les racines carrées de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.1.7.

Soit M la matrice réelle 3×3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de M .
2. Montrer que M est diagonalisable.
3. Déterminer une base de vecteurs propres et P la matrice de passage.
4. On a $D = P^{-1}MP$, pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer M^k en fonction de D^k , puis calculer M^k .

Chapitre 3

Réduction de Jordan

3.1 Matrice de Jordan

. Définition 3.1.1.

Un bloc de Jordan est une matrice de la forme

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_p(\mathbb{K})$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $p \geq 1$.

Définition 3.1.2.

Une matrice de Jordan est une matrice diagonale par blocs de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_1(\lambda_1) & O & O & O \\ \hline O & J_2(\lambda_2) & O & O \\ \hline O & O & \ddots & O \\ \hline O & O & O & J_r(\lambda_r) \end{array} \right)$$

où les $J_i(\lambda_i)$ sont des blocs de Jordan.

La notation O désigne une matrice nulle (elles peuvent être de tailles différentes).

Remarque 3.1.1.

Les blocs de Jordan peuvent être de tailles différentes, et les valeurs $\lambda_i \in \mathbb{K}$ sont quelconques (certaines d'entre elles peuvent être égales).

Exemple 3.1.1

voici une forme (exemple) de matrice de Jordan

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|c|ccc} -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right)$$

Elle est formée de :

- un bloc de Jordan 2×2 associé à la valeur propre -3 ,
- un bloc de Jordan 3×3 associé à cette même valeur -3 ,
- un bloc de Jordan 1×1 associé à la valeur 2 ,
- un bloc de Jordan 3×3 associé à la valeur 5 .

Théorème 3.1.1.

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ a son polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$, alors A est semblable sur $(\mathbb{K})$ à une matrice de Jordan, appelée réduite de Jordan de A . Il existe donc $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que

$$P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c|c} J_1 & O & O \\ \hline O & \ddots & O \\ \hline O & O & J_r \end{array} \right)$$

où les J_i sont des blocs de Jordan.

Voici une méthode basique pour trouver la réduite de Jordan d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$, ainsi qu'une matrice de passage :

- 1) Calculer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de A .
- 2) Pour chaque valeur propre λ , calculer le sous-espace propre $E_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ et trouver une base de E_λ . Le nombre de blocs de Jordan associés à λ est $\dim E_\lambda$.

3) Pour chaque vecteur propre de la base de E_λ , on construit le bloc de Jordan associé :

a) Si $v_1 \in E_\lambda$ est un vecteur propre de la base de E_λ , alors on cherche $v_2 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)v_2 = v_1$

b) Puis on cherche s'il existe $v_3 \in \mathbb{K}^n$ tel que $(A - \lambda I_n)v_3 = v_2$.

c) On arrête le processus lorsqu'il n'y pas de solution.

d) On a $Av_1 = \lambda v_1$, puis $Av_2 = v_1 + \lambda v_2, \dots, Av_p = v_{p-1} + \lambda v_p$.

e) Donc, dans le sous-espace engendré par ces $(v_1, v_2, \dots, v_p)$, la matrice associée à A , dans cette base, est exactement le bloc de Jordan :

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

f) On peut aussi savoir quand s'arrêter en utilisant le fait que le bloc de Jordan est toujours d'une taille p inférieure ou égale à la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique (et même du polynôme minimal).

5) On recommence avec v'_1 , un autre vecteur de la base de E_λ : on construit $v'_2, v'_3, \dots$ ce qui conduit à un autre bloc de Jordan pour la valeur λ . On procède ainsi de suite pour tous les vecteurs de la base de E_λ et ensuite bien sûr pour les autres valeurs propres.

Exemple 3.1.1.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

Calculons sa réduite de Jordan J et une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP = J$.

Solution

1) On calculons le polynôme caractéristique de A :

$$p_A(X) = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 4-X & 3 & -2 \\ -3 & -1-X & 3 \\ 2 & 3 & -X \end{vmatrix} = -(X+1)(X-2)^2$$

Il y a donc deux valeurs propres : -1 et 2 .

2) Valeur propre -1 . La valeur propre -1 est de multiplicité 1. Le sous-espace propre associé

$$E_{-1} = \text{Ker}(A + I_3) = \{v \in$$

$\mathbb{R}^3 \mid Av = -v\}$ sera de dimension 1. Après calculs, on trouve que $E_{-1} = \mathbb{R}v_1$ où $v_1 = (-1, 1, -1)$.

Comme la multiplicité de -1 comme racine de $p_A(X)$ est 1, alors la valeur propre -1 sera juste associée à un bloc de Jordan de taille 1×1 .

3) Valeur propre 2 . La valeur propre 2 est de multiplicité 2. Il faut déterminer le sous-espace propre associé

$$E_2 = \text{Ker}(A - 2I_3) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Av = 2v\}$$

Après calculs, on trouve que $E_2 = \mathbb{R}v_2$ où $v_2 = (1, 0, 1)$.

Comme E_2 est un espace vectoriel de dimension 1, alors que 2 est racine de multiplicité 2, la matrice A n'est pas diagonalisable et on sait alors que la valeur propre 2 sera associée à un bloc de Jordan de taille 2×2 .

4) Bloc de Jordan. On cherche $v_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $(A - 2I_3)v_3 = v_2$. Si $v_3 = (x, y, z)$ alors :

$$\begin{aligned} (A - 2I_3)v_3 = v_2 &\iff \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 1 \\ -3x - 3y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x \\ -3x - 3y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -1 + z \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

En prenant par exemple $z = 0$ (n'importe quelle valeur conviendrait), on choisit $v_3 = (-1, 1, 0)$.

5) Matrice de Jordan. Dans la base (v_1, v_2, v_3) , on a

$Av_1 = -v_1$, $Av_2 = 2v_2$, et comme $(A - 2I_3)v_3 = v_2$ alors $Av_3 = v_2 + 2v_3$.

La matrice associée à A dans la base (v_1, v_2, v_3) est donc :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $J = P^{-1}AP$ où P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs v_1, v_2, v_3 exprimés dans la base canonique :

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Exemple 3.1.2.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R})$$

Calculons sa réduite de Jordan J .

Solution

1) Le polynôme caractéristique de A vaut

$$p_A(X) = \det(A - XI_5) = \cdots = -(X - 3)^5.$$

Il y a donc une seule valeur propre : $\lambda = 3$.

2) Valeur propre 3. La valeur propre 3 est de multiplicité 5. Il faut ensuite calculer le sous-espace propre associé :

$$E_3 = \text{Ker}(A - 3I_5) = \{v \in \mathbb{R}^5 \mid Av = 3v\}$$

. On calcule $A - 3I_5$, et on trouve une base (v_1, v_3) de E_3 :

$$v_1 = (0, 1, 0, 0, 0) \quad \text{et} \quad v_3 = (1, 0, 0, 1, 0).$$

Ainsi $\dim E_3 = 2$ alors que la multiplicité de λ est 5.

La matrice A n'est pas diagonalisable. Il y aura donc deux blocs de Jordan associés à

la valeur propre 3. (Cela peut être un de taille 1×1 avec un de taille 4×4 , ou bien 2×2 avec 3×3 .)

Matrice de Jordan.

On cherche si on peut trouver $v_2 \in \mathbb{R}^5$ tel que $(A - 3I_5)v_2 = v_1$. Une solution possible est $v_2 = (-2, 0, 1, 0, 0)$. Le processus s'arrête là, car il n'y a aucune solution v au système $(A - 3I_5)v = v_2$. (En effet, la troisième ligne de $A - 3I_5$ est nulle, alors que la troisième coordonnée de v_2 ne l'est pas.)

On obtient donc un bloc de Jordan 2×2 .

On fait le même travail pour l'autre bloc de Jordan, en partant du vecteur $v_3 = (1, 0, 0, 1, 0) \in E_3$. On cherche maintenant $v_4 \in \mathbb{R}^5$ tel que $(A - 3I_5)v_4 = v_3$. Après calculs, on trouve $v_4 = (2, 0, 0, 0, 1)$. On cherche v_5 tel que $(A - 3I_5)v_5 = v_4$. On trouve $v_5 = (-3, 0, 2, 0, 0)$. Le processus s'arrête là, ce qui correspond à un bloc de Jordan de taille 3×3 .

On a $Av_1 = 3v_1$, $Av_2 = v_1 + 3v_2$, $Av_3 = 3v_3$, $Av_4 = v_3 + 3v_4$, $Av_5 = v_4 + 3v_5$

Dans la base $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, la matrice associée à A est :

$$J = \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

Ainsi $J = P^{-1}AP$, où la matrice P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v_1, \dots, v_5$ exprimés dans la base canonique.

3.2 Exponentielle d'une matrice

La série entière qui définit l'exponentielle d'un nombre réel, ou complexe, est aussi convergente pour une matrice. Ainsi, si A est une matrice carrée, l'exponentielle de A

est définie par

$$\begin{aligned}\exp(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \\ &= I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots\end{aligned}$$

Proposition 3.2.1.

L'exponentielle de matrice vérifie les propriétés suivantes :

1 $\exp(A)$ est toujours une matrice inversible.

2 On a en effet la relation $\exp(A)\exp(-A) = \exp(0) = Id$.

L'identité fonctionnelle de la fonction exponentielle, à savoir $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$, n'est plus toujours vérifiée.

3. En revanche, on sait qu'elle a lieu si A et B commutent, c'est-à-dire si $AB = BA$. Il est facile de calculer l'exponentielle d'une matrice diagonale :

$$\text{Pour } A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \\ 0 & \alpha_2 & & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix},$$

$$\text{on a } \exp(A) = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & 0 & \cdots & \\ 0 & e^{\alpha_2} & & \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & e^{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, si l'on souhaite calculer l'exponentielle d'une matrice, on réduira d'abord cette matrice sous forme de Jordan.

3.3 Applications de la diagonalisation

Soit A est une matrice diagonalisable, $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, l'ensemble de ses vecteurs propres et P une matrice inversible telle que ; $D = P^{-1}AP$

1. Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable ou trigonalisable.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On veut calculer A^k pour tout entier $k \geq 1$. Cas où A est diagonalisable. Alors $A = PDP^{-1}$ où P est inversible et D est diagonale.

Dans ce cas $A^k = PD^kP^{-1}$. De plus si

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors :

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1}^k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Cas où A n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable.

