



**République Algérienne Démocratique et
Populaire**

N° d'ordre :

N° de série :

**Ministère de l'enseignement supérieur
et de la recherche scientifique**

Université de Echahid Hamma Lakhdar - El-Oued -

Faculté Des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Fondamentales et appliquées

Thème :

***Méthode des éléments finis pour un système de
Navier-Stokes .***

Présenté par:

BELLOUL Khaoula et SAYAH Saoussen

Soutenue le: /06/2022

Devant le jury composé de

DOUDI Nadjjet

MCB Université de Chahid Hamma Lakhdar- El Oued Rapporteur

Beggas Mohammed

MCA Université de Chahid Hamma Lakhdar- El Oued Examineur

Touati Ibrahime Mouhammed Said

MCB Université de Chahid Hamma Lakhdar- El Oued Examineur

Année universitaire: 2021/2022

Remerciements

*Avant toutes choses, nous tenons à remercier Allah le tout puissant,
pour nous avoir donné la force et la patience.*

*Nous exprimons notre profond gratitude et nos remerciements à notre
encadreur de mémoire **Dr : DOUDI Nadjat** Maître de conférence à
l'université de Hamma Lakhdar d'El Oued pour nous avoir accepté, nous
encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements tout au
long de ce travail.*

*Nous tenons également à remercier Mesieurs les membres de jury pour
l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de signer à notre soutenance.*

*Un remerciements spécial et sincère à nos parents et à tous les membres de la
famille.*

*Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont
également à nos camarades de la promotion 2022 de Mathématiques et tout
Nos amis.*

*Finalement, nous tenons aussi à réserver un mention particulière à toutes les
personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendue.*

Saoussen et Khaoula.

Table des matières

Table des figures	iv
Notations	v
Introduction	1
1 Préliminaire	3
1.1 Espaces métriques	3
1.2 Espaces vectoriels normés, espaces de Banach	4
1.3 Espaces de Hilbert	5
1.3.1 Définitions et propriétés élémentaires	5
1.4 Espaces de Sobolev	6
1.4.1 Espaces des fonctions L^1 , L^2 et L^1_{loc}	6
1.4.2 Dérivée faible	7
1.4.3 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$	8
1.4.4 Espace de Sobolev $H^1_0(\Omega)$	9
1.4.5 Espace de Sobolev H^m	9
1.4.6 Espace $W^{1,P}(\Omega)$	10
1.5 Quelques inégalités utiles	10
1.5.1 Inégalité de Young	10
1.5.2 Inégalité de Hölder	11
1.5.3 Inégalité de Poincaré	11
1.5.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz	11
1.5.5 Inégalité de Minkowski	12
1.6 Formule de Green dans $H^1(\Omega)$	12
2 Éléments finis en dimension 1	13
2.1 Formulation variationnelle	13
2.1.1 Conditions aux limites de Neumann	14

2.2	Théorème de Lax-Milgram	15
2.3	Méthode de Galerkin	16
2.3.1	Estimation de l'erreur	18
2.4	Éléments finis de Lagrange	19
2.5	Exemples d'éléments finis de Lagrange	20
2.5.1	Espaces de polynômes	20
2.6	Éléments finis de degré 1 pour un problème de Dirichlet homogène en dimension $n = 1$	21
2.6.1	Ecriture du problème approché	22
2.6.2	Matrices élémentaires	23
2.7	Éléments finis pour un problème non linéaire	24
2.7.1	Discrétisation du domaine	25
2.7.2	Formulation variationnelle	25
2.7.3	Approximation linéaire de $u(x)$	26
2.7.4	Technique d'assemblage	29
2.7.5	Code MATLAB	31
3	Éléments finis pour un système de Navier-Stokes en dimension deux	38
3.1	Équations de Navier-Stokes continues	38
3.2	Formulation des éléments finies	40
3.2.1	Discrétisation du domaine	40
3.2.2	Construction des fonctions de base P_1 en 2D	40
3.3	Transformation géométrique	45
3.3.1	Relation entre les variables généralisées et les variables nodales	45
3.3.2	Règles et propriétés de T^e	46
3.3.3	Interpolation des variables	48
3.3.4	Équations de Navier-Stokes discrètes	49
3.4	Matrices élémentaires	50

Table des figures

2.1	Domaine discret en dimension 1.	21
2.2	Représentation géométrique des fonctions de base P_1 en dimension 1.	22
2.3	Maillage composé de cinq éléments.	25
2.4	Représentation de deux fonctions de base.	26
2.5	Approximation linéaire par éléments finis.	27
2.6	Solution exacte et solution approchée pour $N = 5$	35
2.7	Erreur de discrétisation pour $N = 5$	35
2.8	Solution exacte et solution approchée pour $N = 10$	36
2.9	Erreur de discrétisation pour $N = 10$	36
3.1	Exemples des maillages admissibles.	40
3.2	Élément fini 2D triangulaire à 3 nœuds.	41
3.3	Présentation d'une fonction de base en 2D.	44
3.4	Élément triangulaire linéaire et ses fonctions de base.	45
3.5	Transformation d'un élément fini de référence vers l'élément parent.	46
3.6	Élément de référence représentant plusieurs éléments de même type.	46

Notations

$\mathbb{N}$	: L'ensemble de nombres naturels.
$\mathbb{R}$	: L'ensemble de nombres réels.
$\mathbb{R}_+$	: L'ensemble de nombres réels positifs.
H	: Espace de Hilbert.
$\ \cdot\ _X$	: Norme dans X .
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	: Produit scalaire dans H .
$\frac{\partial u}{\partial x}$	: La dérivée partielle par rapport à x .
$D^\alpha U$	: La différentielle d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^n$.
L^1	: Ensemble des fonctions intégrable.
L^2	: Ensemble des fonctions carré sommables.
H^1	: $\left\{ u / u \in L^2 : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2, \forall i \right\}$.
H^m	: $\{ v / v \in L^2 : \forall \alpha, \alpha \leq m : \partial^\alpha v \in L^2 \}$.
Δf	: Laplacien de la fonction f .
∇f	: Gradient de la fonction f .
$\partial\Omega$	: Frontière de Ω .
P_k	: Espace vectoriel de polynome de degré $\leq k$.
ω_i	: Les fonctions de base P_1 en 1D.
$ElemT_i$	: La matrice élémentaire de l'élément T_i .
N_i	: Les fonctions de base P_1 en 2D.

Introduction

Les origines de la méthode des éléments finis remontent aux années 1950 lorsque des ingénieurs l'utilisèrent afin de simuler des problèmes de mécanique des milieux continus déformables. Depuis, le champ d'applications s'est considérablement étendu et les fondements théoriques de la méthode se sont amplement consolidés.

La résolution des équations différentielles ou plus généralement des équations aux dérivées partielles occupe une place importante en ingénierie et en mathématiques appliquées. Chacune de ces disciplines apporte une contribution différente mais complémentaire à la compréhension et à la résolution de tels problèmes.

Il existe plusieurs techniques permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. On pense par exemple aux méthodes de différences finies, de volumes finis, aux méthodes spectrales, etc. On peut sans aucun doute affirmer que la plus largement répandue est la méthode des éléments finis. Cette popularité n'est pas sans fondement. La méthode des éléments finis est très générale et possède une base mathématique rigoureuse qui est fort utile, même sur le plan pratique. En effet, cette base mathématique permet de prévoir jusqu'à un certain point la précision de notre approximation et même d'améliorer cette précision, via les méthodes adaptatives.

Ce travail est donc une introduction à la méthode des éléments finis. Nous poursuivrons ainsi deux objectifs. Nous souhaitons introduire la méthode des éléments finis et donner une description relativement classique. Mais notre principal objectif est de donner comment peut appliquer cette méthode sur un problème en mécanique de fluide représenté par le système de Navier-Stokes où plus précisément le problème de Stokes pour simplifier les calculs.

Le contenu de chaque chapitre est résumé comme suit :

Premier chapitre : Il a touché les concepts de base de l'analyse fonctionnelle et comporte des définitions, des relations et des théorèmes avec quelques inégalités utiles qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

En deuxième chapitre, nous introduisons un cas particulier d'équation aux dérivées partielles sur un domaine compact avec conditions aux bords, sur laquelle on illustrera la méthode des éléments finis. Où nous avons appliqué la méthode pour trouver le système

linéaire et montrer comment étudier l'estimation de l'erreurs. Ensuite, nous avons effectué une application numérique sur un problème de Dirichlet nonhomogènes, Enfin, nous introduisons une solution détaillée à une équation non linéaire pour obtenir la matrice globale d'assemblage.

Dans le dernier chapitre, notre objectif principal est de construire des grilles FEM pour les équations différentielles de Navier-Stokes qui sont la norme pour le mouvement des fluides, c'est-à-dire la discussion de l'écoulement des fluides et l'ajout des complications tel que la pression et effectuez des simplifications telles que l'indépendance du temps, ou remplacez un terme dans le but de mieux modéliser la turbulence ou d'autres caractéristiques.

Chapitre 1

Préliminaire

L'analyse de la méthode des éléments finis requiert une bonne base d'analyse fonctionnelle, outil fondamental pour une véritable compréhension de cette méthode. C'est l'objet de ce chapitre. Précisons dès le départ que notre objectif n'est pas de donner un cours d'analyse fonctionnelle complet mais de donner les outils de base nécessaires à l'utilisation efficace de la méthode des éléments finis (Les espaces de Sobolev et quelques inégalités utiles ...).

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1. Soit X un ensemble, on appelle distance sur X toute application d de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

- $d(x, y) \geq 0$,
- $d(x, y) = 0 \implies x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Le couple (X, d) est appelé un espace métrique.

Définition 1.2. (Suites convergentes) On dit qu'une suite $(x_n)_n$ converge vers une limite x dans l'espace métrique (X, d) si et seulement si on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

Si la limite d'une suite existe, elle est nécessairement unique.

Définition 1.3. (Suites de Cauchy) Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace métrique (X, d) .

On dit que $(x_n)_n$ est de Cauchy si elle satisfait

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 0, \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, \forall p \geq 0, d(x_n, x_{n+p}) \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, une suite de Cauchy est une suite dont les éléments sont arbitrairement proches à partir d'un certain rang.

Proposition 1.1. *Dans un espace métrique (X, d) toute suite convergente est de Cauchy.*

Définition 1.4. *(Espace métriques complets) Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans (X, d) est convergente.*

1.2 Espaces vectoriels normés, espaces de Banach

Définition 1.5. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une application N de E dans $\mathbb{R}^+$ est une semi-norme sur E si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites*

1. $N(x + y) = N(x) + N(y)$,
2. Pour tout λ appartenant à $\mathbb{K}$, on a $N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$.

On dit qu'une application N de E dans $\mathbb{R}^+$ est une **norme** sur E si et seulement si c'est une semi-norme telle que $N(x) = 0$ implique que $x = 0$.

Définition 1.6. *Soient E un espace vectoriel et N une norme sur E , le couple (E, N) est appelé un espace normé.*

Définition 1.7. *(Espace de Banach) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé. On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si et seulement si l'espace métrique (E, d) où d est la distance associée à la norme $\|\cdot\|$ (i.e. $d(x, y) = \|x - y\|$) est un espace complet.*

Exemple 1.1.

- L'espace des nombres réels $\mathbb{R}$.
- L'espace des nombres complexes $\mathbb{N}$.
- Les espaces $\mathbb{R}^n$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 1.2. [3] *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé, alors l'application définie par*

$$\begin{cases} E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) \mapsto \|x - y\|, \end{cases}$$

est une distance sur E , appelée distance associée à la norme $\|\cdot\|$.

1.3 Espaces de Hilbert

On considère E espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.3.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 1.8. On appelle produit scalaire sur E toute application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

1. Pour tout $y \in E$, l'application $\langle \cdot, y \rangle \rightarrow \mathbb{K}$ définie par $x \rightarrow \langle x, y \rangle$ est linéaire,
 - (a) si $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (propriété de symétrie),
 - (b) si $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (propriété de antisymétrie),
2. Pour tout $x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ (positivité),
3. Pour tout $x \in E, \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ (définie positive).

Toute opération sur E qui vérifie les trois propriétés ci-dessus est également appelée produit scalaire.

Le couple constitué d'un espace vectoriel E et d'un produit scalaire sur E est appelé un espace pré-hilbertien réel (si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ou complexe (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Définition 1.9. Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et qui est complet pour la norme induite $\| \cdot \|_H$.

C'est-à-dire un espace de Banach dont la norme $\| \cdot \|_H$ découle d'un produit scalaire ou hermitien $\langle u, u \rangle_H$ par la formule

$$\|u\|_H^2 = \langle u, u \rangle_H.$$

Dans toute la suite de ce chapitre, H désigne un espace de Hilbert muni de son produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et sa norme $\| \cdot \|_H$.

