

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Etude de deux problèmes de contact
avec frottement et réponse normale
instantanée où l'usure**

Présenté par: Bellamouchi Chahinez

Soutenu devant le jury composé de

Président	Beggas Mohammed	MCA	Univ. El Oued
Rapporteur	Aissaoui Adel	MCA	Univ. El Oued
Examineur	Hadj Ammar Tidjani	MCA	Univ. El Oued

Année universitaire : 2019/2020

Dédicaces

Je dédie cet humble travail à :

♡ Mes parents chéris ♡, La bougie qui ne s'éteint jamais et qui ne cesse jamais de me guider et soutenir, le symbole d'amour et de la bonté par excellence, qui m'ont appris à ne pas céder devant les difficultés, qui m'ont encouragé et aidé pour atteindre mes buts dans la vie, rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit de leur part pour mon éducation et mon bien être.

Ce travail est le fruit des sacrifices qu'ils ont consentis pour moi.

♡ amoura ♡ est le lien et le don ... Il m'a donné beaucoup de patience ... Espoir ... Amour ...

Je ne dirai pas merci, mais je vivrai merci avec toi

À mes soeurs , frères chacun en son nom :

Mouna, Raouane, Sirin, Taki Eddine, Ahmed. Qui font des efforts pour m'aider surtout moralement pendant toute la période de mes études et aussi lors de réalisation de ce travail.

A nos meilleurs amis chacun en son nom :

Raoudha, Khaoula, Asma, Naziha, Kaoutar, Ilham, Meïmouna, Cheïma , Lonba, Khouloud , Nora , Ichrak , Awatef, Roumaïssa pour leur aide, leurs encouragements, leur assistance et soutien. A

ceux et celles qui ont été à nos côtés dans les moments difficiles

Tous ceux qui m'ont aidé et m'ont encouragé de près ou de loin.

Remerciement

En préambule à ce mémoire nous remerciant **ALLAH** qui nous aide et nous donne la patience et le courage durant ces longues années d'étude.

Nous tenons à remercier Dr **Aissaoui Adel**, qui, en tant que Directeurs de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Nous n'oublions pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragées au cours de la réalisation de ce mémoire. Merci à ceux que nous avons oubliés.



Notations

L'ensembles

\mathbb{N}	l'ensemble des nombres naturelle .
\mathbb{R}	l'ensemble des nombres réels .
$\overline{\mathbb{R}}$	la ligne réelle étendue des nombres réels .
$\mathbb{R}^d(d = 1, 2, 3)$	l'espace euclidien de dimension d .
$\mathbb{S}^d(d = 1, 2, 3)$	l'espace de second ordre sur les tenseurs symétriques on \mathbb{R}^d .
Ω	est un domaine de $\mathbb{R}^d(d = 2, 3)$.
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω .
Γ	la fontière de Ω supposée régulière.
$\Gamma_i(i = 1, 2, 3)$	une partie mesurable de la frontière Γ .
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue($d - 1$) dimenstionnelle de Γ_1 .
$[0, T]$	l'intervalle de tempe $T > 0$.

L'opérateur

ε	opérateur des déformations ou linéarisées petits i,e $\varepsilon = \varepsilon(u)$, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$.
Div	l'opérateur de divergence .
∇	l' opérateur gradient.
Δ	l' opérateur de Laplace .
$\gamma : H \rightarrow H_\Gamma$	l' opérateur de trace puor .
∂_k	l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_k .
I	l'édentiti de l' opérateur en l'espace \mathbb{R}^3 .

Espaces fonctionnels

$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réel continument différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	l'espace des fonctions réel indéfiniment différentiables et à support compact continu dans Ω .
$\mathcal{D}'(\Omega)$	l'espace des distributions sur Ω .
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ .
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
H_Γ	l'espace dual de $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
\mathcal{H}	l'espace $L^2(\Omega)^{d \times d}$.
\mathcal{H}_1	l'espace $\{\sigma = \mathcal{H}/\text{div}\sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \in H\}$.
$\gamma : H \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on utilise les notations suivantes.

H^N	l'espace $\{x = (x_i)/x_i \in H, \quad i = \overline{1, N}\}$.
$\mathcal{H}^{d \times d}$	l'espace $\{x = (x_{ij})/x_{ij} = x_{ji} \in H, i, j = \overline{1, N}\}$.
$(\cdot, \cdot)_H$	le produit scalaire de H .
$\ \cdot\ _H$	la norme de H .
H'	l'espace dual de H .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$	le produit de entre H' et H .
(H)	l'espace des applications linéaires et continues de H dans H .

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $K \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C([0, T]; H)$	l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H .
$C^1([0, T]; H)$	l'espace des fonctions continument dérivables de $[0, T]$ dans H .
$L^p(0, T; H)$	l'espace des fonctions f^p mesurables de $[0, T]$ dans H .
$W^{k,p}(0, T; H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p de $[0, T]$ dans H .

Si H^1 et H^2 sont deux espaces de Hilbert réels, on note par

(H^1, H^2)	l'espace des applications linéaires et continues de H^1 dans H^2 .
$\ \cdot\ _{(H^1, H^2)}$	la norme de (H^1, H^2)

D'autres symboles

ν la normale unitaire sortante à Γ .

$\vartheta_\nu, \vartheta_\tau$ les composante normale et tangentielle du champ vectoriel ϑ défini sur $\bar{\Omega}$.

Pour une fonctions f , on note

\dot{f}, \ddot{f} les dérivées première et seconde de f par rapport au temps.

$\partial_i f$ la dérivée partielle de f par rapport à la i ème composante x_i .

∇f le gradient de f .

$\varepsilon(f)$ la partie symétrique du gradient de f qui vaut $\frac{1}{2}(\nabla f + \nabla^T f)$.

$Div f$ la divergence de f .

∂f le sous différentiel (classique) de f .

Contents

Dédication	ii
Remerciement	iii
Notations	iv
Introduction	ix
1 Modélisation, Conditions aux limites de contact , Formulation des problèmes mécaniques et outils mathématiques	1
1.1 Modélisation	2
1.1.1 Rappels de la mécanique des milieux continus.	2
1.1.2 Contrainte et déformations.	2
1.1.3 Phénomènes mécaniques	3
1.1.4 La loi de comportement mécanique du matériaux	4
1.2 Conditions aux limites	7
1.2.1 Conditions aux limites aux linéaires	7
1.2.2 Conditions aux limites non linéaires	8
1.3 Formulation des problèmes mécaniques.	11
1.3.1 Cadre physique de problème mécanique	11
1.3.2 Modèles mathématiques	12
1.4 Outils Mathématique	14
1.4.1 Espaces de Sobolev	14
1.4.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	16
1.4.3 Opérateurs fortement monotones.	17

1.4.4	Enoncés de certains théorèmes	18
1.4.5	Compléments divers	24
2	Problème de contact avec frottement de réponse normale instantanée	26
2.1	Formulation du problème mécanique	27
2.1.1	Problème Mécanique	27
2.1.2	Hypothèses	29
2.2	Formulation variationnelle.	33
2.3	Existence et unicité de la solution	35
3	Problème de contact élasto-viscoplastique avec l'usure	46
3.1	Formulation du problème mécanique	47
3.1.1	Problème Mécanique	47
3.1.2	hypothèses	48
3.2	Formulation variationnelle.	51
3.3	Existence et unicité de la solution	53

Introduction

Depuis la nuit des temps, les humains se sont intéressés aux problèmes de contact avec ou sans frottement entre corps et une fondation rigide, abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le contact du sabot de frein avec la roue, du train d'atterrissage avec le sol, du piston avec la chemise, l'enfoncement progressif dans un pouf ou fauteuil lors d'une posture assise, les frottement entre plaques tectoniques, ne sont que quelques exemples quotidiens, parmi bien d'autres. La théorie mathématique de la mécanique du contact a fait impressionnante progrès ces dernières années. A présent, de nombreux résultats mathématiques et numériques traitant de divers aspects de la théorie sont dispersés à travers un variété de revues savantes et actes de conférence. Le principal intérêt de cette théorie réside dans ce qui se passe sur les frontières des domaines sous enquête. En effet, les modèles sont sous la forme d'équations variationnelles ou les inégalités avec des termes de limites non standard. Le temps est venu de mettre ces résultats et les méthodes mathématiques sous-jacentes dans un format unifié qui est plus accessible aux professionnels et aux études supérieures spécialisées étudiants. Des mesures dans ce sens ont été accomplis récemment dans le monographies de Han et Sofonea [10] et Shillor, Sofonea et Telega [17].

Le contact entre corps déformables abonde dans l'industrie et tous les jours vie. En raison de l'importance industrielle des processus physiques qui aura lieu lors d'un contact, un effort considérable a été fait dans leur modélisation, l'analyse, l'analyse numérique, et des simulations numériques. Même si on se restreint aux publications traitant uniquement avec les processus impliqués dans collage ou endommages matériels, on trouve que l'ingénierie et la littérature de calcul sur ces questions et de sujets connexes est vaste. Par ailleurs, la littérature mathématique concernant ces sujets est en croissance rapide. Outre les problèmes cités ci-dessus, il y a d'autres phénomènes réels et qui sont très importants tels que l'endommagement du matériau des corps. Le sujet d'endommagements est extrêmement important dans l'ingénierie de conception, car il affecte directement la durée de vie utile de la structure ou du composant conçu. Il existe une très grande

littérature d'ingénierie sur elle. Les modèles prenant en compte l'influence de les dommages internes de la matière sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. Nouveaux modèles généraux pour les endommagement ont été tirées dans [7,8] de la principe de la puissance virtuelle. L'analyse mathématique de problèmes unidimensionnels peut être trouvé dans [9]. Dans tous cette memoire l'endommagement du matériau est décrit par un endommagement la capacité.

Outre les problèmes cités ci-dessus, il y a d'autres phénomènes réels et qui sont très importants tels que l'endommagement du matériau et l'adhésion des corps. Le sujet d'endommagements est extrêmement important dans l'ingénierie de conception, car il affecte directement la durée de vie utile de la structure ou du composant conçu. Il existe une très grande littérature d'ingénierie sur elle. Les modèles prenant en compte l'influence de les dommages internes de la matière sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. Nouveaux modèles généraux pour les dommages ont été tirées dans [7,8] de la principe de la puissance virtuelle. L'analyse mathématique de problèmes unidimensionnels peut être trouvé dans [9]. Dans tous cette memoire l' endommagement du matériau est décrit par un endommagement la capacité. La fonction d'endommagement α varie entre 0 et 1. Quand $\alpha = 1$ il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand $\alpha = 0$ le matériau est complètement endommagé, quand $0 < \alpha < 1$ l'endommagement est partiel. Les problèmes de contact quasistatiques ont été investi dans [9-10].

Un autre phénomène sera considéré dans ce mémoire, ce phénomène a reçu récemment une très grande attention dans la littérature mathématique. L'analyse des modèles de contact avec adhésion est peut être trouver dans[1,3,8,9,10,12,21,24].

Processus d'adhésion sont importants dans l'industrie où les parties, habituellement non métallique, sont collés ensemble. Récemment, les matériaux composites ont atteint la prééminence, car ils sont très forts et la lumière, et par conséquent, d'une importance considérable dans l'aviation, l'exploration de l'espace et dans le l'industrie automobile. Cependant les matériaux composites peuvent subir une délamination sous l'effet des tensions, où les différentes couches se détachent et bougent réciproquement une par rapport à l'autre. Pour modéliser le processus quand l'assemblage n'est pas permanent et le détachement peut se produire, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

nous devons décrire le contact adhésif entre les corps, quand une colle est ajoutée pour maintenir la surface visages du mouvement relatif, a aussi récemment reçu une attention accrue dans

le littérature mathématique. L'analyse des modèles de contact adhésif peut être trouvée dans [4,5,6,14,16] et dans les monographies récemment [17,18]. Analyse des modèles pour adhésif de contact par. La nouveauté dans tous les documents ci-dessus est l'introduction d'un de surface variable interne, le domaine de liaison, désigné dans ce document par, il décrit dans cette mémoire on introduit une variable interne d'état β définie sur $\Gamma_3 \times (0, T)$ qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, quand $0 < \beta < 1$ c'est le d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Nous renvoyons le lecteur à l'étendue bibliographie sur le sujet dans [14,17].

Chacun des problèmes est étudié selon le formalisme général suivant, nous commençons par décrire le problème mécanique de départ, et, après avoir précisé les hypothèses sur les données, nous présentons une formulation variationnelle du problème mécanique pour laquelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible pour le modèle considéré. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'étude deux problèmes le premier problème de contact contact avec frottement de réponse normale instantanée pour un matériau viscoélastique non linéaire avec mémoire longue dans le processus dynamique et endommagement. deuxième problème de contact contact avec frottement et usure pour un matériau élasto-viscoplastique et endommagement dans le processus dynamique. On introduit dans la loi de comportement du corps une variable interne qui représente l'endommagement du matériau causé par la partie viscoélastique ou viséoplastique. Ce mémoire est composé de trois chapitres. Dans le premier chapitre, est modélisation au contient rappels de la mécanique des milieux continus, contrainte et déformations, phénomènes mécaniques, d'établir le modèle mathématique décrivant l'évolution entre corps et base déformable ayant une loi viscoélastique ou viscoplastique sous l'action des efforts extérieurs et rappelle de quelque notation de base de la mécanique des milieux continus. Conditions aux limites, il contient conditions aux limites linéaires. Conditions aux limites non linéaires, conditions aux limites de contact avec adhésion et conditions aux limites de contact avec frottement. Formulation des problèmes mécaniques de problème à étudier dans le processus dynamique et outils mathématiques. Dans le second chapitre, on étudie notre problème défini par le processus dynamique des matériaux viscélastiques non linéaire avec mémoire longue et endommagement. Le contact y est décrit par une condition de contact de réponse normale instantanée avec frottement. Nous dérivons une formulation

variationnelle du problème mécanique, et nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible, en utilisant des résultats sur les équations variationnelles d'évolution, suivis d'un argument de point fixe. Le problème se formule par un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement, une équation différentielle d'ordre un par rapport au champ d'adhésion. On établit un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur des arguments d'équations variationnelles, un résultat classique concernant les inéquations paraboliques et des arguments de point fixe. Le troisième chapitre de cette mémoire, est consacré à la résolution des problèmes élasto- viscoplastiques dynamiques. Des résultats d'existence et unicité de la solution faible ont été obtenus. Notre contribution originale dans ce chapitre est la suivante : Dans l'étude du problème quasistatique associé à une loi de comportement élasto-viscoplastique avec endommagement, on donne un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. La méthode est basée sur des techniques d'analyse fonctionnelle et variationnelle. Finalement, ce mémoire se termine par une conclusion dont on résumé les principaux résultats obtenus durant l'étude du problème considéré .

Chapter 1

Modélisation, Conditions aux limites de contact , Formulation des problèmes mécaniques et outils mathématiques

Dans le souci de rendre cet ouvrage facile lire, il nous est paru nécessaire de présenter le modèle mathématique décrivant l'évolution d'un corps déformable. Ceci se traduit mathématiquement par l'établissement d'un système d'équations aux dérivées partielles posées sur un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2; 3)$. Ce système comprend la loi de comportement du matériau, l'équation du mouvement du corps ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est divisé en quatre paragraphes, le premier paragraphe est modélisation, il contient rappels de la mécanique des milieux continus, contrainte et déformations, phénomènes mécaniques et la loi de comportement mécanique du matériaux

Le deuxième paragraphe est conditions aux limites, il contient conditions aux limites linéaires, Conditions aux limites non linéaires, conditions aux limites de contact avec adhésion et conditions aux limites de contact avec frottement.

Le troisième paragraphe est formulation des problèmes mécaniques,il contient aux cadre physique de problème mécanique et modèles mathématiques.

Le dernier paragraphe est outils mathématique,il contient aux espaces de Sobolev, espaces des fonctions à valeurs vectorielles, opérateurs fortement monotones, énoncés de certains théorèmes.

1.1 Modélisation

1.1.1 Rappels de la mécanique des milieux continus.

Dans cette partie, après quelques rappels de mécanique des milieux continus, en partant de la modélisation du problème physique, nous présentons le formalisme des lois de comportement viscoélastiques, viscoplastique, élasto- viscoélastiques et élasto-viscoplastique. Ensuite, nous rappelons le système d'équations aux dérivées partielles qui seront l'objet de notre étude. Pour compléter le modèle, on présente quelques considérations physiques sur les conditions aux limites de contact avec ou sans frottement.

1.1.2 Contrainte et déformations.

On considère un corps déformable occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, et ayant une frontière Γ supposée assez régulière. L'objet du problème, du point de vue mécanique est l'étude dans un intervalle de temps $[0, T]$ l'évolution du corps matériel due à l'application des forces extérieures sur l'intérieur du corps et sur sa frontière.

Les inconnues du problème sont le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$. La définition intuitive du champ des déplacements est la suivante: Si un point matériel p se trouvait initialement en $x \in \Omega$, dans le nouvel équilibre il se retrouve dans la position $x + u(x) \in \mathbb{R}^d$. La connaissance du champ des déplacements u nous permet de trouver Ω , la configuration d'équilibre du corps matériel.

La définition du champ des contraintes est l'ensemble des forces de réaction qui se développent à l'intérieur d'un corps sous l'effet de charges extérieures.

Dans la suite, on va considérer des matériaux élasto-viscoplastiques dans le cadre des petites transformations. Dans ce cas, on a besoin du champ des déformations linéarisés $\varepsilon : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$ défini par :

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \quad (1.1.1)$$

où ∂_k représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_k . On précise en outre qu'on adopte la convention de l'indice muet. Souvent, pour marquer la dépendance du champ des déformations ε par rapport au champ des déplacements u , on va le noter $\varepsilon(u)$ les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus, elles

doivent être complétées par d'autres relations caractérisant le comportement de chaque matériau, ce sont les lois de comportement que nous décrivons dans la section suivante.

1.1.3 Phénomènes mécaniques

Dans ce paragraphe exact, la note traite de quatre phénomènes, à savoir aux l'endommagement, l'adhésion, l'usure et le frottement

L'endommagement

L'endommagement est un phénomène très important en ingénierie, car il affecte directement la structure des machines. Il existe une littérature abondante sur ce sujet. Des modèles introduisant l'influence de l'endommagement interne du matériau ont été investis mathématiquement. Des modèles de l'endommagement ont été développés dans [20; 21] à partir du principe de la puissance virtuelle.

La fonction d'endommagement α varie entre 0 et 1. Quand $\alpha = 1$ il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand $\alpha = 0$ le matériau est complètement endommagé, quand $0 < \alpha < 1$, l'endommagement est partiel. Les problèmes de contact quasistatique avec endommagement ont été investis dans [22; 23; 24; 39]. Dans cette mémoire la relation utilisée pour modéliser l'évolution du champ d'endommagement est la suivante

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni \phi(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha)$$

où K est l'ensemble des fonctions test admissibles d'endommagement, ϕ étant la fonction source de l'endommagement.

