



N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Étude de certains problèmes
aux limites de type fractionnaire**

Présenté par: BERRAH Hadjer

LADGHAM Ikram

Soutenu publiquement devant le jury composé de

MEFTAH Safia	MCA/Prof.	Président	Univ. El Oued
NISSE Lamine	Prof.	Rapporteur	Univ. El Oued
GUEDDA Lamine	MCA/MC	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Dédicaces

Nous dédions ce travail à :

nos chers parents qui nous ont toujours soutenue,

nos frères et nos surs,

nos amies,

et à tous ceux qui nous ont encouragé durant notre carrière d'étude.

Remerciements

*Nous aimerions en premier lieu remercier notre dieu "**Allah**" qui nous avoir donnée la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.*

*Nous exprimons nos reconnaissance à notre directeur de mémoire, le professeur **Nisse Lamine**, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacré à diriger cette recherche dès le début à la fin de ce travail.*

Nous adressons un grand merci à toute nos familles en particulier nos parents qui a toujours été présente lorsque nous en avons eu besoin, nos professeurs dès la primaire jusqu'à l'université, nos amies, nos proches.

En fin, nous remercions tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

Notations générales

$\mathbb{R}$	: ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^+$	: ensemble des nombres réels positifs ou nuls.
$\mathbb{R}^n$	: espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
$\mathbb{N}$	: ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{Q}$	: ensemble des nombres rationnels.
$[a, b)$	: intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$ d'extrémité a et b .
$\mathcal{C} = \mathcal{C}(K, F)$	: ensemble des fonctions continues de K dans F .
$ \cdot $	: valeur absolue d'un nombre réel ou module d'un nombre complexe.
$\Gamma(\cdot)$	: fonction Gamma d'Euler.
E_α	: fonction de Mittag-Leffler.
I^α	: intégration d'ordre α .
${}^C D^\alpha$	: dérivation d'ordre α selon la définition de Caputo.
${}^{RL} D^\alpha$	: dérivation d'ordre α selon la définition de Riemann-Liouville.
e.v.n	: espace vectoriel normé.
$[\alpha]$	: partie entière de α .

Table des matières

1 Introduction	1
Introduction générale	1
1.1 Domaine mathématique du sujet en question	1
1.1.1 Domaine d'application : quelques exemples	2
1.1.2 Position du problème étudié	4
1.1.3 Plan du mémoire et résultats	4
2 Introduction au calcul fractionnaire	6
2.1 Préliminaires et rappels sur le calcul fractionnaire	6
2.1.1 Notations et définitions	6
2.1.2 Quelques notions et résultats élémentaires de l'analyse fonctionnelle	6
2.1.3 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire	8
2.2 Intégrale et dérivée fractionnaires	9
2.2.1 l'intégrale de Riemann-Liouville	9
2.2.2 La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	10
2.2.3 Quelques propriétés	10
2.2.4 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo	11
2.2.5 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville	11
2.2.6 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo	12
2.3 Introduction aux équations différentielles fractionnaires	12
2.3.1 Problème de Cauchy pour les équations différentielles avec la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville	13
2.3.2 Problème de Cauchy pour les équations différentielle avec la dérivation fractionnaire de Caputo	13
3 Principe de la contraction généralisé	15
3.1 Espace métrique généralisé : espace à métrique vectorielle	15
3.2 Théorie du point fixe de Perov	17

3.2.1	Quelques théorèmes de point fixe	17
3.3	Application aux équations différentielles de type Sturm-Liouville	18
3.3.1	Équations différentielles ordinaires	18
3.3.2	Équations différentielles fractionnaires	19
3.3.3	Problème de Sturm-Liouville	22
4	Application et résultat principal	23
4.1	Le système considéré	23
4.2	Système intégral équivalent	24
4.3	Existence et unicité de la solution	25
4.4	Exemple	30

Chapitre 1

Introduction

1.1 Domaine mathématique du sujet en question

Le calcul fractionnaire est un domaine de l'analyse mathématique qui traite la notion d'intégration et dérivation d'ordre fractionnaire et ses applications. Le terme fractionnaire est un terme impropre, mais il est conservé à la suite de l'usage courant (voir [10], [11]).

Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et pourtant il est actuel. C'est un vieux sujet, qui a apparue à partir de quelques spéculations de G.W. Leibniz (1695, 1697) et L. Euler (1730), il a été développé jusqu'à nos jours. Une liste de mathématiciens, qui ont fourni des contributions importantes jusqu'au milieu de notre siècle, comprend P.S. Laplace (1812), J.B.J. Fourier (1822), N.H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A.K. Grünwald (1867-1872), A.V. Letnikov (1868-1872), H. Laurent (1884), P.A. Nekrassov (1888), A. Krug (1890), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), S. Pincherle (1902), G.H. Hardy and J.E. Littlewood (1917-1928), H. Weyl (1917), P. Lévy (1923), A. Marchaud (1927), H.T. Davis (1924-1936), A. Zygmund (1935-1945), E.R. Love (1938-1996), A. Erdélyi (1939-1965), H. Kober (1940), D.V. Widder (1941), M. Riesz (1949) (voir [10]).

Cependant, il peut être considéré comme un sujet nouveau, puisque depuis quelques années, il a fait l'objet de conférences et de traités spécialisés. Pour la première conférence, le mérite est attribué à B. Ross qui a organisé la première conférence sur le calcul fractionnaire et ses applications à l'Université de New Haven en juin 1974, et a édité les actes. Pour la première monographie, le mérite est attribué à K.B. Oldham et J. Spanier, qui, après une collaboration conjointe débutée en 1968, ont publié un livre consacré au calcul fractionnaire en 1974. De nos jours, la liste des textes et actes consacrés uniquement ou partiellement au calcul fractionnaire et à ses applications comprend plus d'une douzaine de titres, parmi lesquels le traité encyclopédique de Samko, Kilbas et Marichev est le plus important. En outre, nous rappelons l'attention portée aux traités de Davis, Erdélyi, Gel'fand et Shilov, Djrb-

shian, Caputo, Babenko, Gorenflo et Vessella, qui contiennent une analyse détaillée de certains aspects mathématiques et / ou des applications physiques du calcul fractionnaire, mais sans mention explicite dans leurs titres.

Ces dernières années, un intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par les applications que ce calcul trouve dans l'analyse numérique et différentes zones de la physique et de l'ingénierie, incluant éventuellement des phénomènes fractals (voir [10]).

1.1.1 Domaine d'application : quelques exemples

Les applications de la théorie du calcul fractionnaire aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénieries sont très diverses. Ils apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents domaines de recherches (voir [10]). Maintenant, on va donner quelques exemples sur la domaine d'application

Électronique

Grâce à des données expérimentales, Schmidt et Drumheller montrent que le courant qui traverse un condensateur est proportionnel à la dérivée non entière de la tension. En effet, en utilisant un composé ($L_iN_2H_5SO_4$) et en procédant à des mesures que sur une large gamme de températures et de fréquences, ils constatent que les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité ou encore, de la fonction de diélectrique $\varepsilon = \varepsilon' + j\varepsilon''$ sont très grandes ($\varepsilon' \sim \varepsilon'' \sim 10^6$) et varient en fonction de la fréquence suivant un ordre de puissance $\frac{1}{2}$ (avec $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon'' \in \mathbb{R}$).

la relation suivante, valable pour un composé ($L_iN_2H_5SO_4$)

$$\varepsilon = \varepsilon' \omega^{-\frac{1}{2}}(1 - i) = \varepsilon' \sqrt{2}(i\omega)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{avec } i = \sqrt{-1} \quad (1.1)$$

En utilisant la relation entre la fonction diélectrique et l'impédance, on obtient la relation suivante

$$Z = \frac{1}{j\omega C_e \varepsilon} \quad (1.2)$$

où C_e est une constante.

En substituant la relation (1.1) dans (1.2), on a

$$Z = \frac{1}{i\omega C_e \varepsilon' \sqrt{2}(i\omega)^{-\frac{1}{2}}} \quad (1.3)$$

qu'on peut éventuellement mettre sous la forme

$$\frac{K}{(i\omega)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{où } K = \frac{1}{\sqrt{2}C_e \varepsilon'} \quad (1.4)$$

où encore, en fonction de la variable de Laplace s

$$Z = \frac{K}{s^{\frac{1}{2}}}. \quad (1.5)$$

L'équation (1.5) montre en effet que l'on peut bien définir une impédance fractionnaire de capacité, qui peut être fabriquée à partir de composition de matériaux spécifiques et par conséquent définir le terme de Fractor, par analogie au terme anglais Capacitor, pour mettre l'accent sur le caractère fractionnaire de l'impédance. K désigne alors la constante du Fractor (capacité fractionnaire). Un axe de recherche intéressant dans la physique des matériaux qui permettra de mettre en évidence les propriétés de tels matériaux via des bandes de fréquences et de températures. La réalisation d'une impédance fractionnaire peut se faire par juxtaposition en série de cellules Résistance-Capacité (d'impédance traditionnelle).