Définition 1.10. [16] Soient $u, v \in H$, on dit que u et v sont orthogonaux dans H si

$$\langle u, v \rangle_H = 0.$$

Théorème 1.1. (Théorème de décomposition) Soit V un sous-espace vectoriel fermé de H . On note l'espace orthogonal

$$V^\perp = \{u \in H / (u, u^*) = 0, \forall u^* \in V\}.$$

On a alors

$$H = V \oplus V^\perp.$$

Proposition 1.3. (*Identité du parallélogramme*) $\forall u, v \in H,$

$$\|u + v\|_H^2 + \|u - v\|_H^2 = 2\|u\|_H^2 + 2\|v\|_H^2.$$

Définition 1.11. *Le dual de H est l'ensemble des formes linéaires continues sur H . Le dual est noté $H' : \forall L \in H',$ il existe $c > 0$ telle que*

$$\|L(u)\|_{H'} \leq c \|u\|_H.$$

1.4 Espaces de Sobolev

1.4.1 Espaces des fonctions L^1 , L^2 et L^1_{loc}

Soit Ω est un domaine ouvert mesurable de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$L^1(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega / \int_{\Omega} |f| < \infty \right\},$$

et $\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$.

L'exemple fondamental L^2 est l'espace des fonctions de carré intégrables

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega / \int_{\Omega} |f|^2 < \infty \right\},$$

et $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx}$.

Le produit scalaire est naturellement défini par

$$(u, v)_{L^2} = \int_{\Omega} uv dx.$$

On identifie

$$u = v \text{ dans } L^2 \iff u(x) = v(x) \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

Définition 1.12. (*Espace L^1_{loc}*) Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **localement intégrable** si sa restriction à tout segment $[a, b]$ est intégrable, c'est-à-dire si l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ converge pour tout couple de réels (a, b) avec $a < b$.

Exemple 1.2.

1. Toute fonction continue est localement intégrable.

2. La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$ n'est pas localement intégrable.

Théorème 1.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, un domaine ouvert, muni de son produit scalaire naturel, l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

L'intégrale de Lebesgue assurant la complétude de l'espace $L^2(\Omega)$ est bien un espace de Hilbert. Notons cependant que cette complétude se paye par la définition des fonctions presque partout seulement. Elles ne sont donc a priori pas continues (au sens classique) et leur dérivées sont définies au sens généralisés ou au sens des distributions. Malgré cela ces fonctions s'avèrent applicables en pratique, en grande partie grâce au résultat de densité suivant :

Théorème 1.3. [7] Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$, l'espace des fonctions continues infiniment dérivable à support compact $\mathcal{D} = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$

$$\forall u \in L^2(\Omega), \exists u_n \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ telle que } u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Le principe de la preuve repose sur une technique de suite régularisante basée sur un produit de convolution.

1.4.2 Dérivée faible

Soit $u \in C^1(\Omega)$ et $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, alors, en intégrant par parties, on aura

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \forall \varphi \in C_0^1(\Omega), i = 1, 2, \dots, N$$

notons que le terme gauche a un sens si $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ alors que le terme à droite na de sens que si $u \in C^1(\Omega)$, [12].

Définition 1.13. Soit $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, s'il existe une fonction $v_i \in L_{loc}^1$ telle que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^1(\Omega), i = 1, 2, \dots, N,$$

on dit que v_i est la première dérivée partielle faible de u par rapport à x_i .

Comme $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ est dense dans $L^q(\Omega)$ cette égalité reste vraie pour toute $\varphi \in L^q(\Omega)$.

Définition 1.14. [1] On dit que la fonction $u \in L^q(\Omega)$ admet une première dérivée partielle faible par rapport à x_i sil existe une fonction $v_i \in L^r(\Omega)$ pour $1 \leq r < \infty$, telle que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v_i \varphi dx, \forall \varphi \in L^p(\Omega),$$

v_i est notée $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Plus générale : Soit $m \geq 1$ et $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$. On dit que u admet une dérivée faible d'ordre α s'il existe v_α telle que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_\alpha \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

v_α est noté par, $\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 \dots \partial^{\alpha_n} x_n} dx$ ou $D^\alpha u$.

1.4.3 Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Soit Ω un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Par définition

$$H^1 = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, N \right\}.$$

Muni du produit scalaire

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1} &= \left(\sum_{i=1}^{i=N} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx + \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

est un espace de Hilbert [1].

L'espace H^1 est muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1} &= \left(\sum_{i=1}^{i=N} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

1.4.4 Espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Définition 1.15. *Un sous espace très important est l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$. On note*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}.$$

Par définition

$$H_0^1(\Omega) = \{u : u \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = 0\}.$$

On voit que sur cet espace, la condition de Dirichlet est satisfaite automatiquement sur tout le pourtour $\Gamma = \partial\Omega$.

La frontière Γ est généralement partitionnée en deux sous-frontière Γ_D et Γ_N sur lesquelles on satisfait les conditions de Dirichlet et de Neumann respectivement $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$

$$H_{0,D}^1(\Omega) = \{u : u \in H^1(\Omega), v|_D = 0\},$$

et $H_0^1(\Omega) \subset H_{0,D}^1(\Omega) \subset H^1$.

Théorème 1.4. [4] $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.5. [12] La semi-norme définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

définit une norme sur $H_0^1(\Omega)$, équivalente à la norme de $H^1(\Omega)$.

1.4.5 Espace de Sobolev H^m

Définition 1.16. Si Ω est un ouvert connexe non vide de $\mathbb{R}^n$, nous considérons ici l'espace vectoriel

$$H^m(\Omega) \{v \in L^2(\Omega) : \forall \alpha, |\alpha| \leq m : \partial^\alpha v \in L^2(\Omega)\},$$

qui est un espace de Hilbert si nous y définissons le produit scalaire, la norme et la semi-norme suivants

$$(u, v)_{m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v),$$

$$\|v\|_{m,\Omega} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$|v|_{m,\Omega} = \left[\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha v\|^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.17. [9] Pour $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$. On note

$$H_0^m(\Omega) = \overline{D(\Omega)} = \overline{C_0^\infty(\Omega)}.$$

1.4.6 Espace $W^{1,P}(\Omega)$

Définition 1.18. Soit p un élément de $[1, +\infty]$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On appelle espace de Sobolev d'ordre 1, et on note $W^{1,P}(\Omega)$ (resp. $H^1(\Omega)$ si $p = 2$), l'ensemble

$$W^{1,P}(\Omega) = \left\{ u \in L^P(\Omega) \mid \forall i, 1 \leq i \leq n, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^P(\Omega) \right\}.$$

Théorème 1.6. [19] Pour tout p dans $[1, +\infty]$, pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, on a les propriétés suivantes :

1.

$$u \mapsto \|u\|_{W^{1,P}} = \begin{cases} \left(\|u\|_{L^p}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p \in [1, +\infty[, \\ \max \left(\|u\|_{L^\infty}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty} \mid 1 \leq i \leq n \right) & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

2. Pour $p = 2$, $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle \mapsto \langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u \bar{v} dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx.$$

3. Pour $1 < p < +\infty$, l'espace $W^{1,P}(\Omega)$ est réflexif.

4. Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $W^{1,P}(\Omega)$ est séparable.

1.5 Quelques inégalités utiles

1.5.1 Inégalité de Young

Soit $1 \leq p \leq \infty$, on désigne par q l'exposant conjugué de p , i.e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (On dit que p et q sont conjugués).

Alors, on a l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad \forall a, b \geq 0.$$

1.5.2 Inégalité de Hölder

Théorème 1.7. (*Inégalité de Hölder*) [4] Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et q l'exposant conjugué de p . Alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |fg| dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

1.5.3 Inégalité de Poincaré

Théorème 1.8. (*Inégalité de Poincaré*) [4] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors, il existe une constante $C > 0$ (dépendant de Ω) telle que, pour tout $f \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq C(\Omega) \int_{\Omega} |\vec{\nabla} f(x)|^2 dx.$$

En particulier,

$$\|f\|_{L^2}^2 = \|\vec{\nabla} f\|_2^2 = \sqrt{\int_{\Omega} |\vec{\nabla} f(x)|^2 dx}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ qui est équivalente à la norme $\|f\|_{H^1}$.

On peut écrire aussi

$$\|f\|_{0,\Omega} \leq C(\Omega) \|f\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

1.5.4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition 1.4. (*Inégalité de Cauchy-Schwarz*) [4] Soit $(E; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout $x \in E$, on note

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

On a alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in E.$$

Ainsi, l'application $x \in E \mapsto \|x\|$ est une norme sur E canoniquement associée au produit scalaire donné qui confère ainsi à E une structure d'espace vectoriel normé.

1.5.5 Inégalité de Minkowski

Soient $p \in [1, +\infty[$ et deux fonctions $f, g \in L^p(\Omega)$. Alors

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

c'est-à-dire

$$\left(\int |f + g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.5.1)$$

l'inégalités de Minkowski se vérifient dans le cas particulier de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) et même de séries ($n = \infty$)

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}.$$

1.6 Formule de Green dans $H^1(\Omega)$

Le théorème de trace permet de généraliser la Formule de la divergence à des fonctions de $H^1(\Omega)$:

Proposition 1.5. *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$. Si $F \in (H^1(\Omega))^n$ et $g \in H^1(\Omega)$, alors*

$$\int_{\Omega} g(x) \operatorname{div} \vec{F}(x) dx = - \int_{\Omega} \vec{F}(x) \cdot \vec{\nabla} g(x) dx + \int_{\partial\Omega} g(\sigma) \vec{F}(\sigma) \cdot \vec{n}(\sigma) d\sigma,$$

où $\vec{n}$ représente le vecteur normal unitaire à $\partial\Omega$ orientée vers l'extérieur.

Rappelons que $H^2(\Omega)$ est l'espace des fonctions $f \in L^2(\Omega)$ dont toutes les dérivées partielles d'ordre 1 appartiennent à $H^1(\Omega)$. En particulier, ces dérivées partielles premières admettent une trace sur $\partial\Omega$ (si Ω est assez régulier).

Proposition 1.6. [2] *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$. Soient $f \in H^2(\Omega)$ et $g \in H^1(\Omega)$. Alors,*

$$\int_{\Omega} \Delta f(x) g(x) dx = - \int_{\Omega} \vec{\nabla} f(x) \cdot \vec{\nabla} g(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(\sigma) g(\sigma) d\sigma,$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(\sigma) = \vec{\nabla} f(\sigma) \cdot \vec{n}(\sigma).$$

Si $f \in H^2(\Omega)$, alors $\vec{\nabla} f \in (H^1(\Omega))^n$ et il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $F = \vec{\nabla} f$.

Chapitre 2

Éléments finis en dimension 1

Dans ce chapitre, nous avons présenté la méthode des éléments finis (FEM) en tant que technique numérique pour résoudre des problèmes qui sont décrits par des équations aux dérivées partielles. Nous commencerons par présenter la méthode d'approximation interne, qui est une méthode d'approximation abstraite dans les espaces de Hilbert. La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation interne particulière, l'espace d'approximation étant un espace de fonctions polynômiales par morceaux. La solution recherchée est remplacée dans chaque élément par une approximation avec des polynômes simples et le domaine peut ensuite être reconstitué avec l'assemblage ou sommation de tous les éléments.

2.1 Formulation variationnelle

Considérons le problème de Poisson en une dimension avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes :

Trouver une fonction u définie sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.1.1)$$

La présentation très succincte faite sur cet exemple simple a pour but de donner les idées de base et ne constitue qu'une introduction à la méthode des éléments finis. L'approche repose sur la méthode de Galerkin qui permet d'écrire le système différentiel sous forme variationnelle dans un espace de dimension finie.

Soit une fonction $v(x) \in C^1([0, 1])$. On peut écrire :

$$-\int_0^1 u''(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx. \quad (2.1.2)$$

Par intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx - [u'(x) v(x)]_0^1 = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \quad (2.1.3)$$

et si v est une fonction telle que $v(0) = v(1) = 0$ alors

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx. \quad (2.1.4)$$

Pour cela, nous considérons les espaces des fonctions suivants

$$L^2(\Omega) = \left\{ u \in C^1(\Omega), \int_{\Omega} |u|^2 < \infty \right\}, \quad (\Omega \subset \mathbb{R}),$$

$$H_0^1 = \{ u \in L^2(\Omega), u' \in L^2(\Omega), u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}.$$

Définition 2.1. On appelle *formulation intégrale* ou *formulation variationnelle* du problème, le problème qui consiste à trouver une fonction u appartenant à l'espace $H_0^1(]0, 1[)$ telle que

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \quad \text{pour toute fonction } v \in H_0^1(]0, 1[). \quad (2.1.5)$$

Définition 2.2. Une solution de la forme variationnelle (2.1.5) s'appelle *solution faible* du problème différentiel de départ.