L'adhésion

Les processus d'adhésion sont importants dans de nombreux montages industriels où les éléments habituellement non-métalliques sont collés ensemble. Récemment des matériaux composites faits de couches de matériaux simples prennent un grand intérêt car ils sont très résistants et légers, et ainsi d'une grande importance en aviation, en exploration spatiale et dans l'industrie automobile. Cependant, sous les contraintes, les matériaux composites des différentes couches se décollent et se déplacent l'une par rapport à l'autre. C'est l'une des raisons de l'importance des processus d'adhésion dans les applications industrielles.

L'usure

L'usure est un problème majeur pour les matériaux. Lorsque deux corps entrent en contact avec frottement et glissement, les surfaces en contact s'en retrouvent usées, la surface la plus rigide use l'autre, les particules ainsi perdues des surfaces en contact forment alors une couche entre des corps est fondation.

Le frottement

Le frottement est causé par les irrégularités d'une surface. Bien qu'une surface puisse paraître lisse à l'oeil nu, des petites aspérités (des irrégularités) sont présentes sur la surface d'un objet lorsqu'on le regarde au microscope. Il faut également considérer la force normale. Cette force est en lien direct avec la force gravitationnelle, puisqu'elle est généralement en action-réaction. Plus la force normale est grande, plus la force de frottement sera grande.

1.1.4 La loi de comportement mécanique du matériaux

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement.

Ce sont des relations entre le vecteur déplacement \mathbf{u} , le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur des déformations linéarisées $\boldsymbol{\varepsilon}$ et traduisent le comportement du matériau. Dans ce paragraphe aux les équations d'équilibre, la loi de comportement viscoélastique avec endommagements, la loi de comportement viscoplastique avec endommagements, la loi de comportement viscoélastique avec mémoire longue et endommagements, la loi de comportement élasto viscoélastique avec endommagements et la loi de comportement élasto viscoplastique avec endommagements.

Les équations d'équilibre

La loi fondamentale de la mécanique des milieux continus exprimant l'équivalence entre des efforts extérieurs et le tenseur des accélérations pour un système quelconque, conduit à l'équation du mouvement.

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{Div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \quad (1.1.2)$$

dans cette équation, ρ désigne la densité de masse, \ddot{u} est le champ des accélérations, $f_0 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ des densités des forces volumiques appliquées sur le corps et qui sont des données du problème, $\text{Div } \sigma$ est la divergence du champ des contraintes. Ces processus d'évolutions modélisées par (1.1.2) s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations l'équation (1.1.2) peut se simplifier, par exemple dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un processus d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesses \dot{u} varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho\ddot{u}$ peut être négligé (processus quasistatiques). Dans ces deux cas l'équation (1.1.2) devient

$$\text{Div } \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.1.3)$$

La loi de comportement viscoélastique avec endommagements

L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes, les huiles et les cires, a mis en évidence que certains phénomènes, tels que le fluage et la relaxation, ne peuvent être décrits par les lois de comportement élastiques. C'est pour cela que les lois viscoélastiques ont été introduites. Elles décrivent le comportement des matériaux comme les métaux, les polymères, les caoutchoucs et les roches.

Nous envisageons ici des matériaux qui ont des propriétés élastiques, mais en même temps, les essais de chargement monotone indiquent que la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ dépend de $\dot{\varepsilon} = \varepsilon(\dot{\mathbf{u}})$. Ce sont les matériaux viscoélastiques. Parmi les lois viscoélastiques, nous citons la loi viscoélastique de Kelvin-Voigt qui s'écrit

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\varepsilon(u).$$

où \mathcal{A} représente l'opérateur de viscosité et \mathcal{G} est l'opérateur de élasticité. Si nous prenons en considération l'effet de l'endommagement du matériau durant le contact, nous arrivons une généralisation de la loi précédente qui est la loi de comportement viscoélastique avec endommagement ayant la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}\varepsilon(\mathbf{u}, \alpha).$$

La fonction α représente l'endommagement dont l'évolution est décrite par l'inclusion différentielle suivante

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_k(\alpha) \ni S(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha) \quad \text{dans } \Omega.$$

où K est l'ensemble des fonctions admissibles d'endommagement défini par

$$K = \{ \xi \in H^1(\Omega) / 0 \leq \xi \leq 1 \quad p \cdot p \cdot \quad \text{dans } \Omega \} .$$

k est une constante positive, $\partial\varphi_k$ représente le sous différentiel de la fonction indicatrice de l'ensemble K et S est une fonction constitutive donnée qui décrit les sources de l'endommagement dans le système.

Notons que les valeurs de la fonction d'endommagement α sont comprises entre zéro et un. Quand $\alpha = 1$ il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand $\alpha = 0$, le matériau est complètement endommagé, quand $0 \leq \alpha \leq 1$ il y a un endommagement partiel et le système a une capacité de résistance réduite.

Lois de comportement viscoplastique avec endommagement

Les lois de comportement viscoplastique sont des constitutives qui peuvent modéliser en même temps, les phénomènes décrits par les essais de charge-décharge et les phénomènes dépendant du temps (relaxation et fluage). Ces lois sont appelées en réalité lois viscoplastiques mais, pour simplifier la terminologie, nous les appellerons viscoplastiques.

Une loi de comportement viscoplastique s'écrit

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha).$$

avec \mathcal{A} un tenseur d'ordre quatre, \mathcal{G} une fonction constitutive et α représente l'endommagement mentionné précédemment.

La loi de comportement viscoélastique avec mémoire longue et endommagements

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{G}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{F}((t-s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \alpha(s))ds,$$

où $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{ij})$ est un tenseur de relaxation. Si $\mathcal{F} = 0$, on retrouve la loi viscoélastique.

La loi de comportement élasto viscoplastique avec endommagements

Un matériau est dit élasto-viscoplastique si sa loi de comportement est de la forme

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \alpha(s))ds,$$

\mathbf{u} représente le champ de déplacement et $\varepsilon(u)$ est le champ de tenseur linéaire. \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des fonctions de viscosité et élasticité non linéaire, respectivement, \mathcal{G} représente le tenseur de viscoplasticité où α est une variable interne représentant l'endommagement du matériau causé par déformations plastiques.

1.2 Conditions aux limites

On définit maintenant les conditions aux limites mécaniques sur chaque partie de Γ_3 . Ils peuvent être résumés dans les points suivants et ils sont conditions aux limites linéaires, conditions aux limites non linéaires, conditions aux limites de contact avec adhésion et conditions aux limites de contact avec frottement.

1.2.1 Conditions aux limites aux linéaires

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et Γ la frontière de Ω est divisé trois partie Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 tel que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, et soit ν le vecteur normal unitaire extérieur à Γ .

La condition aux limites de déplacement

On considère le condition en limite suivante:

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times [0, T]. \quad (1.2.1)$$

La condition (1.2.1) est appelée condition aux limites de déplacement. Sa signification consiste à ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière consiste à ce que le champ des déplacements est imposé sur la partie Γ_1 de la frontière Γ .

Si $\Gamma_1 = \emptyset$ le problème aux limites est un problème de traction pur.

La condition aux limites de traction.

Soit un corps déformable occupant un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et ayant une frontière Γ . On suppose que Γ est de la forme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ soit ν le vecteur normal unitaire extérieure à Γ . On considère le condition en limite suivante

$$\sigma\nu = f_2 \text{ sur } (\Gamma_2 \times [0, T]). \quad (1.2.2)$$

La condition (1.2.2) condition aux limites de traction. Sa signification consiste ce que le vecteur contrainte de Cauchy $\sigma\nu$ est imposée sur la frontière Γ_2 de la frontière Γ .

Si $\Gamma_2 = \emptyset$ le problème aux limites est un problème de déplacement pur.

Si les parties Γ_1 et Γ_2 sont toutes les deux de mes Γ_1 le problème considéré est un problème mixte déplacement-traction.

1.2.2 Conditions aux limites non linéaires

Conditions aux limites de contact avec adhésion

les conditions aux limites d'adhésion. On va d'écrire les conditions de contact avec adhésion sur $\Gamma_3 \times (0, T)$ on introduit une variable interne d'état β définie sur $\Gamma_3 \times (0, T)$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$.

Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont desactives et il n'y a pas d'adhésion ; et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens.

Le processus est suppose être gouverné par l'équation différentielle

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \zeta_\beta, R(\|u_\tau\|)) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.2.3)$$

Où H_{ad} est une fonction générale qui s'annule quand le premier de ses variables s'annule. La fonction $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une troncature définie par

$$R(s) = \begin{cases} L & \text{si } s \geq L \\ s & \text{si } |s| \leq L \\ -L & \text{si } s \leq -L \end{cases} \quad (1.2.4)$$

où $L > 0$ est la longueur caractéristique des liens.

On considère la possibilité d'une diminution de la capacité de collage quand les cycles de collage et de décollage continuent. Par conséquent, le processus est supposé dépendre de l'histoire d'adhésion qu'on note par

$$\zeta_\beta(x, t) = \int_0^t \beta(x, s) ds. \quad (1.2.5)$$

Conditions aux limites de contact sans frottement

Supposons que $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, avec $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ pour $i \neq j, i, j = 1, 2, 3$. Sur Γ_1 et Γ_2 on impose les conditions aux limites de déplacement traction (1.2.1),(1.2.2) et sur Γ_3 on décompose le déplacement et le tenseur de contraintes en composante normale et tangentielle. On note par \mathbf{v}_ν et \mathbf{v}_τ la composante normale et respectivement tangentielle de tout champ vectoriel

$$\mathbf{v}_\tau = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\nu \boldsymbol{\nu}, \quad \mathbf{v}_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}. \quad (1.2.6)$$

De même, soit σ_ν et σ_τ la composante normale et respectivement tangentielle du tenseur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$. Il vient: $\sigma_\nu = (\sigma\nu)_\nu, \sigma_\tau = (\sigma\nu)_\tau$, c'est à dire:

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu)\boldsymbol{\nu}, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}. \quad (1.2.7)$$

Pour donner un sens à la décomposition précédente, on suppose que Γ_3 est de régularité C^1 . Nous supposons que le corps élastique peut entrer en contact avec une base rigide S .

On dit que le contact entre le corps et la base rigide S est sans frottement, si les mouvements tangentiels sont libres, ce qui se traduit par:

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3. \quad (1.2.8)$$

Contact bilatéral

Nous parlons d'un contact bilatéral s'il n'y a pas de séparation entre le corps et la fondation, autrement dit le contact est maintenu tout au long du processus. Cette condition est exprimée par la relation suivante

$$\mathbf{u}_\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.2.9)$$

Conditions aux limites de contact avec frottement.

Réponse normale instantanée et frottement

La condition dite de la réponse normale instantanée sur la surface potentielle de contact $\Gamma_3 \times (0, T)$ s'écrit:

$$-\sigma_\nu = P_\nu(\dot{u}_\nu).$$

Où u_ν désigne la vitesse normale et P_ν est une fonction prescrite telle que $P_\nu(r) = 0$ par $r \leq 0$. Cette égalité traduit une dépendance générale de la contrainte normale par rapport à la vitesse

normale, elle peut représenter le comportement d'une couche de lubrifiant sur la surface de contact.

$$P_\nu(r) = K_\nu r_+ \quad \forall r \in \mathbb{R}.$$

Où $K_\nu \geq 0$, la résistance de la fondation à la pénétration est proportionnelle à la vitesse normale. Ce type de comportement modélisant le mouvement d'un corps déformable sur le sable ou sur un matériau granulaire.

La loi de frottement associée est donnée par

$$-\sigma_\tau = P_\tau(\dot{u}_\tau).$$

Ici la loi est sans seuil et dit que le cisaillement tangentiel sur la surface de contact est une certaine fonction de vitesse tangentielle. Sur la surface de contact est une certaine fonction de vitesse tangentielle.

Dans le cas où

$$P_\tau(r) = \mu r \quad \forall r \in \mathbb{R}^d.$$

Montre que le cisaillement tangentiel est proportionnel à la vitesse tangentielle. Tel est le cas quand la surface de contact est lubrifiée par une fine couche de fluide non newtonien, μ représente le coefficient de frottement, suppose positif. Nous pouvons également envisager d'autres exemples de fonctions de contact données par

$$p_\nu(r) = k (r_+)^m + p_0.$$

$$p_\tau(r) = \mu |r|^{m-1} r.$$

Où $r = \max\{0, 1\}$ et $0 \leq m \leq 1$ est un coefficient fixe et p_0 peut jouer le rôle de la pression de l'huile qui est donnée et positive.

contact bilatéral avec frottement et usure

Le corps est supposé entrer en contact avec une fondation rigide, se déplaçant à la vitesse \mathbf{v}^* . Ce contact est supposé toujours maintenu au cours de l'étude du phénomène. Décrivons la condition de contact entre corps et Fondation rigide. Ici, la relation

$$\mathbf{u}_\nu = -w. \tag{1.2.10}$$

Où w est la fonction d'usure $w : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ reste valide afin de représenter l'effet de l'usure sur la surface de contact Γ_3 . Cette dernière égalité montre que la position de contact dépend de l'usure.

On suppose que pendant l'évolution du phénomène, la surface de contact se réarrange de sorte que la vitesse tangentielle soit négligeable. La vitesse de glissement ne sera ainsi que la vitesse $v^* = \|\mathbf{v}^*\| > 0$. La relation (1.2.13) entraîne

$$\sigma_\nu = \alpha \|\dot{\mathbf{u}}_\nu\|, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.2.11)$$

Où

$$\alpha = \frac{1}{k \|\mathbf{v}^*\|}. \quad (1.2.12)$$

Le frottement suit la loi donnée par

$$\sigma = -\lambda(u_\nu^* - v^*), \lambda \geq 0, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T] \quad (1.2.13)$$

Nous modélisons le contact de frottement entre le corps et la fondation avec compliance normale comme suit

$$\begin{cases} \sigma_\nu = p_\nu(u_\nu - \omega - g), & \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T] \\ \sigma_\tau = -p_\tau(u_\nu - \omega - g) \frac{v^*}{\|\mathbf{v}^*\|}, & \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T]. \end{cases} \quad (1.2.14)$$

1.3 Formulation des problèmes mécaniques.

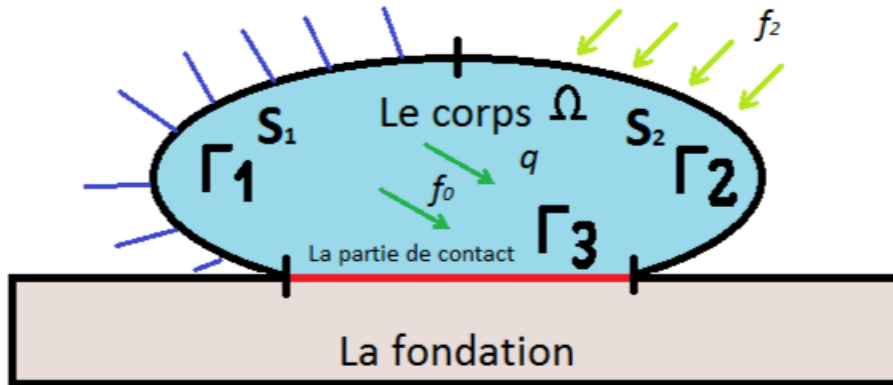
Ce paragraphe introduit les cadres physiques et par suite mathématiques utilisés dans cette mémoire.

1.3.1 Cadre physique de problème mécanique

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une surface frontière régulière, partitionnée en trois parties disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , telles que $mes\Gamma_1 > 0$. Nous notons par ν la normale unitaire sortante à Γ .

Soit $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps considéré. Le corps est encastré sur Γ_1 dans une structure fixe. Sur Γ_2 agissent des tractions surfaciques de densité f_2 , dans Ω agissent des forces volumiques de densité f_0 . Nous supposons que f_2 et f_0 varient très lentement par rapport au

temps . Le corps est en contact avec frottement avec ou sans adhésion avec un obstacle sur la partie Γ_3 . Nous prenons en considération les propriétés mécaniques du corps. Notre objectif sera d'étudier l'évolution de ces propriétés dans le temps, sous l'hypothèse des petites transformations. Nous utiliserons ce cadre physique dans ce mémoire.



1.3.2 Modèles mathématiques

L'évolution d'un corps déformable sous l'action des efforts extérieurs est modélisée mathématiquement par un système d'équations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement (ou d'équilibre) du corps, la loi de comportement du matériau ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis. On considère dans les chapitres deux et trois de matériaux ayant des lois de comportement viscoélastiques avec endommagement soumis à des conditions aux limites de contact avec adhésion citées dans les paragraphes précédents, dans le cas dynamique. Plus précisément, les problèmes mécaniques qu'on va étudier sont les suivants

Problème 01

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\boldsymbol{\alpha} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ d'adhésion $\boldsymbol{\beta} : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$

tell que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}(t) &\in \mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) + \partial \mathbf{w}(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t))) && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
&\quad + \int_0^t \mathcal{F}((t-s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\alpha}(s)) ds, \\
\rho \ddot{\mathbf{u}} &= \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0, && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
\dot{\boldsymbol{\alpha}} - k\Delta \boldsymbol{\alpha} + \partial \varphi_k(\boldsymbol{\alpha}) &\ni \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\alpha}), && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
\mathbf{u}(t) &= \mathbf{0}, && \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\
\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} &= \mathbf{f}_2, && \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \\
-\boldsymbol{\sigma}_\nu(t) &\in \partial \mathbf{h}(\dot{\mathbf{u}}_\nu(t)), && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\
-\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) &\in \partial \Psi(\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)), && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\
\dot{\boldsymbol{\beta}} &= \mathbf{H}_{ad}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\zeta}_\beta, \mathbf{R}(\|\mathbf{u}_\tau\|)), && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\
\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= \mathbf{0}, && \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\
\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\alpha}(0) &= \boldsymbol{\alpha}_0, && \text{dans } \Omega \\
\boldsymbol{\beta}(0) &= \boldsymbol{\beta}_0, && \text{sur } \Omega.
\end{aligned}$$

Problème 2

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\boldsymbol{\alpha} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tell que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
&\quad + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\alpha}(s)) ds, \\
\rho \ddot{\mathbf{u}} &= \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0, && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
\dot{\boldsymbol{\alpha}} - k\Delta \boldsymbol{\alpha} + \partial \varphi_K(\boldsymbol{\alpha}) &\ni \mathbf{S}(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\alpha}), && \text{dans } \Omega \times (0, T) \\
\mathbf{u} &= \mathbf{0}, && \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\
\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} &= \mathbf{f}_2, && \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \\
\begin{cases} -\boldsymbol{\sigma}_\nu = -\boldsymbol{\alpha} \|\dot{\mathbf{u}}_\nu\|, \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = -\mu\boldsymbol{\sigma}_\nu \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda(\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*), \quad \lambda \geq 0 \end{cases} &&& \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \\
\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= \mathbf{0}, && \text{sur } \Gamma \times (0, T) \\
\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\alpha}(0) &= \boldsymbol{\alpha}_0, && \text{dans } \Omega
\end{aligned}$$

1.4 Outils Mathématique

Dans ce chapitre, nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire, et nous donnons quelques propriétés nécessaires dans la suite.

