

Scientifique

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche

UNIVERSIT D'EL-OUED
FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation

numérique

Présenté par:

HANAFI Basma

HALA Radja

ATALLAH Maroua

Sous l'encadrement de:

DOUDI Nadjat

Thème

Meilleures approximations et polynômes de Tchebychev

Année universitaire 2012 – 2013

Remerciements

Table des matières

Introduction générale	1
1 Notion de la meilleure approximation	2
1.1 Meilleure approximation	3
1.2 Polynômes orthogonaux	3
1.3 Meilleure approximation de polynômes de degré n	3
1.3.1 Meilleure approximation d'un polynôme de degré n dans P_{n-1}	3
1.3.2 Meilleure approximation de polynômes de degré n dans P_{n-2}	4
1.4 Propriétés de la meilleure approximation	4
1.4.1 Symétrie	4
1.4.2 Condition de Haar	5
1.4.3 Théorème de La vallé Poussin	5
1.4.4 Théorème de la condition nécessaire et suffisante pour la meilleure approximation	6
1.4.5 Unicité forte	7
1.4.6 Signes alternés	7
1.5 Quelques polynômes d'interpolation	7
1.5.1 Polynôme de Lagrange	7
1.5.2 Polynôme de Legendre	8
1.5.3 Polynôme de Hermite	8
1.6 Polynôme Tchebychev	8
1.7 Meilleure approximation de la fonction nulle	9

2	Propriétés des polynômes de Tchebychev	11
2.1	Existence	11
2.1.1	Polynômes de Tchebychev de 1 ^{ère} espèce : T_n	11
2.1.2	Polynômes de Tchebychev de 2 ^{ème} espèce : U_n	12
2.2	Relation entre T_n et U_n	13
2.3	Calcul de $T_n(x)$	13
2.4	Signes alternés du polynôme de Tchebychev	14
2.5	Degré, coefficient dominant	15
2.6	Orthogonalité des polynômes T_n	15
2.7	$T_m(T_n(x)) = T_{nm}(x)$	16
2.8	Formule de Christofel-Darboux	17
2.9	Equation différentielle vérifiée par T_n et coefficients de T_n	17
2.9.1	Equation différentielle vérifiée par T_n	17
2.9.2	Coefficients de T_n	18
2.10	Développement en série de Taylors	19
2.10.1	Définition de la série hypergéométrique généralisée	19
2.11	Développement d'une fonction en série de Tchebychev	20
3	Quelques Applications de polynômes de Tchebychev	21
3.1	Equation différentielle linéaire	21
3.2	Polynômes de Tchebychev et problèmes de Sturm-Liouville	22
3.3	Coefficients, dérivées et primitives	23

Introduction générale

La théorie de l'approximation est la plus aimable des sciences exactes. Le droit à l'erreur y est autorisé, et même encouragé. Un objet f (nombre réel, fonction, opérateur, etc.) mathématiquement défini mais inaccessible à des représentations élémentaires, est approché par un objet plus simple p . Au premier niveau, il s'agit de construire une approximation acceptable p .

L'interpolation polynomial représente une partie importante de l'approximation, ou on peut approcher une fonction quelconque par un polynôme de degré déterminé.

Tchebychev admettait sans démonstration l'existence des polynômes qui s'écartent le moins possible d'une fonction donnée dans un intervalle déterminé et qu'on appelle aujourd'hui polynômes d'approximation ou plus précisément la meilleure approximation. Mais l'analyse moderne exige cette démonstration, car on sait que les questions de minima n'admettent pas toujours de solution. Il est donc indispensable de faire quelques remarques pour établir l'existence de polynômes qui, parmi tous les polynômes considérés, s'écartent le moins possible de zéro.

Dans le premier chapitre on s'intéresse à donner la notion de la meilleure approximation avec quelques propriétés générales et théorèmes principaux comme le théorème de la Vallé Pousin et théorème de Tchebychev.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du polynôme de Tchebychev avec quelques propriétés importantes, et à donner comment peut développer une fonction en série de Tchebychev.

Dans le dernier chapitre nous avons donné quelques applications importantes du polynôme de Tchebychev comme la résolution d'une équation différentielle linéaire, problèmes de Sturm-Liouville et l'utilisation pour trouver les dérivées et les primitives d'une fonction.

Chapitre 1

Notion de la meilleure approximation

La détermination de la meilleure approximation n'est pas toujours facile. Elle dépend de la topologie des espaces mis en oeuvre. On s'intéresse ici à donner une idée simple de la meilleure approximation dans un espace vectoriel normé.

Définition 1.0.1 (*Distance*) Rappelons qu'une distance sur l'ensemble X est une fonction d définie pour tout couple d'éléments de X , avec

1- $\forall (f, g) \in X \times X, d(f, g) \geq 0,$

2- $(f = g) \Leftrightarrow (d(f, g) = 0),$

3- $\forall (f, g) \in X \times X, d(f, g) = d(g, f) \quad (\text{symétrie}),$

4- $\forall (f, g, h) \in X \times X \times X, d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g) \quad (\text{inégalité triangulaire}).$

On appelle espace métrique tout ensemble X muni d'une distance.

Définition 1.0.2 (*Norme*) Une norme sur un espace vectoriel X (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) doit vérifier

1- $\forall f \in X, \|f\| \geq 0,$

2- $f = 0 \Leftrightarrow \|f\| = 0,$

3- $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|,$

4- $\forall f, g \in X, \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$

Alors, $\|f - g\|$ est une distance valide [1].

Définition 1.0.3 (*Approximation*) On dit que le polynôme p de degré $\leq n$ représente une approximation d'une fonction continue f sur l'intervalle (a, b) si la valeur $\max_{x \in (a; b)} |f(x) - P(x)|$ est minimale.