2.1.1 Conditions aux limites de Neumann

On considère maintenant le problème suivant où les conditions aux limites sont données par la valeur de la dérivée de l'inconnue u

Trouver une fonction u définie sur $[0, 1]$ telle que

$$\begin{cases} -u''(x) + u(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u'(0) = \alpha, \quad u'(1) = \beta. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

La formulation intégrale pour ce type de problème diffère par la prise en compte des conditions aux limites. Nous reprenons la démarche qui permet d'écrire une formulation variationnelle. On suppose que u est une solution et on multiplie l'équation par une fonction test régulière v puis on intègre sur $[0, 1]$

$$-\int_0^1 u''(x) v(x) dx + \int_0^1 u(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

Après intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx - [u'(x) v(x)]_0^1 + \int_0^1 u(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx + \int_0^1 u(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx + \beta v(1) - \alpha v(0), \quad (2.1.7)$$

puisque $u'(0) = \alpha$ et $u'(1) = \beta$. Ainsi, la condition aux limites de Neumann est directement prise en compte dans la formulation variationnelle, et il n'est pas nécessaire de l'inclure dans le choix de l'espace vectoriel de résolution. Pour que (2.1.7) soit définie, il suffit que u et v soient continues et C^1 par morceaux sur $[0, 1]$. On introduit donc l'espace

$$H^1 = \{u \in L^2([0, 1]), u' \in L^2([0, 1])\}.$$

Alors, la formulation variationnelle de ce problème devient

Trouver $u \in H^1(0, 1)$ telle que

$$\int_0^1 u'(x) v'(x) dx + \int_0^1 u(x) v(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx + \beta v(1) - \alpha v(0), \quad \forall v \in H^1(0, 1). \quad (2.1.8)$$

Dans ce cas

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx + \int_0^1 u(x) v(x) dx,$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx + \beta v(1) - \alpha v(0).$$

[8].

2.2 Théorème de Lax-Milgram

D'abord, nous introduisons les notations suivantes : Si $u, v \in H_0^1(]0, 1[)$, on pose

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx,$$

$$L(v) = \int_0^1 f(x) v(x) dx.$$

Les applications a et L sont respectivement une forme bilinéaire continue et une forme

linéaire continue sur $H_0^1(]0, 1[)$ et l'équation (2.1.5) est équivalente à
 Trouver $u \in H_0^1(]0, 1[)$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(]0, 1[).$$

Le théorème de Lax-Milgram montre que ce problème abstrait admet une unique solution sous des conditions très générales.

On considère un espace de Hilbert V dont le produit scalaire est noté $\langle ., . \rangle$ et la norme $\|.\|$. On introduit l'hypothèse suivante sur a

(H) La forme bilinéaire $a : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ est continue, i.e. il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que

$$a(u, v) \leq M \|u\| \cdot \|v\|, \quad \text{pour tout } u, v \in V$$

et coercive, i.e. il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2, \quad \text{pour tout } u \in V.$$

Théorème 2.1. (*Théorème de Lax-Milgram*) Si la forme bilinéaire a satisfait (H) et si L est une application linéaire continue sur V , alors il existe un unique $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V.$$

2.3 Méthode de Galerkin

On souhaite maintenant de trouver une méthode pour calculer des solutions approchées d'un problème de Poisson. Comme nous souhaitons également pouvoir traiter des cas où la solution est peu régulière, nous allons en fait résoudre de façon approchée la formulation variationnelle. La formulation variationnelle que nous avons vues peut être mise sous la forme

Trouver une fonction u dans V , telle que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \text{pour tout } v \in V \tag{2.3.1}$$

où

- V est un espace vectoriel de fonctions,
- $(u, v) \mapsto a(u, v)$ est une forme bilinéaire sur $V \times V$,
- $v \mapsto \langle f, v \rangle$ est une forme linéaire sur V .

Dans le cas du problème de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes,

l'espace vectoriel où l'on cherche la solution est $V = H_0^1([0, 1])$ et les formes a et $\langle f, \cdot \rangle$ sont définies par

$$a(u, v) = \int_0^1 u'(x) v'(x) dx, \quad \langle f, v \rangle = \int_0^1 f(x) v(x) dx. \quad (2.3.2)$$

L'espace de résolution V étant de dimension infinie, le principe de la méthode de Galerkin consiste à le remplacer par un espace vectoriel V_h de dimension finie et à résoudre le problème approché

Trouver une fonction u_h dans V_h telle que

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \text{pour toute fonction } v_h \in V_h. \quad (2.3.3)$$

Dans le cadre de ce cours, nous prendrons toujours des espaces $V_h \subset V$, on parle alors d'approximation conforme. Comme V_h est de dimension finie, la résolution de (2.3.3) se ramène en fait à la résolution d'un système linéaire. En effet, si on se donne une base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ de V_h , la solution recherchée peut se décomposer sur cette base selon

$$u_h(x) = \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x). \quad (2.3.4)$$

Résoudre (2.3.3) est alors équivalent à trouver un vecteur $U = (u_1, u_2, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ tel que

$$\begin{aligned} a\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x), v_h\right) &= \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \\ \iff \sum_{j=1}^N a(\varphi_j(x), v_h) u_j &= \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \\ \iff \sum_{j=1}^N a(\varphi_j(x), \varphi_i(x)) u_j &= \langle f, \varphi_i(x) \rangle, \quad \forall i = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

puisque $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N)$ est une base de V_h . En posant la matrice

$$A = (A_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad A_{i,j} = a(\varphi_j(x), \varphi_i(x))$$

et le vecteur

$$F = (F_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^N, \quad F_i = \langle f, \varphi_i(x) \rangle$$

c'est-à-dire résoudre le système linéaire

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & \cdots & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a(\varphi_1, \varphi_N) & \cdots & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle f, \varphi_N \rangle \end{bmatrix}$$

Sous forme matricielle on écrit ceci

$$AU = F.$$

La matrice A est appelée matrice de rigidité, en référence aux problèmes de mécanique où elle a été introduite pour la première fois. Cette matrice a des propriétés qui proviennent directement des propriétés satisfaites par la forme bilinéaire a , et F comme le vecteur de chargement [8].

2.3.1 Estimation de l'erreur

Lemme 2.1. (Orthogonalité de Galarkin) Soit $u \in V$ la solution exacte du problème continue (2.3.1) et u_h la solution exacte du problème discret (2.3.3). Alors l'erreur $e = u - u_h$ satisfait

$$a(e, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.3.5)$$

Démonstration. La solution exacte u satisfait $a(u, v) = L(v)$ pour tout $v \in V$. Puisque $V_h \subset V$, on peut prendre une fonction test de V_h et en déduire que $a(u, v_h) = L(v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$. En utilisant $a(u_h, v_h) = L(v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$, nous obtenons immédiatement le résultat. $\square$

Lemme 2.2. (Lemme de Céa) Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, soient u la solution de (2.3.1) et u_h la solution de (2.3.3). Alors

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_h\|, \quad \forall v_h \in V_h \quad \text{c'est à dire} \quad \|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} d(u, V_h),$$

où d est la distance induite par la norme $\|\cdot\|$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} a(u - u_h, u - u_h) &= a(u - u_h, u - v_h + v_h - u_h), \quad \forall v_h \in V_h \\ &= a(u - u_h, u - v_h) + a(u - u_h, v_h - u_h) \end{aligned}$$

or $v_h - u_h \in V_h$. Donc, d'après (2.3.5) $a(u - u_h, v_h - u_h) = 0$. On a donc

$$a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (2.3.6)$$

a étant coercive, il existe $\alpha > 0$ tel que $a(u - u_h, u - u_h) \geq \alpha \|u - u_h\|^2$ où $\|\cdot\|$ est une norme sur V . Par ailleurs, a étant continue, il existe $M > 0$ tel que $a(u - u_h, u - v_h) \leq M \|u - u_h\| \|u - v_h\|$. En réinjectant ces deux inégalités de part et d'autre de (2.3.6) et en simplifiant par $\|u - u_h\|$, on obtient

$$\|u - u_h\| \leq \frac{M}{\alpha} \|u - u_h\|, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.3.7)$$

[8]. □

2.4 Éléments finis de Lagrange

Définition 2.3. Soit $\Sigma = a_1, \dots, a_N$ un ensemble de N points distincts de $\mathbb{R}^N$. Soit P un espace vectoriel de dimension finie de fonction de $\mathbb{R}^N$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que Σ est P -unisolvant SSI pour tous réels $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, il exist un unique élément p de P tel que $p(a_i) = \alpha_i, i = 1, \dots, N$.

Ceci revient à dire que la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : P &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ p &\longrightarrow (p(a_1), \dots, p(a_N)) \end{aligned}$$

est bijective. En pratique, on montrera que Σ est P -unisolvant en vérifiant que $\dim P = \text{Card } \Sigma$, puis en montrant l'injectivité ou la surjectivité de $\mathcal{L}$. L'injectivité de $\mathcal{L}$ en établissant que la seule fonction de P s'annulant sur tous les points de Σ est la fonction nulle.

La surjectivité de $\mathcal{L}$ démontre en exhibant une famille $p_1, \dots, p_N$ d'éléments de P tels que $p_i(a_j) = \delta_{ij}$, c'est-à-dire un antécédent pour $\mathcal{L}$ de la base canonique de $\mathbb{R}^N$. En effet, étant donnés des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, la fonction $p = \sum_{i=1}^N \alpha_i p_i$ vérifie alors $p(a_j) = \alpha_j, j = 1, \dots, N$.

Définition 2.4. (*Éléments finis de Lagrange*) Un élément fini de Lagrange est un triplet (K, Σ, P) tel que

- * K est un élément géométrique de $\mathbb{R}^n$ ($n = 1, 2$ ou 3), compact, connexe, et d'intérieur non vide.
- * $\Sigma = \{a_1, \dots, a_N\}$ est un ensemble fini de N points distincts de K .
- * P est un espace vectoriel de dimension finie de fonctions réelles définies sur K , et tel que Σ soit P -unisolvant (donc $\dim P = N$).

Définition 2.5. Soit (K, Σ, P) un élément fini de Lagrange. On appelle **fonctions de base locales** de l'élément les N fonctions p_i ($i = 1, \dots, N$) de P telles que

$$p_i(a_i) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq N.$$

On vérifie aisément que $(p_1, \dots, p_N)$ ainsi définie bien une base de P .

Définition 2.6. On appelle **opérateur de P -interpolation** sur Σ l'opérateur π_k qui, à toute fonction v définie sur K , associe la fonction $\pi_k v$ de P définie par $\pi_k v = \sum_{i=1}^N v(a_i) p_i$. $\pi_k v$ est donc l'unique élément de P qui prend les mêmes valeurs que v sur les points de Σ , [2].

2.5 Exemples d'éléments finis de Lagrange

2.5.1 Espaces de polynômes

On notera P_k l'espace vectoriel des polynômes de degré total inférieur ou égal à k

* Sur $\mathbb{R}$, $P_k = Vect\{1, X, \dots, X^k\}$ et $\dim P_k = k + 1$.

* Sur $\mathbb{R}^2$, $P_k = Vect\{X^i Y^j; 0 \leq i + j \leq k\}$ et $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

* Sur $\mathbb{R}^3$, $P_k = Vect\{X^i Y^j Z^l; 0 \leq i + j + l \leq k\}$ et $\dim P_k = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$.

On notera Q_k l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à k par rapport à chaque variable.

* Sur $\mathbb{R}$, $Q_k = P_k$.

* Sur $\mathbb{R}^2$, $Q_k = Vect\{X^i Y^j; 0 \leq i, j \leq k\}$ et $\dim Q_k = (k+1)^2$.

* Sur $\mathbb{R}^3$, $Q_k = Vect\{X^i Y^j Z^l; 0 \leq i, j, l \leq k\}$ et $\dim Q_k = (k+1)^3$.

Exemples 1D

Élément P_1

* $K = [a, b]$,

* $\Sigma = \{a, b\}$,

* $P = P_1$.

Élément P_2

* $K = [a, b]$,

* $\Sigma = \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$,

* $P = P_2$.

Élément P_m

- * $K = [a, b]$,
- * $\Sigma = \{a + i \frac{b-a}{m}, \quad i = 0, \dots, m\}$,
- * $P = P_m$.

Exemples 2D triangulaires

Élément P_1

- * $K = \text{triangle de sommets } a_1, a_2, a_3$,
- * $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3\}$,
- * $P = P_1$.

Les fonctions de base sont définies par $p_i(a_j) = \delta_{ij}$. Ce sont donc les coordonnées barycentriques : $p_i = \lambda_i$.

Elément P_2

- * $K = \text{triangle de sommets } a_1, a_2, a_3$,
- * $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}\}$, où $a_{ij} = \frac{a_i + a_j}{2}$,
- * $P = P_2$.

Les fonctions de base sont $p_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1)$ et $p_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j$ [2].

2.6 Éléments finis de degré 1 pour un problème de Dirichlet homogène en dimension $n = 1$

Introduisons une discrétisation de l'intervalle $[a, b]$ en N sous-intervalles ou éléments $T_i = [x_{i-1}, x_i]$. Les éléments T_i n'ont pas forcément même longueur. $V_{0,h}$ est alors l'espace des fonctions continues affines par morceaux (affines sur les segments T_i) et nulles aux extrémités a et b .

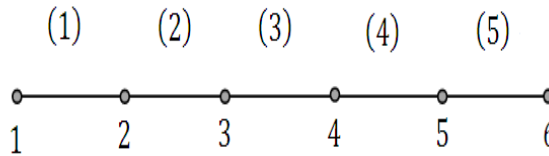


FIGURE 2.1 – Domaine discret en dimension 1.