On peut écrire A sous la forme $A = PTP^{-1}$ où P est inversible et T est triangulaire. Comme dans le premier cas, $A^k = PT^kP^{-1}$. La matrice T^k est formée de blocs diagonaux du type $T_i = \lambda_i Id + N_i$ avec $N_i^{m_i} = 0$. Il ne reste plus qu'à calculer T_i^k .

On a (rappelons que $C_k^\ell = \frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}$) :

Suite définie par une relation de récurrence.

Remarque 3.2.1.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par une récurrence d'ordre p : $\forall n \geq 0, u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_0u_n$. Cette relation peut s'écrire matriciellement.

Soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} u_{n+p-1} \\ u_{n+p-2} \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} a_{p-1} & a_{p-2} & \cdots & \cdots & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, pour tout $n \geq 0, U_{n+1} = MU_n$, donc $U_n = M^n U_0$

Pour expliciter la suite U_n , on peut donc diagonaliser M , si elle est diagonalisable, en

peut calculer ses puissances si non en passe à la procédure de la trigonalisation.

Exemple 3.2.1.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer $\text{Ker}(A - I)^2$.
3. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

4. Calculer A^n pour n entier naturel donné.

Solution

$$1. \chi_A = -(2 + X)((3 - X)(-1 - X) + 4) = -(X + 2)(X^2 - 2X + 1) = -(X + 2)(X - 1)^2.$$

$$A \text{ diagonalisable} \Rightarrow \dim(\text{Ker}(A - I)) = 2 \Rightarrow \text{rg}(A - I) = 1$$

ce qui n'est pas. Donc A n'est pas diagonalisable

$$\text{De plus, } E_{-2} = \text{Vect}(e_1) \text{ où } e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_1 = \text{Vect}(e_2) \text{ où } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

$$2. (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -36 & -36 & 9 \end{pmatrix} \text{ et donc } \text{Ker}(A - I)^2$$

est le plan d'équation $4x + 4y - z = 0$.

$$3. \text{On note } f' \text{ l'endomorphisme de } \mathbb{R}^3$$

dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A .

Le théorème de CAYLEY-HAMILTON et le théorème de décomposition des noyaux permettent d'affirmer

$$M_3(\mathbb{R}) = \text{Ker}(A + 2I) \oplus \text{Ker}(A - I)^2$$

De plus, chacun des sous-espaces $\text{Ker}(A + 2I)$ et $\text{Ker}(A - I)^2$ étant stables par f , la matrice de f dans toute base adaptée à cette décomposition est diagonale par blocs.

Enfin, $\text{Ker}(A - I)$ est une droite vectorielle contenue dans le plan $\text{Ker}(A - I)^2$ et en

choisissant une base de $\text{Ker}(A - I)^2$ dont l'un des deux vecteurs est dans $\text{Ker}(A - I)$, la matrice de f aura la forme voulue.

On a déjà choisi $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ puis on prend $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \times \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Plus précisément}$$

$$Ae_3 - e_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = e_2$$

et donc $Ae_3 = e_2 + e_3$ puis

$$A = PTP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $T = D + N$ où $D = \text{diag}(-2, 1, 1)$ et $N = E_{2,3}$.

On a $ND = DN$ et $N^2 = 0$. Puisque les matrices D et N commutent, la formule du binôme de Newton permet d'écrire

$$T^n = D^n + nD^{n-1}N = \text{diag}((-2)^n, 1, 1) + n \text{diag}((-2)^{n-1}, 1, 1) E_{2,3} = \text{diag}((-2)^n, 1, 1) + nE_{2,3}$$

$$= \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puis

$$\begin{aligned}
A^n &= PT^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & n+1 \\ 0 & -2 & -2n-1 \\ (-2)^n & -4 & -4n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n-8n+4 & -4(-2)^n-4n+4 & (-2)^n \end{pmatrix} \\
\forall n \in \mathbb{N}, A^n &= \begin{pmatrix} 2n+1 & n & 0 \\ -4n & -2n+1 & 0 \\ -4(-2)^n-8n+4 & -4(-2)^n-4n+4 & (-2)^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Exemple 3.2.2.

On reprend l'exemple du paragraphe précédent :

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors $A^k = PT^k P^{-1}$.

De plus $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$ avec

$$T_1 = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, T_2 = (-2).$$

De sorte que

$$T^k = \begin{pmatrix} T_1^k & 0 \\ 0 & T_2^k \end{pmatrix}.$$

On calcule $T_1^k : T_1 = -4Id + N_1$ avec $N_1^2 = 0$.

Comme $-4I$ et N_1 commutent on a :

$$T_1^k = (-4Id + N_1)^k = (-4)^k Id + k(-4)^{k-1} N_1$$

c'est-à-dire

$$T_1^k = \begin{pmatrix} (-4)^k & -3k(-4)^{k-1} \\ 0 & (-4)^k \end{pmatrix}$$

et ainsi

$$T^k = \begin{pmatrix} (-4)^k & -3k(-4)^{k-1} & 0 \\ 0 & (-4)^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{pmatrix}.$$

On termine en calculant $A^k = PT^kP^{-1}$:

$$A^k = \begin{pmatrix} (-4)^{k-1}(-3k-6) + (-2)^{k-1} & 2(-4)^{k-1} - (-2)^{k-1} & (-4)^{k-1}(3k+4) + (-2)^k \\ (-4)^{k-1}(3k-2) + (-2)^{k-1} & -2(-4)^{k-1} - (-2)^{k-1} & (-4)^{k-1}(-3k+4) + (-2)^k \\ (-4)^{k-1}(-3k-2) + (-2)^{k-1} & 2(-4)^{k-1} - (-2)^{k-1} & (-4)^{k-1}(3k) + (-2)^k \end{pmatrix}$$

Exemple 3.2.3.

$$1) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ En posant : } X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}, \text{ on a : } X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + 2y_n - 2z_n \\ -1x_n + 0y_n + 1z_n \\ 1x_n + 1y_n + 0z_n \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_n.$$

2) D'après l'exercice 1, la matrice A est trigonalisable et la décomposition de Jordan de cette matrice est :

$$A = PJP^{-1} \text{ avec } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que : $A^n = PJ^nP^{-1}$. On doit donc chercher la

puissance n de la matrice J ; pour cela, on la décompose en : $I+N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

est une matrice nilpotente d'indice 2. Comme les matrices I et N commutent, on utilise la formule du binôme de Newton de sorte que :

$$J^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I^{n-k} = I + nN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2n+1 & 1 \\ -1 & -n & 0 \\ 1 & n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}$$

4) On montre une récurrence immédiate sur $n \in \mathbb{N}$ que : $X_n = A^n X_0$ donc on peut en déduire l'expression explicite de X_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n & -2n \\ -n & 1-n & n \\ n & n & 1-n \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} (2n+1)x_0 + 2ny_0 - 2nz_0 \\ -nx_0 + (1-n)y_0 + nz_0 \\ nx_0 + ny_0 + (1-n)z_0 \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_n = (2n+1)x_0 + 2ny_0 - 2nz_0 \\ y_n = -nx_0 + (1-n)y_0 + nz_0 \\ z_n = nx_0 + ny_0 + (1-n)z_0 \end{cases}$$

3.4 Résolution d'équations différentielles

3.4.1 Équation homogène 1

Pour toute solution de l'équation $x'(t) = Ax(t)$ on a $\frac{d^k x(t)}{dt^k} = A^k x(t)$. La série de Taylor de $x(t)$, $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} x^{(n)}(0)$ s'écrit donc $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$, où $v = x(0)$.

Proposition.3.4.1.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $v \in \mathbb{C}^n$. La série $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$ converge normalement sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}$. La somme de cette série $\varphi(t) = \sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n v$ est dérivable par rapport à t et $\frac{d}{dt} \varphi(t) = A \varphi(t)$

En particulier, pour toute matrice A la série $\sum_0^\infty \frac{A^n}{n!}$ converge (absolument).

Corollaire 3.4.1.

La série (à coefficients matriciels) $\sum_0^\infty \frac{t^n}{n!} A^n$ converge normalement sur tout intervalle fini. Sa somme e^{tA} est dérivable par rapport à t et $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$.

Corollaire.3.4.2. existence.

Pour $v \in K^n$, $\varphi(t) = e^{tA}v$ est une solution de l'équation $x' = Ax$ vérifiant la condition initiale $\varphi(0) = v$.

Unicité de la solution.

Soit $\varphi(t)$ une solution quelconque vérifiant $\varphi(0) = v$. Posons $\psi(t) = e^{-tA}\varphi(t)$. La dérivation donne $\psi'(t) = 0$, d'où $\psi(t) = v$. Si on prend $e^{tA}v$ comme $\varphi(t)$ on a $e^{-tA}e^{tA}v = v$ ce qui est valable quelque soit v . Donc $e^{-tA}e^{tA} = Id$, e^{-tA} est l'inverse de e^{tA} . Finalement,

$$\psi(t) = e^{-tA}\varphi(t) = v \text{ entraîne } \varphi(t) = e^{tA}v$$

. Cas général. Soit $A = \mathcal{D} + \mathcal{N}$ la décomposition de Dunford et $\mathcal{N}^{l+1} = 0$. Alors

$$e^{tA} = e^{t\mathcal{D}+t\mathcal{N}} = e^{t\mathcal{D}} \left(I + t\mathcal{N} + t^2\mathcal{N}^2/2! + \dots + t^l\mathcal{N}^l/l! \right)$$

3.4.2 Équation non homogène 2.

méthode de la variation des constantes.

On considère l'équation non-homogène :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = A\mathbf{x}(t) + b(t)$$

Toute solution de l'équation non-homogène $x' = Ax + b(t)$ est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène $y' = Ay$. On cherche la solution $x(t)$ sous la forme $x(t) = e^{tA}y(t)$. On obtient pour $y(t)$ l'équation $y'(t) = e^{-tA}b(t)$, d'où la solution $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-sA}b(s)ds$

On remarque que $y(t_0) = e^{-t_0A}x(t_0)$.

Exemple 3.4.1.

Résoudre le système différentiel $x'(t) = Ax(t)$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Solution :

On calcule les valeurs propres de A , on obtient

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3,$$

on calcule des vecteurs propres associés, on obtient

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

donc si on note

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

on a $A = PDP^{-1}$, donc

$$x'(t) = Ax(t) \iff P^{-1}x'(t) = DP^{-1}x(t).$$

Si l'on pose $z(t) = P^{-1}x(t)$, on a donc en utilisant l'exercice précédent :

$$z'(t) = Dz(t) \iff \begin{cases} z_1(t) = \alpha_1 e^{2t} \\ z_2(t) = \alpha_2 e^{3t} \end{cases}$$

On obtient enfin :

$$x(t) = Pz(t) \iff \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{2t} + \alpha_2 e^{3t} \\ x_2(t) = -\alpha_1 e^{2t} - 2\alpha_2 e^{3t} \end{cases}, \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

Exemple.3.4.2.