1.1 Meilleure approximation

Définition 1.1.1 (Meilleure approximation)

Soit V un espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $((\cdot, \cdot))$ et $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit V_n un sous espace de V de dimension finie. On note $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ une base de V_n . On dit que $p_n \in V_n$ réalise la meilleure approximation de $f \in V$ au sens suivant

$$\|p_n - f\| = \min_{v_n \in V_n} \|v_n - f\| \quad (1.1.1)$$

1.2 Polynômes orthogonaux

Soit $]a; b[\in \mathbb{R}$ borné ou non. Soit un poids $\omega :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ continue. On suppose $\int_a^b |x|^2 \omega(x) dx$ est convergente. Soit $E = C^0([a, b])$ muni du produit scalaire

$$\langle f; g \rangle_\omega = \int_a^b f(x) g(x) \omega(x) dx$$

et $\|\cdot\|_\omega$ la norme associée [5].

Définition 1.2.1 On dit que les deux fonctions f et g sont orthogonaux relativement à la fonction de poids $\omega(x)$ sur (a, b) si

$$\int_a^b f(x) g(x) \omega(x) dx = 0$$

1.3 Meilleure approximation de polynômes de degré n

1.3.1 Meilleure approximation d'un polynôme de degré n dans

$$P_{n-1}$$

La fonction continue la plus simple qui ne soit pas dans $V = P_{n-1}$ est un polynôme $f(x) = \alpha x^n + \dots + \gamma$ de degré n .

La fonction d'erreur $\hat{e} = f - \hat{p}$ est encore un polynôme de degré n ayant en commun avec f son coefficient de x^n . Les deux problèmes suivants sont équivalents:

1. Construire la meilleure approximation $\hat{p}$ de $f(x) = \alpha x^n + \alpha' x^{n-1} + \dots + \gamma$ dans P_{n-1} sur $[a, b]$,
2. Construire $\beta', \beta'', \dots$ tels que

$$\hat{e}(x) = \alpha x^n + \beta' x^{n-1} + \beta'' x^{n-2} + \dots + \delta \quad (1.3.1)$$

soit de norme $\|\cdot\|_\infty$ minimale sur $[a, b]$.

En effet, si on résout **1**, il suffit de prendre $\hat{e} = f - \hat{p}$; si on résout **2**, $\hat{p} = f - \hat{e}$. La formulation **2** montre qu'il suffit de s'occuper de α, a et b . De plus, si on résout **1** ou **2** avec $\alpha = 1$, il suffira de multiplier la réponse $\hat{p}$ ou $\hat{e}$ par α . On peut donc se limiter au problème:

3. Construire la meilleure approximation de x^n dans P_{n-1} sur $[a, b]$.

Proposition 1.3.1 *On se ramène à l'intervalle canonique $[-1, 1]$ par le changement de variable*

$$t \text{ parcourt } [-1, 1] \Leftrightarrow x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t \text{ parcourt } [a, b] \quad (1.3.2)$$

On peut donc se limiter à

4. Construire la meilleure approximation de x^n dans P_{n-1} sur $[-1, 1]$.

1.3.2 Meilleure approximation de polynômes de degré n dans P_{n-2}

Ne s'obtient (généralement) pas en passant de n à $n-1$, puis à $n-2$! le polynôme de la forme $x^n + \beta x^{n-1} + \dots + \delta$, avec β imposé, de moindre norme est de la forme constante $T_n(\gamma x + \delta)$ si $|\beta| \leq n \tan^2 \frac{\pi}{2n}$, sinon, c'est beaucoup plus compliqué [1].

1.4 Propriétés de la meilleure approximation

1.4.1 Symétrie

Si f est une fonction paire sur un intervalle de la forme $[-a, a]$, c'est-à-dire si $\forall x \in [-a, a]$, $f(-x) = f(x)$, alors sa meilleure approximation $\hat{p}$ de degré $\leq n$ au sens de Tchebychev est

également une fonction paire. De même, si f est une fonction impaire ($f(-x) = -f(x)$), $\hat{p}$ est une fonction impaire.

En effet, soit $f(-x) = sf(x)$ avec $s = 1$ (fonction paire) ou $s = -1$ (fonction impaire). On a

$$E = \|f(x) - \hat{p}(x)\|_{\infty} = \|f(-x) - \hat{p}(-x)\|_{\infty} = \|sf(-x) - s\hat{p}(-x)\|_{\infty} = \|f(x) - s\hat{p}(-x)\|_{\infty}$$

d'où on conclut que $s\hat{p}(-x)$ est également une meilleure approximation de f sur le même intervalle $[-a, a]$, d'où, par unicité, $s\hat{p}(-x) = \hat{p}(x)$.

Si f est paire sur $[-a, a]$, la meilleure approximation de degré $\leq 2n$ présente donc nécessairement un alternant d'au moins $2n + 3$ points (puisque le même $\hat{p}$ est également optimal dans P_{2n+1}) [1].

1.4.2 Condition de Haar

Il existe une condition nécessaire et suffisante pour assurer l'unicité de la meilleure approximation $\hat{p} \in V_n$ d'une fonction $f \in C(a, b)$. Cette condition est exprimé par l'équivalence suivant:e

$\hat{p}$ qui exprime la meilleure de la fonction f est unique si et seulement si tout $p_n \in V_n$ admet moins que n racines sur (a, b) [6].

1.4.3 Théorème de La vallé Poussin

Soit f continue sur le compact $[a, b]$ et $\hat{p}$ sa meilleure approximation de degré $\leq n$ au sens de Tchebychev. Soit $E = \|f - \hat{p}\|_{\infty}$.

Alors, s'il y on a $p \in P_n$ et des points

$$a \leq x'_{n+1} < x'_n < \cdots < x'_1 < x'_0 \leq b$$

où $f - p$ prend des valeurs de signes alternés, on a

$$\min_{0 \leq i \leq n+1} |f(x'_i) - p(x'_i)| \leq E$$

En effet, si tous les $|f(x'_i) - p(x'_i)| > E$, chaque $\hat{p}(x'_i) - p(x'_i)$ serait de même signe que $f(x'_i) - p(x'_i)$, puisque $\hat{p}(x'_i) - p(x'_i) = f(x'_i) - p(x'_i) - (f(x'_i) - \hat{p}(x'_i))$ et que $f(x'_i) - \hat{p}(x'_i)$ n'est pas assez grand (sa valeur absolue est $\leq E$) pour renverser le signe de $f(x'_i) - p(x'_i)$.