Rappelons que chaque fonction $v_h \in V_{0,h}$ est déterminée de manière donnée de ses valeurs aux points x_i pour $i = 2, \dots, N$. L'espace $V_{0,h}$ a dimension $N-1$ et il est engendré par la base de Lagrange

qui est formée des $w_i \in V_{0,h}$ définies par

$$w_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall i = 2, \dots, N \quad \text{et} \quad \forall j = 2, \dots, N.$$

D'où

$$w_i(x) = \begin{cases} \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_i - x}{x_i - x_{i+1}} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

Une fonction v_h quelconque s'écrit dans cette base

$$v_h(x) = \sum_{i=2}^N v_i w_i(x)$$

avec $v_i = v_h(x_i)$. Les coefficients v_i sont donc les valeurs de v_h aux points x_i [18].

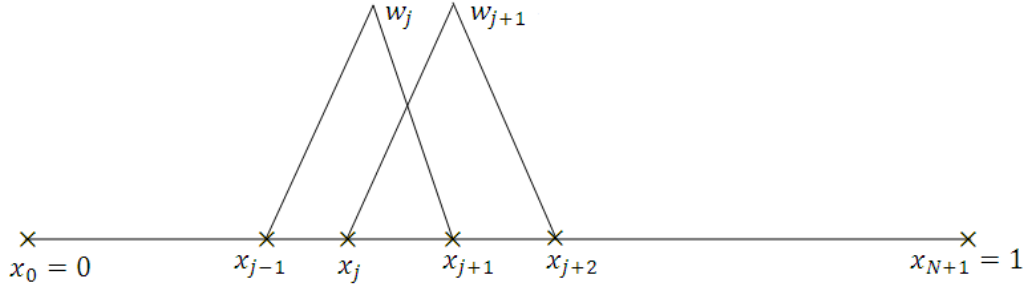


FIGURE 2.2 – Représentation géométrique des fonctions de base P_1 en dimension 1.

2.6.1 Ecriture du problème approché

Ecrivons le problème approché dans $V_{0,h}$: Trouver la fonction u_h appartenant à $V_{0,h}$ telle que pour tout $v_h \in V_{0,h}$ on ait :

$$\int_a^b \alpha u_h'(x) v_h'(x) dx + \int_a^b \beta u_h(x) v_h(x) dx = \int_a^b f(x) v_h(x) dx. \quad (2.6.1)$$

Le problème étant linéaire, l'égalité est vraie pour tout v_h si et seulement si elle est vraie pour une base de l'espace vectoriel $V_{0,h}$, c'est-à-dire

$$(2.6.1) \text{ est vérifiée } \forall v_h \in V_{0,h} \Leftrightarrow (2.6.1) \text{ est vérifiée } \forall w_i \text{ pour } i = 2, \dots, N.$$

D'autre part, si u_h est solution du problème approché dans $V_{0,h}$, on peut l'exprimer dans la base des w_i comme suit

$$u_h(x) = \sum_{j=2}^N u_j w_j(x),$$

avec $u_j = u_h(x_j)$ est la valeur approchée de la solution exacte au point x_j . Ainsi le problème approché s'écrit :

Chercher $u_2, u_3, \dots, u_N$ tels que

$$\sum_{j=2}^N \left(\int_a^b \alpha w_j'(x) w_i'(x) dx + \int_a^b \beta w_j(x) w_i(x) dx \right) u_j = \int_a^b f(x) w_i(x) dx.$$

Posons

$$F_i := \int_a^b f(x) w_i(x) dx,$$

$$A_{ij} := \int_a^b \alpha w_j'(x) w_i'(x) dx + \int_a^b \beta w_j(x) w_i(x) dx.$$

On remarque que le problème approché prend la forme d'un système linéaire de $N - 1$ équations à $N - 1$ inconnues, qui peut s'écrire sous la forme matricielle suivante

$$AU = F.$$

Calculons maintenant les coefficients $A_{i,j}$ en sommant les contributions des différents éléments selon

$$A_{i,j} = a(w_j(x), w_i(x)) = \int_a^b \alpha w_j'(x) w_i'(x) dx + \int_a^b \beta w_j(x) w_i(x) dx$$

$$= \sum_{k=1}^N \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \alpha w_j'(x) w_i'(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \beta w_j(x) w_i(x) dx \right).$$

2.6.2 Matrices élémentaires

Considérons par exemple l'élément $T_i = [x_i, x_{i+1}]$. Sur cet élément, il n'y a que deux fonctions de base non nulles : w_i et w_{i+1} . L'élément T_i produira donc effectivement une contribution non nulle aux quatre coefficients $A_{i,i}$, $A_{i+1,i}$, $A_{i+1,i+1}$ et $A_{i,i+1}$ de la matrice globale A . Calculons les contributions élémentaires de T_i et disposons les sous la forme d'une matrice élémentaire 2×2

$$ElemT_i = \begin{pmatrix} e_{1,1}^i & e_{1,2}^i \\ e_{2,1}^i & e_{2,2}^i \end{pmatrix},$$

avec

$$\begin{aligned}
 e_{1,1}^i &= a(w_i(x), w_i(x)) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \alpha w_i'(x) w_i'(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \beta w_i(x) w_i(x) dx \\
 &= \frac{\alpha}{x_{i+1} - x_i} + \beta \frac{x_{i+1} - x_i}{3}, \\
 e_{1,2}^i &= e_{2,1}^i = a(w_i(x), w_{i+1}(x)) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \alpha w_i'(x) w_{i+1}'(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \beta w_i(x) w_{i+1}(x) dx \\
 &= -\frac{\alpha}{x_{i+1} - x_i} + \beta \frac{x_{i+1} - x_i}{6}, \\
 e_{2,2}^i &= a(w_{i+1}(x), w_{i+1}(x)) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \alpha w_{i+1}'(x) w_{i+1}'(x) dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \beta w_{i+1}(x) w_{i+1}(x) dx \\
 &= -\frac{\alpha}{x_{i+1} - x_i} + \beta \frac{x_{i+1} - x_i}{3}.
 \end{aligned}$$

D'où

$$ElemT_i = \frac{\alpha}{x_{i+1} - x_i} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour les $F_j = \langle f, w_j(x) \rangle$, on doit utiliser une méthode de calcul approché d'intégrale : par exemple, la méthode des trapèze

$$F_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx = \left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} \right) f_j.$$

La méthode de Simpson permet aussi un calcul approché et donne dans le même cas

$$F_j = \frac{h}{6} (F_{j-1} + 4F_j + F_{j+1}),$$

[18].

2.7 Éléments finis pour un problème non linéaire

Considérons le problème non linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} + u \frac{du}{dx} - u = e^{2x}, & x \in (0, 1), \\ u(0) = 1, \quad u(1) = e. \end{cases} \quad (2.7.1)$$

Il est clair que $u = e^x$ est la solution exacte de (2.7.1).

Nous allons résoudre ce problème numériquement en utilisant la méthode des éléments fi-

nis. On va expliquer toutes les étapes en détail pour faciliter la compréhension de l'algorithme sur lequel nous nous sommes appuyés en programmation.

Pour plus d'informations sur les problèmes résolus en détail, veuillez vous référer à [8].

2.7.1 Discrétisation du domaine

On subdivise l'intervalle $[0, 1]$ en 5 sous intervalles ($N = 5$), où la longueur de chaque sous intervalle est $h_e = \frac{1}{N} = 0.2$,

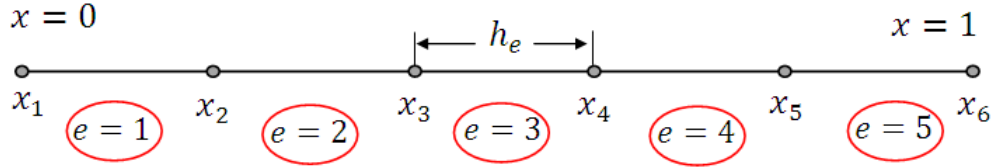


FIGURE 2.3 – Maillage composé de cinq éléments.

2.7.2 Formulation variationnelle

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} w \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} + \bar{u} \frac{du}{dx} - u - e^{2x} \right\} dx = 0. \quad (2.7.2)$$

Par intégration par partie, on obtient

$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + w \bar{u} \frac{du}{dx} - w u \right\} dx = \left(w \frac{du}{dx} \right)_{x_e}^{x_{e+1}} + \int_{x_e}^{x_{e+1}} e^{2x} w dx. \quad (2.7.3)$$

Donc, la formulation variationnelle du problème

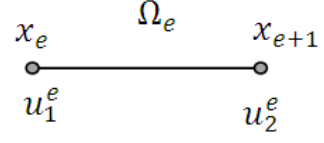
$$\int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + w \bar{u} \frac{du}{dx} - w u \right\} dx = w(x_e) Q_1 + w(x_{e+1}) Q_2 + \int_{x_e}^{x_{e+1}} e^{2x} w dx, \quad (2.7.4)$$

où

$$Q_1 = - \left(\frac{du}{dx} \right)_{x_e} \quad \text{et} \quad Q_2 = \left(\frac{du}{dx} \right)_{x_{e+1}}.$$

2.7.3 Approximation linéaire de $u(x)$

$$u^e(x) = c_1 + c_2x.$$



En appliquant les conditions

$$\left. \begin{aligned} u^e(x_e) &= c_1 + c_2x_e = u_1^e \\ u^e(x_{e+1}) &= c_1 + c_2x_{e+1} = u_2^e \end{aligned} \right\} \Rightarrow u^e(x) = u_1^e\varphi_1^e(x) + u_2^e\varphi_2^e(x) = \sum_{j=1}^{j=2} u_j^e\varphi_j^e(x), \quad (2.7.5)$$

où

$$\varphi_1^e(x) = \frac{x_{e+1} - x}{x_{e+1} - x_e}, \quad \varphi_2^e(x) = \frac{x - x_e}{x_{e+1} - x_e},$$

sont connues sous le nom fonctions de base [8].

Propriétés des fonctions de base

1. $\varphi_i^e(x_j^e) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$
2. $\sum_{j=1}^{j=2} \varphi_j^e(x) = 1.$

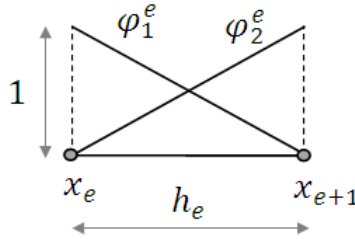


FIGURE 2.4 – Représentation de deux fonctions de base.

Le modèle par éléments finis peut être obtenu à partir de l'équation (2.7.4) en substituant l'approximation linéaire par éléments finis de la forme

$$u^e(x) = \sum_{j=1}^{j=2} a_j^e \varphi_j^e(x).$$

Avec $w = \varphi_i^e(x)$, $i = 1, 2$, où $\varphi_i^e(x)$ sont les fonctions de base sur l'élément (x_e, x_{e+1}) .

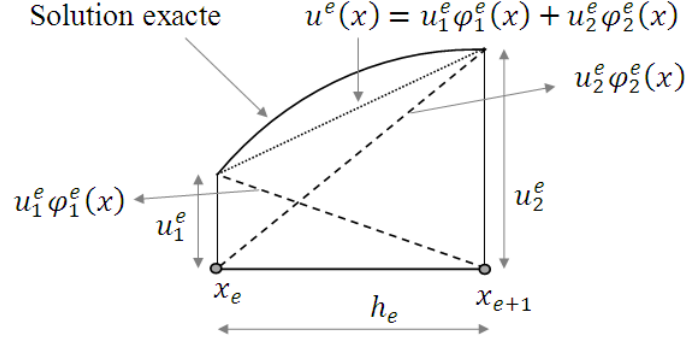


FIGURE 2.5 – Approximation linéaire par éléments finis.