1.4.1 Espaces de Sobolev

Introduisons les espaces de Hilbert suivants,

$$H = \{u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega)\}, \quad \mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}.$$

$$H_1 = \{u = (u_i) / u_i \in H^1(\Omega)\}, \quad \mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H} / \sigma_{ij,j} \in H\}.$$

Les espaces H , \mathcal{H} , H_1 et \mathcal{H}_1 sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires donnés respectivement, par

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx \quad , \quad (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx,$$

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_H \quad , \quad (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma, \tau)_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, \text{Div } \tau)_{\mathcal{H}}.$$

Où $\varepsilon : H_1 \longrightarrow \mathcal{H}$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow H$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par:

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{i,j}(u)), \quad \varepsilon_{i,j}(u) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces H , \mathcal{H} , H_1 et \mathcal{H}_1 sont notées par $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ respectivement.

Puisque la frontière Γ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ . Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \longrightarrow L^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_{Γ} ; ce sous espace s'injecte continument dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_{Γ} le dual de H_{Γ} et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre H'_{Γ} et H_{Γ} . Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément $\sigma\nu \in H'_{\Gamma}$ tel que

$$(\sigma\nu, \gamma v) = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1. \quad (1.4.1)$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v) = \int_{\Gamma} \sigma\nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1.$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule suivante

Formule de Green

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\text{Div}\sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1. \quad (1.4.2)$$

Nous définissons le sous espace fermé de H_1

$$V = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (1.4.3)$$

Inégalité de korn

Théorème 1.4.1 *Soit mes $\Gamma_1 > 0$. Alors il existe une constante $C > 0$ qui dépend de Ω et Γ_1 telle que*

$$\|\varepsilon(u)\|_{\mathcal{H}} \geq C \|u\|_{H_1} \quad \forall u \in V. \quad (1.4.4)$$

Inégalité de Friedrichs Poincaré

Théorème 1.4.2 *Soit $\xi \in H$*

$$\|\nabla \xi\|_H \geq c_F \|\xi\|_{H_1(\Omega)} \quad \forall \xi \in H. \quad (1.4.5)$$

Où $c_F > 0$ est une constante qui dépend uniquement de Ω et Γ et $\nabla \xi = \xi_i$

Inégalité de Hölder

Théorème 1.4.3 *Soit $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ $\forall p, q > 0$ et*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.4.6)$$

Théorème de représentation de Riesz-Fréchet

Théorème 1.4.4 *Etant donné $\eta \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que*

$$\langle \eta, v \rangle_{H' \times H} = \langle f, v \rangle_H \quad \forall v \in H. \quad (1.4.7)$$

De plus

$$\|\eta\|_{H'} = \|f\|_H.$$

Ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter de manière unique à l'aide du produit scalaire. L'application $\eta \rightarrow f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et son dual H'

Théorème 1.4.5 Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire sur $H \times H$ La forme a est dit

1. continue s'il exist un réel $M > 0$ tel que

$$\| a(u, v) \| \leq M \| u \|_H \| v \|_H \quad \forall u, v \in H. \quad (1.4.8)$$

2. coercive s'il exist un réel $m > 0$ tel que

$$a(u, u) \geq m \| u \|_H^2 \quad \forall u \in H. \quad (1.4.9)$$

Remarque 1.4.6 Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur et $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ la forme définie par

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle_H \quad \forall u, v \in H. \quad (1.4.10)$$

On a alors les propriétés suivantes

i a est bilinéaire si et seulement si A est linéaire.

ii a est continu si et seulement si A est continu.

iii a est coercive si et seulement si A est défini positif.

1.4.2 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaun résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel.

Soit $0 < T < \infty$ et soit (X) un espace de Banach réel. Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $(0, T)$ à valeur dans X .

Définition 1 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonction appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $\| f_n(t) - f(t) \|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in (0, T) \setminus E$

Définition 2 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t \| f_n(t) - f(t) \|_X dt = 0.$$

On rappelle que $W^{k,p}(0, T; H)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in D'(0, T; H)$ telle que $D_J u \in L^p(0, T; H)$ pour $J = 0, k$, D_J désignant la dérivée d'ordre j au sens des distributions.

Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{k,p}(0, T; H)$ est un espace de Banach réel pour la norme définie par

$$(u, v)_{W^{k,p}(0, T; H)} = \sum_{j=0}^k \int_0^t (D_J u(t), D_J v(t))_H dt.$$

En particulier, $W^{k,p}(0, T; H)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$\|u\|_{W^{k,p}(0, T; H)} = \sum_{j=0}^k \sup \text{ess} \|D_J u(t)\|_H \quad \forall u \in W^{k,p}(0, T; H).$$

Pour cas particulier $k = 0$, on remarque que

$$W^{0,p}(0, T; H) = L^p(0, T; H).$$

1.4.3 Opérateurs fortement monotones.

Dans cette section nous commençons par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et de la norme associée $\|\cdot\|_H$ et $A : H \rightarrow H$ un opérateur non-linéaire.

L'opérateur A est dit

1. fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$\langle Au - Av, u - v \rangle_H \geq m \|u - v\|_H^2 \quad \forall u, v \in H. \quad (1.4.11)$$

2. de Lipschitz sil existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_H \leq M \|u - v\|_H \quad \forall u, v \in H. \quad (1.4.12)$$

Nous avons le résultat suivant

Théorème 1.4.7 *Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in H$ il existe un élément unique $Au = f$.*

Le résultat précédent est un cas particulier du théorème de Minty-Browder. Il nous prouve tout opérateur $A : H \rightarrow H$ fortement monotone et de Lipschitz est inversible. Plus précisément, on a

Théorème 1.4.8 *Soit $A : H \rightarrow H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors son inverse $A^{-1} : H \rightarrow H$ est également fortement monotone et de Lipschitz.*

1.4.4 Énoncés de certains théorèmes

Banach: point fixe

Théorème 1.4.9 Soit X un espace de Banach, K est un ensemble fermé et non vide de X . On suppose que $\Lambda : K \rightarrow K$

1. Λ est une contraction, i.e, $\alpha \in]0, 1[$, tel que:

$$\|\Lambda u - \Lambda v\| \leq \alpha \|u - v\| \quad \forall u, v \in K. \quad (1.4.13)$$

donc il existe une solution unique $u \in K$ de l'équation $\Lambda u = u$, i.e Λ a un point fixe unique dans K .

2. Λ^m est une contraction pour m un entier positif, donc Λ admet un point fixe unique dans K .

Fonctions convexes

On considère une fonction φ définie sur un espace vectoriel réel X et a valeur dans $] -\infty, +\infty]$. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v) \quad \forall u, v \in X, t \in]0, 1[. \quad (1.4.14)$$

On appelle la fonction indicatrice de K la fonction $\Psi_K : H \rightarrow] -\infty, +\infty]$ définie par

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ +\infty & \text{si non} \end{cases}$$

Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous-ensemble de l'espace X .

Définition 3 On dit que la fonction $\varphi : H \rightarrow] -\infty, +\infty]$ est sous différentiable en un point $u \in H$ s'il existe $f \in H$ tel que

$$\varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H \quad \forall v \in H. \quad (1.4.15)$$

Définition 4 Soit une fonction φ est alors appelé un sous gradient en u et l'ensemble des sous gradients de φ en u appelé le sous-différentiel de φ en u est noté $\partial\varphi(u)$:

$$\partial\varphi(u) = \{f \in H / \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u)_H, \quad \forall v \in H\}.$$

Le crochet $(\cdot; \cdot)$ désignant la dualité entre X' et X .

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u . La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

Nous pouvons ainsi caractériser le sous différentiel $\partial\varphi_K(u)$ d'une fonction indicatrice φ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial\varphi_K(u) = \{u' \in H' / \langle u', v - u \rangle_H \leq 0 \quad \forall v \in K\}. \quad (1.3.16)$$

Inéquation variationnelle hyperbolique d'évolution

Comme précédemment, soit V un espace de Hilbert doté du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et la norme associé $\|\cdot\|_H$. Soit maintenant un opérateur $A : V \rightarrow V'$, $K \subseteq H$, $j : H \rightarrow]-\infty; +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$.

Dans le reste de l'article, nous notons C une constante dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre. étant donné un opérateur linéaire $A : V \rightarrow V'$, un fonctionnel $\varphi : V \rightarrow]-\infty; +\infty]$, $f \in V'$ et $\mathbf{u}(0) = u_0$, $\dot{\mathbf{u}}(0) = v_0 \in V$, nous considérons l'inégalité variationnelle hyperbolique évolutive de la forme suivante

Problème I

Trouver $u \in L^2(0, T; V)$ $\dot{u} \in C(0, T; H)$ tel que

$$\begin{cases} (\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t))_H + (A(u(t)), v - \dot{u}(t))_{H'} + \varphi(v) \\ \quad - \varphi(\dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t)), \\ \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad \text{pour tout } v \in V. \\ \mathbf{u}(0) = u_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = v_0. \end{cases}$$

Nous imposons les hypothèses suivantes aux données du problème I.

H(A): L'opérateur $A \in L(V, V')$ est symétrique et coercitif, c'est-à-dire qu'il existe une constante $a > 0$ telle que

$$(Au, v)_{L(V, V')} = (Av, u)_{L(V, V')} \quad \text{et} \quad (Au, u)_{V \times V'} > a\|u\|_V^2 \quad \text{pour tout } u, v \in V.$$

H(φ): La fonctionnelle $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est une vraie convexe et semi-continue inférieure.

H(f): $f \in H^2(0, T; V')$.

(H_{aux}) : La condition suivante s'applique: $v_0 \in D(\partial\varphi)$ et il existe $z_0 \in H$ tel que

$$(z_0, v - v_0) + \langle Au_0, v - v_0 \rangle + \varphi(v) - \varphi(v_0) \geq \langle f(0), v - v_0 \rangle$$

pour tout $v \in V$, où $u_0, v_0 \in V$.

Théorème 1.4.10 Soit $A : V \rightarrow V'$, un fonctionnel $\varphi : V \rightarrow]-\infty; +\infty]$, $f \in V'$ et $\mathbf{u}(0) = u_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = v_0 \in V$, satisfaites les hypothèses **H(A)**, **H(φ)**, **H(f)** et **H_{aux}**. Alors l'inéquation variationnelle hyperbolique admet une solution unique $\mathbf{u} \in C^1(0, T; V)$ tel que.

$$\dot{\mathbf{u}} \in C(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \ddot{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; H)$$

Il est également utile d'observer que le problème I a une autre formulation équivalente fournie par le résultat suivant.

Proposition 1.4.11 Un élément $u \in V$ est une solution du problème I si et seulement s'il résout l'inégalité suivante: trouver $u \in L^2(0, T; V)$ tel que $u \in C(0, T; H)$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t (\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t))_H dt + \int_0^t (A(u(t)), v - \dot{u}(t))_H dt + \int_0^t \varphi(v)(t) dt \\ - \int_0^t \varphi(\dot{u}(t)) dt \geq \int_0^t (f(t), v(t) - \dot{u}(t)) dt, \\ \text{pour tout } v \in V. \\ \mathbf{u}(0) = u_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = v_0. \end{array} \right.$$

Nous passons maintenant à la formulation de la méthode de Rothe pour le problème I. Elle consiste en une discrétisation temporelle dans laquelle nous définissons une séquence approximative en utilisant une formule d'Euler implicite (en arrière). Ensuite, à chaque pas de temps, nous allons résoudre une inclusion d'opérateur stationnaire. Enfin, nous construisons les interpolants constants par morceaux et affines par morceaux et prouvons un résultat de convergence.

Remarque 1.4.12 Le problème I a été étudié dans Kaciveli [9, 10] dans un cas particulier où φ est la fonction indicatrice I_K d'un ensemble fermé et convexe non vide K dans un espace de Hilbert V , c'est-à-dire

$$I_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K \\ +\infty & \text{si non.} \end{cases}$$

Dans ce cas, le problème I se réduit à l'inégalité variationnelle hyperbolique suivante: trouver un élément $u \in L^2(0, T; V)$ tel que $u \in C(0, T; H)$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t (\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t))_H dt + \int_0^t (A(u(t)), v - \dot{u}(t))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^T \varphi(v)(t) dt \\ - \int_0^t \varphi(\dot{u}(t)) dt \geq \int_0^t (f(t), v(t) - \dot{u}(t)) dt, \\ \text{pour tout } v \in V. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{u}(0) = u_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = v_0.$$

Etant donné un opérateur linéaire $A, B : V \rightarrow V'$, un fonctionnel $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathbf{u}(0) = u_0, \dot{\mathbf{u}}(0) = v_0 \in V$, nous considérons l'inégalité variationnelle hyperbolique évolutive de la forme suivante

Problème II

Trouver $u \in L^2(0, T; V)$, $\dot{u} \in C(0, T; H)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t))_H + (A(\dot{u}(t)), v - \dot{u}(t))_{\mathcal{H}} + (B(u(t)), v - \dot{u}(t))_{\mathcal{H}} + j(v, v) \\ - j(v, \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t)). \\ \text{p.p. } t \in (0, T), \quad \text{pour tout } v \in V. \end{array} \right.$$

$$\mathbf{u}(0) = u_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = v_0.$$

Nous imposons les hypothèses suivantes aux données du problème II.

H(1) Il existe constante $M_B > 0$ tel que

$$\langle B(u_1) - B(u_2), u_1 - u_2 \rangle \geq M_B \|u_1 - u_2\|_V^2 \quad \forall u_1, u_2 \in V.$$

H(2) Il existe constante $L_B > 0$ tel que

$$\|B(u_1) - B(u_2)\|_{V'} \geq L_B \|u_1 - u_2\|_V \quad \forall u_1, u_2 \in V.$$

H(3) L'opérateur $A \in L(V, V')$ est fortement monotone, i.e, il existe constante $M_A > 0$ tel que

$$\langle A(u), u \rangle \geq M_A \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V.$$

H(4) La norme de A est L_A , i.e .

$$\| A(u) \|_{V'} \leq L_A \| u \|_V \quad \forall u \in V.$$

H(5) Pour tout $u, v \in V$

$$\langle Au, v \rangle = \langle Av, u \rangle$$

H(6) Il existe constante $L_j > 0$ tel que

$$j(g_1, v_2) + j(g_2, v_1) - j(g_1, v_1) - j(g_2, v_2) \leq L_j \| g_1 - g_2 \|_V \| v_1 - v_2 \|_V \quad \forall g_1, g_2, v_1, v_2 \in V$$

H(7) Il existe constante $C_j > 0$ tel que

$$j(g, v_1) - j(g, v_2) \leq C_j \| g \|_V \| v_1 - v_2 \|_V,$$

$$j(v_1, g) - j(v_2, g) \leq C_j \| g \|_V \| v_1 - v_2 \|_V, \quad \forall g, v_1, v_2 \in V.$$

H(8) Fonction f satisfait

$$f \in H^2(0, T; V').$$

H(9) Pour tout $u \in V$

$$j(u, \cdot) \text{ est fonction convexe dans } V, \quad u \in V.$$

Théorème 1.4.13 Soit $A, B : V \rightarrow V'$, un fonctionnel $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in V'$ et $\mathbf{u}(0) = u_0$, $\dot{\mathbf{u}}(0) = v_0 \in V$, satisfaites les hypothèses **H (1)- H(9)** . Alors l'inéquation variationnelle hyperbolique de admet une solution unique $\mathbf{u} \in C^1(0, T; V)$ tel que.

$$\dot{\mathbf{u}} \in C(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V), \ddot{\mathbf{u}} \in L^\infty(0, T; H)$$

Il est également utile d'observer que le problème I a une autre formulation équivalente fournie par le résultat suivant.

Proposition 1.4.14 *Un élément $u \in V$ est une solution du problème I si et seulement s'il résout l'inégalité suivante: trouver $u \in L^2(0, T; V)$ tel que $u \in C(0, T; H)$ et*

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t (\ddot{u}(t), v - \dot{u}(t))_H dt + \int_0^t (A(\dot{u}(t)), v - \dot{u}(t))_{\mathcal{H}} dt + \int_0^t (B(u(t)), v - \dot{u}(t))_{\mathcal{H}} dt \\ + \int_0^t j(v)(t) dt \quad - \int_0^t j(\dot{u}(t)) dt \geq \int_0^t (f(t), v(t) - \dot{u}(t)) dt. \\ \text{pour tout } v \in V. \end{array} \right.$$

$\mathbf{u}(0) = u_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = v_0.$

Nous passons maintenant à la formulation de la méthode de Rothe pour le problème II. Elle consiste en une discrétisation temporelle dans laquelle nous définissons une séquence approximative en utilisant une formule d'Euler implicite (en arrière). Ensuite, à chaque pas de temps, nous allons résoudre une inclusion d'opérateur stationnaire. Enfin, nous construisons les interpolants constants par morceaux et affines par morceaux et prouvons un résultat de convergence.

Nous allons rappeler dans ce paragraphe deux résultats sur les équations d'évolution et un résultat sur les inéquations variationnelles d'évolution.

Équation différentielle ordinaire

Théorème 1.4.15 (Cauchy-Lipschitz) *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$, qui satisfait les propriétés suivantes*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x_1) - F(t, x_2)\|_X \leq L_F \|x_1 - x_2\|_X \quad \forall x_1, x_2 \in X, p.p. \in (0, T). \end{array} \right.$$

il existe $1 \leq p < +\infty$ tel que $F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X.$

Alors pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = F(t, x(t)) \quad p.p. \ t \in (0, T). \\ x(0) = x_0. \end{array} \right.$$

Maintenant nous considérons V et H deux espaces de Hilbert réels tels que l'application d'inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et dense. Identifiant le dual de H avec lui-même, c'est-à-dire nous pouvons écrire le triplet de Gelfand $V \subset H \subset V'$.

Les notations $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_{V'}$ et $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ représentent les normes sur V , V' et le produit de dualité entre V' et V respectivement.

Inéquation variationnelle d'évolution

Théorème 1.4.16 *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit, K est un sous ensemble fermé non vide, et convexe de V , et soit $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire continue et symétrique qui satisfait*

il existe $c_1 > 0$ et C_0 la condition de coercivite $a(v, v) + C_0 \|v\|_H^2 \geq \zeta \|v\|_V^2 \quad v \in V$

Alors pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$, il existe unique fonction u qui satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; V). \\ u(t) \in K \quad \forall t \in [0, T]. \\ (\dot{u}(t), v - u(t))_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in K. \\ u(0) = 0, \quad \mathbf{u}(0) = 0 \end{array} \right.$$

Équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorème 1.4.17 *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hémicontinu et monotone satisfaisant.*

$$\exists \omega > 0, \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \quad (Av, v)_{V' \times V} \geq \omega \|v\|_V^2 + \lambda \quad \forall v \in V. \quad (1.4.17)$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C(\|v\|_V + 1) \quad \forall v \in V. \quad (1.4.18)$$

pour des constantes $\omega > 0, C > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donné $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; H)$, il existe une fonction unique u qui satisfait.

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \ddot{u} \in L^2(0, T; V').$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \quad \text{pp} \quad t \in [0, T].$$

$$u(0) = u_0.$$

1.4.5 Compléments divers

On présente ici des lemmes classiques du type Gronwall.