Le polynôme $\hat{p} - p$ de degré $n \in P_n$ devrait donc prendre des signes alternés en $n + 2$ racine, donc changer de signe en $n + 1$ points intermédiaires, ce qui est impossible.

Ce dernier théorème permet d'apprécier dans quelle mesure un polynôme $p \in P_n$ est proche de $\hat{p}$: si p est tel que les signes des $f(x'_i) - p(x'_i)$ soient alternés, on a l'encadrement pour E

$$\min_{0 \leq i \leq n+1} |f(x'_i) - p(x'_i)| \leq E.$$

Puisque p n'est (normalement) pas optimal et que le dernier terme n'est autre que $\|f - p\|_\infty$.

Si les deux normes $E = \|f - \hat{p}\|$ et $\|f - p\|$ sont proches, p et $\hat{p}$ sont également proches, par forte unicité [1]

$$\|p - \hat{p}\| \leq (\|f - p\| - E) / \gamma.$$

1.4.4 Théorème de la condition nécessaire et suffisante pour la meilleure approximation

Théorème 1.4.1 (Théorème de Tchebychev)

La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction $\hat{p} \in P_n$ être une meilleure approximation de la fonction f est

$$|f(x_i) - \hat{p}(x_i)| = \max_{x \in (a,b)} |f(x) - \hat{p}(x)|$$

pour $n + 1$ points $x_0, x_1, \dots, x_n$ de (a, b) .

Exemple 1.4.1 Le polynome $\hat{p} = x^2 + \frac{1}{8}$ est la meilleure approximation de degré ≤ 3 de la fonction $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$.

Les points extrémaux de la fonction d'erreur sont bien a nombre de 5 : $0, \pm \frac{1}{2}$ et ± 1 .

$$E(x) = f(x) - \hat{p}(x) = |x| - x^2 - \frac{1}{8}$$

On a $\max_{x \in [-1, 1]} |E(x)| = \frac{1}{8}$. les valeurs alternatives de $E(x)$ aux points $0, \pm \frac{1}{2}$ et ± 1 sont [6]

$$E(-1) = -\frac{1}{8}, E\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, E(0) = -\frac{1}{8}, E\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}, E(1) = -\frac{1}{8}$$

1.4.5 Unicité forte

Essayons d'apprécier dans quelle mesure $\|f - p\|$ est plus grand que $\|f - \hat{p}\|$ quand $p \neq \hat{p}$. En chacun des $(n + 2)$ points de l'alternant de $f - \hat{p}$, on a

$$f(x_i) - p(x_i) = f(x_i) - \hat{p}(x_i) + \hat{p}(x_i) - p(x_i) = (-1)^i \sigma \left(E + \|\hat{p} - p\| \frac{Q(x_i)}{(-1)^i \sigma} \right),$$

où Q est le polynôme de norme unité $(\hat{p} - p) / \|\hat{p} - p\| \in P_n$ et $\sigma \left(E + \|\hat{p} - p\| \frac{Q(x_i)}{(-1)^i \sigma} \right)$ est le signe de $\left(E + \|\hat{p} - p\| \frac{Q(x_i)}{(-1)^i \sigma} \right)$.

Les $(n + 2)$ valeurs $Q(x_i) / \left((-1)^i \sigma \right)$ ne peuvent être toutes ≤ 0 , sinon Q aurait au moins $n + 1$ zéros. On montre que $\max_i (-1)^i \sigma Q(x_i)$ est une fonction strictement positive, continue en les coefficients de Q sur le compact $B_1 \cap P_n$, elle admet donc un minimum également strictement positif que l'on note γ .

En un x_i où $(-1)^i \sigma Q(x_i) \geq \gamma$, on a donc

$$|f(x_i) - p(x_i)| \geq E + \|\hat{p} - p\| \gamma,$$

d'où $\|f - p\| \geq E + \gamma \|\hat{p} - p\|$.

1.4.6 Signes alternés

A partir d'une approximation quelconque p , il n'est pas toujours possible de trouver $n + 2$ points x'_i où $f - p$ prend des valeurs de signes alternés, mais on peut se donner $n + 2$ points x'_i arbitraires (toujours avec $a \leq x'_{n+1} < \dots < x'_0 \leq b$, bien sûr), et construire $p \in P_n$ tel que les valeurs $f(x'_i) - p(x'_i)$ soient de signes alternés [1].

1.5 Quelques polynômes d'interpolation

1.5.1 Polynôme de Lagrange

Il s'écrit

$$L_n(x) = \sum_{K=0}^n Y_K L_{n,K}(x) \tag{1.5.1}$$

où $L_{n,k}(x)$ sont les coefficients de Lagrange définis par

$$L_{n,k}(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \quad (1.5.2)$$

et $Y_k = P_n(x_k)$. Notez que ces coefficients sont en fait des polynômes.

1.5.2 Polynôme de Legendre

Ils sont définis par la relation de récurrence

$$(k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x) - kP_{k-1}(x) \quad (1.5.3)$$

avec $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$. Leur parité est celle k . Sur l'intervalle $[-1,1]$, ils satisfont $|P_k(x)| \leq 1$.

1.5.3 Polynôme de Hermite

Ils sont définis par la relation de récurrence

$$H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - kH_{k-1}(x) \quad (1.5.4)$$

avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2x$. Il ont la même parité que k [4].