Substitution les valeurs de u et w dans l'équation (2.7.4)

$$\begin{aligned} & \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \frac{d\varphi_1^e}{dx} \frac{d}{dx} (u_1^e \varphi_1^e + u_2^e \varphi_2^e) + \varphi_1^e \bar{u} \frac{d}{dx} (u_1^e \varphi_1^e + u_2^e \varphi_2^e) - \varphi_1^e (u_1^e \varphi_1^e + u_2^e \varphi_2^e) \right\} dx \\ &= \varphi_1^e(x_e) Q_1 + \varphi_1^e(x_{e+1}) Q_2 + \int_{x_e}^{x_{e+1}} \varphi_1^e e^{2x} dx, \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

$$\begin{aligned} & \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \frac{d\varphi_2^e}{dx} \frac{d}{dx} (u_1^e \varphi_1^e + u_2^e \varphi_2^e) + \varphi_2^e \bar{u} \frac{d}{dx} (u_1^e \varphi_1^e + u_2^e \varphi_2^e) - \varphi_2^e (u_1^e \varphi_1^e + u_2^e \varphi_2^e) \right\} dx \\ &= \varphi_2^e(x_e) Q_1 + \varphi_2^e(x_{e+1}) Q_2 + \int_{x_e}^{x_{e+1}} \varphi_2^e e^{2x} dx. \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Dans la notation matricielle, les équations algébriques peuvent être écrites comme

$$\begin{aligned} K_{11}^e u_1^e + K_{12}^e u_2^e &= f_1^e + Q_1^e, \\ K_{21}^e u_1^e + K_{22}^e u_2^e &= f_2^e + Q_2^e. \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

Ou en d'autres termes

$$[K^e] \{u^e\} = \{f^e\} + \{Q^e\} \quad (2.7.9)$$

tels que

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \frac{d\varphi_i^e}{dx} \frac{d\varphi_j^e}{dx} + \varphi_i^e \bar{u} \frac{d\varphi_j^e}{dx} - \varphi_i^e \varphi_j^e \right\} dx, \\ f_i^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \varphi_i^e e^{2x} dx. \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

Supposons que

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^{j=2} \bar{u}_j \varphi_j^e(x) = \bar{u}_1 \varphi_1^e(x) + \bar{u}_2 \varphi_2^e(x).$$

On obtient, alors

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left\{ \frac{d\varphi_i^e}{dx} \frac{d\varphi_j^e}{dx} + \left(\varphi_i^e \varphi_1^e \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) \bar{u}_1 + \left(\varphi_i^e \varphi_2^e \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) \bar{u}_2 - \varphi_i^e \varphi_j^e \right\} dx \\ &= A_{ij}^e + B_{ij}^e \bar{u}_1 + C_{ij}^e \bar{u}_2 + D_{ij}^e \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

tels que

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\frac{d\varphi_i^e}{dx} \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) dx, & B_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\varphi_i^e \varphi_1^e \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) dx, \\ C_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\varphi_i^e \varphi_2^e \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) dx, & D_{ij}^e &= - \int_{x_e}^{x_{e+1}} (\varphi_i^e \varphi_j^e) dx. \end{aligned} \quad (2.7.12)$$

En calculant ces intégrales, on trouve

$$\begin{aligned} A_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\frac{d\varphi_i^e}{dx} \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) dx = \frac{1}{h_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\varphi_i^e \varphi_1^e \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) dx = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \\ C_{ij}^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \left(\varphi_i^e \varphi_2^e \frac{d\varphi_j^e}{dx} \right) dx = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \\ D_{ij}^e &= - \int_{x_e}^{x_{e+1}} (\varphi_i^e \varphi_j^e) dx = \frac{h_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \\ f_i^e &= - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \varphi_i^e e^{2x} dx = \begin{bmatrix} \frac{1}{4h_e} (e^{2x_e} - e^{2x_{e+1}}) + \frac{e^{2x_e}}{2} \\ \frac{1}{4h_e} (e^{2x_{e+1}} - e^{2x_e}) + \frac{e^{2x_{e+1}}}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

[8].

2.7.4 Technique d'assemblage

Initiation du système linéaire

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matrices élémentaires

1^{ière} Élément $e = 1$:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2^{ième} Élément $e = 2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{11}^2 & k_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & k_{22}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1^2 \\ f_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_1^2 \\ Q_2^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3^{ième} Élément $e = 3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11}^3 & k_{12}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & k_{22}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_1^3 \\ f_2^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_1^3 \\ Q_2^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4^{ème} Élément $e = 4$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{11}^4 & k_{12}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & k_{22}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^4 \\ f_2^4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_1^4 \\ Q_2^4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5^{ème} Élément $e = 5$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11}^5 & k_{12}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^5 & k_{22}^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_1^5 \\ f_2^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_1^5 \\ Q_2^5 \end{bmatrix}$$

Matrice d'assemblage

En effectuant la somme des système précédents, on obtient

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & (k_{22}^1 + k_{11}^2) & k_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & (k_{22}^2 + k_{11}^3) & k_{12}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & (k_{22}^3 + k_{11}^4) & k_{12}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & (k_{22}^4 + k_{11}^5) & k_{12}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^5 & k_{22}^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 + f_1^5 \\ f_2^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 + Q_1^3 \\ Q_2^3 + Q_1^4 \\ Q_2^4 + Q_1^5 \\ Q_2^5 \end{bmatrix}$$

cette dernière matrice obtenue est appelée matrice d'assemblage.

Le second membre du système linéaire est évalué comme suit

$$Q_2^e + Q_1^{e+1} = \begin{cases} 0 & \text{si aucune source ponctuelle externe n'est appliquée,} \\ Q_o & \text{si une source ponctuelle externe de magnitude } Q_o \text{ est appliquée.} \end{cases}$$

Imposition des conditions aux limites

$$\begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & (k_{22}^1 + k_{11}^2) & k_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & (k_{22}^2 + k_{11}^3) & k_{12}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & (k_{22}^3 + k_{11}^4) & k_{12}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & (k_{22}^4 + k_{11}^5) & k_{12}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^5 & k_{12}^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^1 \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 + f_1^5 \\ f_2^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_2^5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & (k_{22}^1 + k_{11}^2) & k_{12}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{21}^2 & (k_{22}^2 + k_{11}^3) & k_{12}^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{21}^3 & (k_{22}^3 + k_{11}^4) & k_{12}^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{21}^4 & (k_{22}^4 + k_{11}^5) & k_{12}^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \\ f_2^1 + f_1^2 \\ f_2^2 + f_1^3 \\ f_2^3 + f_1^4 \\ f_2^4 + f_1^5 \\ u(1) \end{bmatrix}$$

Après l'assemblage des équations des éléments, un système d'équations non linéaires est obtenu, par conséquent un schéma itératif a été appliqué pour le résoudre. Ce système est linéarisé en incorporant la fonction $\bar{u}$, qui est supposée connue de l'itération précédente et les calculs pour u sont alors effectués pour l'itération actuelle. Ce processus est répété jusqu'à la précision souhaitée [8].

2.7.5 Code MATLAB

Ce code est créé en langage Matlab suivant les étapes mentionnées ci-dessus.


```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Tracé des variables résultantes %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
VV=exp(x);
figure (48)
plot(x,VV, '-rs')
xlabel('x')
ylabel('U(x)')
title('Solution exacte')
print -dpdf Figure-48.pdf
open Figure-48.pdf
figure (49)
plot(x,F, '-bs')
xlabel('x')
ylabel('U(x)')
title('Solution par éléments finis')
print -dpdf Figure-49.pdf
open Figure-49.pdf
figure (50)
plot(x,diff, '-gs')
title('Erreur de discrétisation')
xlabel('x')
ylabel('E(x)')
print -dpdf Figure-50.pdf
open Figure-50.pdf
toc
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calcul de matrices élémentaires et assemblage %%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [F1]=assembly(F,n,he)
nn=n+1;
K=zeros(nn,nn); % Initiation de la matrice principale.
R=zeros(nn,1); % Initiation de la matrice RHB.
syms x % x comme variable symbolique.
s=[1-x/he,x/he]; % Fonction linéaire de base.
ds=diff(s,x); % Différenciation de la fonction de base.
lmm=[]; % Matrice de connectivité.
for i=1:n
    lmm=[lmm; [i,i+1]];
end
for i=1:n
    lm=lmm(i,:);

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%  Génération des matrices élémentaires (K11) et F1  %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
k11=-int(ds'*ds,x,0,he)+(int(s'*ds*s(1),x,0,he)*F(lm(1))...
      +int(s'*ds*s(2),x,0,he)*F(lm(2)))-int(s'*s,x,0,he);
f1=int(exp(2*(x+(i-1)*he))*s',x,0,he);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  Assemblage selon la matrice de connectivité  %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
K(lm,lm)=K(lm,lm)+k11;
R(lm)=R(lm)+f1;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  Imposition des conditions aux limites  %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
K(1,:)=0.0 ; K(nn,:)=0.0;
K(1,1)=1.0 ; K(nn,nn)=1.0;
R(1,1)=F(1) ; R(nn,1)=F(nn);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  solution du système linéaire  %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
d=K\R ;
F1=d;
end

```

Les figures suivantes représentent les résultats numériques obtenus pour deux valeurs différentes de discrétisation $N = 5$ et $N = 10$, Nous dessinons les solutions exactes et approchée dans deux figures différentes, et la troisième figure représente la différence entre elles dans chaque cas [8].

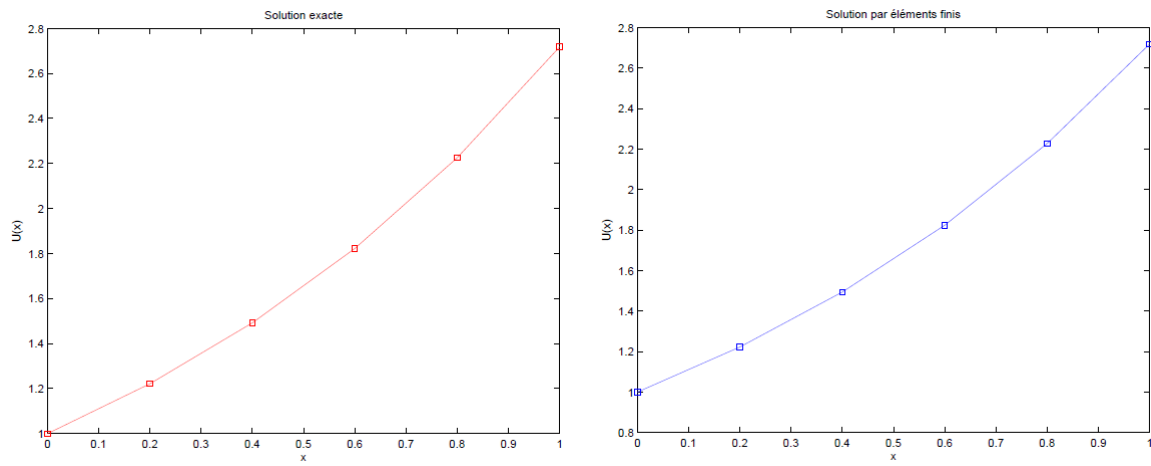


FIGURE 2.6 – Solution exacte et solution approchée pour $N = 5$.

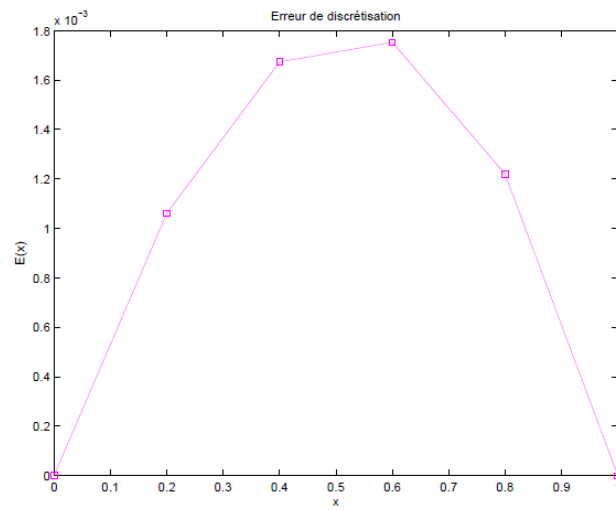


FIGURE 2.7 – Erreur de discrétisation pour $N = 5$.

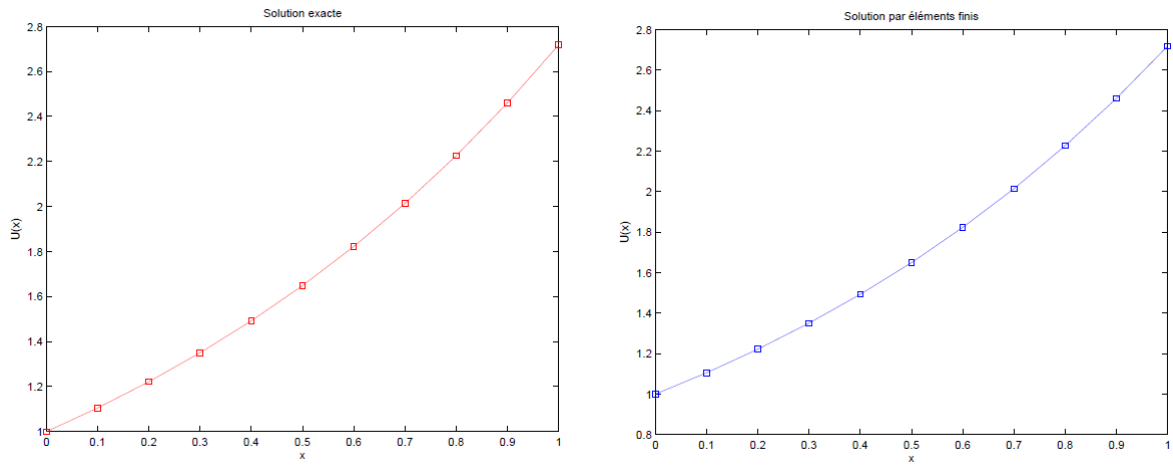


FIGURE 2.8 – Solution exacte et solution approchée pour $N = 10$.

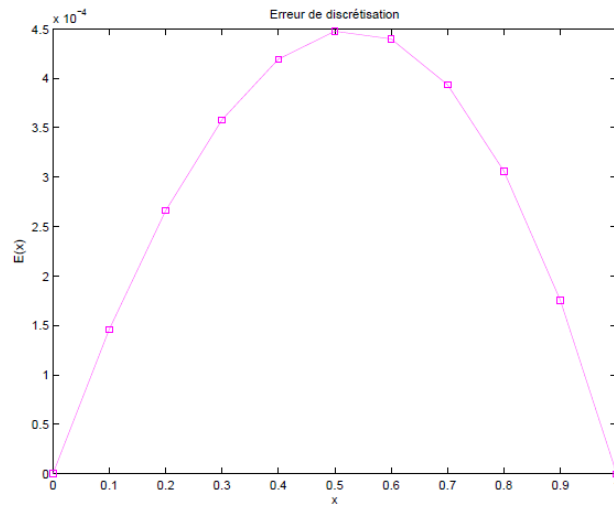


FIGURE 2.9 – Erreur de discrétisation pour $N = 10$.