Mettre l'équation différentielle $y'' - 2y' + 2y = 0$ sous forme d'un système différentiel du premier ordre. Puis le résoudre dans $\mathbb{C}$, comparer avec les résultats obtenus dans l'exercice VI.10. **Solution :**

On pose $y = x_1, y' = x_2$, on a alors :

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \iff \begin{cases} x_1'(t) = x_2(t) \\ x_2'(t) = -2x_1(t) + 2x_2(t) \end{cases} \iff x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} x(t).$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ admet 2 valeurs propres $1+i$ et $1-i$, des vecteurs propres correspondants sont

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}, Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

On définit comme d'habitude $P = (Y_1 Y_2)$, $x = Pz$. On résout

$$\begin{cases} z_1'(t) = (1+i)z_1(t) \\ z_2'(t) = (1-i)z_2(t) \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} z_1(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} \\ z_2(t) = \alpha_2 e^{(1-i)t} \end{cases}$$

Enfin

$$x = Pz \iff \begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 e^{(1+i)t} + \alpha_2 e^{(1-i)t} \\ x_2(t) = \alpha_1 (1+i) e^{(1+i)t} + \alpha_2 (1-i) e^{(1-i)t} \end{cases}.$$

On retrouve bien sur $y = x_1$ et on vérifie que $y' = x_2$.

Exemple 3.4.3.

Soit A la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A .

2. En déduire la valeur de $\exp(tA)$.

3. Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) + x_3(t) \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - x_3(t) \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 2x_3(t) \end{cases}$$

Solution

1. $\text{p}_A(X) = (X - 1)^3$.

2. Posons $N = A - I_3$. Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $N^3 = 0$, et donc N est nilpotent d'indice 3. Ceci facilite grandement le calcul de l'exponentielle de N . En effet, on a

$$\exp(tN) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n N^n}{n!} = I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2.$$

D'autre part, puisque $tA = tI_3 + tN$ et que tI_3 et tN commutent, on a

$$\exp(tA) = \exp(tI_3) \exp(tN) = e^t \left(I_3 + tN + \frac{t^2}{2} N^2 \right).$$

On en déduit

$$\exp(tA) = e^t \begin{pmatrix} t+1 & t^2 & t^2+t \\ t & t^2-2t+1 & t^2-t \\ -t & -t^2+2t & -t^2+t+1 \end{pmatrix}$$

3. Soit $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. Alors $X(t) = \exp(tA)X(0)$. En notant $X(0) = (a, b, c)$,

On trouve

$$\begin{aligned}x_1(t) &= a(t+1)e^t + bt^2e^t + c(t^2+t)e^t \\x_2(t) &= ate^t + b(t^2-2t+1)e^t + c(t^2-t)e^t \\x_3(t) &= -ate^t + b(-t^2+2t)e^t + c(-t^2+t+1)e^t\end{aligned}$$

Exemple 3.4.4.

Le système d'équations différentielles peut s'écrire sous la forme matricielle $\dot{X} = AX$ avec

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution

La première étape de résolution consiste à déterminer si la matrice A est diagonalisable et à la diagonaliser le cas échéant. On détermine le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 3 & 2 \\ -4 & 4 - \lambda & 2 \\ -4 & 3 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\&= (-3 - \lambda)(4 - \lambda)(3 - \lambda) + 3 \times 2 \times (-4) + 2 \times (-4) \times 3 \\&\quad - 4(4 - \lambda) \times 2 - 3 \times 2(-3 - \lambda) - (3 - \lambda) \times -4 \times 3 \\&= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 \\&= -(\lambda - 1)^2(\lambda - 2). \quad (\text{racines évidentes})\end{aligned}$$

A admet donc une valeur propre double, 1, et une valeur propre simple, 2. Comme A n'admet pas trois valeurs propres distinctes, on ne sait pas encore si elle est diagonalisable ou non. On examine les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 2
 E_1 : sous-espace propre associé à $\lambda = 1$

Pour déterminer E_1 , on résout l'équation matricielle en X : $AX = 1.X$, i.e. $AX = X$.

En revenant aux notations "systèmes d'équations", on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -3x + 3y + 2z = x \\ -4x + 4y + 2z = y \text{ soit} \\ -4x + 3y + 3z = z \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -4x + 3y + 2z = 0 \\ -4x + 3y + 2z = 0 \\ -4x + 3y + 2z = 0 \end{array} \right.$$

eq.à $-4x + 3y + 2z = 0$

Cette relation nous donne deux degrés de liberté pour choisir les vecteurs de E_1 (par exemple x puis y, z étant alors déterminé par la relation) qui est donc de dimension 2. On choisit deux vecteurs libres (c'est à dire, pour 2 vecteurs, non colinéaires) qui engendrent E_1 . On peut prendre :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

A ce stade, comme on a déterminé que E_1 est de dimension 2 et comme E_2 est nécessairement de dimension 1 (sous-espace propre associé à une valeur propre simple), et que donc $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 3$, A est diagonalisable. On détermine un vecteur propre de E_2 pour obtenir une base de vecteurs propres et la matrice de passage P entre la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et cette base

E_2 : sous-espace propre associé à $\lambda = 2$

De la même manière que pour E_1 , on résout l'équation matricielle en $AX = 2X$. En changeant de notations, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} -3x + 3y + 2z = 2x \\ -4x + 4y + 2z = 2y \\ -4x + 3y + 3z = 2z \end{array} \right. \quad \text{eq.à} \quad \left\{ \begin{array}{l} -5x + 3y + 2z = 0 \\ -4x + 2y + 2z = 0 \\ -4x + 3y + z = 0 \end{array} \right.$$

eq.à $\begin{cases} x = y \\ z = x \end{cases}$

Comme vecteur de E_2 , on prend $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage entre la base canonique et la base de vecteurs propres s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $A = P^{-1}DP$. En reprenant le système d'équations différentielles $\dot{X} = AX$, on obtient :

$$\dot{X} = PDP^{-1}X.$$

Avec U le vecteur X exprimé dans la base de vecteurs propres, c'est-à-dire $U = P^{-1}X$ eq.à $PU = X$, on a :

$$P\dot{U} = PDU$$

$$\text{eq.à } \dot{U} = DU$$

Le vecteur $U = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{pmatrix}$ est donc solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = u_1 \\ \dot{u}_2 = u_2 \\ \dot{u}_3 = 2u_3 \end{cases}$$

La résolution de ces équations différentielles séparées est maintenant très aisée.

La forme générale des solutions est :

$$\begin{cases} u_1(t) = C_1 e^t \\ u_2(t) = C_2 e^t \\ u_3(t) = C_3 e^{2t} \end{cases}$$

avec C_1, C_2 et C_3 trois constantes réelles.

Comme $X = PU$, on obtient au final :

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_3 e^{2t} \\ y(t) = 2C_2 e^t + C_3 e^{2t} \\ z(t) = 2C_1 e^t - 3C_2 e^t + C_3 e^{2t} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x(t) = C_1 e^t + C_3 e^{2t} \\ y(t) = 2C_2 e^t + C_3 e^{2t} \\ z(t) = (2C_1 - 3C_2) e^t + C_3 e^{2t} \end{cases} \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

3.5 Séries d'exercices

Exercice 3.4.1

1. Démontrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^* .
2. On considère les deux éléments ϕ et ψ de E^* définis par, pour tout $P \in E$, $\phi(P) = P(1)$ et $\psi(P) = P'(0)$.

Déterminer les coordonnées de chacune des formes ϕ et ψ dans la base $(f_0, \dots, f_n)$

Exercice 3.4.2.

(Interpolation de Lagrange) Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré $\leq n$. Soient $a_0, \dots, a_{n+1}$ nombres réels distincts.

1. Montrer que l'ensemble des polynômes $\{L_0, \dots, L_n\}$ où.

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}, i = 0, \dots, n$$

est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer que les formes linéaires $P \mapsto P(a_i)$ pour $i = 0, \dots, n$ forment une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$, duale de la base $\{L_0, \dots, L_n\}$.

Exercice 3.4.3.

Soient $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux à deux distincts et $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ les formes linéaires sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ déterminées par $\varphi_i(P) = P(a_i)$.

Montrer que la famille $\{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ est une base du dual de E .

Exercice 3.4.4.

Soit f qui à P élément de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ associe $f(P) = (X^2 - 1)P' - 2nXP$. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ puis déterminer les valeurs et vecteurs propres de f . f est-il diagonalisable ?

Exercice 3.4.5.

Résoudre dans $A_3(\mathbb{C})$ l'équation $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.4.6.

Calculez la base duale de la base $e_1 = (1, 1, 0)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.4.7

On se donne les formes linéaires suivantes sur $\mathbb{R}^3$:

$$\ell_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3,$$

$$\ell_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2$$

$$\ell_3(x_1, x_2, x_3) = x_2 + 2x_3$$

Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$, et trouver la base duale de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.4.8.

1. Démontrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est une base de E^* .
2. On considère les deux éléments ϕ et ψ de E^* définis par, pour tout $P \in E$, $\phi(P) = P(1)$ et $\psi(P) = P'(0)$.

Déterminer les coordonnées de chacune des formes ϕ et ψ dans la base $(f_0, \dots, f_n)$

Exercice 3.4.9.

Soient $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p$ des formes linéaires sur le K -espace vectoriel E .

1. Montrer que $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p$ sont linéairement indépendantes si et seulement si l'application linéaire $f = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p) : E \rightarrow \mathbb{K}^p$ est surjective.
2. On suppose en plus que E est de dimension p .

Montrer que f est injective si et seulement si $(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$ est une base de E^* .

Exercice 3.4.10.

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que A n'est pas diagonalisable.
2. Déterminer $\text{Ker}(A - I)^2$.

3. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$

4. Calculer A^n pour n entier naturel donné.

Chapitre 4

4.1 Formes bilinéaires

Definition 4.1.1.