1.6 Polynôme Tchebychev

Soit Z un nombre complexe ($Z \in \mathbb{C}$) tel que $|Z| = 1$, alors on peut écrire

$$Z = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$

$$Z^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (1.6.1)$$

On a

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \\ (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= \sum_{k=0}^n C_n^k (\cos \theta)^k (i \sin \theta)^{n-k} \\ &= \cos^n \theta + i C_n^1 \cos^{n-1} \theta \sin \theta - C_n^2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta \cdots \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

La partie réel de (1.6.1) = La partie réel de (1.6.2)

$$\begin{aligned}\cos n\theta &= (\cos \theta)^n - C_n^2 (\cos \theta)^{n-2} (\sin \theta)^2 + C_n^4 (\cos \theta)^{n-4} (\sin \theta)^4 + \dots \\ &= (\cos \theta)^n - C_n^2 (\cos \theta)^{n-2} (1 - (\cos \theta)^2) + C_n^4 (\cos \theta)^{n-4} (1 - (\cos \theta)^2)^2 + \dots\end{aligned}$$

Cette expression représente un polynôme de degré $\leq n$ du variable $x = \cos \theta$, $\theta = \arccos x$.
Donc, $\cos(n \arccos x) = \cos(n\theta)$ est un polynôme de degré $\leq n$ appelé polynôme de **Tchebychev** (T_n) [6].

1.7 Meilleure approximation de la fonction nulle

Théorème 1.7.1 Les polynômes de Tchbychev $T_n^*(x) = \frac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ (le coefficient de x^n est égale à 1) de degré inférieur ou égale à n représente la meilleure approximation de la fonction nulle sur l'intervalle $(0, 1)$.

Preuve. Par l'absurde, supposon que $T_n(x)$ n'est pas la meilleure approximation de la fonction nulle sur $(0, 1)$.

Alors, on peut trouver un polynome $R_n \in P_n$ tel que

$$\|R_n\| \leq \|T_n^*\|$$

Donc, $\|T_n^*\| \neq \min_{R_n \in P_{n-1}} \|R_n\|$, posons

$$q = T_n^* - R_n$$

q est un polynome de degré $\leq n - 1$ (car le coefficient de x^n dans T_n^* et R_n est égale à 1).

On considère les points $x_0, x_1, \dots, x_n$ où T_n prendre les valeurs $-1, +1, \dots$ c'est-à-dire T_n^* prendre les valeurs $-\frac{1}{2^{n-1}}, +\frac{1}{2^{n-1}}, \dots$

Donc,

$$q(x) = T_n^*(x) - R_n(x)$$

$$q(x_0) = -\frac{1}{2^{n-1}} - R_n(x)$$

$$q(x_1) = \frac{1}{2^{n-1}} - R_n(x)$$

.

.

Mais $\|R_n\| \leq \|T_n^*\|$. Alors $q(x_1) < 0, q(x_2) > 0, \dots$

Alors, le polynome q admet n racine c'est une contradiction car q est de degré $n - 1$ [6].

■

Chapitre 2

Propriétés des polynômes de Tchebychev

On donne ici, quelques propriétés des polynômes de Tchebychev, et comment développer une fonction par une série de Tchebychev.

2.1 Existence

2.1.1 Polynômes de Tchebychev de 1^{ère} espèce : T_n

Soit n un entier naturel. Il existe un et un seul polynôme noté T_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

.

Unicité

T_n est déterminé sur $[-1, 1]$ qui est infini et donc uniquement déterminé.

Existence

Soient n un entier naturel et θ un réel.

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \operatorname{Re}(e^{in\theta}) = \operatorname{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k\right) \\ &= \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} (\cos\theta)^{n-2p} (\sin\theta)^{2p} = \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} (\cos\theta)^{n-2p} (1 - \cos^2\theta)^p\end{aligned}$$

et le polynôme $\sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} X^{n-2p} (1 - X^2)^p$ convient

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n = \sum_{p=0}^{E(n/2)} (-1)^p C_n^{2p} X^{n-2p} (1 - X^2)^p.$$

2.1.2 Polynômes de Tchebychev de 2^{ème} espèce : U_n

Soit n un entier naturel non nul. Il existe un et un seul polynôme noté U_n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin\theta \times U_n(\cos\theta) = \sin(n\theta)$$

Unicité

U_n est déterminé sur $] -1, 1[$ qui est infini et donc uniquement déterminé.

Existence

Soient n un entier naturel et θ un réel.

$$\begin{aligned}\sin(n\theta) &= \operatorname{Im}(e^{in\theta}) = \operatorname{Im}((\cos\theta + i\sin\theta)^n) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^n C_n^k (\cos\theta)^{n-k} (i\sin\theta)^k\right) \\ &= \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} (\cos\theta)^{n-(2p+1)} (\sin\theta)^{2p+1} \\ &= \sin\theta \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} (\cos\theta)^{n-2p-1} (1 - \cos^2\theta)^p.\end{aligned}$$

et le polynôme $\sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} X^{n-2p-1} (1 - X^2)^p$ convient

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} (-1)^p C_n^{2p+1} X^{n-2p-1} (1 - X^2)^p.$$

2.2 Relation entre T_n et U_n

Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel, on a $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$. En dérivant cette relation, pour tout réel, on obtient

$$- \sin T'_n(\cos \theta) = -n \sin(n\theta),$$

ou encore

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \sin \theta \left(\frac{1}{n} T'_n \right)'(\cos \theta) = \sin(n\theta).$$

Par unicité de U_n , on a donc [3]

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \frac{1}{n} T'_n.$$

2.3 Calcul de $T_n(x)$

On a: $T_0(x) = 1$

$$T_1(x) = \cos(1 \arccos x) = \cos(\arccos x) = x.$$

Pour calculer T_2, T_3 on utilise la relation trigonométrique suivante

$$\cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta) = 2 \cos(n\theta) \cos(m\theta). \forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$T_n(x) = \cos(n\theta)$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \Leftrightarrow T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (2.3.1)$$

Pour $m = 1 \quad n \in \mathbb{N}$

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos(n\theta) \cos \theta$$

On a : $\cos \theta = x$

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos(n\theta) x$$

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1] \quad (2.3.2)$$

Cette relation de récurrence permet de calculer $T_2, T_3, \dots$

Exemple 2.3.1 calcul de T_2 :

Si $n = 1$

$$T_{1+1}(x) + T_{1-1}(x) = 2xT_1(x)$$

$$T_2(x) + T_0(x) = 2xT_1(x)$$

$$T_2(x) + 1 = 2x^2$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = ?$$

$$n = 2 \Rightarrow T_3(x) = 2xT_2(x) - T_1(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 3x$$

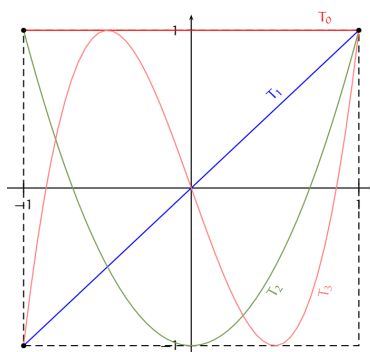


Figure 2.3.1: Graphes des premiers T_n .