Nous avons également imprimé les solutions exacte et approchée avec l'erreur pour chaque point de la discrétisation dans un tableau pour chaque cas.

x ($N = 10$)	MEF	Exacte	Erreur
0.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0.1000	1.1053	1.1052	0.0001
0.2000	1.2217	1.2214	0.0003
0.3000	1.3502	1.3499	0.0004
0.4000	1.4922	1.4918	0.0004
0.5000	1.6492	1.6487	0.0004
0.6000	1.8226	1.8221	0.0004
0.7000	2.0141	2.0138	0.0004
0.8000	2.2258	2.2255	0.0003
0.9000	2.4598	2.4596	0.0002
1	2.7183	2.7183	0

x ($N = 5$)	MEF	Exacte	Erreur
0	1.0000	1.0000	0.0000
0.2000	1.2225	1.2214	0.0011
0.4000	1.4935	1.4918	0.0017
0.6000	1.8239	1.8221	0.0018
0.8000	2.2268	2.2255	0.0012
1.0000	2.7183	2.7183	0

Chapitre 3

Éléments finis pour un système de Navier-Stokes en dimension deux

3.1 Équations de Navier-Stokes continues

Les équations de **Navier-Stokes** sont la norme pour le mouvement des fluides. Toute discussion sur l'écoulement des fluides commence par ces équations et ajoute des complications telles que la température ou la compressibilité, effectue des simplifications telles que l'indépendance temporelle ou remplace un terme pour tenter de mieux modéliser la turbulence ou d'autres caractéristiques.

$$\begin{aligned}\rho V_t - \mu \Delta V + \rho(V \cdot \nabla)V + \nabla p &= f \text{ (équations de quantité de mouvement),} \\ \rho_t + \nabla \cdot (\rho V) &= 0 \text{ (équation de continuité).}\end{aligned}$$

- V : Vecteur de la vitesse.
- p : La pression.
- ρ : La densité du fluide.
- μ : La viscosité dynamique.
- f : Les forces du corps telles que la gravité.

Voici l'équivalent, en coordonnées cartésiennes 2D

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

Ici, nous nous intéresserons à l'étude de l'écoulement des fluides en régime permanent, pour cela nous allons supprimer les dérivées temporelles.

On peut aussi supposer que la densité est constante. Dans ce cas, il convient de remplacer la vitesse par la vitesse massique.

La pression peut absorber la force de gravité et peut être redimensionnée par la densité constante.

La viscosité dynamique peut être remise à l'échelle par la densité pour donner la viscosité cinématique.

En réutilisant u et v pour signifier **la vitesse** de la masse, et p pour signifier **la pression** ajustée et remise à l'échelle. D'autre part, **la viscosité cinématique** reçoit un nouveau symbole, ν .

$$\begin{aligned} -\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ -\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Si nous résolvons les équations complètes de Navier Stokes, alors l'amplitude relative de ν mesure l'équilibre entre la diffusion et les termes d'impulsion non linéaires (perturbateurs).

Lorsque ν tend vers zéro, le caractère du système physique, l'EDP et le modèle numérique discrétisé se détériorent. Les solutions lisses deviennent irrégulières. Les écoulements laminaires deviennent turbulents.

Numériquement, les équations non linéaires deviennent difficiles à résoudre.

Le nombre de **Reynolds** est une grandeur sans dimension qui estime la dominance de la quantité de mouvement sur la diffusion

$$\text{Re} = \frac{\rho \|v\| L}{\mu} = \frac{\|v\| L}{\nu}$$

où L est une longueur caractéristique. Les mathématiciens ont tendance à résoudre des problèmes avec $\text{Re}=1$.

Si la viscosité ν est suffisamment grande, les termes non linéaires peuvent être négligés, et nous avons les équations de Stokes

$$\begin{aligned} -\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ -\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Parce que ces équations sont linéaires en u , v et p , elles sont beaucoup plus faciles à travailler. Ils sont également utiles même si nous voulons résoudre les équations de Navier-Stokes, car ils peuvent nous donner une solution de départ raisonnable [5].

3.2 Formulation des éléments finies

3.2.1 Discrétisation du domaine

Le domaine Ω (que nous considérons ici comme un carré) est découpé en N éléments (finis) triangulaires $T_k, k = 1, \dots, N$. La famille des triangles T_k forme une triangulation τ_h , indexée par le paramètre h , la longueur du plus grand des côtés de tous les triangles. Si l'on définit le fermé $\Omega_h = \cup_{k=1}^N T_k$, nous observons que $\Omega_h = \Omega \cup \Gamma$ si et seulement si Γ est une frontière polygonale.

Maillage admissible : La construction de la triangulation τ_h doit respecter (par définition) quelques règles :

- Les triangles sont d'aire non-nulle.
- Deux triangles voisins peuvent avoir en commun, soit un sommet, soit un côté entier.
- Les sommets définissant $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ doivent être situés sur Γ
- Les coins de Ω (quand ils existent) sont des sommets de triangles.

Les sommets $i = 1, \dots, N$ des triangles T_k sont les sommets de la triangulation. Ils vont également servir comme noeuds du maillage (i.e. les points où la solution numérique sera calculée), si nous avons utiliser des éléments finis P_1 (polynômes de degré ≤ 1) [14].

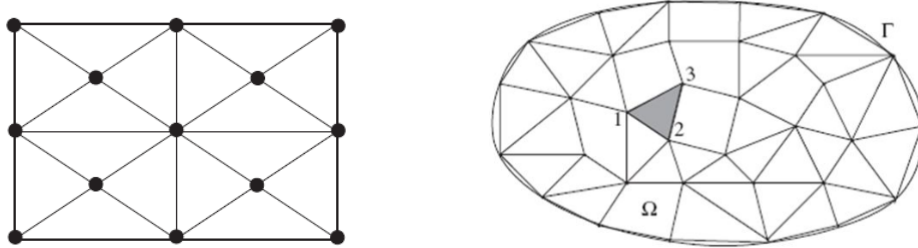


FIGURE 3.1 – Exemples des maillages admissibles.

3.2.2 Construction des fonctions de base P_1 en 2D

La construction des fonctions de base est normalement la première étape, et la plus importante, pour développer des équations aux éléments finis pour tout type d'élément.

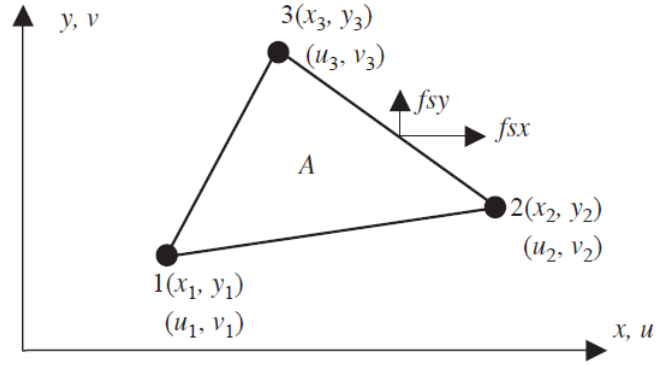


FIGURE 3.2 – Élément fini 2D triangulaire à 3 nœuds.

Lors de la détermination des fonctions de base N_i ($i = 1, 2, 3$) pour l'élément triangulaire, on peut bien sûr suivre la procédure standard décrite dans plusieurs ouvrages, en partant d'une hypothèse des déplacements à l'aide de fonctions de base polynomiales à constantes inconnues.

Pour un élément triangulaire linéaire, nous supposons que les fonctions de base sont des fonctions linéaires de x et y . Ils doivent donc avoir la forme

$$\begin{aligned} N_1 &= a_1 + b_1x + c_1y, \\ N_2 &= a_2 + b_2x + c_2y, \\ N_3 &= a_3 + b_3x + c_3y, \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

où a_i , b_i et c_i ($i = 1, 2, 3$) sont des constantes à déterminer. Les équations (3.2.1) peuvent être écrites sous la forme générale suivante

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y, i = 1, 2, 3.$$

Nous écrivons les fonctions de base sous la forme matricielle suivante

$$N_i = \begin{Bmatrix} 1 & x & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{Bmatrix} = p^T \alpha, \quad p^T = \{1, x, y\}$$

où α est le vecteur des trois constantes inconnues, et p est le vecteur de fonction de base polynômiale (ou monôme). La matrice des moments P correspondente à la base p peut être

donnée par

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

Les fonctions de base construites possèdent la propriété de la fonction delta, cette propriété indique que la fonction de base doit être une unité à son domicile nœud, et zéro à ses nœuds distants. Pour un problème à deux dimensions, il peut être exprimé comme

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Pour un élément triangulaire, cette condition peut être exprimée explicitement pour les trois fonctions de base dans les équations suivantes. Pour la fonction de base N_1 , on a

$$\begin{aligned} N_1(x_1, y_1) &= 1, \\ N_1(x_2, y_2) &= 0, \\ N_1(x_3, y_3) &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

En effet, le nœud 1 en (x_1, y_1) est le nœud d'origine de N_1 , et les nœuds 2 en (x_2, y_2) et 3 en (x_3, y_3) sont les nœuds distants de N_1 . En utilisant les équations (3.2.1)₁ et (3.2.3), on obtient

$$\begin{aligned} N_1(x_1, y_1) &= a_1 + b_1x_1 + c_1y_1 = 1, \\ N_1(x_2, y_2) &= a_2 + b_2x_2 + c_2y_2 = 0, \\ N_1(x_3, y_3) &= a_3 + b_3x_3 + c_3y_3 = 0. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Résoudre le système (3.2.4) pour a_1 , b_1 et c_1 , on obtient

$$a_1 = \frac{x_2y_3 - x_3y_2}{2A_e}, \quad b_1 = \frac{y_2 - y_3}{2A_e}, \quad c_1 = \frac{x_3 - x_2}{2A_e},$$

où A_e est l'aire de l'élément triangulaire qui peut être calculée à l'aide du déterminant de la matrice des moments

$$A_e = \frac{1}{2} |P| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1]. \quad (3.2.5)$$

En remplaçant l'équation (3.2.5) en (3.2.1)₁, on obtient

$$N_1 = \frac{1}{2A_e} [(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y],$$

qui peut être réécrit comme

$$N_1 = \frac{1}{2A_e} [(y_2 - y_3)(x - x_2) + (x_3 - x_2)(y - y_2)].$$

Cette équation montre clairement que N_1 est un plan dans l'espace de (x, y, N) qui passe par la ligne de 2–3, et disparaît aux nœuds 2 en (x_2, y_2) et 3 en (x_3, y_3) . Ce plan passe également par le point $(x_1, y_1, 1)$ dans l'espace qui garantit l'unicité de la fonction de base au nœud d'origine. N_1 peut alors être facilement tracé comme dans la figure 3.4 (a).

En utilisant les propriétés de N_1 , nous pouvons immédiatement écrire les deux autres fonctions de base pour les nœuds 2 et 3. Pour le nœud 2, les conditions sont

$$\begin{aligned} N_2(x_1, y_1) &= 0, \\ N_2(x_2, y_2) &= 1, \\ N_2(x_3, y_3) &= 0, \end{aligned}$$

et la fonction de base N_2 doit passer par la droite 3–1, ce qui donne

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{1}{2A_e} [(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y] \\ &= \frac{1}{2A_e} [(y_3 - y_1)(x - x_3) + (x_1 - x_3)(y - y_3)]. \end{aligned}$$

qui est représenté sur la figure 3.4 (b). Pour le nœud 3, les conditions sont

$$\begin{aligned} N_3(x_1, y_1) &= 0, \\ N_3(x_2, y_2) &= 0, \\ N_3(x_3, y_3) &= 1, \end{aligned}$$

et la fonction de base N_3 doit passer par la ligne 1–2, et donnée par

$$\begin{aligned} N_3 &= \frac{1}{2A_e} [(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y] \\ &= \frac{1}{2A_e} [(y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)]. \end{aligned}$$

Le processus de détermination de ces constantes est fondamentalement simple. Les fonctions

de base sont résumées dans suivant formulaire

$$\begin{aligned} N_i &= a_i + b_i x + c_i y, \\ a_i &= \frac{1}{2A_e}(x_j y_k - x_k y_j), \\ b_i &= \frac{1}{2A_e}(y_j - y_k), \\ c_i &= \frac{1}{2A_e}(x_k - x_j), \end{aligned}$$

où l'indice i varie de 1 à 3, j et k sont déterminés par la permutation cyclique dans l'ordre i, j, k . Par exemple, si $i = 1$, alors $j = 2, k = 3$. Lorsque $i = 2$, alors $j = 3, k = 1$ [14].