Rhéologie

En rhéologie, lorsque des solides viscoélastiques sont employés comme matériaux isolateurs ou amortisseurs de vibrations, la dérivation fractionnaire est un moyen approprié pour décrire fidèlement l'amortissement dans les équations de mouvement. L'introduction de la dérivation non entière dans la modélisation réduit le nombre de paramètres du modèle. On peut voir cela sur l'exemple du comportement contrainte-déformation d'un solide pour lequel l'équation de mouvement dans le cas d'un modèle entier est donnée par

$$\sigma(t) + \sum_{m=1}^M b_m \frac{d^m}{dt^m} \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \sum_{n=1}^N b_n \frac{d^n}{dt^n} \varepsilon(t), \quad (1.6)$$

où σ et ε désignent respectivement la contrainte et la déformation, et où b_m , E_0 , M , N et E_n sont des paramètres du modèle. Maintenant, en utilisant la dérivation fractionnaire, on n'a plus besoin que d'un seul terme de dérivation agissant respectivement sur la contrainte et la déformation. Ce qui produit un modèle compact à quatre ou cinq paramètres maximum, au lieu d'une dizaine dans le cas de l'équation (1.6)

$$(1 + bD_t^\alpha)\sigma(t) = (E_0 + E_1 D_t^\alpha)\varepsilon(t). \quad (1.7)$$

Dans (1.7), les paramètres sont b , E_0 , E_1 et α . Ce modèle reflète fidèlement les propriétés mesurées de plusieurs matériaux. Le bon comportement de cette modélisation fractionnaire s'explique notamment par le fait que les théories moléculaires classiques produisent des relations entre contrainte et déformation contenant des puissances fractionnaires de la fréquence. Des manipulations mathématiques de ces théories mettent ces relations sous forme de dérivées fractionnaires

$$\sigma(t) = K D_t^\alpha \varepsilon(t). \quad (1.8)$$

1.1.2 Position du problème étudié

Soit le problème aux valeurs limites de type fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha(p(t)u'(t)) = f(u(t), v(t)), \\ {}^C D^\alpha(q(t)v'(t)) = g(u(t), v(t)), \\ a_{11}u(0) - a_{12}u'(0) = 0, \\ a_{21}u(T) - a_{22}u'(T) = 0, \\ b_{11}v(0) - b_{12}v'(0) = 0, \\ b_{22}v(T) - b_{22}v'(T) = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Où ${}^C D^\alpha$ est la dérivée de Caputo standard et $0 < \alpha < 1$ et $t \in J = [0, T]$, $u, v \in C(J, \mathbb{R}_+)$ l'espace de Banach des fonctions continues muni de la norme :

$\|u\|_\infty = \{\sup |u(t)| \mid t \in J\}$ et

$$p : J \rightarrow \mathbb{R}_+^* \quad q : J \rightarrow \mathbb{R}_+^* \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

sont des fonctions continues pour tout et $a_{ij}, b_{ij}, i, j = 1, 2$ sont des constantes réelles.

1.1.3 Plan du mémoire et résultats

En plus de ce chapitre introductif, ce mémoire est réparti en trois chapitres.

Le deuxième chapitre

Intitulé "Introduction au calcul et l'analyse fractionnaires ", est consacré aux définitions et fonction qui nous seront utiles dans la suite de ce travail.

Le troisième chapitre

Dans ce chapitre, on introduit la notion d'espace métrique généralisé, en définissant ce qu'on appelle une métrique à valeurs vectorielles. Dans ce contexte on présente l'un des outils de la théorie du point fixe rarement utilisé appelé le théorème de Perov. Ce théorème est considéré comme un principe de contraction généralisé. De plus on rappelle quelques notions sur les problèmes différentiels aux limites, équations différentielles fractionnaires aux valeurs limites.

Le quatrième chapitre

Ce chapitre a pour objet l'étude du problème aux valeurs limites de type fractionnaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C D^\alpha(p(t)u'(t)) = f(u(t), v(t)), \\ {}^C D^\alpha(q(t)v'(t)) = g(u(t), v(t)), \\ a_{11}u(0) - a_{12}u'(0) = 0, \\ a_{21}u(T) - a_{22}u'(T) = 0, \\ b_{11}v(0) - b_{12}v'(0) = 0, \\ b_{22}v(T) - b_{22}v'(T) = 0. \end{array} \right. \quad (1.10)$$

On établit le résultat d'existence et unicité en appliquant le théorème de point fixe de Perov.

Nous terminons le chapitre par un exemple illustratif du résultat principal. Enfin, le mémoire sera clôturé par une Bibliographie.