2.4 Signes alternés du polynôme de Tchebychev

T_n est une fonction paire ou impaire selon la parité de n .

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \cos(n\theta)$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

$$-1 \leq T_n(x) \leq 1$$

Donc, le polynôme de Tchebychev est de degré $\leq n$ défini sur $[-1, 1]$

$$T_n : x \longrightarrow T_n(x)$$

$$[-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$$

$$x = \cos \theta, \quad T_n(x) = \cos(n\theta)$$

$$T_n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(n\theta) = 0 \Leftrightarrow n\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$$

Donc, le polynôme de Tchebychev s'annule aux points

$$x_k = \cos \theta_k \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{telque} \quad \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

$$(\text{si } n = 0 \Rightarrow T_0(x) = 1).$$

T_n prend les valeurs alternatives $-1, +1, -1, +1, \dots$ Si $n\theta = k\pi \Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{n}$ [6].

2.5 Degré, coefficient dominant

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que

$$T_n = \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^p C_n^{2p} X^{n-2p} (1 - X^2)^p.$$

Puisque pour tout entier naturel $p \in [0, E(\frac{n}{2})]$, on a $n - 2p + 2p = n$, T_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n .

De plus, le coefficient de X^n dans T_n vaut [3]

$$\begin{aligned} C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots &= \frac{1}{2} ((C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots) + (C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots)) \\ &= \frac{1}{2} ((1+1)^n + (1-1)^n) \\ &= \frac{1}{2} (2 + 0)^n \quad ((1-1)^n = 0 \text{ car } n \geq 1) \\ &= 2^{n-1}. \end{aligned}$$

2.6 Orthogonalité des polynômes T_n

Les polynômes de Tchebychev construisent un ensemble des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. C'est-à-dire

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_i(x) T_j(x) dx = 0 \quad (i \neq j).$$

Le coefficient a_n de x^n dans le polynôme de Tchebychev T_n est égal à 2^{n-1} . Donc, on peut écrire [6]

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R})$$

2.7 $T_m(T_n(x)) = T_{nm}(x)$

En effet, les deux nombres valent $\cos(nm\theta)$ d'après

$$x = \cos \theta, T_n(x) = \cos(n\theta).$$

Problème 2.7.1 Montrez que f_n de degré exact $n, n = 0, 1, \dots$

$f_n \circ f_m = f_m \circ f_n, m, n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow f_n(x) = c + a^{n-1}(x - c)$ ou $f_n(x) = c + aT_n((x - c)/a), n = 0, 1, 2, \dots$

En effet, soit $f_0 = 0 \Rightarrow$ tous les $f_n(\alpha) = \alpha$. Si β est la deuxième racine de $f_n(x) = \alpha$, on a $f_2(x) = \alpha + \varepsilon(x - c)(x - \beta) = \alpha - \varepsilon(\alpha - \beta)^2/4 + \varepsilon(x - c)^2$, où $c = (\alpha + \beta)/2$. $f_n \circ f_2 = f_2 \circ f_n$ et f_n de degré exact $n \Rightarrow f_n - c$ est de parité n en $x - c$. $f_3(x) = x + \varepsilon^2(x - \alpha)(x - c)$ et on trouve $\varepsilon(\alpha - \beta) = 2$ ou **4**. Il reste alors $\left[\frac{n}{2}\right]$ inconnues dans $f_n(x) = c + \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \gamma_k(x - c)^{n-2k}$, avec $\gamma_0 = \varepsilon^{n-1}$.

On trouve alors de proche en proche $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ en égalant les coefficients de $(x - c)^{2n-2}, (x - c)^{2n-4}, \dots$ dans $f_n(f_2(x))$. Il n'y a donc que deux familles possibles, que l'on identifie alors aisément.

En particulier, les polynômes de Tchebychev sur $[0; 1]$ sont

$$T_n^* = T_n(2x - 1) = T_{2n}(\sqrt{x})$$

2.8 Formule de Christofel-Darboux

$$\frac{T_{n+1}(x)T_n(y) - T_n(x)T_{n+1}(y)}{x-y} = 2 \sum_{k=0}^n T_k(x)T_k(y) \quad (2.8.1)$$

En effet , 1. vrai si $n = 0$; 2. $n - 1 \longrightarrow n$: on applique la relation de récurrence $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ pour se ramener à l'ancien numérateur

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x)T_n(y) - T_n(x)T_{n+1}(y) &= [2xT_n(x) - T_{n-1}(x)]T_n(y) - T_n(x)[2yT_n(y) - T_{n-1}(y)] \\ &= 2(x-y)T_n(x)T_n(y) + T_n(x)T_{n-1}(y) - T_{n-1}(x)T_n(y) \end{aligned}$$

et on devise par $x - y$ [1].