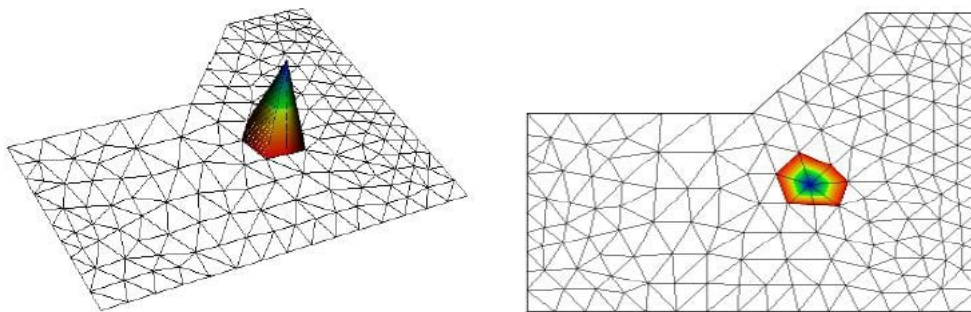


FIGURE 3.3 – Présentation d'une fonction de base en 2D.

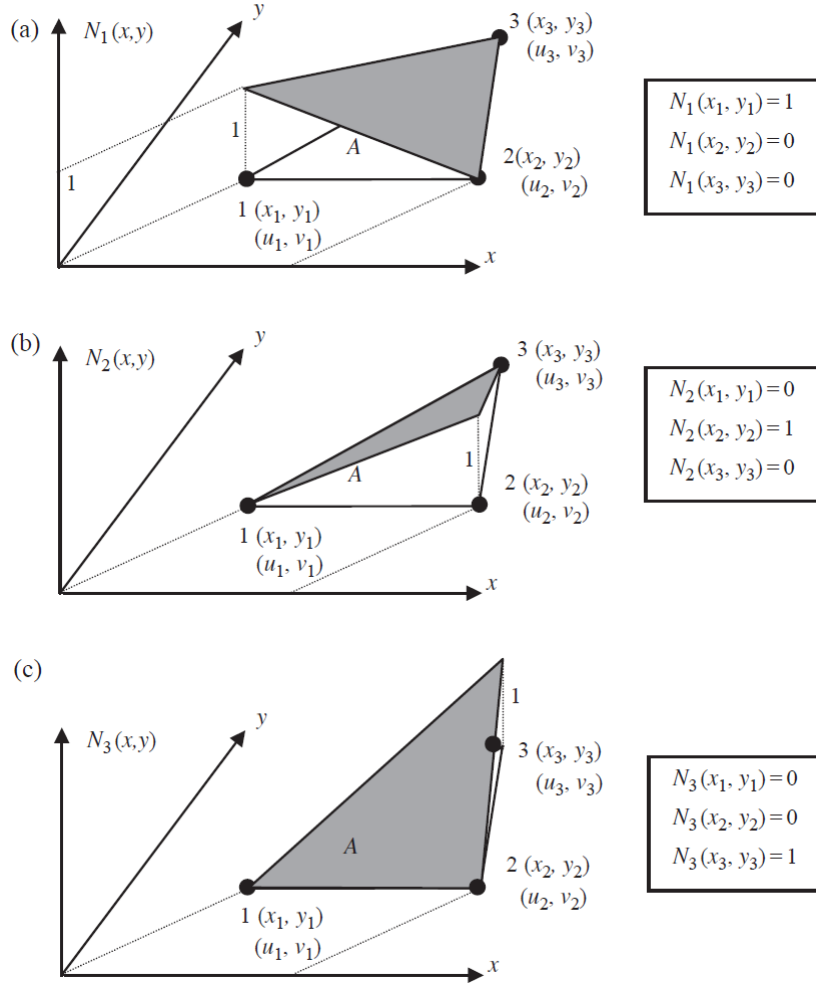


FIGURE 3.4 – Élément triangulaire linéaire et ses fonctions de base.

3.3 Transformation géométrique

3.3.1 Relation entre les variables généralisées et les variables nodales

Un élément de référence simple peut être transformé par une transformation T^e , en un élément de forme plus complexe figure 3.5.

On prend la notation : $\underline{\xi} = \langle \xi, \mu \rangle$ et $\underline{x} = \langle x, y \rangle$.

La transformation T^e définit les coordonnées $\underline{x}^e$ de chaque point de l'élément réel à partir des coordonnées $\underline{\xi}$ du point correspondant de l'élément de référence.

Elle dépend de la forme et de la position de l'élément.

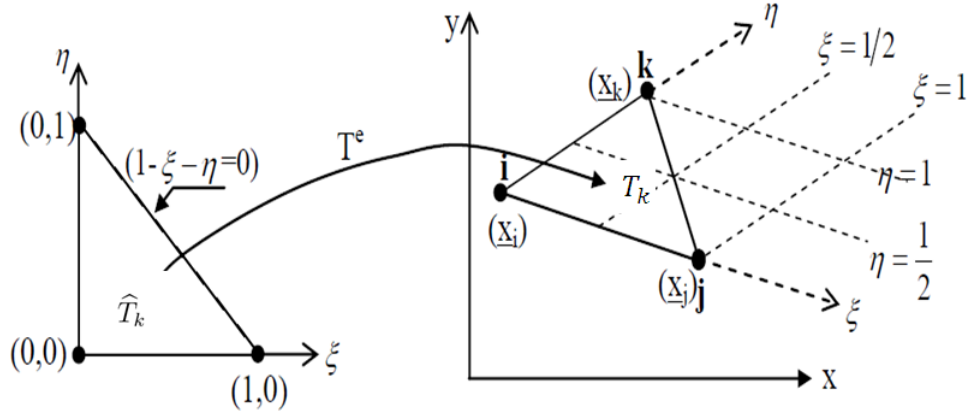


FIGURE 3.5 – Transformation d'un élément fini de référence vers l'élément parent.

Soit $T^e : \underline{\xi} \rightarrow \underline{x}^e = \underline{x}^e(\underline{\xi})$

On notera aussi qu'un même élément de référence, un triangle à 3 nœuds, peut se transformer en plusieurs éléments réels de même type par des transformations différentes, figure 3.6 [11].

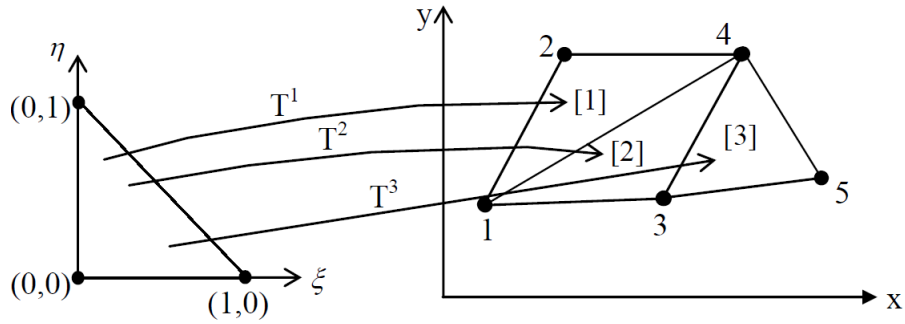


FIGURE 3.6 – Élément de référence représentant plusieurs éléments de même type.

3.3.2 Règles et propriétés de T^e

T^e doit générer des éléments réels et doit être choisie ayant les propriétés suivantes :

- Doit être bijective en tout point de $\underline{\xi}$ situé sur l'élément de référence ou sur sa frontière. Donc à tout point de l'élément de référence correspond un point et un seul de l'élément réel.

- Les nœuds géométriques de l'élément de référence, définie par les nœuds géométriques de cette frontière, correspondent à la portion de frontière définie par les nœuds correspondant.

$$T^e : \underline{\xi} \rightarrow \underline{x}^e = \underline{x}^e(\underline{\xi}, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n)$$

Où $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ sont les coordonnées des nœuds de l'élément réel et n le nombre de nœuds.

On utilisera des transformations T linéaires par rapport aux coordonnées $\underline{x}_n$ de l'élément réel.

$$T : \underline{\xi} \rightarrow \underline{x}(\underline{\xi}) = \leq T(\underline{\xi}) > \underline{x}_n$$

De plus les fonctions de transformation sont choisies identiques pour les trois coordonnées.

$$x(\underline{\xi}) = \leq T(\underline{\xi}) > \underline{x}, \quad y(\underline{\xi}) = \leq T(\underline{\xi}) > \underline{y}, \quad z(\underline{\xi}) = \leq T(\underline{\xi}) > \underline{z}, \quad (3.3.1)$$

avec :

$$\underline{x} = \leq x_1, x_2, \dots, x_n >^T, \quad \underline{y} = \leq y_1, y_2, \dots, y_n >^T, \quad \underline{z} = \leq z_1, z_2, \dots, z_n >^T.$$

[11].

Applications :

Exemple de l'élément fini triangulaire à trois nœuds figure 3.2.

Position des nœuds : $\mathbf{i} : \langle x_i, y_i \rangle \quad \mathbf{j} : \langle x_j, y_j \rangle \quad \mathbf{k} : \langle x_k, y_k \rangle$

Soit $\leq T(\underline{\xi}) > = \leq T^1(\xi, \eta) \quad T^2(\xi, \eta) \quad T^3(\xi, \eta) >$

On a alors les relations suivantes

$$x(\xi, \eta) = T^1(\xi, \eta)x_i + T^2(\xi, \eta)x_j + T^3(\xi, \eta)x_k,$$

$$x(\xi, \eta) = \leq 1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta > \left\{ \begin{array}{c} x_i \\ x_j \\ x_k \end{array} \right\}, \quad y(\xi, \eta) = \leq 1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta > \left\{ \begin{array}{c} y_i \\ y_j \\ y_k \end{array} \right\}. \quad (3.3.2)$$

Vérification des propriétés : $\Rightarrow$ Les nœuds géométriques dans le system de coordonnées local $\mathbf{1} : (0, 0)$, $\mathbf{2} : (1, 0)$, $\mathbf{3} : (0, 1)$ se transforment dans la base globale $\underline{x}_i$, $\underline{x}_j$, $\underline{x}_k$.

L'application pour le nœud i comme exemple donne

$$x(\xi = 0, \eta = 0) = \leq 1 \quad 0 \quad 0 > \left\{ \begin{array}{c} x_i \\ x_j \\ x_k \end{array} \right\} = x_i.$$

Il en sera ainsi pour les autres nœuds j et k .

$\Rightarrow$ La correspondance des frontières (limites) : Chaque frontière $\widehat{\Gamma}$ de l'élément de référence $\widehat{T}_k$ se transforme en une frontière Γ correspondante de T_k .

On choisi pour l'exemple la frontière qui passe par les nœuds 2 : $(1, 0)$ et 3 : $(0, 1)$, et dont l'équation est $1 - \xi - \eta = 0$. Elle doit se transformer en la frontière qui passe par les nœuds $j : \underline{x}_j$ et $k : \underline{x}_k$. En substituant $\eta = 1 - \xi$ dans les relations (3.3.2) on obtient

$$x = \begin{matrix} < 0 & \xi & 1 - \xi > \end{matrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_j \\ x_k \end{Bmatrix} = \xi x_j + (1 - \xi) x_k,$$

$$y = \begin{matrix} < 0 & \xi & 1 - \xi > \end{matrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \\ y_k \end{Bmatrix} = \xi y_j + (1 - \xi) y_k.$$

Les relations (3.3.1) sont donc linéaires et ne dépendent que de $\underline{x}_j$ et $\underline{x}_k$ qui sont situés sur la frontière Γ^E . $\Rightarrow$ La transformation est bijective :

$$(\xi, \eta) \xleftarrow{-\frac{T}{\text{Bijective}}} \rightarrow (x, y)$$

$$dx \cdot dy = |\underline{J}| \cdot d\xi \cdot d\eta \text{ Avec } |\underline{J}| = \text{Jacobien} \neq 0$$

Expression d'une matrice $\underline{J}$ non singulière.

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_j - x_i & y_j - y_i \\ x_k - x_i & y_k - y_i \end{bmatrix}$$

$$\det(\underline{J}) = (x_j - x_i)(y_k - y_i) - (x_k - x_i)(y_j - y_i) = 2A_e.$$

Ce déterminant est égal à 2 fois l'aire du triangle donc, ne s'annule que si les sommets sont alignés. Les angles du triangle doivent toujours rester inférieur à 180° pour que les $\det(\underline{J}) \neq 0$ [11].

3.3.3 Interpolation des variables

Afin de discrétiser le problème de Stokes, nous allons choisir des espaces de fonctions discrets pour U et p . Nous n'avons pas trop parlé des espaces de fonctions à choisir pour le problème de Stokes, il paraît naturel de chercher U dans un sous-espace discret de $((H^1(\Omega))^2$ (à cause du terme $\|\nabla U\|^2$) et p dans un sous-espace discret de $L^2(\Omega)$ (à cause du terme $p \cdot \nabla U$). Si $N_i(x, y)$ est une base de l'espace de fonction pour U , de dimension N_U et $\phi_i(x, y)$

une base de l'espace de fonction pour p , on pourra écrire

$$u = \sum_{i=1}^{N_U} u_i N_i(x, y), \quad (3.3.3)$$

$$v = \sum_{i=1}^{N_U} v_i N_i(x, y), \quad (3.3.4)$$

$$p = \sum_{i=1}^{N_p} p_i \phi_i(x, y). \quad (3.3.5)$$

3.3.4 Équations de Navier-Stokes discrètes

Formulation variationnelle

Nous avons représenté u , v et p en termes de fonctions de base. Pour essayer de déterminer les coefficients dans ces représentations, on multiplie les équations d'état par les fonctions test appropriées

$$\begin{aligned} \left(-\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \right) N_i &= 0, \\ \left(-\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \right) N_i &= 0, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \phi_i &= 0. \end{aligned}$$

Nous intégrons chaque équation sur le domaine Ω

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(-\nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} \right) N_i \, dx \, dy &= 0, \\ \int_{\Omega} \left(-\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} \right) N_i \, dx \, dy &= 0, \\ \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \phi_i \, dx \, dy &= 0. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green pour les équations de u et v

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} N_i \, dx \, dy &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} N_i \, ds, \\ \int_{\Omega} \nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} N_i \, dx \, dy &= \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} N_i \, ds, \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \phi_i dx dy = 0,$$

les membres de droite sont nuls sauf pour les nœuds de la frontière. Pour le moment, nous n'avons pas besoin que les choses deviennent plus intéressantes, nous supposons donc que les côtés droits sont tous nuls [5].