Lemme 1.4.1 *Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. si $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier $m = 0$, ce lemme devient

Corollaire 1.4.18 Soient $n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$

Si $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

alors

$$\phi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Lemme 1.4.2 Soit $m \in W^{1, \infty}(0, T; \mathbb{R})$ une fonction telle que $m(0) = 0$ et $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soient $a \geq 0$ et $b > 0$ deux constantes. Si $\phi \in L^\infty(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\phi(t) \leq a + m(t) + b \int_0^t \phi(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

alors

$$\phi(t) \leq m(t) + \left(a + b \int_0^t m(s)ds \right) e^{bt} \quad \forall t \in [0, T].$$

Lemme 1.4.3 Soient $m, n \in C(0, T; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C(0, T; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\varphi^2(t) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^t m(s)\phi(s)ds + \int_0^t n(s)\varphi^2(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

alors

$$|\varphi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Chapter 2

Problème de contact avec frottement de réponse normale instantanée

Dans la deuxième chapitre, on propose d'étudier un problème dynamique de contact avec frottement de réponse normale instantanée et adhésion entre un corps viscoélastique avec mémoire longue et endommagement, et une fondation. Le processus d'adhésion est modélisé par un champ d'adhésion sur la surface de contact. Le contact est bilatéral, la contrainte tangentielle, due à l'adhésion étant incluse. L'endommagement causé par les déformations élastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appelée champ d'endommagement.

Le problème est formulé par un système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau avec endommagement, une inclusion du type parabolique modélisant le champ d'endommagement, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Cette section est divisé en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans le deuxième paragraphe, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique.

Le problème est formulé comme un système couplé en déplacement, en contrainte, et en champ d'adhésion. La nouveauté est que les opérateurs viscoélastiques avec fortement non linéaires, obéissant à une condition faible de croissance, qui remplace l'hypothèse de Lipschitz. Pour ce problème nous démontrons essentiellement un résultat d'existence et d'unicité des solutions faibles.

Les techniques employées sont basées sur les résultats des équations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments du point fixe.

2.1 Formulation du problème mécanique

Le problème étudié dans cette section dans le cadre physique mécanique présenté dans le première paragraphe de la mémoire. Pour que le modèle soit complet, précisons que la loi de comportement est viscoélastique avec mémoire longue et endommagements. La condition de contact avec représente les conditions de contact avec réponse normale instantanée et frottement sur la partie Γ_3 , est prescrite dans premier chapitre. Nous considérons les conditions représentent les conditions de contact avec adhésion.

Sous ces considérations, le problème mécanique qu'on étudie est premier le problème du premier chapitre.

2.1.1 Problème Mécanique

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\boldsymbol{\alpha} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ d'adhésion $\boldsymbol{\beta} : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$ tel que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) \in \mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t))) + \partial w(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t))) \\ + \int_0^t \mathcal{F}((t-s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\alpha}(s)) ds, \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.1)$$

$$\boldsymbol{\rho} \ddot{\mathbf{u}} = \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} - k \Delta \boldsymbol{\alpha} + \partial \varphi_k(\boldsymbol{\alpha}) \ni \mathcal{S}(\boldsymbol{\varepsilon}(u), \boldsymbol{\alpha}), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (2.1.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (2.1.5)$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\nu(t) \in \partial \mathbf{h}(\dot{\mathbf{u}}_\nu(t)), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.1.6)$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \in \partial \Psi(\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.1.7)$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{H}_{ad}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\zeta}_\beta, \mathbf{R}(\|\mathbf{u}_\tau\|)), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T) \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.1.9)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{u}_0, \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{0}) = \mathbf{v}_0, \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\alpha}_0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1.10)$$

$$\boldsymbol{\beta}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\beta}_0, \quad \text{sur } \Omega. \quad (2.1.11)$$

Nous décrivons maintenant les notations dans (2.1.1)-(2.1.11) et fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites.

D'abord, les équations (2.1.1) et (2.1.3) représentent la loi de comportement d'un matériau viscoélastique non linéaire avec mémoire longue et endommagement, où \mathcal{E} représente l'opérateur d'élasticité, et $w : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est un potentiel convexe d'opérateur de viscosité. Des modèles de contact statique avec des lois de comportement impliquant une fonction semi-continuelle appropriée, convexe et inférieure w couvrent les problèmes d'effets de verrouillage et ont été étudiés dans [4,12]. En particulier, si $w = 0$, alors l'inclusion (2.1.1) se réduit à une équation constitutive pour les matériaux élastiques linéaires avec mémoire longue et endommagement et $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_{ij})$ est le tenseur de la relaxation. L'évolution du champ d'endommagement est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (2.1.3) où S est la fonction source de l'endommagement. L'équation (2.2.2) représente l'équation du mouvement où f_0 est la densité des forces volumiques agissant sur le corps déformable et ρ désigne la densité de la masse. Les conditions (2.1.4) et (2.1.5) sont le déplacement et conditions aux limites de traction, (2.1.6) et (2.1.7) représente les conditions de contact avec réponse normale instantanée et frottement sur la partie Γ_3 .

le contact condition (2.1.6) est appelé multipliée normal damped response condition telle que $h : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, est une fonction convexe. Ce sous-différentiel a été utilisé dans plusieurs articles récents sur les problèmes de contact, voir [7,19,2]. En particulier, si $h(r) = I_{(-\infty,0]}(r)$, où $I_{(-\infty,0]}$ est la fonction d'indicateur de l'intervalle $(-\infty, 0]$, c'est-à-dire,

$$I_{(-\infty,0]}(r) = \begin{cases} 0, & \text{si } r \leq 0 \\ +\infty, & \text{si } r > 0 \end{cases}$$

puis (2.1.6) se réduit à la condition de contact Signorini bien connue dans les vitesses de la forme

$$\dot{\mathbf{u}}_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \dot{\mathbf{u}}_\nu = 0, \quad \text{sur } \Omega \times (0, T).$$

Cette condition type a également été prise en compte dans de nombreux articles et monographies, cf. par exemple, [7,8,17,18,19]. La condition à valeurs multiples (2.1.7) décrit la condition de frottement dans laquelle $\psi = \Gamma_3 \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est un potentiel convexe. Cette forme intègre plusieurs lois de frottement rencontrées dans la littérature. L'un des choix les plus simples est la valeur finie une fonction $\psi(x, \xi) = F_b(x) \|\xi\|$, pour tous $\xi \in \mathbb{R}^d$, p.p. $x \in \Gamma_3$, où F_b représente la limite de friction. Ce choix conduit à la loi de Coulomb bien connue du frottement à sec de la

forme

$$\|\sigma_\tau(t)\| \leq F_b, \quad -\sigma_\tau(t) = F_b \frac{\dot{\mathbf{u}}(t)_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}(t)_\tau\|} \text{ si } \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) \neq 0.$$

Nous référons à [13, section 6.3] pour une discussion détaillée sur les lois de frottement de la forme (2.1.6).

Les relations (2.1.8) représentent les conditions de contact avec adhésion sur la partie Γ_3 de la frontière. (2.1.9) décrit une condition aux limites de Neumann homogène où $\partial\alpha/\nu$ est la dérivée normale de α .

Dans, la condition (2.2.10) donne le déplacement initial, la vitesse initiale et α_0 est le endommagement initial. Pour plus de détails sur la théorie mathématique de la mécanique des contacts, nous référons à [7,8,13,17,18].

Enfin, dans l'équation (2.1.11) β_0 désigne la liaison initiale.

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (2.1.1)-(2.1.11) nous introduisons pour le domaine de liaison de l'ensemble

2.1.2 Hypothèses

On considère maintenant les hypothèses suivantes

L'opérateur d'élasticité satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d \text{ telle que} \\ (a) \quad \mathcal{E}(x, \varepsilon) = a(x)\varepsilon \text{ pour } p.p. \quad x \in \Omega \text{ et tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (b) \quad a(x) = (a_{ijkl}(x)) \text{ avec } a_{ijlk} = a_{jikl} = a_{ijlk} \in L^\infty(\Omega), \\ (c) \quad a_{ijkl}(x)\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \geq m_a \|\varepsilon\|_{\mathbb{S}^d}^2 \text{ pour } p.p. \quad x \in \Omega \\ \text{et tout } \varepsilon = (\varepsilon_{ij}) \in \mathbb{S}^d \text{ avec } m_a > 0. \end{array} \right. \quad (2.1.12)$$

Les fonctions \mathbf{w} , \mathbf{h} et ψ satisfaisaient l'hypothèses suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{w} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ est telle que} \\ (a) \quad w(\cdot, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \\ (b) \quad w(x, \cdot) \text{ est proper, convexe et semi-continu pour } p.p. \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.1.13)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{h} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ est telle que} \\ (a) \quad h(\cdot, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}, \\ (b) \quad h(x, \cdot) \text{ est proper, convexe et semi-continu pour } p.p. \quad x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.1.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\psi} : \Gamma_3 \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \text{ est telle que} \\ (a) \quad \boldsymbol{\psi}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3 \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \\ (b) \quad \boldsymbol{\psi}(x, \cdot) \text{ est proper, convexe et faible semi-continu pour p.p. } \quad x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.1.15)$$

La fonction de la source d'endommagement \mathbf{S} satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ (a) \quad \text{Il existe } M_S > 0 \text{ telle que} \\ \quad \quad \quad \| S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_1, \alpha_1) - S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_2, \alpha_2) \| \leq M_S (\| \boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2 \| + \| \alpha_1 - \alpha_2 \|). \\ \quad \quad \quad \forall \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \\ (b) \quad \text{L'application } \mathbf{x} \longrightarrow S(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \quad \quad \text{pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R} \\ (c) \quad \text{L'application } \mathbf{x} \mapsto S(\mathbf{x}, 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (2.1.16)$$

La fonction de relaxation \mathcal{F} satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} : \Omega \times (0, T) \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d \\ (a) \quad \text{Il existe } \mathcal{F} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \quad \quad \| \mathcal{F}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}_1, d_1) - \mathcal{F}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}_2, d_2) \| \leq L_{\mathcal{F}} (\| \boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2 \| + \| d_1 - d_2 \|) \\ \quad \quad \quad \text{pour tout } t \in (0, T), \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2 \in \mathbb{S}^d, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \\ (b) \text{ L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}, d) \text{ est Lebesgue} \\ \quad \quad \quad \text{mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } t \in (0, T), \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, d \in \mathbb{R}, \\ (c) \text{ L'application } t \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, t, \boldsymbol{\xi}, d) \text{ est continu sur} \\ \quad \quad \quad (0, T) \text{ pour tout } \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d, d \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } \mathbf{x} \in \Omega, \\ (d) \text{ L'application } \mathbf{x} \mapsto \mathcal{F}(\mathbf{x}, t, \mathbf{0}, 0) \text{ appartenir,} \\ \quad \quad \quad \text{de } \mathcal{H} \quad \text{pour tout } t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (2.1.17)$$

De même, nous supposons que la fonction d'adhésion \mathbf{H}_{ad} satisfait les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{H}_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-L, L] \longrightarrow \mathbb{R} \\
 (a) \text{II existe } L_{ad} > 0 \text{ telle que} \\
 \quad \| H_{ad}(x, b_1, z, r) - H_{ad}(x, b_2, z, r) \| \leq L_{ad} \| b_1 - b_2 \| \\
 \quad \forall b_1, b_2 \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \\
 \text{et} \\
 \quad \| H_{ad}(x, b_1, z_1, r_1) - H_{ad}(x, b_2, z_2, r_2) \| \\
 \quad \leq L_{ad} (\| b_1 - b_2 \| + \| z_1 - z_2 \| + \| r_1 - r_2 \|) \\
 \quad \forall b_1, b_2 \in [0, 1], z_1, z_2 \in \mathbb{R}, r_1, r_2 \in [-L, L], \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\
 (b) \text{L'application } x \longrightarrow H_{ad}(x, b, z, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\
 \quad \forall b, z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], \\
 (c) \text{L'application } (b, z, r) \longrightarrow H_{ad}(x, b, z, r) \text{ est continue sur} \\
 \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [-L, L], \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3, \\
 (d) H_{ad}(x, 0, z, r) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\
 (e) H_{ad}(x, b, z, r) \geq 0 \quad \forall b \leq 0, z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \text{ et} \\
 \quad H_{ad}(x, b, z, r) \leq 0 \quad \forall b \geq 1, z \in \mathbb{R}, r \in [-L, L], \text{ p.p. } x \in \Gamma_3.
 \end{array} \right. \tag{2.1.18}$$

On note que si $\beta \in L^\infty(\Gamma_3)$, $z \in L^\infty(\Gamma_3)$ et $r : \Gamma_3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, alors les conditions (2.1.18) impliquent que

$$x \rightarrow H_{ad}(x, \beta(x), z(x), \text{Rr}(x)) \in L^\infty(\Gamma_3).$$

Nous supposons que la masse volumique satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ et il existe } \rho^* > 0, \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega. \tag{2.1.19}$$

On suppose que les forces volumiques \mathbf{f}_0 et les tractions \mathbf{f}_2 ont la régularité suivantes

$$\mathbf{f}_0 \in H^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \mathbf{f}_2 \in H^2(0, T; L^2(\Gamma_2)). \tag{2.1.20}$$

Le déplacement initial et la vitesse satisfait

$$a, b \in V \text{ et } w(\varepsilon(b)) + h(b_\nu) + \psi(b_\tau) < +\infty. \quad (2.1.21)$$

Le champ d'endommagement initial satisfait

$$\alpha_0 \in K. \quad (2.1.22)$$

Le champ d'adhésion initial satisfait

$$\beta(0) = \beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3) \text{ et } 0 \leq \beta_0 \leq 1 \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \quad (2.1.23)$$

Pour le champ des déplacements on a besoin du sous-espace fermé V de H_1 par

$$V = \{\mathbf{u} \in H_1 \quad , \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1\}. \quad (2.1.24)$$

On définit le forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(\zeta, \phi) = k \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \phi dx \quad (2.1.25)$$

La condition de compatibilité se lit comme suit.

$$- \mathbf{f}(0) + Aa + \partial(w(\varepsilon(b)) + h(b_\nu) + \psi(b_\tau)) \subset H. \quad (2.1.26)$$

Finalement, on définit sur l'espace $H = L^2(\Omega)^d$ un nouveau produit scalaire donné par

$$(u, v)_H = ((\rho u, v))_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.1.27)$$

et soit $\| \cdot \|_H$ la norme associée, i.e

$$\| v \|_H = (\rho v, v)_H^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H. \quad (2.1.28)$$

En utilisant hypothèse, (2.1.19) il s'ensuit que $\| \cdot \|_V$ and $\| \cdot \|_H$ sont les normes équivalentes sur H . De plus, la cartographie par inclusion de $(V, \| \cdot \|_V)$ dans $(H, \| \cdot \|_H)$ est continue et dense. On note V' l'espace dual de V . Identifier H avec son propre double, nous pouvons écrire le Gelfand triple

$$V \subset H \subset V'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ pour représenter l'appariement de dualité entre V' et V .

Nous avons

$$(u, v)_{V' \times V} = (u, v)_H \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in V. \quad (2.1.29)$$

Enfin, on note $\|\cdot\|_{V'}$ la norme sur l'espace dual V' . Le théorème de représentation de Riesz entraîne l'existence d'un élément $f \in V'$, tel que

$$(f(t), v)_{V' \times V} = (f_0(t), v)_H + (f_2(t), v)_{L^\infty(\Gamma_2)}, \quad \forall v \in V, \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (2.1.30)$$

On remarque que la condition (2.1.20) impliquent que

$$f \in H^2(0, T; V'). \quad (2.1.31)$$

Maintenant, soit $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, l'application définie par

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} w(\varepsilon(v)) dv + \int_{\Gamma_3} (h(v_\nu) + \psi(v_\tau)) dv, \quad \text{pour tout } v \in V. \quad (2.1.32)$$

Dans cette section, on va donner la formulation variationnelle du problème

2.2 Formulation variationnelle.

Dans cette section, on va donner la formulation variationnelle du problème.

Nous passons maintenant à la formulation variationnelle du problème de contact (2.1.1) - (2.1.11). Cette fin, nous supposons dans ce qui suit que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ sont des fonctions lisses sur $\Omega \times (0, T)$ qui résout (2.1.1) - (2.1.11). Soit $v \in V$, multipliant l'équation du mouvement (??) par $\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)$ et en utilisant la formule de Green, cf. [13, Théorème 2.25]. En utilisant la formule de Green

$$(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

on trouve

$$(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

en utilisant la définition de l'espace V avec (2.1.24), (2.1.4) et (2.1.5), on obtient

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_H + (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

On remplace dans formule de Green \mathbf{v} par $\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}$

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_H + (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}))_{\mathcal{H}} = (\mathbf{f}_0, (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}))_H + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

pour p.p. $t \in (0, T)$. Des conditions aux limites (2.1.4) et (2.1.5) combinées avec la formule de décomposition, cf. (6.33) dans [13]. Puisque $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma}_\nu \cdot \mathbf{v}_\nu + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \mathbf{v}_\tau$, il vient que

$$\begin{aligned} (\rho \ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_H + (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V} \\ &+ \int_{\Gamma_3} \left(\boldsymbol{\sigma}_\nu(t)(\mathbf{v}_\nu - \dot{u}_\nu) + \boldsymbol{\sigma}_\tau(t)(\mathbf{v}_\tau - \dot{u}_\tau) \right) da, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

De la condition (2.1.1), on a

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{E}(\varepsilon(\mathbf{u}(t))) + \boldsymbol{\xi}(t) + \int_0^t \mathcal{F}((t-s), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(s)) ds. \quad (2.2.2)$$

avec

$$\boldsymbol{\xi}(t) \in \partial w(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))) \quad \text{p.p. } t \in (0, T).$$

Ce dernier implique

$$\langle \boldsymbol{\xi}(t), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) \rangle \leq w(\varepsilon(\mathbf{v})) - w(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t))). \quad (2.2.3)$$

Par contre, de (2.1.6) et (2.1.7), par la définition du sous-différentiel, on a

$$-\boldsymbol{\sigma}_\nu(t)(\mathbf{v}_\nu - \mathbf{u}_\nu(t)) \leq h(v_\nu) - h(\dot{u}_\nu(t)), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (2.2.4)$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)) \leq \psi(\mathbf{v}_\tau) - \psi(\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.2.5)$$

En insérant (2.2.4)-(2.2.5) dans (2.2.1), (2.1.27) nous obtenons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} &(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_H + (\mathcal{E}(\varepsilon(\mathbf{u}(t))), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + \varphi(v) - \varphi(\dot{\mathbf{u}}(t)) \\ &+ \left(\int_0^t \mathcal{F}((t-s), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) \right)_{\mathcal{H}} \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V}, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

p.p. $t \in (0, T)$.