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On dit qu'une application

$$\varphi : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$$

est une forme bilinéaire si :

$$\begin{aligned}\forall x, x' \in E, \forall y, y' \in F, \forall t, t' \in \mathbb{K}, \\ \varphi(tx + t'x', y) &= t\varphi(x, y) + t'\varphi(x', y) \\ \varphi(x, ty + t'y') &= t\varphi(x, y) + t'\varphi(x, y')\end{aligned}$$

Définition 4.1.2.

Une application φ de E^2 dans $\mathbb{K}$ est bilinéaire si et seulement si, l'une des deux applications $y \mapsto \varphi(x, y)$ pour tout $(x \in E)$ ou $x \mapsto \varphi(x, y)$ pour tout $(y \in E)$ est linéaire.

Définition 4.1.3.

On dit qu'une forme bilinéaire φ sur E est symétrique si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tout x, y dans E .

Définition 4.1.4.

On dit qu'une forme bilinéaire φ sur E est anti-symétrique ou (alternée) si $\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$ pour tout x, y dans E .

Remarque 4.1.1.

Si ℓ_1 et ℓ_2 sont deux formes linéaires sur E alors l'application ;

$$(x, y) \mapsto \ell_1(x)\ell_2(y)$$

est une forme bilinéaire sur E .

Exemple 4.1.1.

$$\varphi : (f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

est une forme bilinéaire.

Exemple 4.1.2.

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - 2x_3y_3$$

est forme bilinéaire.

Exemple 4.1.3.

On considère l'espace vectoriel $E = M_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre deux à coefficients réels et l'application b de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (A, B) \in E \times E, b(A, B) = \frac{1}{2}(\text{tr}(A) \text{tr}(B) - \text{tr}(AB))$$

Montrer que l'application b est une forme bilinéaire symétrique.

La forme b est symétrique en vertu de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$ et de la propriété suivante de l'application trace :

$$\forall (A, B) \in E \times E, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

Montrons maintenant que b est linéaire par rapport à son premier argument. Par linéarité de l'application trace et distributivité du produit de matrices par rapport à la somme de matrices, il vient

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (A, B, C) \in E^3, b(\lambda A + C, B) &= \frac{1}{2}(\text{tr}(\lambda A + C) \text{tr}(B) - \text{tr}((\lambda A + C)B)) \\ &= \frac{1}{2}((\lambda \text{tr}(A) + \text{tr}(C)) \text{tr}(B) - \text{tr}(\lambda AB + CB)) \\ &= \frac{1}{2}((\lambda \text{tr}(A) \text{tr}(B) + \text{tr}(C) \text{tr}(B) - \lambda \text{tr}(AB) - \text{tr}(CB)) \\ &= \frac{\lambda}{2}(\text{tr}(A) \text{tr}(B) - \text{tr}(AB)) + \frac{1}{2}(\text{tr}(C) \text{tr}(B) - \text{tr}(CB)) \\ &= \lambda b(A, B) + b(C, B) \end{aligned}$$

Étant symétrique, la forme b est alors bilinéaire.

Forme bilinéaire et dualité

Définition 4.1.5.

Soit $b : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme bilinéaire symétrique. Pour tout $x \in E$, l'application

$$\begin{aligned} b(\cdot, x) : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ y &\longmapsto b(y, x) \end{aligned}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{K}$, c'est à dire un élément du dual E^* .

Définition 4.1.6.

L'application

$$\begin{aligned} \varphi_b : E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto b(\cdot, x) \end{aligned}$$

est linéaire. On appelle φ_b l'application linéaire de E dans son dual associée à la forme bilinéaire symétrique b . Si E est de dimension finie et $\mathcal{E}$ est une base de E , alors la matrice de b dans E est égale à la matrice de $\varphi_b : E \rightarrow E^*$ où E est muni de la base $\mathcal{E}$ et E^* de la base duale $\mathcal{E}^*$.

Définition 4.1.7.

1) Le noyau de la forme bilinéaire symétrique b , noté $\ker(b)$ est le noyau de φ_b , c.-à-d. :

$$\ker(b) = \{x \in E \mid \forall y \in E, b(y, x) = 0\}$$

2) La forme bilinéaire symétrique b est dite non dégénérée quand son noyau est réduit à $\{0\}$.

3) Si E est de dimension finie, le rang de b est le rang de l'application φ_b , c.-à-d. aussi le rang de la matrice de b dans une base de E .

Exemples 4.1.3.

La forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^2$ définie par $\varphi(x, y) = x_1 y_1$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Son noyau est constitué des vecteurs dont la première coordonnée s'annule :

$$\ker(\varphi) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Exemple 4.1.4.

La forme bilinéaire non dégénérée donné par le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$. De fait, la matrice associée est l'identité, son noyau est bien restreint à $\{0\}$.

4.2 Matrice d'une forme bilinéaire

Définition 4.2.1.

Matrice d'une forme bilinéaire en dimension deux.

Plaçons nous tout d'abord sur $E = \mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}^2$) muni de sa base canonique (e_1, e_2) .

Si φ est une forme bilinéaire sur E , on a alors pour tous vecteurs $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$ dans E :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \varphi(x_1e_1 + x_2e_2, y) \\ &= x_1\varphi(e_1, y) + x_2\varphi(e_2, y) \\ &= x_1\varphi(e_1, y_1e_1 + y_2e_2) + x_2\varphi(e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1(y_1\varphi(e_1, e_1) + y_2\varphi(e_1, e_2)) + x_2(y_1\varphi(e_2, e_1) + y_2\varphi(e_2, e_2))\end{aligned}$$

En désignant par A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) \\ \varphi(e_2, e_1) & \varphi(e_2, e_2) \end{pmatrix}$$

on remarque que :

$$\begin{aligned}AY &= \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \varphi(e_1, e_2) \\ \varphi(e_2, e_1) & \varphi(e_2, e_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1\varphi(e_1, e_1) + y_2\varphi(e_1, e_2) \\ y_1\varphi(e_2, e_1) + y_2\varphi(e_2, e_2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}{}^tX(AY) &= (x_1, x_2) \begin{pmatrix} y_1\varphi(e_1, e_1) + y_2\varphi(e_1, e_2) \\ y_1\varphi(e_2, e_1) + y_2\varphi(e_2, e_2) \end{pmatrix} \\ &= \varphi(x, y)\end{aligned}$$

Le produit des matrices étant associatif, cela s'écrit :

$$\varphi(x, y) = {}^tXAY$$

Le cas d'une forme bilinéaire sur un espace de dimension n se traite de manière analogue.

Définition 4.2.2.

Matrice d'une forme bilinéaire en dimension finie, si $e := (e_1, \dots, e_m)$ est une base de E et $f := (f_1, \dots, f_n)$ est une base de F , on note

$$A := \text{Mat}_{e,f}(\varphi) := (\varphi(e_i, f_j))_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

c'est la matrice de φ dans les bases e, f .

Définition 4.2.3.

Soit φ une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E .

1. On dit que φ est positive si : $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$.
3. On dit que φ est définie si : $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Proposition 4.2.1.

Soit φ une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E de dimension finie.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) φ est symétrique ;
- (ii) Il existe une base de E telle que $\text{Mat}_B(\varphi)$ est une matrice symétrique
- (iii) Pour tout base $\mathcal{B}$ de E , $\text{Mat}_B(\varphi)$ est une matrice symétrique.

Exemples 4.2.1.

1. $\varphi : (x, y) \mapsto xy$ sur $\mathbb{R}$ est symétrique, définie, positive.
2. Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est symétrique, défini, positif.
3. $\varphi : (f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ sur $\mathcal{C}^0([a, b])$ est symétrique, définie et positive.

Définition 4.2.4.

Formes bilinéaires non dégénérées

On dit qu'une forme bilinéaire $\varphi : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ est régulière ou non dégénérée si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- i) $\varphi(x, b) = 0$ pour tout $x \in E$ entraîne $b = 0$;
- ii) $\varphi(a, y) = 0$ pour tout $y \in F$ entraîne $a = 0$.

Exemples 4.2.2.

si $E = F = \mathbb{K}^n$ et si $\varphi(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

si $E = F^*$ et si $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$

Théorème 4.2.1

Supposons E, F de dimension finie. Si $\varphi : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire régulière, alors $\dim E = \dim F$ et pour chaque base $e_1, \dots, e_n$ de E , il existe une unique famille

$f_1, \dots, f_n$ de F telle que :

$$(*) \forall 1 \leq i, j \leq n, \varphi(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$$

de plus, les f_i forment une base de F . On dit que deux bases e, f de E et F qui vérifient $(*)$ sont duales l'une de l'autre.

Exemple 4.2.3.

Montrer que chacune des applications φ qui suivent est bilinéaire et calculer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1. $n = 2, \varphi(x, y) = x_1 y_1 - 2x_2 y_2.$

2. $n = 3, \varphi(x, y) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_2 - 2x_2 y_3 - x_3 y_1 - 2x_3 y_3.$

3. $n = 3, \varphi(x, y) = 2x_1 y_1 - 3x_2 y_2 - x_3 y_3.$

Solution La bilinéarité de chacune de ces applications est évidente. Les matrices respectives dans les bases canoniques sont :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La première et la troisième sont symétriques, mais pas la deuxième.

Exemple 4.2.4.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$

Déterminer la forme bilinéaire φ sur $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.

solution

On a :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= {}^t X A Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 (y_1 + 2y_2 + 3y_3) + x_2 (2y_1 + 3y_2 + 4y_3) + x_3 (3y_1 + 4y_2 + 5y_3) \end{aligned}$$

Exemple 4. 2.5.

Déterminer dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ la matrice de la forme bi-

linéaire symétrique φ telle que pour $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on ait

$$\begin{aligned}\varphi(v_1, v_1) &= 5, \varphi(v_1, v_2) = 0, \varphi(v_1, v_3) = -1 \\ \varphi(v_2, v_2) &= 1, \varphi(v_2, v_3) = 4, \varphi(v_3, v_3) = 0\end{aligned}$$

Solution.

Comme :

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

En désignant, pour tous vecteurs x, y dans $\mathbb{R}^3$, par $(x'_j)_{1 \leq j \leq 3}$ et $(y'_j)_{1 \leq j \leq 3}$ les coordonnées de ces vecteurs dans la base $\mathcal{B}'$, on a (en supposant que φ existe) :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \varphi(x'_1 v_1 + x'_2 v_2 + x'_3 v_3, y'_1 v_1 + y'_2 v_2 + y'_3 v_3) \\ &= x'_1 y'_1 \varphi(v_1, v_1) + x'_2 y'_2 \varphi(v_2, v_2) + x'_3 y'_3 \varphi(v_3, v_3) \\ &\quad + (x'_1 y'_2 + x'_2 y'_1) \varphi(v_1, v_2) + (x'_1 y'_3 + x'_3 y'_1) \varphi(v_1, v_3) \\ &\quad + (x'_2 y'_3 + x'_3 y'_2) \varphi(v_2, v_3) \\ &= 5x'_1 y'_1 + x'_2 y'_2 - (x'_1 y'_3 + x'_3 y'_1) + 4(x'_2 y'_3 + x'_3 y'_2)\end{aligned}$$

Théorème 4. 2.2.