Chapitre 2

Introduction au calcul fractionnaire

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions essentielles de la théorie du calcul fractionnaire et des équations différentielles d'ordre non entier. Ce chapitre, et tout le contenu de ce chapitre, sont basés sur la documentation qui se trouve dans (voir [7], [4])

2.1 Préliminaires et rappels sur le calcul fractionnaire

2.1.1 Notations et définitions

Soit $J := [0, T]$, $T > 0$. Notons $C(J, \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|y\|_{\infty} = \sup \{|y(t)| : t \in J\},$$

où $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$ et $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces de Banach.

2.1.2 Quelques notions et résultats élémentaires de l'analyse fonctionnelle

Définition 2.1.1 *On appelle opérateur borné toute application de E dans F qui envoie les parties bornées de E sur des parties bornées de F .*

Proposition 2.1.1 *Soit $A : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors A est continue si et seulement si A est un opérateur borné.*

Définition 2.1.2 *Soit $A : E \rightarrow E$. On dit que $x \in E$ est un point fixe de A si :*

$$A(x) = x.$$

Définition 2.1.3 Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur. On dit que A est une contraction (ou contractant), s'il existe une constante $0 \leq k < 1$ telle que

$$\forall x, y \in E \quad \|A(x) - A(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$

on dit que A est un opérateur contractant.

Définition 2.1.4 Un sous-ensemble F de E est relativement compact si son adhérence $\overline{F}$ est compacte.

Définition 2.1.5 Soient (K, d) un espace métrique et F un evn. On dit qu'une partie $A \subset C(K, d)$ est équicontinue si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $f \in A$,

$$\|f(x) - f(y)\|_F < \varepsilon \text{ pour tout } x, y \in K \text{ tq } d(x, y) < \alpha(\varepsilon).$$

Proposition 2.1.2 Soit A un opérateur contractant, alors l'opérateur A admet un point fixe unique $x \in E$. De plus, si $x_0 \in E$ et $x_n = Ax_{n-1}$ ($n \geq 1$), alors :

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Rappelons l'un des plus importants outils pour la caractérisation des ensembles relativement compact dans les espaces des fonctions continues.

Théorème 2.1.1 Soit M une partie de $C([a, b])$ muni de la norme de la convergence uniforme. M est relativement compact dans $C([a, b])$ si et seulement si M est équicontinue et uniformément borné.

Définition 2.1.6 (La transformation de Laplace) La fonction $F(s)$ de la variable complexe s définie par

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{2.1}$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$. Pour l'existence de l'intégrale (2.1) la fonction $f(t)$ doit être d'ordre exponentiel α , ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives M et T telles que

$$e^{-\alpha t} |f(t)| \leq M \text{ pour tout } t > T.$$

En d'autres termes, la fonction $f(t)$ ne doit "croître ou décroître" plus vite qu'une certaine fonction exponentielle quand $t \longrightarrow +\infty$.

2.1.3 Quelques fonctions importantes dans le calcul fractionnaire

Dans cette section nous présentons les définitions et quelques propriétés de certaines fonctions utilisées dans le calcul et l'analyse fonctionnaires : la fonction Gamma et la fonction de Mittag-Leffler.

La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma Γ (voir [4]).

La fonction Gamma Γ est définie par l'intégrale suivante

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad \alpha > 0.$$

La fonction Γ satisfait les propriétés suivantes :

(1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \text{et si } x \in \mathbb{N}^* \quad \text{alors } \Gamma(x) = (x-1)!.$$

(2) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ supérieur à 1 on a

$$\frac{\alpha+1}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\alpha+1}{\alpha\Gamma(\alpha)} < \frac{2}{\Gamma(\alpha)}.$$

(3) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0_+) = +\infty$.

(4) $\Gamma(x)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < x < 1$.

La fonction Mittag-Leffler

La fonction Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre non entier. Elle est largement utilisée dans l'expression des solutions d'équations différentielles d'ordre fractionnaire (voir [12]).

Définition 2.1.7 Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction Mittag-Leffler comme suit :

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0. \quad (2.2)$$

En particulier, si $\alpha = 1$, nous retrouvons la fonction exponentielle

$$E_1(x) = e^x. \quad (2.3)$$

Cette fonction peut être généralisée pour deux paramètres comme suit :

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (2.4)$$

2.2 Intégrale et dérivée fractionnaires

Cette section sera consacrée aux définitions élémentaires : l'intégrale et la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, ainsi que la dérivée au sens de Caputo et quelques propriétés.