Enfin, soit $\alpha(t) \in K$ et pour tout $t \in [0, T]$. De la définition (1.3.16) de $\partial\varphi_K(\alpha)$ et de (2.1.3), on obtient

$$\begin{aligned} &(\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} - k(\Delta\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\ &\geq (S(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \xi \in K. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green avec (2.1.9) et (2.1.25), on trouve

$$\begin{aligned}
& (\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\
& \geq \left(S(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t) \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \xi \in K.
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

De (2.1.1), (2.1.8), (2.2.10), (2.1.11), (2.2.6) et (2.2.7) et on obtient la formulation variationnelle du problème P1.

problème P_V

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$ tel que

$$\boldsymbol{\sigma}_\xi(t) \in \mathcal{E}(\varepsilon(\mathbf{u}(t))) + \int_0^t \mathcal{F}((t-s), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(s)) ds, \tag{2.2.8}$$

$$\begin{cases}
(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_H + (\boldsymbol{\sigma}_\xi(t), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + \varphi(\mathbf{v}) - \varphi(\dot{\mathbf{u}}(t)) \\
\geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V}, \\
\text{p.p. } t \in (0, T), \quad \text{pour tout } v \in V.
\end{cases} \tag{2.2.9}$$

$$\begin{cases}
(\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\
\geq \left(S(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t) \right)_{L^2(\Omega)}, \\
\xi \in K \quad \text{p.p. } t \in (0, T).
\end{cases} \tag{2.2.10}$$

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \zeta_\beta, \mathbf{R}(\|\mathbf{u}_\tau\|)), \quad 0 \leq \beta(t) \leq 1 \text{ p.p. } t \in (0, T), \tag{2.2.11}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \tag{2.2.12}$$

Nous remarquons que le problème variationnel P_V est formulé en termes de déplacement, champ de contrainte, terrain d'endommagement et champ d'adhésion. L'existence d'une solution unique de problème P_V est déclaré et prouvé dans la section suivante.

2.3 Existence et unicité de la solution

Notre résultat principal concernant le bien posé du problème P_V est la suivante

Théorème 2.3.1 *Supposons que (2.1.12) (2.1.24) sont satisfaites. Alors il existe une solution unique $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \alpha, \beta)$ problème P_V . En plus cette solution vérifiées*

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; V), \quad \dot{\mathbf{u}} \in C(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V), \quad \ddot{\mathbf{u}} \in L^\infty(0, T; H). \quad (2.3.1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; H); \quad \mathbf{Div} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; V'). \quad (2.3.2)$$

$$\boldsymbol{\alpha} \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (2.3.3)$$

$$\boldsymbol{\beta} \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3)). \quad (2.3.4)$$

Un quadruplet $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ qui satisfait (2.2.8) (2.2.12) est appelé solution faible pour le problème P1. Nous concluons que, dans les hypothèses énoncées, le problème (2.1.1) (2.1.11) a une satisfait unique solution (2.3.1) (2.3.4).

Démonstration du théorème 2.3.1

La démonstration du théorème précédent sera conduite en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des équations dévolutions avec les opérateurs monotones et les arguments du point fixe, similaires ceux utilisés dans [38], mais avec un choix différent des opérateurs. Nous supposons dans la suite que (2.1.12) (2.1.22) sont vérifiés

Soit $\boldsymbol{\eta} \in H^2(0, T; V)$ donnée. Dans cette première étape on construit le problème suivant.

problème $P_V^\boldsymbol{\eta}$

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}_\boldsymbol{\eta} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\ddot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t))_H + (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_\boldsymbol{\eta}(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t)))_{\mathcal{H}} \\ + \boldsymbol{\varphi}(v) - \boldsymbol{\varphi}(\dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t)) + (\boldsymbol{\eta}(t), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t)))_{\mathcal{H}} \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t))_{V' \times V}, \\ \text{p.p. } t \in (0, T), \quad \text{pour tout } v \in V. \end{array} \right. \quad (2.3.5)$$

$$\mathbf{u}_\boldsymbol{\eta}(0) = u_0, \quad \dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(0) = v_0. \quad (2.3.6)$$

Pour résoudre le problème $P_V^\boldsymbol{\eta}$ nous utilisons le théorème (1.4.10) d'existence et d'unicité. Nous avons le résultat suivant

Lemme 2.3.1 *Il existe une solution unique du problème $P_V^\boldsymbol{\eta}$ qui satisfait la régularité précédente. Alors il existe une fonction unique $\mathbf{u}_\boldsymbol{\eta}$*

Démonstration du lemme 2.3.1

La preuve est basée sur le lemme 2.3.1. Nous considérons un triple d'évolution des espaces $V \subset H \subset V'$, où V est donné par (1.4.3), $H = (L^2(\Omega))^d$ et $i : V \rightarrow H$ est un opérateur d'incorporation compact. On définit l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ et fonctionnel $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$ par

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathcal{E}(\varepsilon(u)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (2.3.7)$$

$$f_\eta(t) = f(t) - \eta(t) \in H^2(0, T; V'). \quad (2.3.8)$$

Nous vérifierons les hypothèses **H (A)**, **H(φ)**, **H (f)** et **(H_{aux})** de théorème (1.4.10). Il est facile de voir que sous les hypothèses (2.1.12), l'opérateur A défini par (2.3.7) satisfait **H (A)** avec $a = m_a$. En utilisant la convexité de w , h et φ , il est clair que φ est convexe.

En utilisant une méthode similaire à celle du théorème (1.4.10), nous déduisons que φ est également semi-continu inférieur, car w , h et φ sont semi-continus inférieurs. Par conséquent, des conditions (2.1.13) - (2.1.15) et (2.1.21), on en déduit que $H(\varphi)$ est satisfait.

Ensuite, par l'hypothèse de régularité (2.1.20) et (2.3.8), nous obtenons que **H (f)** est vrai.

Enfin, les conditions (2.1.21) et (2.1.26) impliquent que les conditions initiales ont la régularité requise dans **(H_{aux})** et que cette condition est vraie. A savoir, puisque $b \in V$ est tel que $w(\varepsilon(b)) + h(b_\nu) + \psi(b_\tau) < +\infty$ et $-f(0) + Aa + \partial(w(\varepsilon(b)) + h(b_\nu) + \psi(b_\tau)) \subset H$, nous avoir $b \in D(\partial\varphi)$. On prend $z_0 \in H$ tel $z_0 \in -f(0) + Aa + \partial(w(\varepsilon(b)) + h(b_\nu) + \psi(b_\tau))$.

On en déduit que l'inégalité énoncée dans **(H_{aux})** est satisfaite.

Après avoir vérifié les hypothèses des théorèmes (1.4.10), sous la notation ci-dessus, nous déduisons que le problème P_V^η est uniquement résoluble qu'il existe une fonction unique \mathbf{u}_η qui satisfait $\dot{\mathbf{u}} \in C(0, T; H) \cap L^\infty(0, T; V)$ et $\ddot{\mathbf{u}} \in L^\infty(0, T; H)$.

Il résulte de (2.3.7) et (2.3.8) que \mathbf{u}_η est une solution de le problème variationnel P_V^η et il a la régularité exprimé dans (2.3.1). Ceci conclut la preuve de la partie de l'existence du lemme 2.3.1. Le caractère unique de la solution au problème (2.3.5)-(2.3.6), garanti par le théorème (1.4.10).

Dans la deuxième étape, nous utilisons le champ de déplacement \mathbf{u}_η obtenu dans le lemme 2.3.1 et envisager le problème suivant la valeur initiale.

Problème P_V^β

Trouver le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$ tel que

$$\dot{\beta}_\eta = \mathbf{H}_{ad}(\beta_\eta, \zeta_{\beta_\eta}, \mathbf{R}(\|u_\eta\|)), \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (2.3.9)$$

$$\beta_\eta(0) = \beta_0. \quad (2.3.10)$$

En utilisant la version du théorème de Cauchy-Lipschitz et arguments signaler fixe de Banach. Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.2 *Il existe une solution unique du problème P_V^β , et qui satisfait (2.3.4) et de plus*

$$0 \leq \beta_\eta(t) \leq 1, \quad \forall t \in [0, T] \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.3.11)$$

Démonstration du lemme 2.3.2

Le problème (2.3.9)-(2.3.10) est un problème de Cauchy. Afin d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, on considère l'opérateur suivant Soit $\zeta \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ et soit l'application $F_{\eta\zeta}(t, \cdot) : L^\infty(\Gamma_3) \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ définie p.p. sur $(0, T)$ par

$$F_{\eta\zeta}(t, \beta) = H_{ad}(\beta(t), \zeta(t), R(\|u_\eta(t)\|)).$$

L'opérateur $F_{\eta\zeta}$ est continu, et de Lipschitz par rapport au second argument. Comme $\beta_0 \in L^\infty(\Gamma_3)$, l'application $t \rightarrow F_{\eta\zeta}(t, \beta)$ appartient à $L^\infty(0; T; L^\infty(\Gamma_3))$, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 1.4.15), qui nous donne l'existence et l'unicité d'une fonction $\beta_{\eta\zeta} \in W^{1,+\infty}(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ tel que

$$\dot{\beta}_{\eta\zeta} = H_{ad}(\beta_{\eta\zeta}, \zeta_{\beta_{\eta\zeta}}, \mathbf{R}(\|u_{\eta\zeta}\|)), \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (2.3.12)$$

$$\beta_{\eta\zeta}(0) = \beta_0. \quad (2.3.13)$$

Cela prouve que $\beta_{\eta\zeta}$ satisfait la condition (2.3.11). Nous supposons que $\beta_{\eta\zeta}(t_0) < 0$ pour certains $t_0 \in [0, T]$. En vertu de la condition (2.1.23) nous avons $0 \leq \beta_{\eta\zeta}(0) \leq 1$ et donc $t_0 > 0$ de plus, depuis la cartographie $t \mapsto \beta(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, nous pouvons trouver $t_1 \in [0, t_0)$ tel que $\beta_{\eta\zeta}(t_1) = 0$.

Maintenant, laissez $t_2 = \sup\{t \in [t_1, t_0], \beta_{\eta\zeta}(t) = 0\}$, alors $t_2 < t_0$, $\beta_{\eta\zeta}(t_2) = 0$ et $\beta_{\eta\zeta}(t) < 0$ pour $t \in (t_2, t_0]$. l'équation (2.3.12) impliquent que $\dot{\beta}_\eta(t) \geq 0$ pour $t \in (t_2, t_0]$, et donc $\beta_\eta(t_0) \geq \beta_\eta(t_2) = 0$ ce qui est une contradiction. Nous concluons que $\beta_\eta(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

Un argument de Similaire Montre qué $\beta_{\eta\zeta}(t) \leq 1$ Aubaines pour tous $t \in [0, T]$.

$$0 \leq \beta_{\eta\zeta}(t) \leq 1, \quad \forall t \in [0, T], \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.3.14)$$

La propriété $0 < \beta_{\eta\zeta}(t) \leq 1$ si on peut considérer l'opérateur $\Lambda_\eta : L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3)) \rightarrow L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ définie par

$$\Lambda_\eta \zeta(t) = \int_0^t \beta_{\eta\zeta}(s) ds \quad t \in [0, T], \quad (2.3.15)$$

pour laquelle nous prouvons que d'un seul point fixe.

Soit $\zeta_1, \zeta_2 \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ et soit $s \in [0, T]$.

De (2.3.12), (2.3.13) pour $i = 1, 2$ nous

$$\beta_{\eta\zeta_i}(s) = \beta_0 + \int_0^s H_{ad}(\beta_{\eta\zeta_i}(\theta), \zeta_i(\theta), R(\|\mathbf{u}_\eta(\theta)\|)) d\theta,$$

et, en utilisant la dernière égalité et (2.1.17), nous trouvons

$$\|\beta_{\eta\zeta_1}(s) - \beta_{\eta\zeta_2}(s)\| \leq L_{ad} \int_0^s \|\beta_{\eta\zeta_1}(\theta) - \beta_{\eta\zeta_2}(\theta)\| d\theta + L_{ad} \int_0^s \|\zeta_1(\theta) - \zeta_2(\theta)\| d\theta.$$

Ici et dans la suite, C est une constante positive qui dépend des données, mais est indépendante du temps et les conditions initiales, et qui peuvent changer de ligne en ligne.

L'application de la Gronwall lemme nous trouvons

$$\|\beta_{\eta\zeta_1}(s) - \beta_{\eta\zeta_2}(s)\| \leq C \int_0^s \|\zeta_1(\theta) - \zeta_2(\theta)\| d\theta.$$

et en intégrant cette inégalité dans Γ_3 être

$$\|\beta_{\eta\zeta_1}(s) - \beta_{\eta\zeta_2}(s)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq C \int_0^s \|\zeta_1(\theta) - \zeta_2(\theta)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} d\theta. \quad (2.3.16)$$

From (2.3.15) et (2.3.16) nous trouvons

$$\|\Lambda_\eta \zeta_1(t) - \Lambda_\eta \zeta_2(t)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \int_0^s \|\zeta_1(\theta) - \zeta_2(\theta)\|_{L^\infty(\Gamma_3)} d\theta ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.3.17)$$

Réitérant cette inégalité n fois, il vient

$$\|\Lambda_\eta^n \zeta_1 - \Lambda_\eta^n \zeta_2\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))} \leq \frac{(CT)^{2n}}{(2n)!} \|\zeta_1 - \zeta_2\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))}. \quad (2.3.18)$$

Il conclut que n assez grand, un itéré Λ_η^n de Λ_η est une contraction de l'espace de Banach $L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$. Ensuite, il existe un unique $\zeta_\eta^* \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$ tel que $\Lambda_\eta^n \zeta_\eta^* = \zeta_\eta^*$ et en outre ζ_η^* est également l'unique point fixe Λ_η .

Soit $\beta_\eta = \beta_{\eta\zeta^*}$ la solution de (2.3.12), (2.3.13) pour $\zeta = \zeta^*$. En utilisant (2.3.15)

$$\zeta_\eta^*(t) = \Lambda_\eta \zeta_\eta^*(t) = \int_0^t \beta_\eta \zeta_\eta^*(s) ds = \int_0^t \beta_\eta(s) ds = \zeta_{\beta_\eta} \quad t \in [0, T].$$

et en gardant à l'esprit (2.3.12)-(2.3.14) il s'ensuit que β_η est une solution au problème P_V^β et satisfait (2.3.4) et (2.3.11). Qui conclut la partie de l'existence du lemme 2.3.2.

L'unicité résulte de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ_η donné par (2.3.15).

Problème P_V^θ

Trouver le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha_\theta(t) \in K, \quad & (\dot{\alpha}_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t)) \\ & \geq \left(S(\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha_\theta(t) \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

$$\alpha_\theta(0) = \alpha_0. \quad (2.3.20)$$

Dans l'étude du problème de P_V^θ , nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.3 *Problème P_V^θ a une solution unique α_θ tel que*

$$\alpha_\theta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (2.3.21)$$

Démonstration du lemme 2.3.3

L'inclusion de $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est continue et sa gamme est dense. On note $(H^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H^1(\Omega)$ et identifier le dual de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons écrire le Guelfand triple

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation $(\alpha, \zeta)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour l'appariement de la dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$. nous avons

$$(\alpha, \zeta)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\alpha, \zeta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \alpha \in L^2(\Omega), \zeta \in H^1(\Omega).$$

et nous notons que K est fermé convexe définie dans $H^1(\Omega)$. Puis, en utilisant la définition (2.1.25) de la forme bilinéaire A et le fait que $\alpha_0 \in K$ dans (2.1.22), il est facile de voir que le lemme 2.3.3 est conséquence directement du théorème ?? dans [7] (page 47).

Enfin, à la suite de ces résultats et en utilisant les propriétés de l'opérateur \mathcal{F} le fonctionnelle S pour $t \in [0, T]$, nous considérons l'élément

$$\Lambda(\boldsymbol{\eta}, \theta)(t) = (\Lambda^1(\boldsymbol{\eta}, \theta)(t), \Lambda^2(\boldsymbol{\eta}, \theta)(t)) \in V' \times L^2(\Omega). \quad (2.3.22)$$

définis par les égalités

$$\Lambda^1(\boldsymbol{\eta}, \theta)(t) = \int_0^t \mathcal{F}((t-s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(s), \alpha_\theta(s))) ds, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.3.23)$$

$$\Lambda^2(\boldsymbol{\eta}, \theta)(t) = S(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\eta(t)), \alpha_\theta(t)), \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.3.24)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.4 *Pour $(\boldsymbol{\eta}, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$, la fonction $\Lambda(\boldsymbol{\eta}, \theta) : [0, T] \rightarrow V' \times L^2(\Omega)$ est continue, et il existe un unique, élément $(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ tel que $\Lambda(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) = (\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*)$.*

Démonstration du lemme 2.3.4

Soit $(\boldsymbol{\eta}, \theta) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ et $t_1, t_2 \in [0, T]$. Nous utilisons les notations $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$ et $\alpha_{\theta_i} = \alpha_i$ et $\beta_{\eta_i} = \beta_i$ pour $i = 1, 2$.