2.9 Equation différentielle vérifiée par T_n et coefficients de T_n

2.9.1 Equation différentielle vérifiée par T_n

Pour trouver les coefficients de T_n , on cherche d'abord une équation différentielle linéaire dont T_n est solution.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant l'égalité $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$, on obtient

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, -\sin \theta T'_n(\cos \theta) = -n \sin(n\theta),$$

puis en redérivant

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, -\cos T'_n(\cos \theta) + \sin^2 \theta T''_n(\cos \theta) = -n^2 \cos(n\theta) = -n^2 T_n(\cos \theta),$$

ou encore,

$$\forall x \in [-1, 1], -xT'_n(x) + (1-x^2)T''_n(x) = -n^2 T_n(x).$$

Ainsi, puisque $[-1, 1]$ est infini,

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1-X^2)T''_n - XT'_n + n^2 T_n = 0. \quad (2.9.1)$$

2.9.2 Coefficients de T_n

Soit $n \geq 2$. puisque T_n est de degré n et a la parité de n , on peut poser

$$T_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} a_k X^{n-2k}.$$

Reportons alors cette écriture de T_n , dans le premier membre de l'équation (2.9.1).

$$\begin{aligned} (1 - X^2) T_n'' - X T_n' + n^2 T_n &= (1 - X^2) \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}-1} (n-2k)(n-2k-1) a_k X^{n-2k-2} \\ &\quad - X \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} (n-2k) a_k X^{n-2k-1} + n^2 \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} a_k X^{n-2k} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}-1} (n-2k)(n-2k-1) a_k X^{n-2k-2} \\ &\quad - \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (n-2k)(n-2k-1) a_k X^{n-2k} \\ &\quad - \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (n-2k) a_k X^{n-2k} + n^2 \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} a_k X^{n-2k} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}-1} (n-2(k+1)+2)(n-2(k+1)+1) a_k X^{n-2(k+1)} \\ &\quad + \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-(n-2k)(n-2k-1) - (n-2k) + n^2) a_k X^{n-2k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} (n-2k+2)(n-2k+1) a_{k-1} X^{n-2k} \\ &\quad + \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (4kn - 4k^2) a_k X^{n-2k} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} [(n-2k+2)(n-2k+1) a_{k-1} + 4k(n-k) a_k] X^{n-2k}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} (1 - X^2) T_n'' - X T_n' + n^2 T_n &= 0 \iff \forall k \in \mathbb{N}, \\ \left(1 \leq k \leq \frac{n}{2} \Rightarrow (n-2k+2)(n-2k+1) a_{k-1} + 4k(n-k) a_k = 0 \right) \end{aligned}$$

En tenant compte de $a_0 = \text{dom}(T_n) = 2^{n-1}$, pour $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$, on a alors

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{-(n-2k+1)(n-2k+2)}{4k(n-k)} \times \frac{-(n-2k+3)(n-2k+4)}{4(k-1)(n-k+1)} \times \cdots \times \frac{-(n-1)n}{4 \times 1 \times (n-1)} \times a_0 \\
 &= \frac{(-1)^k}{4^k} \frac{(n-2k+1) \times (n-2k+2) \times (n-2k+3) \times (n-2k+4) \times \cdots \times (n-1) \times n}{k \times (k-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k)} 2^{n-1} \\
 &= (-1)^k 2^{n-2k-1} \frac{n! / (n-2k)!}{k! \times (n-1)! / (n-k-1)!} = (-1)^k 2^{n-2k-1} \frac{n(n-k)!}{n-kk!(n-2k)!} \\
 &= (-1)^k 2^{n-2k-1} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^n.
 \end{aligned}$$

Ce qui reste vrai pour $k = 0$ [3].

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k 2^{n-2k-1} \frac{n}{n-k} C_{n-k}^n X^{n-2k}.$$

2.10 Développement en série de Taylors

Les polynômes de Tchebychev se développent en série de Taylor en 0 avec la formule

$$T_j(x) = \frac{j}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(j-k-1)!}{k!(j-2k)!} (2k)^{j-2k} \text{ pour } j \geq 1.$$

Cette formule se vérifie par une récurrence assez simple en utilisant (2.3.1). Elle nous donne explicitement les polynômes T_n en fonction de x , ce qui nous permet de calculer le $n^{\text{ème}}$ coefficient en $O(n)$ opérations arithmétiques. Il en faudrait $O(n^2)$ en utilisant (2.3.1). Une autre application de cette formule est l'écriture sous forme hypergéométrique des polynômes de Tchebychev

$$T_{2n}(x) = (-1)^n {}_2F_1\left(\begin{matrix} n, -n \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| x^2\right), \quad T_{2n+1}(x) = (-1)^n (2n+1)x {}_2F_1\left(\begin{matrix} n+1, -n \\ \frac{3}{2} \end{matrix} \middle| x^2\right), \quad (2.10.1)$$

où ${}_2F_1$ est une série hypergéométrique, cas particulier de la définition ci-dessous.

2.10.1 Définition de la série hypergéométrique généralisée

La série hypergéométrique généralisée ${}_pF_q$ est définie par

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (2.10.2)$$

où $(\cdot)_n$ désigne le symbole de Pochhammer, c'est-à-dire

$$(a)_n = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!} = a(a+1) \cdots (a+n-1). \quad (2.10.3)$$

Cette représentation sous forme hypergéométrique n'est pas la plus classique. Cela est sûrement dû à la présence de deux formules afin de différencier les indices pairs et impairs.

La formule la plus fréquente dans la littérature, qui se déduit facilement de l'équation $(2(1-x^2)T'_n(x) = -nT_{n+1}(x) + nT_{n-1}(x))$ après un changement de variable, est

$$T_n(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} n, -n \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| -\frac{x-1}{2}\right). \quad (2.10.4)$$

De la récurrence (2.3.1), on déduit aussi que la série génératrice (indexée sur $\mathbb{Z}$) des polynômes de Tchebychev vérifie la formule simple [2]

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} T_n(x) z^{|n|} = \frac{1}{2} \frac{1-z^2}{1-2xz+z^2}. \quad (2.10.5)$$

2.11 Développement d'une fonction en série de Tchebychev

Définition 2.11.1 *Les développements des fonctions $f \in L^2(\omega)$ dans la base T_n sont appelés séries de Tchebychev. Les séries de Tchebychev sont écrites selon la notation la plus usuelle*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n T_n(x) = \frac{c_0}{2} T_0(x) + c_1 T_1(x) + c_2 T_2(x) + \cdots \quad (2.11.1)$$

Il suit, en prenant le produit scalaire, que les coefficients c_n sont définis par [2]

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Chapitre 3

Quelques Applications de polynômes de Tchebychev

Le polynôme de Tchebychev a une grande importance non seulement pour trouver une approximation d'une fonction, mais aussi pour résoudre quelques problèmes des EDO, calcul primitive et dérivée.