2.2.1 l'intégrale de Riemann-Liouville

D'abord, on va définir l'intégrale de Riemann-Liouville. On cherche une formule qui donne des primitives successives d'une fonction continue (voir par exemple [2]). Soit $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, (b peut être fini ou infini). Une primitive de f est donnée par :

$$(I_a^1 f)(x) = \int_a^x f(t) dt. \quad (2.5)$$

Pour la seconde primitive on aura

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x \left(\int_a^s f(t) dt \right) ds. \quad (2.6)$$

On utilise le théorème de Fubini pour transformer l'intégrale double à une intégrale simple

$$(I_a^2 f)(x) = \int_a^x (x-t) f(t) dt. \quad (2.7)$$

Ainsi, en intégrant successivement par itération on arrive à l'intégrale suivante

$$(I_a^n f)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt. \quad (2.8)$$

Définition 2.2.1 Soit $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, l'intégrale de Riemann-Liouville de f est définie par

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt. \quad (2.9)$$

Où α est un réel positif.

Exemple 2.2.1 Soit la fonction $f(x) = (x-\alpha)^\beta$.

Alors

$$I_a^\alpha (x-\alpha)^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-\alpha)^\beta dt.$$

Pour calculer cette intégrale on fait le changement de variable suivant

$t = a + (x - a)\tau$, d'où

$$I_a^\alpha (x - a)^\beta = \frac{(x - a)^{\beta + \alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_a^1 (1 - \tau)^{\alpha - 1} \tau^\beta dt = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 1 + \alpha)} (x - a)^{\beta + \alpha}.$$

Après utilisation de l'intégrale eulérienne de première espèce (la fonction bêta d'Euler), on voit bien que c'est une généralisation du cas $\alpha = 1$, où on a

$$I_a^1 (x - a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + 2)} (x - a)^{\beta + 1} = \frac{1}{\beta + 1} (x - a)^{\beta + 1},$$

car $\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n)$.

2.2.2 La dérivation fractionnaire au sens de Rimeann-Liouville

La dérivée fractionnaire de Rimeann-Liouville $D_{a+}^\alpha f$ d'ordre réel $\alpha > 0$, (voir [7],[12]) est définie par :

$$D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} (I_{a+}^{n-\alpha} f(t)) \quad (2.10)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t - s)^{n-\alpha-1} f(s) ds, \quad (n = [\alpha] + 1, t > a). \quad (2.11)$$

En particulier, quand $\alpha = n \in \mathbb{N}$, nous obtenons :

$$D_{a+}^0 f(t) = f(t), \quad D_{a+}^n f(t) = f^{(n)}(t), \quad (2.12)$$

où $f^{(n)}(t)$ désigne la dérivée usuelle d'ordre n de $f(t)$.

Si $0 < \alpha < 1$, alors :

$$D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t - s)^{-\alpha} f(s) ds, \quad (t > a). \quad (2.13)$$

2.2.3 Quelques propriétés

Les dérivées de Rimeann-Liouville ont les propriétés suivantes (voir [7],[12]) :

1. Une propriété importante de la dérivée fractionnaire de Rimeann-Liouville, pour $\alpha > 0$, et $t > a$ est :

$$D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f(t) = f(t). \quad (2.14)$$

Qui signifie que l'opérateur de différentiation fractionnaire de Rimeann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire de Rimeann-Liouville du même ordre.

2. Soient $\alpha \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$ et $D = \frac{d}{dt}$. Si les deux dérivées fractionnaires $D_{a+}^\alpha f(t)$,

$D_{a+}^m f(t)$ existent, alors nous avons :

$$D_{a+}^m D_{a+}^\alpha f(t) = D_{a+}^{\alpha+m} f(t). \quad (2.15)$$

3. Si la dérivée fractionnaire d'ordre α , ($n - 1 \leq \alpha < n$), d'une fonction $f(t)$ est intégrable, alors

$$I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^n [D_{a+}^{\alpha-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \quad (2.16)$$

En général, nous voyons que les dérivées fractionnaires et les intégrales fractionnaires de Riemann-Liouville de même ordre ne commutent pas entre elles.

2.2.4 La dérivation fractionnaire au sens de Caputo

Définition 2.2.2 (voir [7]) Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $f \in C([a, b])$.

La dérivée fractionnaire d'ordre α au sens de Caputo de la fonction f notée ${}^C D_a^\alpha f$ est définie par :

$${}^C D_a^\alpha f(x) := I_a^{(n-\alpha)} D^{(n)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x f^{(n)}(t) (x-t)^{n-\alpha-1} dt. \quad (2.17)$$

Remarque 2.2.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in]m-1, m[$ s'obtient par une application de l'opérateur d'intégration fractionnaire d'ordre $m-\alpha$ suivie d'une dérivation classique d'ordre m , alors que La dérivée fractionnaire au sens de Caputo est le résultat de la permutation de ces deux opérations.