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. Si A_1 et A_2 sont les matrices d'une forme bilinéaire φ sur E dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement, on a alors :

$$A_2 = {}^t P A_1 P$$

Démonstration.

Pour $x \in E$, on note respectivement X_1 et X_2 les vecteurs colonnes formés des composantes de x dans les bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement. Pour tous vecteurs x, y dans E , on a alors :

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= {}^t X_1 A_1 Y_1 = {}^t (P X_2) A_1 (P Y_2) \\ &= {}^t X_2 ({}^t P A_1 P) Y_2\end{aligned}$$

ce qui signifie exactement que $A_2 = {}^t P A_1 P$ du fait de l'unicité de la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}_2$.

Définition 4.2.5

Le discriminant dans une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E d'une forme bilinéaire φ est le déterminant de la matrice $A = ((\varphi(e_i, e_j)))_{1 \leq i, j \leq n}$ de φ dans cette base. On le note $\Delta_{\mathcal{B}}(\varphi)$. En utilisant le théorème 4.2.2, on déduit que si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, on a alors pour toute forme bilinéaire φ sur E :

$$\Delta_{\mathcal{B}_2}(\varphi) = (\det(P))^2 \Delta_{\mathcal{B}_1}(\varphi)$$

4.3 séries Exercices

Exercice 4.1.1

Déterminer les formes bilinéaires et les formes bilinéaires symétriques parmi les applications suivantes :

1. $\varphi : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \varphi(x, y) = xy.$
2. $\varphi : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \varphi(x, y) = x + y$
3. $\varphi : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{K}^2 \quad \varphi(x, y) = x_1y_2 + x_2y_2$
4. $\varphi : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{K}^2, \quad \varphi(x, y) = x_1y_2 + x_2y_1$
5. $\varphi : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \longrightarrow \mathbb{K}, \forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{K}^2 \quad \varphi(x, y) = x_1 + y_2 + x_2y_2$

Exercice 4.1. 2.

Donner la matrice associée à la forme bilinéaire

φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par, $\varphi(x, y) = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_3.$

Exercice 4.1. 3.

- 1) Donner la matrice représentative de $\phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\phi((a, b), (u, v, w)) = (w + iu)a + b(u + iv)$
- 2) Montrer que si $\mathcal{B}_E$ est une base de E , $\mathcal{B}_F$ une base de F , on a :

$$\text{Mat}(\phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \mathcal{M} \dashv \sqcup (d_\phi, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_F^*) = {}^t \mathcal{M} \dashv \sqcup (g_\phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E^*)$$

- 3) En déduire que si E et F sont de dimensions finies, toutes les formes bilinéaires sur $E \times F$ sont de rang fini et que celui-ci est le rang de l'une quelconque des matrices qui la représente.

Exercice 4.1.4.

Soit $E = \mathbb{R}^2$. On note $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $y = (y_2).$

Écrire la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et déterminer le rang et le noyau des formes bilinéaires symétriques suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) &= x_1y_1 + x_2y_2, & \phi_2(x, y) &= x_1y_2 + x_2y_1, & \phi_3(x, y) &= x_1y_1 \\ \phi_4(x, y) &= (x_1 + x_2)(y_1 + y_2), & \phi_5(x, y) &= x_1y_1 - \frac{3}{2}x_1y_2 - \frac{3}{2}x_2y_1 + 6x_2y_2 \end{aligned}$$

Exercice 4.1.5.

Soit la forme bilinéaire défini sur

$E = \mathbb{R}_n[X], n \geq 2$ et $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ avec $n = 2$

- 1) Écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 2) Écrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}' = (1, X, X^2 - X + \frac{1}{6})$.

Chapitre 5

5.1 Formes quadratiques

Définition 5.1.1.

On appelle forme quadratique sur E une application q définie de E dans $\mathbb{K}$

$$\forall x \in E, q(x) = \varphi(x, x)$$

ou φ est une forme bilinéaire.

Remarque 5.1.1.

Il est facile de vérifier que l'ensemble $F(E)$ des formes quadratiques sur E est un espace vectoriel.

Remarque 5.1.2.

Apriori, il n'y a pas unicité des formes bilinéaires associées à une forme quadratique.

Par exemple sur $\mathbb{R}^2$, les formes bilinéaires φ et ψ définies par

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 \\ \psi(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2 \end{cases}$$

définissent la même forme quadratique :

$$\begin{aligned} q(x) &= \varphi(x, x) = x_1^2 + x_2^2 \\ &= \psi(x, x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2x_1 + x_2^2 \end{aligned}$$

L'unicité de φ est assurée par le résultat suivant

Théorème 5.1.1.

Si q est une forme quadratique sur E , il existe alors une unique forme bilinéaire symétrique φ telle que

$$q(x) = \varphi(x, x), \forall x \in E$$

. Démonstration.

La forme quadratique q est définie par $q(x) = \varphi_0(x, x)$ pour tout $x \in E$ où φ_0 est une forme bilinéaire sur E . L'application φ définie sur $E \times E$ par :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} (\varphi_0(x, y) + \varphi_0(y, x))$$

est bilinéaire et symétrique avec $\varphi(x, x) = q(x)$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve l'existence de φ .

Comme φ est bilinéaire et symétrique, on a pour x, y dans E :

$$\begin{aligned} q(x+y) &= \varphi(x+y, x+y) = \varphi(x, x) + 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y) \\ &= q(x) + 2\varphi(x, y) + q(y) \end{aligned} \quad \text{de sorte que :}$$

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y))$$

ce qui prouve l'unicité de φ .

Définition 5.1.2.

Avec les notations du théorème qui précède, on dit que φ est la forme polaire de la forme quadratique q .

On retiendra l'expression de cette forme polaire :

$$\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y))$$

En écrivant que :

$$\left\{ \begin{aligned} q(x+y) &= q(x) + 2\varphi(x, y) + q(y) \\ q(x-y) &= q(x) - 2\varphi(x, y) + q(y) \end{aligned} \right.$$

On déduit que cette forme polaire est aussi définie par :

$$[q(x+y) = q(x) + 2\varphi(x, y) + q(y)], [q(x-y) = q(x) - 2\varphi(x, y) + q(y)] :$$

On notera aussi que pour tout scalaire λ et tout vecteur x on a :

$$q(\lambda x) = \varphi(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \varphi(x, x) = \lambda^2 q(x)$$

ce qui se traduit en disant que q est une fonction homogène de degré 2.

5.2 Les matrices dune forme quadratique

Matrices

Définition 5.2.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E .

Si q est une forme quadratique sur E de forme polaire φ , on dit alors que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice de q dans cette base et on écrit :

$$Mat(q)_{\mathcal{B}} = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

En reprenant les notations du paragraphe précédente, une forme quadratique est définie sur E de base $\mathcal{B}$ par :

$$q(x) = \varphi(x, x) = {}^t X A X = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

et comme $a_{ij} = a_{ji}$, cela peut s'écrire :

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

Exemple 5.2.1.

Déterminer la matrice et la forme polaire de la forme quadratique q définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, par

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

solution ; La matrice de q dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

et sa forme polaire est définie par :

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= {}^t X A Y = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 5x_3 y_3 + 2(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 3(x_1 y_3 + y_1 x_3) + x_2 y_3 + x_3 y_2 \end{aligned}$$

Proposition 5.2.1. (Expression de q en fonction de la matrice de φ , et vice-versa).

Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$. Alors :

Soit ψ une forme bilinéaire quelconque associée à q , de matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans la base canonique. Alors

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

En particulier, si ψ est la forme bilinéaire symétrique associée à q , alors :

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q(X) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} x_i x_j$$

Soit $(b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ des coefficients tels que :

$$\forall X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q(X) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{i,j} x_i x_j = \sum_{i=1}^n b_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} b_{i,j} x_i x_j$$

Alors la matrice dans la base canonique de l'unique forme bilinéaire symétrique associée à q est la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, où :

$$\forall i \in [1, n], \quad a_{i,i} = b_{i,i} \quad \text{et} \quad \forall (i < j) \in [1, n]^2, \quad a_{i,j} = a_{j,i} = \frac{1}{2} b_{i,j}$$

De plus, dans la situation précédente, une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice dans la base canonique d'une forme bilinéaire (quelconque) associée à q si et seulement si :

$$\forall i \in [1, n], \quad m_{i,i} = b_{i,i} \quad \text{et} \quad \forall (i < j) \in [1, n]^2, \quad m_{i,j} + m_{j,i} = b_{i,j}$$

Exemple 2.2 1. Trouver la matrice de la forme bilinéaire symétrique associée à q définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad q(x, y, z) = 2x^2 - 2xy + 5xz - y^2 + z^2$$

Exemple 5.2.2. Déterminer la forme quadratique canoniquement associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solution

1)

$$M(q) = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 5.2.3. Pour $X = \{0\}$, on $aX^\perp = E$. Les propriétés suivantes se déduisent immédiatement de la définition.

Théorème 5.2.1.

Soient X, Y deux parties non vide de E .

1. $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. $X \subset (X^\perp)^\perp$.
3. Si $X \subset Y$, alors $Y^\perp \subset X^\perp$.

Comme, pour toute partie non vide X de E , $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E , l'inclusion

Définition 5.2.3.

L'ensemble des vecteurs isotropes de E , relativement à φ , est le cône isotrope de φ . Le cône isotrope de φ est donc le sous-ensemble de E :

$$C_\varphi = \{x \in E \mid \varphi(x, x) = 0\}$$

En notant $\ker(\varphi)$ le noyau de φ , on a :

$$\ker(\varphi) = E^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in E, \varphi(x, y) = 0\}$$

Lemme 5.2.1. Le noyau de φ est contenu dans son cône isotrope, soit :

$$\ker(\varphi) \subset C_\varphi$$

Exemple 5.2.4.