3.1 Equation différentielle linéaire

$y = T_n(x)$ est une solution de

$$(1 - x^2) y'' - xy' + n^2 y = 0. \quad (3.1.1)$$

En effet, on peut dériver l'équation $(1 - x^2) y'^2 = n^2 (1 - y^2)$:

$$-2xy'^2 + 2(1 - x^2) y' y'' = -2n^2 y y'$$

et diviser par y' (aux zéros de y , (3.1.1) est établie par continuité de y, y' et y'').

On peut aussi partir de $T_n(x) = \cos(n\theta)$

$$y = \cos n\theta \Rightarrow \frac{d^2 y}{d\theta^2} = -n^2 y, \quad (3.1.2)$$

et utiliser $x = \cos \theta : d/d\theta = d/d \arccos x = -\sqrt{1 - x^2} d/dx$,

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d}{d\theta} y \right) = \sqrt{1-x^2} \left(\sqrt{1-x^2} y' \right)',$$

d'où une forme intéressante (formellement auto-adjointe)

$$\sqrt{1-x^2} \left(\sqrt{1-x^2} y' \right)' = -n^2 y. \quad (3.1.3)$$

équivalente à (3.1.1) [1].

Proposition 3.1.1 *La solution générale de la récurrence (2.3.2) aussi bien que de l'équation (3.1.1) est*

$$AT_n(x) + B\sqrt{1-x^2}U_{n-1}(x) = A \cos n\theta + B \sin n\theta. \quad (3.1.4)$$

où $U_{n-1}(x)$ est le polynôme de Tchebychev de deuxième espèce de degré $n-1$, défini par

$$U_{n-1}(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}, \quad (x = \cos \theta) \quad (3.1.5)$$

Lorsque (3.1.5) désigne la solution générale de la récurrence (2.3.2), A et B peuvent dépendre de x , mais pas de n ; si (3.1.5) désigne la solution générale de l'équation différentielle (3.1.1) A et B peuvent dépendre de n , mais pas de x .

3.2 Polynômes de Tchebychev et problèmes de Sturm-Liouville

L'équation (3.1.3) est bien de la forme de Sturm-Liouville

$$(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda\omega(x)y(x), \quad a < x < b, \quad (3.2.1)$$

avec $p(x) > 0$ et $\omega(x) > 0$ sur (a, b) . Un problème de Sturm-liouville régulier consiste à trouver des solutions non nulles (fonctions propres) de (3.2.1) vérifiant des conditions aux limites homogènes, si $p(a)$ et $p(b) \neq 0$. Ici, $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, on a un problème singulier

$$p(a) = p(b) = 0.$$

Les fonctions propres sont alors simplement définies par des conditions de régularité aux limites: valeurs et dérivées finies quand $x \rightarrow a$ et b .

Ici, avec $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, $q(x) = 0$ et $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, la solution générale de (3.2.1) est une combinaison de $\cos \mu\theta$ et $\sin \mu\theta$, où $\lambda = -\mu^2$ (comme d'habitude, faire $x = \cos \theta$ pour obtenir $d^2y/d\theta^2 = -\mu^2y$). Les dérivées en x sont les dérivées en θ divisées par $-\sin \theta = -\sqrt{1-x^2}$, et restent donc finies en ± 1 si les dérivées en θ sont nulles en $\theta = 0$ et π . Ceci

impose $\sin \mu\pi = 0 \Rightarrow \mu \in \mathbb{Z}$, donc, $\lambda = -n^2$, $n = 0, 1, \dots$ et la fonction propre correspondante $= \cos n\theta = T_n(x)$.

Pour traiter convenablement les problèmes de Sturm-Liouville, il faut les définir sur des espaces de Hilbert (espaces de Sobolev).

Dérivées d'ordre quelconque: en dérivant (3.1.1) p fois, on obtient

$$(1-x^2) \frac{d^{p+2}T_n(x)}{dx^{p+2}} - (2p+1)x \frac{d^{p+1}T_n(x)}{dx^{p+1}} + (n^2-p^2) \frac{d^pT_n(x)}{dx^p} = 0, \quad (3.2.2)$$

(par récurrence [sur p], ou en utilisant une formule de Leibniz de la dérivée $p^{\text{ème}}$ d'un produit), ou encore

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2)^{p+1/2} \frac{d^{p+1}T_n(x)}{dx^{p+1}} \right) + (n^2-p^2) (1-x^2)^{p-1/2} \frac{d^pT_n(x)}{dx^p} = 0 \quad (3.2.3)$$

3.3 Coefficients, dérivées et primitives

1. $T_n(x) = \sum_{\substack{j \geq 0 \\ 2j \leq n}} \frac{(-1)^j n(n-j-1)! 2^{n-1-2j}}{j!(n-2j)!} x^{n-2j}$. En effet, nous savons déjà que le coefficient de x^n est 2^{n-1} , et que les coefficients non nuls sont ceux de même parité que n . Ensuite, par (3.2.2) avec $p = n-2j$, le coefficient de x^{n-2j} est $1/(n-2j)!$ fois

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-2j}T_n(0)}{dx^{n-2j}} &= \frac{-1}{n^2 - (n-2j)^2} \frac{d^{n-2j+2}T_n(0)}{dx^{n-2j+2}} \\ &= \frac{-1}{4j(n-j)} \frac{d^{n-2j+2}T_n(0)}{dx^{n-2j+2}} \\ &= \frac{(-1)^j}{4^j j(j-1) \cdots 1 (n-j)(n-j+1) \cdots (n-1)} 2^{n-1} n! \end{aligned}$$

Le rapport des valeurs absolues des coefficients de x^{n-2j} et de x^{n-2j+2} est $\frac{(n-2j+2)(n-2j+1)}{4j(n-j)} \approx \frac{1}{4\alpha(\alpha+1)}$ où $\alpha = j/(n-2j)$. Ce rapport est donc > 1 tant que $\alpha < (\sqrt{2}-1)/2$. A ce mo-

ment, c'est-à-dire $j \sim n(2 - \sqrt{2})/4$, on est en présence du plus grand coefficient, qui est de l'ordre de $(\sqrt{2} + 1)^n$.