Exemple 2.2.2 Pour $f(x) = (x-a)^\beta$ avec $\beta \geq 0$, on a

$${}^C D_a^\alpha f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \in 0, 1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{\beta+1}{\beta+1-\alpha} (x-a)^{\beta-\alpha} & \text{si } \beta > m-1 \end{cases} \quad (2.18)$$

En particulier, si f est constante sur $[a, b]$, alors :

$${}^C D_a^\alpha f = 0. \quad (2.19)$$

2.2.5 Comparaison entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle de Riemann-Liouville

L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier des fonctions inconnues en borne inférieure $x = a$.

Une autre différence entre la définition de Riemann et celle de Caputo est que la dérivée d'une constante est nulle par Caputo, par contre par Riemann-Liouville elle est $\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha}$.

Graphiquement, on peut dire que le chemin suivi pour arriver à la dérivée fractionnaire au sens de Caputo est également l'inverse quand on suit l'autre sens (Riemann-Liouville), c'est à dire pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Riemann-Liouville, on commence d'abord par l'intégration fractionnaire d'ordre $(m-\alpha)$ pour la fonction $f(x)$ et puis on dérive le résultat obtenu à l'ordre entier m , mais pour trouver la dérivée fractionnaire d'ordre α où $m-1 \leq \alpha \leq m$ par l'approche de Caputo on commence par la dérivée d'ordre entier m de la fonction $f(x)$ et puis on intègre d'ordre fractionnaire $(m-\alpha)$.

2.2.6 Relation entre l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville (voir [7],[6]).

Théorème 2.2.1 Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $(n-1)$ dérivée en a et si $D_a^\alpha f$ existe, alors :

$$({}^C D_a^\alpha f)(x) = D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right] \quad (2.20)$$

presque partout sur $[a, b]$.

Remarque 2.2.2 Le résultat du théorème 2.2.1 signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f .

2.3 Introduction aux équations différentielles fractionnaires

D'abord, nous introduisons les espaces suivant : (voir [7])

$$C_{n-1,\gamma}^\alpha[a, b] = \{y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b] : (D_{a+}^\alpha y)(x) \in C_\gamma[a, b]\}.$$

$$C^{\alpha,r}[a, b] = \{y(x) \in C_\gamma[a, b] : {}^C D_{a+}^\alpha y \in C_\gamma[a, b]\}, \quad C^{r,r}[a, b] = C^r[a, b].$$

$$C^{\alpha,n-1}[a, b] = C_0^{\alpha,n-1}[a, b] = \{y(x) \in C_0^{n-1}[a, b] : {}^C D_{a+}^\alpha y \in C[a, b]\}.$$

$$C_{n-\alpha}^\alpha[a, b] = \{y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b] : (D_{a+}^\alpha y)(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]\}.$$

$$C_{n-\alpha}[a, b] = \{g(x) : (x-a)^{n-\alpha}g(x)C[a, b], \|g\|_{C_{n-\alpha}} = \|(x-a)^{n-\alpha}g(x)\|_C\}.$$

2.3.1 Problème de Cauchy pour les équations différentielles avec la dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville

On considère le problème de Cauchy pour l'équation différentielle fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ suivant

$$\begin{cases} ({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) - \lambda y(x) = f(x) & (a < x \leq b; \quad \lambda \in \mathbb{R}), \\ ({}^C D_{a+}^{\alpha-k} y)(a_+) = b_k & (b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, n = -[-\alpha]). \end{cases} \quad (2.21)$$

Supposons que $f \in C_\gamma[a, b]$ ($0 < \gamma < 1$). Alors, on peut transformer formellement ce problème en une équation intégrale de type Volterra :

$$y(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\alpha - j + 1)} (x-a)^{\alpha-j} + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \quad (2.22)$$

On applique la méthode des approximations successives pour résoudre cette équation intégrale. Selon cette méthode, on trouve

$$y(x) = \sum_{j=1}^n b_j (x-a)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}[\lambda(x-a)^\alpha] + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt. \quad (2.23)$$

Ceci donne une solution explicite à l'équation intégrale de Volterra (2.22) et donc au problème de type de Cauchy (2.21).

Si $\gamma \geq n - \alpha$ alors, il existe une unique solution au problème de Cauchy (2.21) dans $C_{n-\alpha, \gamma}^\alpha[a, b]$. L'équation (2.23) donne cette solution. Ainsi, on obtient le résultat suivant (voir [7]).