Déterminer le noyau et le cône isotrope de la forme bilinéaire symétrique φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(e_1, y) = y_1 = 0 \\ \varphi(e_2, y) = y_2 = 0 \\ \varphi(e_3, y) = -y_3 = 0 \\ \ker(\varphi) = \{0\} \end{array} \right.$$

Définition 5.2.5.

On dit que deux vecteurs x, y de E sont orthogonaux relativement à φ si $\varphi(x, y) = 0$

Exemple 5.2.5.

Sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ le produit scalaire usuel :

$$(x, y) \mapsto x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 \text{ ou } (x, y) \mapsto x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

Dans le cas des quadratiques à centre réelles, en désignant par (s, t) la signature de q avec $+t = n$, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle une équation de $\mathcal{C}$ est :

$$\sum_{i=1}^s y_i^2 - \sum_{i=s+1}^n y_i^2 = \alpha$$

5.3 Réduction de Gauss

On désigne par $E = \mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ une base de E , soit $v = xe_1 + ye_2$ dans cette base, une forme quadratique q s'écrit sous la forme suivant dans l'espace de dimension 2

$$q(v) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

La matrice de cette forme quadratique dans la base $\mathcal{B}$ est donc :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

On suppose que $q \neq 0$, soit $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Si $a \neq 0$, on a

$$q(v) = a \left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \frac{\delta}{a}y^2$$

où $\delta = ac - b^2$ est le déterminant de A . Il y a alors deux possibilités :

soit $\delta = 0$ et :

$$q(v) = a \left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 = a\ell_1^2(v)$$

où $\ell_1 : v \mapsto x + \frac{b}{a}y$ est une forme linéaire non nulle.

Soit $\delta \neq 0$ et :

$$q(v) = a \left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \frac{\delta}{a}y^2 = a\ell_1^2(v) + \frac{\delta}{a}\ell_2^2(v)$$

où $\ell_1 : v \mapsto x + \frac{b}{a}y$ et $\ell_2 : v \mapsto y$ sont deux formes linéaires indépendantes puisque

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{b}{a} & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Soit $a = 0$ et $c \neq 0$, on a :

$$q(v) = 2bxy + cy^2 = c \left(y + \frac{b}{c}x \right)^2 + \frac{\delta}{c}x^2$$

$\delta^2 = -b^2$ est encore le déterminant de A et il y a deux possibilités :

Si $b = 0$ et :

$$q(v) = cy^2 = c\ell_1^2(v)$$

où $\ell_1 : v \mapsto y$ et une forme linéaire non nulle.

Si $b \neq 0$

$$q(v) = c \left(y + \frac{b}{c}x \right)^2 + \frac{\delta}{c}x^2 = a\ell_1^2(v) + \frac{\delta}{a}\ell_2^2(v)$$

où $\ell_1 : v \mapsto y + \frac{b}{c}x$ et $\ell_2 : v \mapsto x$ sont deux formes linéaires indépendantes.

Soit $a = 0$ et $c = 0$, on a alors $b \neq 0$ et :

$$q(x, y) = 2bxy = \frac{b}{2}((x+y)^2 - (x-y)^2) = \frac{b}{2}\ell_1^2(v) - \frac{b}{2}\ell_2^2(vy)$$

où $\ell_1 : v \mapsto x + y$ et $\ell_2 : v \mapsto x - y$ sont deux formes linéaires indépendantes puisque

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

On a donc montré le résultat suivant.

Théorème 5.3.1

Toute forme quadratique non nulle q sur $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension 2 peut s'écrire sous la forme $q = \lambda_1 \ell_1^2$ où λ_1 est un scalaire non nul et ℓ_1 une forme linéaire non nulle ou $q = \lambda_1 \ell_1^2 + \lambda_2 \ell_2^2$ où λ_1, λ_2 sont deux scalaires non nuls et ℓ_1, ℓ_2 deux formes linéaires indépendantes.

Exemple 5.3.1.

Réduire les formes quadratiques définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$q_1(x, y) = x^2 - 6xy + 5y^2$$

$$q_2(x, y) = xy$$

Solution. On a :

$$q_1(x, y) = (x - 3y)^2 - 4y^2$$

$$q_2(x, y) = \frac{1}{4}(x + y)^2 - \frac{1}{4}(x - y)^2$$

On peut remarquer qu'une telle décomposition n'est pas unique.

Par exemple, pour q_2 , on peut aussi écrire :

$$q_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \right)^2 - \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right)^2$$

Cas des espaces de dimension $n \geq 1$ Commençons par un exemple.

Exemple 5.3.2.

En s'inspirant de la méthode exposée au paragraphe précédent, réduire la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 .$$

Solution.

On regroupe les termes contenant x_1 pour l'écrire comme le début d'un carré, soit :

$$x_1^2 + 2x_1x_3 = (x_1 + x_3)^2 - x_3^2$$

ce qui donne :

$$q(x) = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2 + 2x_2x_3$$

Un utilise en suite la méthode développée pour le cas $n = 2$ à la forme q' on définit sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q'(x_2, x_3) = x_2^2 + 2x_2x_3$$

. Soit :

$$q'(x_2, x_3) = (x_2 + x_3)^2 - x_3^2$$

ce qui donne :

$$q(x) = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - x_3^2 = \ell_1^2(x) + \ell_2^2(x) - \ell_3^2(x)$$

les formes ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 étant indépendantes puisque :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

La démonstration de théorème qui suit s'inspire de cette méthode.

Théorème 5.3.2

Pour toute forme quadratique non nulle q sur E , il existe un entier p compris entre 1 et n , des scalaires non nuls $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ et des formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_p$ indépendantes dans E^* tels que :

$$\forall x \in E, q(x) = \sum_{j=1}^p \lambda_j \ell_j^2(x)$$

Démonstration

On démontre cette théorème par récurrence sur $n \geq 1$ pour $n = 1$ il n'y a rien à démontrer et pour $n = 2$, c'est fait. On suppose le résultat acquis au rang $n - 1$ et on donne une forme quadratique non nulle q définie dans une base $\mathcal{B}$ d'un espace vectoriel E de dimension $n \geq 3$ par :

$$q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

à E , on a :

$$q(x) = \frac{1}{2}\ell_1^2(x) - \frac{1}{2}\ell_2^2(x) + \sum_{j=2}^p \lambda_j \ell_j^2(x)$$

Il reste à vérifier que les formes ℓ_p sont linéairement indépendantes dans E^* . L'égalité $\sum_{j=1}^p \lambda_j \ell_j$ équivaut à dire que $\sum_{j=1}^p \lambda_j \ell_j(x) = 0$ pour tout $x \in E$. Prenant $x = e_1$ et $x = e_2$, on obtient $\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{21} = 0$ et $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$, ce qui équivaut à $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ puisque $a_{21} \neq 0$ et $\sum_{j=3}^p \lambda_j \ell_j(x') = 0$ pour tout $x' \in H$, ce qui équivaut à $\sum_{j=3}^p \lambda_j \ell_j = 0$ et la nullité de tous les λ_j puisque le système $(\ell_3, \dots, \ell_p)$ est libre dans H^* . On a donc le résultat annoncé.

Exemple 5.3.3.

Réduire la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Solution.

$$\begin{aligned} \text{On a } q(x) &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 - 10x_2x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + 3x_3)^2 - (x_2 + 5x_3)^2 + 21x_3^2 \end{aligned}$$

Exemple 5.3.4.

$$q(x) = x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$$

Solution

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4 \\ \text{On a : } &= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 2x_3^2 - 8x_4^2 - 8x_3x_4 \\ &= (x_1 + x_3 + 4x_4)(x_2 + 2x_3 + 2x_4) - 2(x_3 + 2x_4)^2 \\ &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4)^2 - 2(x_3 + 2x_4)^2 \end{aligned}$$

Exemple 5.3.5.

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

1. Donner la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
2. Réduire q dans les cas $n = 2, n = 3$ et $n = 4$.

Solution.

1. On a :

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. (a) Pour $n = 2$, on a :

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2$$

(b) Pour $n = 3$, on a :

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}(x_2^2 + x_3^2) + \frac{1}{2}x_2x_3 \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2^2 + x_3^2 + \frac{2}{3}x_2x_3\right) \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3\right)^2 + \frac{2}{3}x_3^2 \end{aligned}$$

(c) Pour $n = 4$, on a :

$$\begin{aligned} q(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}(x_2^2 + x_3^2) + \frac{1}{2}x_2x_3 \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2^2 + x_3^2 + \frac{2}{3}x_2x_3\right) \\ &= \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4\right)^2 + \frac{3}{4}\left(x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_3 + \frac{1}{4}x_4\right)^2 + \frac{5}{8}x_4^2 \end{aligned}$$

Théorème 5.3.3.

Étant donnée une base $(\ell_i)_{1 \leq i \leq n}$ de l'espace vectoriel E^* des formes linéaires sur E , il existe une base $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E telle que :

$$\ell_i(f_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

où les δ_{ij} sont définis par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

(s_i [

Démonstration.

En notant, pour tout entier i compris entre 1 et n et tout vecteur $x \in E$:

$$\ell_i(x) = \alpha_{i1}x_1 + \cdots + \alpha_{in}x_n$$

l'expression de ℓ_i dans la base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$, la matrice $Q = ((\alpha_{ij}))_{1 \leq i, j \leq n}$ est inversible puisque les ℓ_i forment une base de E^* (la ligne i de Q est la matrice de ℓ_i dans la base $\mathcal{B}$).

En notant $F_1, \dots, F_n$ les colonnes de la matrice Q^{-1} , l'égalité $QQ^{-1} = I_n$ s'écrit :

$$Q(F_1, \dots, F_n) = (QF_1, \dots, QF_n) = (E_1, \dots, E_n)$$

où $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On a donc, pour tout entier j compris entre 1 et n :

$$QF_j = E_j$$

En remarquant que pour tout $x \in E$, on a :

$$QX = \begin{pmatrix} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n \\ \vdots \\ \alpha_{n1}x_1 + \dots + \alpha_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1(x) \\ \vdots \\ \ell_n(x) \end{pmatrix}, \text{ et en désignant par } f_j \text{ le vecteur de } E \text{ de composantes } F_j \text{ dans la base } \mathcal{B}, \text{ les égalités } QF_j = E_j \text{ se traduisent par :}$$

$$\begin{pmatrix} \ell_1(f_j) \\ \vdots \\ \ell_n(f_j) \end{pmatrix} = E_j = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix}$$

et on a bien $\ell_i(f_j) = \delta_{ij}$ pour tous i, j compris entre 1 et n .