3.4 Matrices élémentaires

Pour chaque élément T_k , on peut calculer une matrice élémentaire correspondante. On a

$$\int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} N_i dx dy = 0,$$

$$\int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} N_i dx dy = 0,$$

$$\int_{T_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \phi_i dx dy = 0$$

D'après les relations (3.3.3), (3.3.4) et (3.3.5), on obtient

$$\sum_{j=1}^3 \left[u_j \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + p_j \int_{T_k} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} N_i \right] dx dy = 0, \quad (3.4.1)$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[v_j \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + p_j \int_{T_k} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} N_i \right] dx dy = 0, \quad (3.4.2)$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[\int_{T_k} \left(u_j \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_i + v_j \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_i \right) dx dy \right] = 0, \quad (3.4.3)$$

Alors, la matrice élémentaire prendre la forme

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 & a_{16} & a_{17} & 0 & a_{19} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & 0 & a_{26} & a_{27} & 0 & a_{29} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 & a_{36} & a_{37} & 0 & a_{39} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & a_{45} & a_{46} & 0 & a_{48} & a_{49} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} & a_{56} & 0 & a_{58} & a_{59} \\ 0 & a_{62} & a_{63} & 0 & a_{65} & a_{66} & 0 & a_{68} & a_{69} \\ a_{71} & a_{72} & 0 & a_{74} & a_{75} & 0 & a_{77} & a_{78} & 0 \\ a_{81} & a_{82} & 0 & a_{84} & a_{85} & 0 & a_{87} & a_{88} & 0 \\ a_{91} & a_{92} & 0 & a_{94} & a_{95} & 0 & a_{97} & a_{98} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ p_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ p_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tels que

Ligne 1

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{13} = \int_{T_k} \frac{\partial N_1}{\partial x} \phi_1 dx dy, \\ a_{14} &= \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{16} = \int_{T_k} \frac{\partial N_1}{\partial x} \phi_2 dx dy, \\ a_{17} &= \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{19} = \int_{T_k} \frac{\partial N_1}{\partial x} \phi_3 dx dy. \end{aligned}$$

Ligne 2

$$\begin{aligned} a_{21} &= \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{23} = \int_{T_k} \frac{\partial N_2}{\partial x} \phi_1 dx dy, \\ a_{24} &= \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{26} = \int_{T_k} \frac{\partial N_2}{\partial x} \phi_2 dx dy, \\ a_{27} &= \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{29} = \int_{T_k} \frac{\partial N_2}{\partial x} \phi_3 dx dy. \end{aligned}$$

Ligne 3

$$\begin{aligned} a_{31} &= \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{33} = \int_{T_k} \frac{\partial N_3}{\partial x} \phi_1 dx dy, \\ a_{34} &= \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{36} = \int_{T_k} \frac{\partial N_3}{\partial x} \phi_2 dx dy, \\ a_{37} &= \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{39} = \int_{T_k} \frac{\partial N_3}{\partial x} \phi_3 dx dy. \end{aligned}$$

Ligne 4

$$\begin{aligned}
 a_{42} \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{43} \int_{T_k} \frac{\partial N_1}{\partial y} \phi_1 dx dy &= 0, \\
 a_{45} \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{46} \int_{T_k} \frac{\partial N_1}{\partial y} \phi_2 dx dy &= 0, \\
 a_{48} \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_1}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{49} \int_{T_k} \frac{\partial N_1}{\partial y} \phi_3 dx dy &= 0.
 \end{aligned}$$

Ligne 5

$$\begin{aligned}
 a_{52} \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{53} \int_{T_k} \frac{\partial N_2}{\partial y} \phi_1 dx dy &= 0, \\
 a_{55} \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{56} \int_{T_k} \frac{\partial N_2}{\partial y} \phi_2 dx dy &= 0, \\
 a_{58} \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_2}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{59} \int_{T_k} \frac{\partial N_2}{\partial y} \phi_3 dx dy &= 0.
 \end{aligned}$$

Ligne 6

$$\begin{aligned}
 a_{62} \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{63} \int_{T_k} \frac{\partial N_3}{\partial y} \phi_1 dx dy &= 0, \\
 a_{65} \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{66} \int_{T_k} \frac{\partial N_3}{\partial y} \phi_2 dx dy &= 0, \\
 a_{68} = \int_{T_k} \nu \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \frac{\partial N_3}{\partial x} + \frac{\partial N_3}{\partial y} \frac{\partial N_3}{\partial y} \right) dx dy, \quad a_{69} \int_{T_k} \frac{\partial N_3}{\partial y} \phi_3 dx dy &= 0.
 \end{aligned}$$

Ligne 7

$$\begin{aligned}
 a_{71} &= \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \phi_1 \right) dx dy, \quad a_{72} = \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \phi_1 \right) dx dy = 0, \\
 a_{74} &= \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \phi_1 \right) dx dy, \quad a_{75} = \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_2}{\partial y} \phi_1 \right) dx dy = 0, \\
 a_{77} &= \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \phi_1 \right) dx dy, \quad a_{78} = \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_3}{\partial y} \phi_1 \right) dx dy = 0.
 \end{aligned}$$

Ligne 8

$$\begin{aligned}
 a_{81} &= \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \phi_2 \right) dx dy, \quad a_{82} = \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \phi_2 \right) dx dy = 0, \\
 a_{84} &= \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \phi_2 \right) dx dy, \quad a_{85} = \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_2}{\partial y} \phi_2 \right) dx dy = 0,
 \end{aligned}$$

$$a_{87} = \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \phi_2 \right) dx dy, \quad a_{88} = \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_3}{\partial y} \phi_2 \right) dx dy = 0.$$

Ligne 9

$$\begin{aligned} a_{91} &= \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_1}{\partial x} \phi_3 \right) dx dy, \quad a_{92} = \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_1}{\partial y} \phi_3 \right) dx dy = 0, \\ a_{94} &= \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_2}{\partial x} \phi_3 \right) dx dy, \quad a_{95} = \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_2}{\partial y} \phi_3 \right) dx dy = 0, \\ a_{97} &= \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_3}{\partial x} \phi_3 \right) dx dy, \quad a_{98} = \int_{T_k} \left(\frac{\partial N_3}{\partial y} \phi_3 \right) dx dy = 0. \end{aligned}$$

Les coefficients de la matrice élémentaire peut être calculée selon les règles de transformation vers l'élément de référence $\hat{T}_k$ comme suit

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2A_e \int_{\hat{T}_k} \nu \left(\frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial y} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial y} \right) d\xi d\eta, \quad a_{13} = 2A_e \int_{\hat{T}_k} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} \hat{\phi}_1 d\xi d\eta, \\ a_{14} &= 2A_e \int_{\hat{T}_k} \nu \left(\frac{\partial \hat{N}_2}{\partial x} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_2}{\partial y} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial y} \right) d\xi d\eta, \quad a_{16} = 2A_e \int_{\hat{T}_k} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} \hat{\phi}_2 d\xi d\eta, \\ a_{17} &= 2A_e \int_{\hat{T}_k} \nu \left(\frac{\partial \hat{N}_3}{\partial x} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_3}{\partial y} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial y} \right) d\xi d\eta, \quad a_{19} = 2A_e \int_{\hat{T}_k} \frac{\partial \hat{N}_1}{\partial x} \hat{\phi}_3 d\xi d\eta. \end{aligned}$$

De même manière on peut calculer les autres coefficients de ma matrice élémentaire tels que

$$\hat{N}_1 = 1 - \xi - \eta, \quad \hat{N}_2 = \xi, \quad \hat{N}_3 = \eta.$$

Bibliographie

- [1] Allaire G., Analyse numérique et optimisation ; Edition de l'école polytechnique, Paris, 7 juillet 2012.
- [2] Blayo E., Notes de cours sur la méthode des éléments finis, Janvier 2010.
- [3] Boyer F., Analyse Fonctionnelle, cour pour Master Mathématiques et Applications, Première année, Aix-Marseille Université, 13 décembre 2015.
- [4] BREZIS H., Analyse Fonctionnelle Théorie et application, MASSON 1987.
- [5] Burkardt J., Finite Elements for the (Navier) Stokes Equations, Florida State University, 2011.
- [6] CHEMIN J-Y, Bases d'analyse fonctionnelle, support du cours pour la première année du Master de Mathématiques de l'Université Paris et Marie Curie. 17 décembre 2017.
- [7] Choi D., LMNO, Méthode des éléments finis par l'exemple, Groupe Mécanique Modélisation Mathématique et Numérique Université de Caen Version Janvier 2016.
- [8] DOUDI N., Méthodes numériques pour EDO et EDP, cours pour 3^{ème} mathématiques université d'Eloued Algerie, 2022.
- [9] Etienne J. Chevalier J., Analyse Numérique ; Université de Liege, 1998.
- [10] GIREF A. F. et GIREF A. G., Les éléments finis de la théorie à la pratique, GIREF, FEM++, 2020.
- [11] Kada A., Méthode des éléments finis, polycopié de cours pour première année Master 1 génie civil, université Hassiba benbouali de chlef, 2017.
- [12] Kern M., Introduction à la méthode des éléments finis ; Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004/2005.
- [13] Li D., Cours d'analyse fonctionnelle, Editions Ellipses, 2013.
- [14] Liu G. R. and Quek S. S., The Finite Element Method : A Practical Course, Butterworth-Heinemann, 2003.
- [15] Manet V., La Méthode des éléments Finis, version du 12 juillet 2013.

- [16] Matos J., Analyse Fonctionnelle, Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry LaMME, 2014/2015.
- [17] Matos J., EDP et méthodes hilbertiennes, Laboratoire de Mathématiques et Modélisation d'Évry LaMME, 2017/2018.
- [18] NGUYEN Thi Thuy Trang and TRINH Thi Huyen, Éléments finis : du classique au isogeometrique, Mémoire 2011/2012.
- [19] Thérèse M., Sonrier L., Distributions Espaces de Sobolev Applications, Editions Ellipses, décembre 1998.

Résumé

Dans notre travail, nous avons intéressé à l'étude d'une de méthode de discrétisation numérique pour la résolution des équations différentiel et équations aux dérivées partielles, exprimé par la méthode des éléments finis, qui est basée sur la discrétisation du domaine d'étude en des parties élémentaires et à construire un espace de dimension finie qui contient la solution approchée. Le principe de cette méthode est de donner une base de l'espace de dimension finie puis l'écriture des inconnus sous forme d'une combinaisons linéaire dans ce base pour obtenir un système linéaire dont les inconnues représentent les coefficients de cette combinaison.

Nous avons appliqué cette méthode à des exemples simples dans le deuxième chapitre avec l'étude de la convergence puis à un système de Navier-Stokes dans le dernier chapitre.

Mots clé: Méthode des éléments finis, EDP, problème de Navier-Stokes.

ملخص

في هذا العمل تطرقنا إلى دراسة طريقة من الطرق العددية لحل المعادلات والجمل التفاضلية المتمثلة في طريقة العناصر المنتهية والتي تعتمد علي تقسيم مجال الدراسة إلى أجزاء منتهية وتشكيل فضاء ذو بعد منته يحوي الحل التقريبي.

مبدأ هذه الطريقة إيجاد أساس للفضاء المنته البعد ثم كتابة المجاهيل على شكل مزج خطي في هذا الأساس للحصول على جملة خطية مجاهيلها هي معاملات هذا المزج.

طبقنا هذه الطريقة على أمثله بسيطة في الفصل الثاني مع دراسة الخطأ ثم على مسألة Navier-Stokes في الفصل الأخير.

الكلمات المفتاحية : طريقة العناصر المنتهية, المعادلات التفاضلية, مسألة Navier-Stokes.

Abstract

In our work, we have been interested in the study of a numerical discretization method for solving differential equations and partial differential equations, expressed by the finite element method, which is based on the discretization of the domaine of study into elementary parts and to construct a space of finite dimension which contains the approximate solution. The principle of this method is to give a base of the finite dimensional space then the writing of the unknowns in the form of a linear combination in this base to obtain a linear system whose unknowns represent the coefficients of this combination.

We applied this method to simple examples in the second chapter with the study of convergence and then to a Navier-Stokes system in the last chapter.

Key words: Finite element method, PDE, Navier-Stokes problem.