Théorème 2.3.1 Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $n = -[-\alpha]$ et γ ($0 \leq \gamma < 1$) tel que $\gamma \geq n - \alpha$. Si $f \in C_\gamma[a, b]$, alors le problème de Cauchy (2.21) admet une solution unique $y \in C_{n-\alpha, \gamma}^\alpha[a, b]$ et cette solution est donnée par (2.23)

2.3.2 Problème de Cauchy pour les équations différentielle avec la dérivation fractionnaire de Caputo

Considérons le problème de Cauchy pour l'équation différentielle fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ avec la condition initial

$$\begin{cases} ({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) - \lambda y(x) = f(x) & x \in]a, b]; \quad n-1 < \alpha < n, n \in \mathbb{N}; \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ y^{(k)}(a) = b_k & (b_k \in \mathbb{R}, \quad k = 0, \dots, n-1). \end{cases} \quad (2.24)$$

On suppose que $f \in C_\gamma[a, b]$ ($0 < \gamma < 1$). On peut transformer formellement ce problème en une équation intégrale de type Volterra de la forme :

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (x-a)^j + \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{y(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \quad (2.25)$$

Pour résoudre (2.25), on applique la méthode des approximations successives

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j (x-a)^j E_{\alpha, j+1}[\lambda(x-a)^\alpha] + \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[\lambda(x-t)^\alpha] f(t) dt. \quad (2.26)$$

Ceci donne une solution explicite $y(x)$ de l'équation intégrale de Volterra (2.25) et donc du problème de Cauchy (2.24).

Depuis $f[x, y] := \lambda y + f(x)$ satisfait la condition de Lipschitz. Alors, il existe une solution unique $y(x)$ au problème de Cauchy (2.24) dans l'espace $C_\gamma^{\alpha, n-1}[a, b]$. Ainsi, on obtient le résultat suivant (voir [7]).

Théorème 2.3.2 Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $n-1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $0 \leq \gamma < 1$ tel que $\gamma \geq \alpha$. Si $f \in C_\gamma[a, b]$, alors le problème de Cauchy (2.24) admet une solution unique $y(x) \in C_{n-\alpha, \gamma}^\alpha[a, b]$ et cette solution est donnée par (2.26).

En particulier, si $\gamma = 0$ et $f(x) \in C[a, b]$, alors la solution $y(x)$ dans (2.26) appartient à l'espace $C^{\alpha, n-1}[a, b]$.

Si $f(x) = 0$ le problème de Cauchy (2.24) devient une équation différentielle homogène

$$({}^C D_{a+}^\alpha y)(x) - \lambda y(x) = 0 \quad (a \leq x \leq b; \quad n-1 < \alpha < n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad \lambda \in \mathbb{R}) \quad (2.27)$$

admet une solution unique $y(x) \in C_\gamma^{\alpha, n-1}[a, b]$ de la forme

$$y(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j (x-a)^j E_{\alpha, j+1}[\lambda(x-a)^\alpha]. \quad (2.28)$$

Chapitre 3

Principe de la contraction généralisé

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'espace métrique généralisé et l'espace à métrique vectorielle et le application aux équations différentielles.

3.1 Espace métrique généralisé : espace à métrique vectorielle

La notion de distance entre 2 points du plan ou de l'espace nous est familière. Plus généralement, dans l'espace $\mathbb{R}^n$ on utilise ce qu'on appelle la distance euclidienne (voir [16], [17]) :

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1..n} (x_i - y_i)^2}, \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

La définition suivante généralise la distance euclidienne.

Définition 3.1.1 *Espace métrique : Un espace métrique (E, d) est un ensemble E muni d'une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, appelée distance ou métrique, qui satisfait les propriétés suivantes :*

- (1) $\forall x, y \in E \quad d(x, y) \geq 0, \quad \text{et } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (2) $d(x, y) = d(y, x) \quad (\text{symétrie}).$
- (3) $\forall x, y, z \in E \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{inégalité du triangle})$

Espace vectoriel

On dit que l'ensemble X est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ si les conditions suivantes sont satisfaites :

- (1) X est un groupe abélien.
- (2) La multiplication d'un vecteur par un scalaire est définie par :

pour chaque élément $x \in X$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ il y a un élément associé de X noté par αx , tel que

- (i) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ($\alpha \in \mathbb{K}; x, y \in X$),
- (ii) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{K}; x \in X$),
- (iii) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{K}; x \in X$),
- (iv) $1.x = x$ (1 est l'élément neutre de $\mathbb{K}$).

Définition 3.1.2 *un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une application*

$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :

- (1) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$, et $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
- (2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, ou $|\lambda|$ désigne respectivement la valeur absolue si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou le module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
- (3) $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité du triangle).

Définition 3.1.3 *espace métrique généralisé (voir [1]) : Un espace métrique vectoriel (E, d) est un ensemble E muni d'une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^n$, appelée distance ou métrique, qui satisfait les propriétés suivantes :*

- (1) $\forall x, y \in E \quad d(x, y) \geq 0$, et $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie).
- (3) $\forall x, y, z \in E \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité du triangle).