Exercice 5.3.6.

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{C}^3$) ayant pour matrice A dans la base canonique.
2. Déterminer deux formes linéaires indépendantes ℓ_1 et ℓ_2 telles que $q = \ell_1^2 - \ell_2^2$.
3. Déterminer une forme linéaire ℓ_3 (aussi simple que possible) telle que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) soit une base $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.
4. Déterminer une base (f_1, f_2, f_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $\ell_i(f_j) = \delta_{ij}$ pour tous i, j compris entre 1 et 3.
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ orthogonale pour q et une matrice inversible P telle que $D = {}^tPAP$ soit diagonale.

Solution.

On note x, y, z les coordonnées d'un vecteur v de $\mathbb{R}^3$ et $q(x, y, z)$ pour $q(v)$.

1. La forme q est définie par :

$$q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2 + 2(2xy + 3xz + 4yz) .$$

2. On a la réduction de Gauss $q = \ell_1^2 - \ell_2^2$ avec :

$$\begin{cases} \ell_1(x, y, z) = x + 2y + 3z \\ \ell_2(x, y, z) = y + 2z \end{cases}$$

3. On peut prendre ℓ_3 définie par :

$$\ell_3(x, y, z) = z$$

(ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est bien une base $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ puisque :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

4. Il s'agit d'inverser la matrice :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour ce faire on résout le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = x' \\ y + 2z = y' \\ z = z' \end{cases}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} x = x' - 2y' + z' \\ y = y' - 2z' \\ z' = z \end{cases}$$

et f_1, f_2, f_3 sont les colonnes de :

$$P = Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. La base (f_1, f_2, f_3) est alors orthogonale pour q , ce qui signifie que la matrice de q dans cette base est diagonale. Précisément, on a :

$$D = {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui peut aussi se vérifier par le calcul :

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 5.3.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et Q une forme quadratique sur E . La signature de Q est le couple d'entiers $(p, q) \in \mathbf{N}$ donné par $p = \max \{ \dim F \mid F \text{ sous-espace de } E \text{ tel que } Q|_F \text{ est définie positive} \}$ $q = \max \{ \dim F \mid F \text{ sous-espace de } E \text{ tel que } Q|_F \text{ est définie négative} \}$

Exemple 5.3.6.

Une forme quadratique Q sur un espace E de dimension n qui est définie positive est de signature $(n, 0)$. C'est le cas par exemple pour le produit scalaire usuel sur $\mathbf{R}^n$.

Remarque 5.3.1.

De fait, pour une forme quadratique définie positive, le plus grand espace sur lequel Q est définie positive est E lui-même. Si F est un espace sur lequel Q est définie négative, il ne peut pas contenir de vecteur x non nul, car on aurait pour ce vecteur $Q(x) > 0$ et $Q(x) < 0$. Le sous-espace $F = \{0\}$ est le seul sur lequel Q est définie négative.

Corollaire 5.3.1.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n , Q une forme quadratique de signature (p, q) . Alors

$$p + q = \text{rang}(Q), \quad p + q + \dim \ker(Q) = n$$

Méthode : calcul de la signature d'une forme quadratique

Il suffit de réduire la forme quadratique et de compter le nombre de signes $+$ et de signes $-$ devant les carrés des formes linéaires apparaissant dans l'expression réduite. Il

est crucial que ces formes linéaires soient indépendantes entre elles.

Forme quadratique et déterminant

Soit E un espace vectoriel de dimension 2, Q une forme quadratique non dégénérée définie sur E et $B = \{b_{i,j}\}$ sa matrice dans une base de E . Alors la signature de Q vaut

$$(1, 1) \text{ si } \det(B) < 0,$$

$$(2, 0) \text{ si } \det(B) > 0 \text{ et } b_{1,1} > 0$$

$$(0, 2) \text{ si } \det(B) > 0 \text{ et } b_{1,1} < 0$$

5.4 Séries d'exercices

Exercice 5.1.1

Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n ($n \geq 1$).

Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$B(P, Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt \quad \text{et} \quad q(P) = B(P, P)$$

1. Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ? antisymétrique ?
2. Montrer que q est une forme quadratique. La forme q est-elle définie ? Si ce n'est pas le cas, exhiber un vecteur isotrope non nul.
3. Calculer la matrice de q dans la base $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$.
4. Pour $n = 2$, déterminer la signature de q . La forme q est-elle positive ? négative ?
5. Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui soit q -orthogonale.

Exercice 5.1.2.

Soit

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a - d = 0 \right\} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On définit l'application

$$B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

en posant, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$B(M, N) = \text{Tr}(MJN).^1$$

1. Montrer que B est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique, antisymétrique
2. Montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ n & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de V
3. Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la forme quadratique q définie en posant, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $q(M) = B(M, M)$.
4. Déterminer la signature de q , son rang et son noyau. La forme q est-elle définie ? positive ? négative ?
5. Déterminer $F^\perp$ (c'est-à-dire le q -orthogonal de F) où

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a - d = 0 \right\}$$

Exercice.5.1.3.

Effectuer une réduction de Gauss et déterminer le noyau, le rang et la signature des formes quadratiques suivantes :

1. $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 3xy - 4xz.$
2. $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, q(x, y, z) = x^2 + y^2 - az^2 + 3xy - bxz + yz.$

On discutera suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}.$

3. $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$q(x, y, z, t) = x^2 + (1 + 2\lambda - \mu)y^2 + (1 + \lambda)z^2 + (1 + 2\lambda + \mu)t^2 \\ + 2xy + 2xz - 2xt + 2(1 - \lambda)yz - 2(1 + \lambda)yt + 2(\lambda - 1)zt.$$

On discutera suivant les valeurs $\lambda.$

Exercice 5.1.4.

Effectuer une réduction de Gauss et déterminer le noyau, le rang et la signature des formes quadratiques suivantes :

1. $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 3xy - 4xz.$
2. $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, q(x, y, z) = x^2 + y^2 - az^2 + 3xy - bxz + yz.$ On discutera suivant les valeurs de $a, b \in \mathbb{R}.$

3. $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$q(x, y, z, t) = x^2 + (1 + 2\lambda - \mu)y^2 + (1 + \lambda)z^2 + (1 + 2\lambda + \mu)t^2 \\ + 2xy + 2xz - 2xt + 2(1 - \lambda)yz - 2(1 + \lambda)yt + 2(\lambda - 1)zt$$

On discutera suivant les valeurs de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

4. $q : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}, q(x, y, z, t, s) = xy - xt + yz - yt + ys + zt - zs + 2st.$

Chapitre 6

6.1 Espace Euclidienne

Produit scalaire 6.1.1 :

Définition 6.1.1

On appelle produit scalaire sur E toute forme φ bilinéaire, symétrique, définie et positive, c'est-à-dire toute application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie :

1. Pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (linéarité de φ à gauche).
2. Pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire (linéarité de φ à droite).
3. $\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ (symétrie).
4. $\forall x \in E \quad \varphi(x, x) \geq 0$ (positivité).
5. $\forall x \in E \quad \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Notation : $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$.

Exemple 6.1.1 : $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ sur $E = \mathbb{R}^n$.

Exemple 6.1.2 : $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ sur $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 6.1.3 : $\langle M, N \rangle = \text{Tr}(^tMN)$ sur $E = I_{n,p}[\mathbb{R}]$.

Définition 6.1.2.

On appelle espace vectoriel euclidien tout espace vectoriel réel de dimension finie, muni d'un produit scalaire.

Expression matricielle

Dans une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E , pour tous vecteurs $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$: $\langle x, y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle$.

Donc avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$:

Propriété :

Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et A la matrice carrée (symétrique) d'ordre n de coefficients $a_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$, alors : $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, y \rangle = {}^t X A Y$.

6.2 Norme euclidienne associée

Définition 6.2.1.

Si E est un espace vectoriel euclidien, on appelle « norme » euclidienne associée au produit scalaire l'application de E dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Expression matricielle : Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et A la matrice carrée d'ordre n de coefficients $a_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle$, alors : $\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{{}^t X A X}$.

Démonstration :

$\forall x \in E \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ d'après l'axiome 5 . $\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle}$ donc $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Identités remarquables 6.2.1.

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle .$$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x, y \rangle .$$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 .$$

Démonstration

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle .$$

Or $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. Donc : $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle$.

$$\bullet \quad \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

Donc : $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x, y \rangle$.

$$\bullet \quad \langle x + y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 .$$

Identité du parallélogramme 6.2.2. :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

Propriétés : $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$.

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz 6.2.3. :

$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$. Il y a égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Théorème 6.2.1

Le produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration

Je vais donner deux arguments aboutissant à l'inégalité de Cauchy-Schwarz 6.2.3..

Soient x et y deux vecteurs et λ un nombre réel. Le nombre $\langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle$ est positif ou nul. On peut développer ce produit scalaire en appliquant les propriétés de linéarité.

On obtient :

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle &= \langle \lambda x, \lambda x + y \rangle + \langle y, \lambda x + y \rangle \\ &= \lambda \langle x, \lambda x + y \rangle + \langle y, \lambda x + y \rangle \\ &= \lambda \langle x, \lambda x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \langle y, \lambda x \rangle + \langle y, y \rangle \quad \text{On obtient donc un polynôme} \\ &= \lambda^2 \langle x, x \rangle + \lambda \langle x, y \rangle + \lambda \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \lambda^2 \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \end{aligned}$$

de degré 2 en λ qui est positif ou nul pour tout λ . Cela signifie que le discriminant de ce polynôme est négatif ou nul. Autrement dit on a

$$\langle x, y \rangle^2 - \langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \leq 0.$$

Dire que ce discriminant est nul est équivalent à dire qu'il existe λ pour lequel le polynôme est nul ou encore qu'il existe λ pour lequel $\|\lambda x + y\|^2 = 0$ ce qui est équivalent à $\lambda x + y = 0$.

Autrement dit l'égalité ne peut être vérifiée que dans les cas où x et y sont colinéaires. On vérifie facilement que l'égalité est satisfaite lorsque x et y sont colinéaires (on a donc l'équivalence).

Inégalité triangulaire (ou de Minkovski) :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Démonstration

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\|^2 - (\|x\| + \|y\|)^2 = 2(\langle x, y \rangle - \|x\| \times \|y\|) .$$

$$\text{Or : } \forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, y \rangle \leq \|x\| \times \|y\| . \text{ Donc : } \|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 .$$

Donc : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ car ce sont des réels positifs.