En utilisant (2.1.19), nous avons

$$\begin{aligned} & \| \Lambda^1(\boldsymbol{\eta}, \theta)(t_1) - \Lambda^1(\boldsymbol{\eta}, \theta)(t_2) \|_{V'} \\ & \leq \int_0^t \| \mathcal{F}((t_1-s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_1(s)), \alpha_1(s)) - \mathcal{F}((t_1-s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_2(s)), \alpha_2(s)) \|_{V'}^2 ds \\ & \leq \int_0^t \| \mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s) \|_V ds + \int_0^t \| \alpha_1(s) - \alpha_2(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Ensuite, en raison des régularités de \mathbf{u}_η , α_θ et β_η exprimée en (2.3.1), (2.3.3) et (2.3.4) respectivement, on déduit de (2.3.25) que $\Lambda^1(\boldsymbol{\eta}, \theta) \in C(0, T; V')$. Par un argument similaire, de (2.3.24) et (2.1.16) il s'ensuit que

$$\| \Lambda^2(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(t) - \Lambda^2(\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(t) \|_{L^2(\Omega)} \leq C(\| \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t) \|_V + \| \alpha_1(t) - \alpha_2(t) \|_{L^2(\Omega)}). \quad (2.3.26)$$

par conséquent, $\Lambda^2(\boldsymbol{\eta}, \theta) \in C(0, T; L^2(\Omega))$ et $\Lambda(\boldsymbol{\eta}, \theta) \in C(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ Soit maintenant $(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1), (\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$. Nous utilisons la notation $\mathbf{u}_{\eta_i} = \mathbf{u}_i$, $\dot{\mathbf{u}}_{\eta_i} = \mathbf{v}_{\eta_i} = \mathbf{v}_i$, $\alpha_{\theta_i} = \alpha_i$ et $\beta_{\eta_i} = \beta_i$ pour $i = 1, 2$ Des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (2.3.27)

$$\begin{aligned}
& \|\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \\
& \leq C(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V ds) \\
& \quad + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds
\end{aligned} \tag{2.3.27}$$

D'autre part, étant donné que $\mathbf{u}_i(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{u}}_i(s) ds + \mathbf{u}_0$, on sait que pour p.p.t $\in (0, T)$,

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.3.28}$$

En utilisant (2.3.5) et des estimations similaires à celles de la preuve du lemme 2.3.1, nous trouvons que pour $s \in [0, T]$, En outre, à partir de (2.3.5), nous en déduisons que p.p. sur $(0, T)$

$$\int_0^t \|\dot{\mathbf{u}}_1(s) - \dot{\mathbf{u}}_2(s)\|_V ds \leq \int_0^t \|\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)\|_{\mathcal{H}} ds.$$

Nous intégrons cette égalité par rapport au temps. Nous utilisons les conditions initiales $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_0$ et (2.1.12) pour constater que

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s), \mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s))_{V' \times V} ds, \quad \forall t \in [0, T].$$

Puis, en utilisant l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{\gamma} + \gamma b^2$ nous obtenons

$$\int_0^t |\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)|_V^2 ds \leq C \int_0^t |\boldsymbol{\eta}_1(s) - \boldsymbol{\eta}_2(s)|_{V'}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{2.3.29}$$

De (2.3.19), en déduit que

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)}, \quad \text{a.e. } \in (0, T).$$

Intégrer l'inégalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$ et l'inégalité $a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$ nous trouvons

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{L^2(\Omega)} ds,$$

ce qui implique que

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \tag{2.3.30}$$

Cette inégalité combinée avec l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.31)$$

Nous remplaçons (2.3.28) dans (2.3.27) et nous utilisons (2.3.30) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C(\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V^2 + \\ &\int_0^t \|\mathbf{u}_1(s) - \mathbf{u}_2(s)\|_V^2 ds + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2). \\ &\leq C(\int_0^t \|\mathbf{v}_1(s) - \mathbf{v}_2(s)\|_V^2 ds + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

Il en résulte maintenant de ce qui précède et les estimations (2.3.29) et (2.3.31) que

$$\|\Lambda(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t \|(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(s) - (\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(s)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 ds \right).$$

Réitérant cette inégalité m temps de conduit à

$$\|\Lambda^m(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1) - \Lambda^m(\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)\|_{L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{(CT)^m}{m!} \|(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1) - (\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)\|_{L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))}^2.$$

Introduisons les notations suivantes

$$\begin{cases} I_0(t) = \|(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(t) - (\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(t)\|_V \\ I_1(t) = \int_0^t \|(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(s) - (\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(s)\|_V ds \\ I_k(t) = \int_0^t \int_0^{s_{k-1}} \dots \int_0^{s_1} \|(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(r) - (\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(r)\|_V dr ds_1 \dots ds_{k-1}, \forall k \geq 2 \end{cases}$$

et par récurrence, en notant par Λ^p la puissance $p^{\text{ième}}$ de l'opérateur Λ on obtient

$$\|\Lambda^p(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(t) - \Lambda^p(\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(t)\|_V \leq C^p \left(\sum_{k=0}^p C_p^k I^{p-k} \|(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1)(t) - (\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)(t)\| \right)$$

pour tout $t \in [0, T]$ et $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I^{p-k}(\eta_1 - \eta_2) &= \int \dots \int_{(p-k)\text{fois}} \|\eta_1 - \eta_2\| \leq \int_0^s \int_0^t \dots \int_0^z \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^\infty(0, T; V)} \\ &\leq \frac{t^{p-k}}{k!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^\infty(0, T; V)} \\ &\leq \frac{T^{p-k}}{k!} \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^\infty(0, T; V)} \end{aligned}$$

$$\|\Lambda_{\eta_1}^p(t) - \Lambda_{\eta_2}^p(t)\|_V \leq C^p \left(\sum_{k=0}^p C_p^k \frac{t^{p-k}}{k!} \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\| \right) \leq C^p \frac{(1+T)^p}{p!} \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_{L^\infty(0, T; V)}$$

Réitérant cette inégalité m temps de conduit à

$$\|\Lambda^m(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1) - \Lambda^m(\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)\|_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{(CT)^m}{m!} \|(\boldsymbol{\eta}_1, \theta_1) - (\boldsymbol{\eta}_2, \theta_2)\|_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))}^2.$$

Il existe un unique $(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ tel que $\Lambda^p(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) = (\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*)$ et de plus, $(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*)$ est aussi l'unique point fixe de Λ et on a $\Lambda(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) = (\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*)$.

Ainsi, pour m assez grand, Λ^m est une contraction sur le Banach espace $L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ et ainsi de Λ a un unique point fixe.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 2.3.1

Démonstration du théorème 2.3.1

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le théorème 2.3.1

Existence

Soit $(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ défini par (2.3.23)- (2.3.24) et soient $\mathbf{u}_\eta, \boldsymbol{\alpha}_\theta$ et $\boldsymbol{\beta}_\eta$ les solutions des problèmes $\mathbf{P}_V^\eta, \mathbf{P}_V^\theta$ et \mathbf{P}_V^β pour $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*$, i.e $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}, \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{\eta}^*}, \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{\theta^*}$

Nous désignons $\boldsymbol{\sigma}$ par la fonction donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}^*}(t) \in \mathcal{E}(\varepsilon(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}(t))) + \partial \mathbf{w}(\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\eta}^*}(t))) + \int_0^t \mathcal{F}((t-s), \varepsilon(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}(t)), \boldsymbol{\alpha}(s)) ds$$

. Clairement (2.1.23) , (2.1.27) et (2.1.28) sont vérifiées.

Puisque $\Lambda(\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*) = (\boldsymbol{\eta}^*, \theta^*)$ on déduit $(\Lambda \boldsymbol{\eta}^*(t), v) = (\boldsymbol{\eta}^*, v), \forall v \in V$ p.p $t \in [0, T]$.

Et, gardant en tête (2.3.3), on déduit que (2.1.25) est satisfaite.

La régularité (2.1.29) s'ensuit de (2.1.18), pendant que la régularité (2.1.31) et la propriété $0 \leq \beta(t) \leq 1$ sont des conséquences du lemme 2.3.2 En outre, puisque $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; V)$, il s'ensuit de (2.2.10) et (2.1.23) que $\boldsymbol{\sigma} \in L^\infty(0, T; \mathcal{H})$.

Choisissant maintenant $v = \varphi$ où $\varphi \in D(\Omega)^d$ dans (2.2.9) et utilisant (2.1.19) on trouve

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t), \quad p.p. \quad t \in (0, T)$$

Maintenant (2.1.19) et (2.1.20) la régularité exprimé dans (2.3.1) et l'égalité ci dessus impliquent que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; V')$ lequel son tous implique $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

Unicité

La partie de l'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ , et de l'unicité des problèmes P_V^η , P_V^θ et P_V^β . A cet effet, soit $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$ la solution du problème (2.2.8) (2.2.11) ayant la régularité (2.3.1), (2.3.4) et on considère un élément $(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \in L^2(0; T; V \times L^2(\Omega))$ défini par

$$(\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v})_V = \left(\int_0^t \mathcal{F}((t-s), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\alpha}(s)) ds, \mathbf{v})_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \quad (2.3.32)$$

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\alpha}(t)). \quad (2.3.33)$$

L'équation (2.1.1) et (2.3.1) et (2.3.29) la condition initiale $\mathbf{u}(0) = u_0$ signifie que \mathbf{u} est une solution de P_V^η et comme il résulte du lemme (2.3.4) que ce problème a une solution unique, notée \mathbf{u}_η nous concluons que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\eta \quad (2.3.34)$$

Ensuite (2.1.9) et (2.3.16) la condition initiale $\boldsymbol{\beta}(0) = \boldsymbol{\beta}_0$ implique que $\boldsymbol{\beta}$ est un solution de P_V^β depuis le lemme 2.3.2 montre que le problème a une solution unique, notée $\boldsymbol{\beta}_\eta$, nous obtenons

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_\eta. \quad (2.3.35)$$

L'équation (2.1.3); (2.3.31) et la condition initiale $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}_0$ impliquent maintenant que $\boldsymbol{\alpha}$ est une solution de P_V^θ du lemme 2.3.3 problème P_V^θ a une solution unique, notée $\boldsymbol{\alpha}_\theta$ et il s'ensuit que

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_\theta. \quad (2.3.36)$$

En utilisant (2.3.32); (2.3.33); (2.3.34); (2.3.35) et (2.3.36), nous concluons que $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\theta})$ et par l'unicité du point de $\boldsymbol{\Lambda}$ fixe, il s'ensuit que

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*. \quad (2.3.37)$$

L'unicité de la solution est maintenant une conséquence de (2.3.34) -(2.3.36) avec l'équation $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \partial w(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))) + \int_0^t \mathcal{F}((t-s), \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\alpha}(s)) ds$.

Chapter 3

Problème de contact élasto-viscoplastique avec l'usure

Dans la troisième chapitre, on propose d'étudier un problème dynamique de contact élasto-viscoplastique avec l'usure et endommagement . Le contact est bilatéral, la contrainte tangentielle. L'endommagement causé par les déformations plastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appelée champ d'endommagement.

Le problème est formulé par un système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau avec endommagement.

Cette section est divisé en trois paragraphes. Dans le premier paragraphe, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans le deuxième paragraphe, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans le troisième paragraphe, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique.

Le problème est formulé comme un système couplé en déplacement, en contrainte. La nouveauté est que les opérateurs viscoplastiques , obéissant à une condition faible de croissance, qui remplace l'hypothèse de Lipschitz. Pour ce problème nous démontrons essentiellement un résultat d'existence et d'unicité des solutions faibles.

Les techniques employées sont basées sur les résultats des équations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments du point fixe.

3.1 Formulation du problème mécanique

Le problème étudié dans cette section dans le cadre physique mécanique présenté dans le première paragraphe de la mémoire. Pour que le modèle soit complet, précisons que la loi de comportement est élasto-viscoplastique avec endommagement. La condition de contact avec l'usure et frottement sur la partie Γ_3 , est prescrite dans premier chapitre.

Sous ces considérations, le problème mécanique qu'on étudie est le deuxième problème du premier chapitre.

3.1.1 Problème Mécanique

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le champ d'endommagement $\alpha : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tel que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) &= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \\ &+ \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \alpha(s)) ds, \end{aligned} \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.1)$$

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.2)$$

$$\dot{\alpha} - k\Delta\alpha + \partial\varphi_K(\alpha) \ni \mathcal{S}(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \alpha), \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.1.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2, \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.1.5)$$

$$\begin{cases} -\sigma_\nu = -\beta \|\dot{\mathbf{u}}_\nu\|, \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = -\mu\sigma_\nu \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda(\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*), \quad \lambda \geq 0 \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma \times (0, T), \quad (3.1.7)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad \text{dans } \Omega, \quad (3.1.8)$$

Nous décrivons maintenant les notations dans (3.1.1)-(3.1.8) et fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions aux limites.

D'abord, les équations (3.1.1) et (3.1.3) représentent la loi de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique avec endommagement, où \mathbf{u} représente le champ de déplacement et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ est le champ de tenseur linéaire. \mathcal{A} et \mathcal{B} sont des fonctions de viscosité et élasticité non linéaire, respectivement, \mathcal{G} représente le tenseur de viscoplasticité. L'évolution du champ d'endommagement

est modelisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (3.1.3) où S est la fonction source de l'endommagement. L'équation (3.1.2) représente l'équation du mouvement où f_0 est la densité des forces volumiques agissent sur le corps déformable et ρ désigne la densité de la masse. Les conditions (3.1.4) et (3.1.5) sont le déplacement et conditions aux limites de traction, (3.1.6) représente les conditions de contact avec l'usure et frottement sur la partie Γ_3 .

(3.1.7) décrit une condition aux limites de Neumann homogène où $\partial\alpha/\nu$ est la dérivée normale de α .

Dans, la condition (3.1.8) donne le déplacement initial, la vitesse initiale et α_0 est le endommagement initial. Pour plus de détails sur la théorie mathématique de la mécanique des contacts, nous référons à [7, 8, 13, 17,18]. de l'ensemble Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (3.1.1)-(3.1.8) nous introduisons pour le domaine de liaison

3.1.2 hypothèses

On considère maintenant les hypothèses suivantes

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \exists L_{\mathcal{A}} > 0 \text{ telle que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, x \in \Omega. \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{A}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}(x, \varepsilon_2)\|(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega, \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ (d) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{A}(x, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.11)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{B}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{B}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{B}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p \quad x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{B}(x, \varepsilon) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{B}(x, 0) \in \mathcal{H} \end{array} \right. \quad (3.1.12)$$

La fonction de relaxation $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|\mathcal{G}(x, \sigma_1, \varepsilon_1, \alpha_1) - \mathcal{G}(x, \sigma_2, \varepsilon_2, \alpha_2)\| \leq L_{\mathcal{G}}(\|\sigma_1 - \sigma_2\| + \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + \|\alpha_1 - \alpha_2\|) \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, p.p. x \in \Omega. \\ (b) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, \sigma, \varepsilon, \alpha) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega \\ \quad \text{pour tout } \sigma, \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow \mathcal{G}(x, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}. \end{array} \right. \quad (3.1.13)$$

La fonction $\mathbf{S} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_S > 0 \text{ tel que} \\ \quad \|S(x, \varepsilon_1, \alpha_1) - S(x, \varepsilon_2, \alpha_2)\| \leq L_S(\|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| + \|\alpha_1 - \alpha_2\|) \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, p.p. x \in \Omega. \\ (b) \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, S(., \varepsilon, \alpha) \text{ est lebesgue mesurable sur } \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow S(., 0, 0) \in L^2(\Omega). \end{array} \right. \quad (3.1.14)$$

Nous supposons que la masse volumique satisfait

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \text{ et il existe } \rho^* > 0, \text{ tel que } \rho(x) \geq \rho^*, \text{ p.p. } x \in \Omega. \quad (3.1.15)$$

On suppose que les forces volumiques \mathbf{f}_0 et les tractions \mathbf{f}_2 ont la régularité suivantes

$$\mathbf{f}_0 \in H^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \mathbf{f}_2 \in H^2(0, T; L^2(\Gamma_2)). \quad (3.1.16)$$

Le déplacement initial et la vitesse satisfait

$$\mathbf{u}_0 \in V; \quad \mathbf{v}_0 \in H. \quad (3.1.17)$$

Le champ d'endommagement initial satisfait

$$\alpha_0 \in K. \quad (3.1.18)$$

Pour le champ des déplacements on a besoin du sous-espace fermé V de H_1 par

$$V = \{\mathbf{u} \in H_1 \mid \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}. \quad (3.1.19)$$

On définit le forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$a(\zeta, \phi) = k \int_{\Omega} \nabla \zeta \cdot \nabla \phi dx \quad (3.1.20)$$

Finalement, on définit sur l'espace $H = L^2(\Omega)^d$ un nouveau produit scalaire donné par

$$(u, v)_H = ((\rho u, v))_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (3.1.21)$$

et soit $\| \cdot \|_H$ la norme associée, i.e

$$\| v \|_H = (\rho v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H. \quad (3.1.22)$$

En utilisant hypothèse, (3.1.15) il s'ensuit que $\| \cdot \|_V$ and $\| \cdot \|_H$ sont les normes équivalentes sur H . De plus, la cartographie par inclusion de $(V, \| \cdot \|_V)$ dans $(H, \| \cdot \|_H)$ est continue et dense. On note V' l'espace dual de V . Identifier H avec son propre double, nous pouvons écrire le Gelfand triple

$$V \subset H \subset V'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ pour représenter l'appariement de dualité entre V' et V . Nous avons

$$(u, v)_{V' \times V} = (u, v)_H \quad \forall u \in H, \quad \forall v \in V. \quad (3.1.23)$$

Enfin, on note $\| \cdot \|_{V'}$ la norme sur l'espace dual V' . Le théorème de représentation de Riesz entraîne l'existence d'un élément $f \in V'$, tel que

$$(f(t), v)_{V' \times V} = (f_0(t), v)_H + (f_2(t), v)_{L^\infty(\Gamma_2)}, \quad \forall v \in V, \quad \text{p.p.} \quad t \in (0, T). \quad (3.1.24)$$

On remarque que la condition (3.1.16) impliquent que

$$f \in H^2(0, T; V'). \quad (3.1.25)$$

Maintenant, soit $j : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, l'application définie par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \beta \| u_\nu \| (\mu \| v - v^* \| + v_\nu) da. \quad (3.1.26)$$

Dans cette section, on va donner la formulation variationnelle du problème

3.2 Formulation variationnelle.

Dans cette section, on va donner la formulation variationnelle du problème. Nous passons maintenant à la formulation variationnelle du problème de contact (3.1.1) - (3.1.8). Cette fois, nous supposons dans ce qui suit que $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$ sont des fonctions lisses sur $\Omega \times (0, T)$ qui résolvent ((3.1.1)) - ((3.1.8)). Soit $v \in V$, multipliant l'équation du mouvement (3.1.2) par $\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)$ et en utilisant la formule de Green, cf. [13, Théorème 2.25]. En utilisant la formule de Green

$$(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in H_1.$$

on trouve

$$(\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_H = \int_{\Gamma_1} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

en utilisant la définition de l'espace V avec (3.1.19), (3.1.2), (3.1.4) et (3.1.5), on obtient

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_H + (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}))_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{v} da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

On remplace dans formule de Green \mathbf{v} par $\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}$

$$(\rho \ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}})_H + (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}))_{\mathcal{H}} = (\mathbf{f}_0, (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}))_H + \int_{\Gamma_2} \mathbf{f}_2 \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}) da, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

pour p.p. $t \in (0, T)$. Des conditions aux limites (3.1.4) et (3.1.5) combinées avec la formule de décomposition, cf. (6.33) dans [13]. Puisque $\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} = \sigma_{\nu} \cdot v_{\nu} + \boldsymbol{\sigma}_{\tau} \cdot \mathbf{v}_{\tau}$, il vient que

$$\begin{aligned} (\rho \ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_H + (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} &= (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V} \\ &+ \int_{\Gamma_3} \left(\sigma_{\nu}(t)(v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t)(\mathbf{v}_{\tau} - \dot{\mathbf{u}}_{\tau}) \right) da, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

vous simplifiez l'intégration

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma_3} (\sigma(t) \nu \cdot (v - \dot{u})) da \\ &= - \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(t)(v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) da - \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t)(v_{\tau} - \dot{\mathbf{u}}_{\tau}) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \beta \| \dot{u}_{\nu} \| (v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) da - \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t)(v_{\tau} - v^*) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t)(\dot{\mathbf{u}}_{\tau} - v^*) da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} \beta \| \dot{u}_{\nu} \| (v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) da + \int_{\Gamma_3} \| \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t) \| (\| v_{\tau} - v^* \|) da + \int_{\Gamma_3} \| \boldsymbol{\sigma}_{\tau}(t) \| (\| \dot{\mathbf{u}}_{\tau} - v^* \|) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \beta \| \dot{u}_{\nu} \| (v_{\nu} - \dot{u}_{\nu}) da + \int_{\Gamma_3} \beta \mu \| \dot{u}_{\nu} \| (\| v_{\tau} - v^* \| - \| \dot{\mathbf{u}}_{\tau} - v^* \|) da. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

On obtient

$$\begin{aligned}
(\rho \ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_H + (\boldsymbol{\sigma}, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} &\geq - \int_{\Gamma_3} \beta \|\dot{u}_\nu\| (\mu \|v_\tau - v^*\| + v_\nu) da \\
&+ \int_{\Gamma_3} \beta \|\dot{u}_\nu\| (\mu \|\dot{u}_\tau - \dot{u}^*\| + \dot{u}_\nu) da + (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V}, \quad \forall \mathbf{v} \in V.
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

De la relation (3.2.1) et (3.2.3) nous obtenons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&(\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_H + (\mathcal{A}(\varepsilon(\mathbf{u}(t))), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{B}(\varepsilon(\mathbf{u}(t))), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{\mathbf{u}}(t), v) \\
&- j(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) + \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), \varepsilon(u(s)), \alpha(s)) ds, \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}(t)) \right)_{\mathcal{H}} \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V}, \\
&\text{p.p. } t \in (0, T).
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Enfin, soit $\alpha(t) \in K$ et pour tout $t \in [0, T]$. De la définition de $\partial\varphi_K(\alpha)$ et de (3.1.3), on obtient

$$\begin{aligned}
&(\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} - k(\Delta\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\
&\geq (S(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \xi \in K.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green avec (3.1.8) et (3.1.20),

$$\begin{aligned}
&(\Delta\alpha(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + (\nabla\alpha(t), \nabla(\zeta - \alpha(t)))_{L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma} \frac{\partial\alpha(t)}{\partial\nu} \cdot (\zeta - \alpha(t)) da, \\
&(\Delta\alpha(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} = - \int_{\Omega} \nabla\alpha(t) \cdot \nabla(\zeta - \alpha(t)) dx.
\end{aligned}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
&(\dot{\alpha}(t), \zeta - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + K \int_{\Omega} \nabla\alpha(t) \cdot \nabla(\zeta - \alpha(t)) dx \\
&\geq \left(S(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \zeta - \alpha(t) \right)_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&(\dot{\alpha}(t), \xi - \alpha(t))_{L^2(\Omega)} + a(\alpha(t), \xi - \alpha(t)) \\
&\geq \left(S(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}), \varepsilon(\mathbf{u}(t)), \alpha(t)), \xi - \alpha(t) \right)_{L^2(\Omega)}, \quad \xi \in K.
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

De (3.1.1), (3.1.8), (3.2.5) et (3.2.4) on obtient la formulation variationnelle du problème P1.