2. Plus intéressante est l'expression des puissances de x dans la base des polynômes de Tchebychev, base que l'on va s'habituer à utiliser dans la suite

$$x^n = \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} \frac{T_{n-2k}(x)}{1 + \delta_{n-2k,0}} \right),$$

($\lfloor \rfloor$: Est la partie entière par défaut),

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ est le nombre de combinaisons de n objets pris k à k (coefficient binomial).

En effet,

$$x = \cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2, x^n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} e^{i(n-2k)\theta},$$

3.

$$T'_n(x) = nU_{n-1} = 2n \left(T_{n-1} + T_{n-3} + \dots + T_1 \text{ ou } \frac{T_0}{2} \right). \quad (3.3.1)$$

$$\begin{aligned} T'_n(x) &= \frac{dT_n(x)}{dx} = \frac{d \cos n\theta}{d \cos \theta} \\ &= n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = nU_{n-1}(x) \\ &= n \frac{e^{in\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} \\ &= n(e^{i(n-1)\theta} + e^{i(n-3)\theta} + \dots + e^{-i(n-3)\theta} + e^{-i(n-1)\theta}) \\ &= 2n(T_{n-1}(x) + T_{n-3}(x) + \dots) \end{aligned}$$

où à terme sur $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2T_1(x)$ si n est pair, et sur $e^{i0\theta} = 1 = T_0$ si n est impair.

Remarquons que l'on a aussi montré $U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x)$.

4.

$$\int T_n(x) dx = \frac{T_{n+1}(x)}{2(n+1)} - \frac{T_{n-1}(x)}{2(n-1)} \text{ (si } n \neq 1) + C. \quad (3.3.2)$$

$$\begin{aligned}
 \int T_n(x) dx &= - \int \cos n\theta \sin n\theta d\theta \\
 &= -\frac{1}{2} \int [\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta] d\theta \\
 &= \frac{\cos(n+1)\theta}{2(n+1)} - \frac{\cos(n-1)\theta}{2(n-1)} \quad (\text{si } n \neq 1) + C
 \end{aligned}$$

5.

$$\int \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{T_{n+1}(x) - T_{n-1}(x)}{2n\sqrt{1-x^2}} + C \quad (3.3.3)$$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= - \int \cos n\theta d\theta = -\frac{\sin n\theta}{n} + C \\
 &= -\frac{\sin n\theta \sin \theta}{n \sin \theta} + C \\
 &= \frac{\cos(n+1)\theta - \cos(n-1)\theta}{2n \sin \theta} + C \quad (n > 0)
 \end{aligned}$$

6. Primitive de $T_n(x) \log(x-c)$.

La primitive est de la forme $A_n(x) \log(x-c) - B_n(x)$, où A_n est une primitive de T_n et B_n est un polynôme. Choisissons pour A_n la primitive de T_n qui s'annule en $x=c$, soit, par (3.3.2),

$A_n(x) = \frac{T_{n+1}(x) - T_{n-1}(c)}{2(n+1)} - \frac{T_{n-1}(x) - T_{n-1}(c)}{2(n-1)}$. $B_n(x)$ est alors une primitive de $A_n(x)/(x-c)$.

$$\frac{A_n(x)}{x-c} = \frac{U_n(c)}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^n \frac{U_{n-k}(c)}{n+1} T_k(x) - \frac{U_{n-2}(c)}{2(n-1)} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{U_{n-2-k}(c)}{n-1} T_k(x).$$

Donc [1],

$$B_n(x) = x \frac{U_n(c)}{2(n+1)} + \sum_{k=1}^n \frac{U_{n-k}(c)}{n+1} A_k(x) - x \frac{U_{n-2}(c)}{2(n-1)} - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{U_{n-2-k}(c)}{n-1} A_k(x).$$

Conclusion générale

Parmi à la notion de la meilleure approximation et comment peut trouver une approximation d'une fonction quelconque avec une fonction d'erreur minimale, nous étudions des propriétés importantes pour l'existence et l'unicité de la meilleure approximation comme la symétrie, condition de Haar et théorème de la vallée Poussin. Nous avons étudié aussi l'approximation au sens de Tchebychev avec quelques propriétés intéressantes comme les signes alternés de la fonction d'erreur, orthogonalité des polynômes de Tchebychev.

Les polynômes de Tchebychev ont une grande importance non seulement pour trouver une approximation d'une fonction, mais aussi pour résoudre quelques problèmes des EDO, calcul primitive et dérivée.

En fin, nous avons donné une application du polynôme de Tchebychev pour la résolution des problèmes de Sturm-Liouville et pour trouver la solution d'une équation différentielle.

Le polynôme de Tchebychev a d'autres larges utilisations. Nous avons donné ici seulement quelques applications simples.

Bibliographie

- [1] Alphonse. Magnus; Analyse numériaue: approximation, interpolation, intégration; INMA2171, 2010-2011.
- [2] Alexandre. Benoit; Algorithmique semi-numérique rapide des séries de Tchebychev; THESE pour obtenir le grade de Docteur de l'Ecole polytechnique Spécialité : Informatique préparée à INRIA: 18-07-2012.
- [3] Jean-Louis. Rouget, [http ://www.maths-france.fr](http://www.maths-france.fr),2007.
- [4] Jean-Marc Huré; MÉTHODES NUMÉRIQUES;LUTh/Observation de Paris-Meudon, et Université Paris 7.
- [5] MAZEN. Saad; ANALYSE NUMERIQUE; Ecole Centrale de Nantes Dépt. Info/Math Année universitaire 2011-2012. EI 1.
- [6] SAID. Mohammed Said;Cours d'analyse numérique; pour le 3^{ème} année Mathématiques, Université de Ouargla. 2001-2002.