6.3 Distance euclidienne associée**Définition 6.3.1.**

Si E est un espace vectoriel euclidien, on appelle distance euclidienne associée au produit scalaire l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = \|y - x\| .$$

Propriétés 6.3.1

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y .$$

$$\forall (x, y) \in E^2$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$\forall (x, y, z) \in E^3$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) . \text{ (inégalité triangulaire)}$$

Propriété 6.3.2.

$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z) .$$

Démonstration :

$$\text{En appliquant l'inégalité triangulaire } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ donc : } d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z) .$$

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \text{ donc : } d(y, z) - d(x, y) \leq d(x, z) .$$

Définition 6.3.2.

Ladistance d'un point x de E , une partie non vide de E est,

Ladistance d'un point x de E , une partie non vide A de E est,

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) / y \in A\} .$$

6.4 Orthogonalité

Définition 6.4.1.

Soit E un espace euclidien de dimension n . Une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E est dite orthogonale quand $(e_i | e_j) = 0$ pour tous $i \neq j$. Elle est dite orthonormale si en plus $\|e_i\| = 1$ pour $i = 1, \dots, n$.

La base $(e_1, \dots, e_n)$ est orthonormale si et seulement si la matrice du produit scalaire dans cette base est la matrice identité I_n , ou encore si et seulement si le produit scalaire de deux vecteurs $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ est donné par $(x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

On a une façon utile de fabriquer une base orthogonale (ou orthonormale) à partir d'une base quelconque d'un espace euclidien.

Proposition 6.4.1.

(Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt).

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base quelconque d'un espace euclidien E .

Alors on peut fabriquer par récurrence une base orthogonale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E de la forme :

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= e_1 \\ \varepsilon_2 &= e_2 - \lambda_{1,2} \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ \varepsilon_i &= e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_{j,i} \varepsilon_j \\ &\vdots \\ \varepsilon_n &= e_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{j,n} \varepsilon_j\end{aligned}$$

en prenant $\lambda_{j,i} = \frac{(\varepsilon_j | e_i)}{\|\varepsilon_j\|^2}$. On a $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i)$ pour

$$i = 1 \dots n.$$

Exemple 6.4.1.

Soit E un espace vectoriel euclidien et x, y deux éléments de E . Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution

Remarquons que, puisque tout est positif, l'inégalité est équivalente à $\|x + \lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$.

Or.

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x, y \rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

et donc l'inégalité est équivalente à

$$2\lambda\langle x, y \rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0.$$

Supposons d'abord que x est orthogonal à y , et donc que $\langle x, y \rangle = 0$. Alors l'inégalité précédente est bien vérifiée pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, supposons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$2\lambda\langle x, y \rangle + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0.$$

Le discriminant de ce polynôme (en λ) du second degré doit donc être négatif ou nul, ce qui signifie que $4\langle x, y \rangle^2 \leq 0$. Ceci n'est possible que si $\langle x, y \rangle = 0$, c'est-à-dire si x et y sont orthogonaux.

Exemple 6.4.2.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base suivante :

$$u = (1, 0, 1), v = (1, 1, 1), w = (-1, -1, 0).$$

Solution

Le premier vecteur est simplement $\frac{u}{\|u\|}$. Puisque $\|u\| = \sqrt{2}$, on a

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

Cherchons ensuite e'_2 sous la forme $e'_2 = v + \lambda e_1$ de sorte que $\langle e'_2, e_1 \rangle = 0$. On a

$$\begin{aligned} \langle e'_2, e_1 \rangle &= \langle v, e_1 \rangle + \lambda \langle e_1, e_1 \rangle \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} + \lambda \\ &= \sqrt{2} + \lambda. \end{aligned}$$

On doit donc avoir $\lambda = -\sqrt{2}$ ce qui donne

$$e'_2 = (0, 1, 0)$$

Il est déjà normalisé et donc on pose $e_2 = (0, 1, 0)$. Cherchons ensuite e'_3 sous la forme

$$e'_3 = w + \lambda e_1 + \mu e_2$$

de sorte que $\langle e'_3, e_1 \rangle = 0$ et $\langle e'_3, e_2 \rangle = 0$. Il vient

$$\begin{aligned}\langle e'_3, e_1 \rangle &= \langle w, e_1 \rangle + \lambda \langle e_1, e_1 \rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \lambda\end{aligned}$$

D'où il vient $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\langle e'_3, e_2 \rangle &= \langle w, e_2 \rangle + \mu \langle e_2, e_2 \rangle \\ &= -1 + \mu\end{aligned}$$

Ia où $\mu = 1$. On en déduit que

$$e'_3 = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$$

Donc normalise ce vecteur, et on trouve

$$e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Exemple 6.4.3.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $M(3, 4, 5)$ au plan P d'équation $2x + y - z + 2 = 0$.

Solution

Un vecteur normal du plan est $u = (2, 1, -1)$. Un point du plan est $A = (0, 0, 2)$. On en déduit que la distance recherchée est

$$d = \frac{|\langle u, \overrightarrow{AM} \rangle|}{\|u\|} = \frac{|\langle (2, 1, -1), (3, 4, 3) \rangle|}{\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}}.$$

Automorphismes orthogonaux

1) Soit $f \in \bar{L}(E)$.

un automorphisme orthogonal $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} f$ "conserve le produit sc" $\forall x, y \in E, f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$
 2) $\Rightarrow J$ "conserve la norme" (2) : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$

3) $\Leftrightarrow f$ "conserve les bases orthonormales" :

Pour toute base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est orthonormale

4) $\Leftrightarrow f$ "conserve une base orthonormale" :

Il existe une base orthonormale $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ telle que $(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ est orthonormale

Démonstration :

(1) $\Rightarrow$ (2) : évident ; si (1), alors $f(x)^2 = x^2$

(2) $\Rightarrow$ (1) : supposons (2).

Soient $x, y \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(y) &= \frac{1}{2} (\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \quad (1) \Rightarrow (3) : \text{supposons (1). Soit} \\ &= \frac{1}{2} (\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ &= x \cdot y \end{aligned}$$

$(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale. Alors, pour tout $i, j \in [1, n]$, $f(e_i) \cdot f(e_j) = e_i \cdot e_j = \delta_{i,j}$ (3) $\Rightarrow$ (4) : il en existe puisque l'ensemble des bases orthonormales n'est pas vide.

(4) $\Rightarrow$ (1) : supposons (4). Soit $\mathfrak{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base orthonormale telle que $\mathfrak{B}' = (f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ soit aussi orthonormale. Soient alors $x, y \in E$, de composantes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ dans $\mathfrak{B}$. Alors $x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Et $f(x) \cdot f(y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ car $\mathfrak{B}'$ est aussi orthonormale, et les composantes de $f(x)$ et $f(y)$ dans $\mathfrak{B}'$ sont $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ puisque *festlinaire* (rappel : *pour une application linéaire, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \Rightarrow f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$*)

6.5 Séries d'exercices

Exercice 6.1.1.

Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(x, y) = 2(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) + 3(x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + x_3y_3,$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$. (1) Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique.

(2) Déterminer la matrice à laquelle elle est associée.

(3) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6.1.2.

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n .

1) On définit l'application $\Phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Phi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

Montrer que l'application Φ définit un produit scalaire sur E .

2) Calculer une base orthonormée du sous-espace vectoriel engendré par 1, X et X^2 .

Exercice 6.1.3.

A deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le nombre

$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

1) Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Lorsque $n = 2$, donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 6.1.4. On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.

1) Déterminer une base orthonormée du sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs

$$V_1 = (1, 0, 1, 0), \quad V_2 = (0, 1, -1, 0), \quad V_3 = (0, 2, 3, 1)$$

puis compléter cette base en une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

2) Écrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

Références

- 1) Cours et exercices d'algèbres 2^{ème} année.
- 2) Exercices Corrigés D'algèbre linéaire Tome 2 Damien Etienne.
- 3) ALGEBRE . Exercices et problèmes licence Maurice G AULTIER.
- 4) ALGEBRE 2 Guillaume CARLIER.
- 5) Toute l'algèbre de licence .JEAN –Piere-Escofier. Dunod.

ملخص.

هذه المذكرة تعتبر دليل طلبة سنة ثانية تخصص لسانس رياضيات اساسية وتخصص جبر

(L.M.D.)

وتشمل على كل المواضيع المقررة من وزارة التعليم والبحث العلمي بالجرائر. حيث تشمل على 6 فصول بداية تذكير بالتطبيقات الخطية والمصفوفات وخواصها ثم كيفية تقطير مصفوفة (كثير الحدود المميز-القيم الذاتية الفضاءات الجزئية الذاتية) ايجاد الحد العام لمتتالية الحسابية. مصفوفات اختصار جردان وتطبيقاتها لحل المعادلات التفاضلية - التطبيقات ثنائية الخطية والاشكال التربيعية المرفقة بها واختصارات قوس وخواصها. في الاخير الفضاء الاقليدي -الجداء السلمي -النواظم-استنتاج اساس تعامدي.

كما ترفق بكل فصل سلسلة تمارين مناسبة مقترحة للحل.

الكلمات المفتاحية / التطبيقات الخطية - ثنائيات الخطية المصفوفات - كثير الحدود المميز -تقطير مصفوفة - تثليث مصفوفة مختصر مصفوفة جوردان ايجاد الحد العام لمتتالية - حل المعادلات التفاضلية-الفضاء الاقليدي.

Résumé

Ce mémoire est considéré comme un guide pour les étudiants de deuxième année spécialisant en mathématiques fondamental et en algèbre. (L.M.D.)

Il comprend tous les sujets prescrits par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique en Algérie. Il comprend 6 chapitres, commençant par un rappel des applications linéaires et ses matrices et de leurs propriétés, puis comment distiller une matrice (Polynôme caractéristique- valeurs propres et sous-espaces propres)

Réduction de Jordan des matrices et leurs applications pour la résolution d'équations différentielles. Les applications bilinéaires et les formes quadratiques qui leur sont attachées, abréviations d'arc et leurs propriétés. Enfin, L'espace Euclidienne - produit scalaire – normes et régularités - déduction d'une base orthogonale.

Une série d'exercices de solutions suggérés appropriés sont également joints à chaque chapitre.

Les Mots clés/ Les application linéaires -Bilinéaires les matrices -Diagonalisations des matrices-Triangulations-Reduction de Jordan – Termes des suites -Résolution des équations différentielles- L'espace euclidienne.