Problème P_V

Trouver le champ des déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times [0; T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$; et le champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times [0; T] \longrightarrow \mathbb{S}^d$; et le champ d'endommagement $\boldsymbol{\alpha} : \Omega \times [0; T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que.

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\alpha}(s)) ds, \quad (3.2.6)$$

$$\begin{cases} (\ddot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_H + (\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)))_{\mathcal{H}} + \mathbf{j}(\dot{\mathbf{u}}(t), \mathbf{v}) \\ - \mathbf{j}(\dot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_{V' \times V}, \\ \text{p.p. } t \in (0, T). \end{cases} \quad (3.2.7)$$

$$\begin{cases} (\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t), \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\alpha}(t))_{L^2(\Omega)} + a(\boldsymbol{\alpha}(t), \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\alpha}(t)) \geq \left(\mathcal{S}(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\alpha}(t)), \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\alpha}(t) \right)_{L^2(\Omega)}, \\ \boldsymbol{\xi} \in K \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \end{cases} \quad (3.2.8)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0, \quad \boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}_0. \quad (3.2.9)$$

Nous remarquons que le problème variationnel P_V est formulé en termes de déplacement, champ de contrainte, terrain d'endommagement. L'existence d'une solution unique de problème P_V est déclaré et prouvé dans la section suivante.

3.3 Existence et unicité de la solution

Notre résultat principal concernant le bien posé du problème P_V est la suivante

Théorème 3.3.1 *Supposons que (3.1.11) (3.1.19) sont satisfaites. Qu'il existe une constante $\theta_0 > 0$ dépendant de Γ_3 , telle que*

$$\|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) < \theta_0, \quad (3.3.1)$$

$$c_\gamma^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) < m_{\mathcal{A}} < 2c_\gamma^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1), \quad (3.3.2)$$

Alors il existe une solution unique $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$ problème P_V . En plus cette solution vérifie

$$\mathbf{u} \in C(0, T; V); \quad \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}} \in L^\infty(0, T; V), \quad (3.3.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; H); \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; V'), \quad (3.3.4)$$

$$\boldsymbol{\alpha} \in W^{1,2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.3.5)$$

Un quadruplet $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha})$ qui satisfait (3.2.6) (3.2.9) est appelé solution faible pour le problème P1. Nous concluons que, dans les hypothèses énoncées, le problème (3.1.1) (3.1.8) a une unique solution (3.3.1) (3.3.5).

Démonstration du théorème 3.3.1

La démonstration du théorème précédent sera conduite en plusieurs étapes. Elle est basée sur les résultats des équations dévolutions avec les opérateurs monotones et les arguments du point fixe, similaires ceux utilisés dans [38], mais avec un choix différent des opérateurs. Nous supposons dans la suite que (3.1.11) (3.1.19) sont vérifiés

Soit $\boldsymbol{\eta} \in H^2(0, T; V)$ donnée. Dans cette première étape on construit le problème suivant. Dans cette première étape on construit le problème suivant:

problème $P_V^\boldsymbol{\eta}$

Trouver le champ de déplacement $\mathbf{u}_\boldsymbol{\eta} : \Omega \times [0; T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\ddot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t), v - \dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t))_{V' \times V} + (\mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t))), \boldsymbol{\varepsilon}(v - \dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t)))_{\mathcal{H}} + (\mathcal{B}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_\boldsymbol{\eta}(t))), \boldsymbol{\varepsilon}(v - \dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t)))_{\mathcal{H}} \\ + (\boldsymbol{\eta}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(v) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t)))_{\mathcal{H}} + j(\dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t), v) - j(\dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t), \dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t)) \geq (f, v - \dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(t))_{V' \times V} \\ \text{p.p. } t \in (0, T), \quad \text{pour tout } v \in V. \\ \mathbf{u}_\boldsymbol{\eta}(0) = u_0, \quad \dot{\mathbf{u}}_\boldsymbol{\eta}(0) = v_0. \end{array} \right. \quad (3.3.4)$$

Pour résoudre le problème $P_V^\boldsymbol{\eta}$ nous utilisons le théorème (1.4.13) d'existence et d'unicité. Nous avons le résultat suivant

Lemme 3.3.1 *Il existe une solution unique du problème $P_V^\boldsymbol{\eta}$ qui satisfait la régularité précédente. Alors il existe une fonction unique $\mathbf{u}_\boldsymbol{\eta}$.*

Démonstration du lemme 3.3.1

La preuve est basée sur le lemme 2.3.1. Nous considérons un triple d'évolution des espaces $V \subset H \subset V'$, où V est donné par (3.1.19), $H = (L^2(\Omega))^d$

On définit l'opérateur $A, B : V \rightarrow V'$

$$(A\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}})), \boldsymbol{\varepsilon}(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall \mathbf{u}, v \in V. \quad (3.3.5)$$

$$(Bu, v)_V = (\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \quad (3.3.6)$$

et fonctionnel $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_3} \beta \|u_\nu\| (\mu \|v_\tau - v^*\| + v_\nu) da. \quad (3.3.7)$$

$$f_\eta(t) = f(t) - \eta(t) \in H^2(0, T; V'). \quad (3.3.8)$$

Nous vérifierons les hypothèses **H (1)**- **H(9)** des théorèmes (1.4.13). Il est facile de voir que sous les hypothèses (3.1.11), l'opérateur A défini par (3.3.5) satisfait **H (3)**- **H (5)** avec $m_A = M_A$. et $L_A = L_A$. elle est clair que A symétrique.

l'opérateur B défini par (3.3.6) satisfait **H (1)**- **H (2)** avec $m_B = M_B$. et $L_B = L_B$.

l'opérateur j défini par (3.3.7) satisfait **H (6)**:

$$\begin{aligned} & j(g_1, v_2) - j(g_1, v_1) + j(g_2, v_1) - j(g_2, v_2) \\ &= \int_{\Gamma_3} \beta \|g_{1\nu}\| (\mu \|v_{2,\tau} - v^*\| + v_{2,\nu}) da - \int_{\Gamma_3} \beta \|g_{1\nu}\| (\mu \|v_{1,\tau} - v^*\| + v_{1,\nu}) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \beta \|g_{2\nu}\| (\mu \|v_{1,\tau} - v^*\| + v_{1,\nu}) da - \int_{\Gamma_3} \beta \|g_{2\nu}\| (\mu \|v_{2,\tau} - v^*\| + v_{2,\nu}) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \beta \|g_{1\nu}\| (\mu \|v_{2,\tau} - v^*\| + v_{2,\nu} - \mu \|v_{1,\tau} - v^*\| - v_{1,\nu}) da \\ &- \int_{\Gamma_3} \beta \|g_{2\nu}\| (-\mu \|v_{1,\tau} - v^*\| - v_{1,\nu} + \mu \|v_{2,\tau} - v^*\| + v_{2,\nu}) da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} \beta \|g_{1\nu}\| (\mu \|v_{1,\tau} - v_{2,\tau}\| + \|v_{1,\nu} - v_{2,\nu}\|) da \\ &- \int_{\Gamma_3} \beta \|g_{2\nu}\| (\mu \|v_{1,\tau} - v_{2,\tau}\| + \|v_{1,\nu} - v_{2,\nu}\|) da \\ &\leq \int_{\Gamma_3} \beta \|g_{1\nu} - g_{2\nu}\| (\mu \|v_{1,\tau} - v_{2,\tau}\| + \|v_{1,\nu} - v_{2,\nu}\|) da \\ &\leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|g_{1,\nu} - g_{2,\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} \|v_{1,\nu} - v_{2,\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|g_1 - g_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|v_1 - v_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq c_\gamma^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|g_1 - g_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V, \end{aligned}$$

l'opérateur j défini par (3.3.7) satisfait **H (7)**:

$$\begin{aligned}
j(g, v_1) - j(g, v_2) &= \int_{\Gamma_3} \beta \|g_\nu\| (\mu \|v_{1,\tau} - v^*\| + v_{1,\nu}) da - \int_{\Gamma_3} \beta \|g_\nu\| (\mu \|v_{2,\tau} - v^*\| + v_{2,\nu}) da \\
&= \int_{\Gamma_3} \beta \|g_\nu\| (\mu \|v_{1,\tau} - v^*\| - \mu \|v_{2,\tau} - v^*\| + v_{1,\nu} - v_{2,\nu}) da \\
&\leq \int_{\Gamma_3} \beta \|g_\nu\| (\mu \|v_{1,\tau} - v_{2,\tau}\| + \|v_{1,\nu} - v_{2,\nu}\|) d\Gamma \\
&\leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|g_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \|v_{1,\tau} - v_{2,\tau}\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
&\quad + \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|g_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \|v_{1,\nu} - v_{2,\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
&\leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|g_\nu\|_{L^2(\Gamma_3)} \|v_{1,\nu} - v_{2,\nu}\|_{L^2(\Gamma_3)} \\
&\leq \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1) \|g\|_{L^2(\Gamma_3)} \|v_1 - v_2\|_{L^2(\Gamma_3)},
\end{aligned}$$

rappeler le théorème de trace ([25]), il existe constant $c_\gamma > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_\gamma \|u\|_V, \quad \forall u \in L^2(\Gamma_3).$$

Alors

$$\begin{aligned}
j(g, v_1) - j(g, v_2) &= \int_{\Gamma_3} \beta \|g_\nu\| (\mu \|v_{1,\tau} - v^*\| + v_{1,\nu}) da - \int_{\Gamma_3} \beta \|g_\nu\| (\mu \|v_{2,\tau} - v^*\| + v_{2,\nu}) da \\
&\leq (c_\gamma^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1)) \|g\|_V \|v_1 - v_2\|_V.
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

et

$$\begin{aligned}
j(g_1, v) - j(g_2, v) &= \int_{\Gamma_3} \beta \|g_{1\nu}\| (\mu \|v_\tau - v^*\| + v_\nu) da - \int_{\Gamma_3} \beta \|g_{2\nu}\| (\mu \|v_\tau - v^*\| + v_\nu) da \\
&\leq (c_\gamma^2 \|\beta\|_{L^\infty(\Gamma_3)} (\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} + 1)) \|g_1 - g_2\|_V \|v\|_V.
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

l'opérateur j défini par (3.3.7) satisfait **H (9)**:

soit $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{C}([0, T], V)$, $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
j(\lambda\eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2, v) &= \int_{\Gamma_3} \beta \|\lambda\eta_{1,\nu} + (1 - \lambda)\eta_{2,\nu}\| (\mu \|v - v^*\| + v_\nu) da \\
&\leq \int_{\Gamma_3} \beta \lambda \|\eta_{1,\nu}\| + (1 - \lambda) \|\eta_{2,\nu}\| (\mu \|v - v^*\| + v_\nu) da \\
&= \lambda \int_{\Gamma_3} \beta \|\eta_{1,\nu}\| (\mu \|v - v^*\| + v_\nu) da + (1 - \lambda) \int_{\Gamma_3} \beta \|\eta_{2,\nu}\| (\mu \|v - v^*\| + v_\nu) da \\
&= \lambda j(\eta_1, v) + (1 - \lambda) j(\eta_2, v).
\end{aligned}$$

Enfin, il est clair que f satisfait **H (8)**

Après avoir vérifié les hypothèses des théorèmes (1.4.13), sous la notation ci-dessus, nous déduisons que le problème P_V^η est uniquement résoluble qu'il existe une fonction unique \mathbf{u}_η qui satisfait $\dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}} \in C(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; V)$.

Il résulte de (3.3.5), (3.3.6), (3.3.7) et (3.3.8) que \mathbf{u}_η est une solution de le problème variationnel P_V^η et il a la régularité exprimé dans (3.3.1). Ceci conclut la preuve de la partie de l'existence du lemme 3.3.1. Le caractère unique de la solution au problème (3.3.4), garanti par le théorème (1.4.13).

soit $\theta \in C(0, T; L^2(\Omega))$

Problème P_V^θ

Trouver le champ d'endommagement $\alpha_\theta : \Omega \times [0; T] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \alpha_\theta(t) \in K, \quad & (\dot{\alpha}_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)} + \mathbf{a}(\alpha_\theta(t), \zeta - \alpha_\theta(t)) \\ & \geq (S(\sigma - \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}), \zeta - \alpha_\theta(t))_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \zeta \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T). \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

$$\alpha_\theta(0) = \alpha_0. \quad (3.3.12)$$

Dans l'étude du problème de P_V^θ , nous avons le résultat suivant.

Lemme 3.3.2 *Problème P_V^θ a une solution unique α_θ tel que*

$$\alpha_\theta \in H^1(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.3.13)$$

Démonstration du lemme 3.3.2

L'inclusion de $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1(\Omega)})$ dans $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ est continue et sa gamme est dense. On note $(H^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H^1(\Omega)$ et identifier le dual de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons écrire le Guelfand triple

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))'.$$

Nous utilisons la notation $(\alpha, \zeta)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour l'appariement de la dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$. nous avons

$$(\alpha, \zeta)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\alpha, \zeta)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \alpha \in L^2(\Omega), \zeta \in H^1(\Omega).$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles K est un sous-ensemble non vide, ferme et convexe dans $H^1(\Omega)$. Ainsi, le champ d'endommagement initial $\alpha_0 \in K$. Maintenant, en utilisant la definition (3.1.20) de la forme bilineaire a , pour tout $\varphi, \xi \in H^1(\Omega)$ on a

$$a(\varphi, \xi) = a(\xi, \varphi)$$

et

$$\begin{aligned} \|a(\varphi, \xi)\| &\leq 3k \|\nabla\varphi\|_H \|\nabla\xi\|_H \\ &\leq c \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \|\xi\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

donc, a est continue et symetrique. Ainsi, pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, nous avons

$$a(\varphi, \varphi) = k |\nabla\varphi|_H^2$$

alors

$$a(\varphi, \varphi) + (k+1) \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq k \|\nabla\varphi\|_H^2 + \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et d'où

$$a(\varphi, \varphi) + c_0 \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_1 \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \text{avec} \quad c_0 = k+1 \text{ et } c_1 = k$$

Nous remarquons que toutes les conditions du théorème (??) sont vérifiées. Ce qui conclut la preuve du lemme (3.3.2) .

Problème $PV_{\eta,\theta}$

Trouver le champ de contrainte $\sigma_{\eta,\theta} : (0, T) \longrightarrow V'$ solution du problème

$$\sigma_{\eta,\theta}(t) = \int_0^t \underset{p.p.}{\mathcal{G}}(\sigma_{\eta,\theta}(s), \varepsilon(u_{\eta}(s)), \alpha_{\theta}(s)) ds \quad \forall t \in (0, T) \quad (3.3.14)$$

Lemme 3.3.3 *Il existe une solution unique du problème $P\nu_{\eta,\theta}$ qui satisfait la régularité précédente (3.3.2). De plus, si $u_{\eta_i}, \alpha_{\theta_i}$ et σ_{η_i,θ_i} représenter les solutions aux problèmes P_V^{η}, P_V^{θ} et $P_{V_{\eta\theta}}$, pour $i = 1, 2$, respectivement, alors il existe $C > 0$ tel que*

$$\|\sigma_{\eta_1,\theta_1}(t) - \sigma_{\eta_2,\theta_2}(t)\|_{V'}^2 \leq C \left(\int_0^t \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\alpha_{\theta_1}(s) - \alpha_{\theta_2}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \quad (3.3.15)$$

Démonstration du lemme 3.3.3

Soit l'application $\sum_{\eta,\theta} : H^2(0, T; V') \rightarrow H^2(0, T; V')$ donnée par

$$\sum_{\eta,\theta} \sigma(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta,\theta}(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \alpha_\theta(s)) ds \quad (3.3.16)$$

Soit $\sigma_i \in H^2(0, T; V')$, $i = 1, 2$ et $t_1 \in (0, T)$. nous utilisons l'hypothèse (3.1.13) et l'inégalité de Hölder on trouve

$$\left\| \sum_{\eta,\theta} \sigma_1(t_1) - \sum_{\eta,\theta} \sigma_2(t_1) \right\|_{V'}^2 \leq L_{\mathcal{G}}^2 T \int_0^{t_1} \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad (3.3.17)$$

On a de plus

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{\eta,\theta} \left(\sum_{\eta,\theta} \sigma_1(t_1) \right) - \sum_{\eta,\theta} \left(\sum_{\eta,\theta} \sigma_2(t_1) \right) \right\|_{V'}^2 \\ & \leq L_{\mathcal{G}}^2 T \int_0^{t_1} \left\| \sum_{\eta,\theta} \sigma_1(t_2) - \sum_{\eta,\theta} \sigma_2(t_2) \right\|_{V'}^2 dt_2 \\ & \leq L_{\mathcal{G}}^4 T^2 \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{V'}^2 ds dt_2 \end{aligned}$$

On généralise l'inégalité au-dessus par récurrence, nous obtenons pour toute $t_1, t_2, \dots, t_n \in (0, T)$

$$\left\| \sum_{\eta,\theta}^{(n)} \sigma_1(t_n) - \sum_{\eta,\theta}^{(n)} \sigma_2(t_n) \right\|_{V'}^2 \leq L_{\mathcal{G}}^{2n} T^n \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_n} \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{V'}^2 ds dt_n \dots dt_2$$

Ainsi, on peut déduire en intégrant par rapport à $(0, T)$ l'inégalité suivante

$$\left\| \sum_{\eta,\theta}^{(n)} \sigma_1 - \sum_{\eta,\theta}^{(n)} \sigma_2 \right\|_{V'}^2 \leq \frac{L_{\mathcal{G}}^{2n} T^{2n}}{n!} \|\sigma_1 - \sigma_2\|_{V'}^2 \quad (3.3.18)$$

Alors de (3.3.18), pour n suffisamment grand, l'opérateur $\sum_{\eta,\theta}^{(n)}$ est une contraction sur l'espace $H^2(0, T; V')$ et d'après le théorème du point fixe de Banach, il existe un unique élément $\sigma_{\eta,\theta} \in H^2(0, T; V')$ telle que $\sum_{\eta,\theta}^{(n)} \sigma_{\eta,\theta} = \sigma_{\eta,\theta}$, qui représente la solution unique de problème $P\nu_{(\eta,\theta)}$.

De plus, si $u_{\eta_i}, \alpha_{\theta_i}$ et $\sigma_{\eta_i, \theta_i}$ représente les solutions de problème $P_V^{\eta_i}, P_V^{\theta_i}$ et $PV_{(\eta_i, \theta_i)}$ respectivement. pour $(i = 1, 2)$, désigner $u_{\eta_i} = u_i, \sigma_{\eta_i, \theta_i} = \sigma_i, \alpha_{\theta_i} = \alpha_i$. nous avons

$$\sigma_i(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_i(s), \varepsilon(u_i(s)), \alpha_i(s)) ds \quad \text{p.p.} \quad t \in (0, T)$$

et en utilisant les propriétés (3.1.13) de \mathcal{F} , nous trouver

$$\begin{aligned} \|\sigma_1(t) - \sigma_2(t)\|_{V'}^2 & \leq C \left(\int_0^t \|\sigma_1(s) - \sigma_2(s)\|_{V'}^2 ds \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \end{aligned}$$

Nous utilisons l'argument Gronwall dans l'inégalité obtenue a déduire (3.3.15).

Enfin, à la suite de ces résultats et en utilisant les propriétés de l'opérateurs \mathcal{A}, \mathcal{B} et \mathcal{F} et la fonction S pour $t \in [0, T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda(\eta, \theta)(t) = (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), \Lambda^2(\eta, \theta)(t)) \quad (3.3.19)$$

définis par les égalités

$$\begin{aligned} (\Lambda^1(\eta, \theta)(t), v)_{V'} &= \left(\int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta, \theta}(s), \varepsilon(u_\eta(s)), \alpha_\theta(s)) ds, \varepsilon(v) \right)_{V'} \\ &\quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

$$\Lambda^2(\eta, \theta)(t) = S(\sigma_{\eta, \theta}(t), \varepsilon(u_\eta(t)), \alpha_\theta(t)), \quad \forall v \in V \quad (3.3.21)$$

Soit nous considérons l'application

$$\Lambda : H^2(0, T; V' \times L^2(\Omega)) \rightarrow H^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$$

Lemme 3.3.4 *L'application Λ admet un point fixe $(\eta^*, \theta^*) \in H^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$, tel que*

$$\Lambda(\eta^*, \theta^*) = (\eta^*, \theta^*)$$

Démonstration du lemme 3.3.4

Soit $t \in (0, T)$ et $(\eta_1, \theta_1), (\eta_2, \theta_2) \in H^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$. Nous utilisons la notation $u_{\eta_i} = u_i, \dot{u}_{\eta_i} = \dot{u}_i, \sigma_{\eta_i, \theta_i} = \sigma_i$ pour $i = 1, 2$. par hypothèses (3.1.13), (3.1.14), nous avons

$$\begin{aligned} \|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V'}^2 &= \left\| \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta_1, \theta_1}(s), \varepsilon(u_{\eta_1}(s)), \alpha_{\theta_1}(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \mathcal{G}(\sigma_{\eta_2, \theta_2}(s), \varepsilon(u_{\eta_2}(s)), \alpha_{\theta_2}(s)) ds \right\|_{V'}^2 \\ &\leq L_{\mathcal{G}} \int_0^t (\|\sigma_{\eta_1, \theta_1}(s) - \sigma_{\eta_2, \theta_2}(s)\|_{V'}^2 + \|u_{\eta_1}(s) - u_{\eta_2}(s)\|_V^2 \\ &\quad + \|\alpha_{\theta_1}(s) - \alpha_{\theta_2}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds. \end{aligned}$$

Nous utilisons estimation (3.3.15) pour obtenir

$$\|\Lambda^1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V'}^2 \leq C \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right)$$

Par des arguments similaires, de (3.3.15), (3.3.21) et (3.1.14)

$$\|\Lambda^2(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) p.p.t \in (0, T)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right. \\ &\left. + \int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \quad p.p.t \in (0, T) \end{aligned}$$

D'autre part, étant donné que $u_i(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_i(s) ds$, on sait que pour p.p.t $\in (0, T)$

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds$$

On utilise lemme de Gronwall, nous trouvons

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad (3.3.22)$$

De (3.3.16), nous déduisons que

$$(\dot{\alpha}_1 - \dot{\alpha}_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)} + a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \alpha_1 - \alpha_2)_{L^2(\Omega)}, \quad p.p.t \in (0, T)$$

Intégrer l'inégalité par rapport au temps, avec les conditions initiales

$$\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = \alpha_0$$

et en utilisant l'inégalité

$$a(\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2) \geq 0$$

nous trouvons

$$\frac{1}{2} \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t (\theta_1(s) - \theta_2(s), \alpha_1(s) - \alpha_2(s))_{L^2(\Omega)} ds$$

Nous combinons l'inégalité précédente avec le lemme de Gronwall , pour trouver

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.3.23)$$

De l'inégalité et estimations précédente (3.3.19), (3.3.22) et (3.3.23) il s'ensuit que maintenant

$$\|\Lambda(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(\int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{V' \times L^2(\Omega)}^2 ds \right)$$

Introduisons les notations suivantes

$$\begin{cases} I_1 = \int_0^t \|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\|_{V' \times L^2(\Omega)} ds \\ \vdots \\ I_k = \int_0^t \int_0^{s_{k-1}} \dots \int_0^{s_1} \|(\eta_1, \theta_1)(r) - (\eta_2, \theta_2)(r)\|_{V' \times L^2(\Omega)} \end{cases}$$

et par récurrence, en notant par Λ^m la puissance $m^{\text{ième}}$ de l'opérateur Λ , on obtient

$$\|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)} \leq C^m \left(\sum_{k=1}^m C_m^k I^{m-k} \|(\eta_1, \theta_1)(t) - (\eta_2, \theta_2)(t)\|_{V' \times L^2(\Omega)} \right) \quad (3.3.24)$$

pour tout $t \in [0, T]$ et $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I^{m-k}((\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)) &= \int \dots \int_{(m-k)\text{fois}} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\| \\ &\leq \int_0^t \int \dots \int_{(m-k)\text{fois}} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{H^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))} \\ &\leq \frac{t^{m-k}}{k!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{H^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))} \\ &\leq \frac{T^{m-k}}{k!} \|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\|_{H^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)(t)\|_{H^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))} \\ &\leq C^m \left(\sum_{k=1}^m C_m^k \frac{T^{m-k}}{k!} \|(\eta_1, \theta_1)(t) - (\eta_2, \theta_2)(t)\|_{H^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))} \right) \\ &\leq \frac{(CT)^m}{m!} \|(\eta_1, \theta_1)(t) - (\eta_2, \theta_2)(t)\|_{H^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))}^2 \end{aligned}$$

cela implique que pour m suffisamment grand, l'opérateur Λ^m de Λ est une contraction sur l'espace de Banach $H^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$. donc Λ^m possède un point fixe unique $(\eta^*, \theta^*) \in H^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$ et par conséquent (η^*, θ^*) est l'unique point fixe de Λ .

Passons maintenant à la démonstration du théorème 3.3.1

Démonstration du théorème 3.3.1

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le théorème 3.3.1

Existence

Soit $(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \in L^2(0, T; \mathcal{H} \times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ défini par (3.3.25)- (3.3.26) et soient $\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}, \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\theta}^*}$ les solutions des problèmes P_V^η, P_V^θ pour $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*$, i.e $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}, \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{\theta}^*}$

Nous désignons par $\boldsymbol{\sigma}$ la fonction donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\eta}^*}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\eta}^*}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_{\boldsymbol{\eta}^*}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_{\boldsymbol{\eta}^*}(s)), \boldsymbol{\alpha}(s)) ds,$$

Puisque $\Lambda(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\theta}^*) = (\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$ on déduit $(\Lambda\boldsymbol{\eta}^*(t), v) = (\boldsymbol{\eta}^*, v), \forall v \in V$ p.p $t \in [0, T]$.

En utilisant (3.3.20) et (3.3.21) en gardant à l'esprit que $\Lambda^1(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\theta}^*) = \boldsymbol{\eta}^*, \Lambda^2(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\theta}^*) = \boldsymbol{\theta}^*$ on trouve que le quadruplet $\{u_{\boldsymbol{\eta}^*}, \sigma_{\boldsymbol{\eta}^*}, \alpha_{\boldsymbol{\theta}^*}\}$ est une solution du problème P_V . Cette solution a la régularité exprimés en (3.3.1)-(3.3.5) cela résulte de la régularités des solutions aux problèmes P_V^η, P_V^θ et $P_{V, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\theta}}$. De plus, il résulte de (3.1.11), (3.1.12) et (3.1.13) que $\sigma_{\boldsymbol{\eta}^*} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$. Choisisant maintenant $v = \varphi$ où $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)^d$ et utilisant (3.1.16) on trouve

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t), \quad p.p. \quad t \in (0, T)$$

Les hypothèses (3.1.15) et (3.1.16) la régularité exprimé dans (3.3.1) et l'égalité ci dessus impliquent que $\text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; V')$ lequel son tous implique $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

Unicité

La partie de l'unicité est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ , et de l'unicité des problèmes P_V^η et P_V^θ . A cet effet, soit $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}\}$ la solution du problème (3.2.6) (3.2.9) ayant la régularité (3.3.1), (3.3.3) et on considère un élément $(\boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \in L^2(0, T; V \times L^2(\Omega))$ défini par

$$(\boldsymbol{\eta}(t), \mathbf{v})_V = \left(\int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s))), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s))) ds, \mathbf{v} \right)_V \quad \forall \mathbf{v} \in V, t \in [0, T]. \quad (3.3.25)$$

$$\boldsymbol{\theta}(t) = \mathcal{S}(\boldsymbol{\sigma} - \mathcal{A}(\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t))), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\alpha}(t)). \quad (3.3.26)$$

L'équation (3.3.1) et (3.3.22) la condition initiale $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ signifie que \mathbf{u} est une solution de P_V^η et comme il résulte du lemme (3.3.1) que ce problème a une solution unique, notée \mathbf{u}_η nous concluons que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\eta \tag{3.3.27}$$

L'équation (3.1.3) et (3.3.23) la condition initiale $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{\alpha}_0$ impliquent maintenant que $\boldsymbol{\alpha}$ est une solution de P_V^θ du lemme 3.3.2 problème P_V^θ a une solution unique, notée $\boldsymbol{\alpha}_\theta$ et il s'ensuit que

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_\theta. \tag{3.3.28}$$

En utilisant (3.3.25) , (3.3.26) , (3.3.27) et (3.3.28) nous concluons que $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\theta})$ et par l'unicité du point de $\boldsymbol{\Lambda}$ fixe, il s'ensuit que

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^*. \tag{3.3.29}$$

L'unicité de la solution est maintenant une conséquence de (3.3.27)- (3.3.28) avec l'équation

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s) - \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(s)), \boldsymbol{\alpha}(s)) ds$$

Bibliography

- [1] R. S. Adams, *Sobolev spaces*, Academic press, New York(1975).
- [2] A. Aissaoui, N. Hemici, *Bilateral contact problem with adhesion and damage*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations No. 18, 1-16, (2014).
- [3] M. Campo, J.R. Fernández,W. Han, M. Sofonea, *A dynamic viscoelastic contact problem with normal compliance and damage*, Finite Elem. Anal. Des. 42, pp.1-24 ,(2005).
- [4] V. Barbu, *Optimal control of variational inequalities*, pitman. Boston.(1984).
- [5] P. G. Ciarlet, *Elasticité Tridimensionnelle*, Masson, Paris (1986)
- [6] O. Chau, M. Shillor M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, J. of Appl. Math. and Phys. (ZAMP), 55, pp.32-47, (2004).
- [7] O. Chau, M. Shillor, M. Sofonea, *Dynamic Frictionless Contact with adhesion*, J. Appl. Meth. Phys. (ZAMP), 55 , pp.431-465, (2004).
- [8] O. Chau, J.R. Fernández, M. Shillor, M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J. Comput. Appl. Math, 159 , pp.431-465, (2003).
- [9] M. Cocu, R. Rocca, *Existence Results for Unilateral Quasistatic Contact Problems with Friction and Adhesion*, Math. Model. and Numer. Anal. 34, pp.981-1001, (2000) .
- [10] A.Curien and C. *A model of adhesion added to contact with friction*, in contact Martine and MDP Monteiro Marques (Eds.),Kluwer Dordrecht, pp. 161-168,2002.
- [11] G. Duvaut, J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, (1976).

- [12] J.R. Fernandez, M. Shillor and M. Sofonea, Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion, *Math. Comput. Modelling*, 37, pp.1317-1333 ,(2003).
- [13] M. Frémond, *Adhérence des solides*, *J Mécanique Théorique et appliquée*, 6 , pp.383-407, (1987).
- [14] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, *C.R. Acad. Sci. Paris, Sér.II.295* , pp.913-916,(1982).
- [15] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage in concrete: The unilateral phenomenon*, *Nucl. Eng. Des.* 155 , pp.323-335,(1995).
- [16] M. Frémond, B. Nedjar; *Damage in gradient of damage and principle of virrtual work* , *Int. J. Solids. Stuct.*,33(8), pp. 1083-1103, (1996).
- [17] M. Frémond, KL. Kuttler, B. Nedjar, M. Shillor, *One-dimensional models of damage*, *Adv. Math. Sci. Appl.* 8(2),155, pp.541-570, (1998).
- [18] W. Han, M. Sofonea; *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, *Studies in Advanced Mathematics* 30, Americal Mathematical Society, Providence, RI-Intl.Press, Sommerville, MA, (2002).
- [19] W. Han, M. Sofonea; *Numerical Analysis of a Frictionless Contact Problem for Elastic-Viscoplastic Materials*, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng* 190,pp.179-191, (2000).
- [20] N. Hemici, B. Awbi,M. Sofonea; *Viscoelastic problem contact with compliance normal and adhesion*, *Annals of University of Bucarest* 51, pp.131-142, (2002) .
- [21] N. Hemici, M. Sofonea; *Analysis of dynamic bilateral contact problem with adhesion*, *Proceedings of the Fourth International Conference on Applied Mathematics and Engineering Sciences*, (CIMASI 2002), Casablanca (2002), CD-ROM.
- [22] L. Jianu, M. Shillor, M.Sofonea; *A viscoelastic bilateral frictionless contact problem with*, *Applic.Anal* 80, 233-255, (2001).
- [23] L.Schwartz, *Théorie des Distributions*,Hermann,paris(1967).

- [24] M. Raous, L. Cangémi, M. Cocu; *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 177, pp. 383-399, (1999).
- [25] M. Rochdi, M. Shillor, M. Sofonea; *Analysis of a quasistatic viscoelastic problem with friction and damage*, Adv. Math. Sci. Appl., 10, pp. 173-189, (2002).
- [26] L. Selmani, L. Chouchane; *A frictionless contact problem with adhesion and damage*, Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 33, pp. 94-107, (2006).
- [27] M. Selmani, L. Selmani; *A Dynamic Frictionless Contact Problem with Adhesion and Damage*, Bull. Pol. Acad. Sci., Math., 55, pp. 17-34, (2007).
- [28] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor; *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics, Vol. 276, Chapman Hall/CRC Press, New York, (2006).
- [29] W. Han, M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics 30, American Mathematical Society, Providence, RI-Intl.Press, Sommerville, MA, (2002)
- [30] W. Han, M. Sofonea, *Numerical Analysis of a Frictionless Contact Problem for Elastic Viscoplastic Materials*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng 190, , pp.179-191, (2000).
- [31] N. Kikuchi, T.J. Oden, *Contact Problems Elasticity*, A Study of variational Inequalities and Finite Element MethodsSIAM, Philadelphia,(1988).

Résumé

L'objet dans ce mémoire, est l'étude variationnelle de quelques problèmes aux limites de contact avec réponse normale instantanée où l'usure et frottement et adhésion et endommagement entre un corps déformable et une base rigide ou déformable. Ici nous considérons des lois de comportement non linéaires pour des matériaux viscoélastique non linéaire avec mémoire longue dans les processus dynamiques et élasto- viscoplastiques dans les processus dynamiques. Pour ces problèmes nous obtenons des formulations variationnelles, nous avons utilisé la formule de Green à partir d'un problème mécanique. On a montré l'existence et l'unicité de la solution des problèmes par l'utilisation des techniques employées sont basées sur la théorie des opérateurs monotones, inégalité variationnelle hyperbolique, suivis d'une version du théorème de Cauchy-Lipschitz et des arguments du point fixe de Banach

Mots clés: viscoélastique avec mémoire longue, élasto- viscoplastiques, adhésion, endommagement, inéquation d'évolution, inéquation variationnelle hyperbolique, solution faible, point fixe

Abstract

The object in this thesis is the variational study of some problems at the limits of contact with instantaneous normal response where wear and friction and adhesion and damage between a deformable body and a rigid or deformable base. Here we consider nonlinear constitutive laws for nonlinear viscoelastic materials with long memory in dynamic and elasto-viscoplastic processes in dynamic processes. For these problems we obtain variational formulations, we used Green's formula from a mechanical problem. We have shown the existence and the uniqueness of the solution of problems by using the techniques used are based on the theory of monotonic operators, hyperbolic variational inequality, followed by a version of the Cauchy-Lipschitz theorem and the arguments of Banach fixed point

Key words: viscoelastic with long memory, elastoviscoplasticity, adhesion, damage, evolution inequality, hyperbolic variational inequality, weak solution, fixed point

المخلص

الهدف من هذه الرسالة هو الدراسة التباينية لبعض المشاكل في حدود التماس مع الاستجابة الطبيعية الفورية حيث البلى والاحتكاك والالتصاق والضرر بين جسم مشوه وقاعدة صلبة أو مشوهة. هنا نعتبر القوانين التأسيسية غير الخطية للمواد اللزجة غير الخطية ذات الذاكرة الطويلة في العمليات الديناميكية والمرنة بالليزر في العمليات الديناميكية . لهذه المشاكل نحصل على تركيبات متنوعة ، استخدمنا صيغة غرين من مشكلة ميكانيكية. لقد أظهرنا وجود وتفرد حل المشاكل باستخدام التقنيات المستخدمة التي تستند إلى نظرية العوامل الرتببة ، التفاوت التبايني الزائدي ، تليها نسخة من نظرية كوشي-ليبيشيتز وحجج بناخ لنقطة ثابتة كلمات مفتاحية: اللزوجة مع ذاكرة طويلة ، الدائن المرنة ، الالتصاق ، الضرر ، عدم المساواة في التطور ، اللامساواة المتغيرة الزائدية ، الحل الضعيف ، نقطة ثابتة .