Remarque 3.1.1 *Ici, l'inégalité entre deux éléments de $\mathbb{R}^n$ est définie composante par composante.*

Définition 3.1.4 *Soient (E, d) un espace métrique f une application de E dans E . Elle est dite contractante si et seulement si $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. Elle est dite strictement contractante si et seulement si $\exists k < 1$ telle que $d(f(x), f(y)) < kd(x, y)$.*

Théorème 3.1.1 (voir [13]) *Toute application strictement contractante d'un espace métrique complet dans lui-même admet un unique point fixe x . De plus, x est la limite des itérations de f à partir de n'importe quel point x_0 . Enfin, la vitesse de convergence est géométrique de rapport k : $d(x, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1)$.*

Théorème 3.1.2 (voir [13]) *Soit $M \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ et considérons la suite (M^k) dans $\mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{R}_+)$ définie par $M^0 = M$ et $M^{k+1} = MM^k$ pour $k \in \mathbb{N}$ alors :*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M^k = 0 \Leftrightarrow \rho(M) < 1$$

tel que $\rho(M)$ est le rayon spectral de M et défini par :

$$\rho(M) = \max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|$$

et $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ les n valeurs propres de M .

3.2 Théorie du point fixe de Perov

Théorème 3.2.1 (Théorème de Perov [14]) : Soient (E, d) est un espace métrique complet généralisé avec $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $F : E \longrightarrow E$ tel que Pour tout $u, v \in E$ on a

$$d(F(u), F(v)) \leq Md(u, v),$$

où M est une matrice carrée de composantes non négatives. Si la matrice M converge vers zéro, c'est-à-dire $M^k \longrightarrow 0$ quand $K \rightarrow \infty$ alors F admet un point fixe unique u , de plus on a

$$d(F^K(v), u) \leq M^K(I - M)^{-1}d(F(v), v)$$

pour chaque $v \in E$ et $K \geq 1$.

Lemme 3.2.1 Soit M une matrice carrée à termes non négatifs. Les propriétés suivante sont équivalentes :

- (i) M est une matrice converge vers zéro.
- (ii) $I - M$ est non-singulier et $(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \dots$
- (iii) $|\lambda| < 1$ pour chaque $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\det(M - \lambda I) = 0$.
- (iv) $I - M$ est non-singulier et $(I - M)^{-1}$ admet des éléments non-négatifs.

3.2.1 Quelques théorèmes de point fixe

Les théorèmes de point fixe utilisés souvent dans les applications, en général sont les suivants (voir [4]) :

Théorème 3.2.2 (Schauder) : Soient (E, d) un espace de Banach, X une partie convexe et fermé dans E , et $A : X \rightarrow X$ une application telle que l'ensemble $\{Ax : x \in X\}$ est relativement compacte dans E . Alors A possède au moins un point fixe.

Théorème 3.2.3 (Schaefer) : Soient X un espace de Banach et $A : X \rightarrow X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\epsilon = \{u \in X : \lambda Au = u, \text{ pour un certain } \lambda \in]0, 1[\} \quad (3.1)$$

est borné, alors A possède au moins un point fixe.

3.3 Application aux équations différentielles de type Sturm-Liouville

On introduit dans cette section sommairement les équations différentielles ordinaires et les équations différentielles fractionnaires.

3.3.1 Équations différentielles ordinaires

Définition 3.3.1 (voir [13]) (équation différentielle ordinaire) Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre n est une relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue $x \mapsto x(t)$ et ses dérivées $x', x'', \dots, x^{(n)}$ au point t définie par

$$F(t, x, x'', \dots, x^{(n)}) = 0, \quad (3.2)$$

où F n'est pas indépendante de sa dernière variable $x^{(n)}$. On prendra t dans un intervalle I de $\mathbb{R}$ (I peut être $\mathbb{R}$ tout entier).

La solution x en général sera à valeurs dans $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}^*$ où N sera le plus souvent égal à 1, 2 ou 3. On dit que cette équation est scalaire si F est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Existence et unicité locale

Théorème 3.3.1 (voir [13]) (Cauchy-Lipschitz) Soient $f \in \mathcal{C}(U; \mathbb{R}^N)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ et $(t_0, x_0) \in U$. On suppose f lipschitzienne par rapport à sa variable x sur un voisinage de (t_0, x_0) , c'est à dire qu'il existe un voisinage de (t_0, x_0) dans U et $L > 0$ tel que pour tout (t, x) et (t, y) dans ce voisinage

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|. \quad (3.3)$$

Alors on a les propriétés suivantes.

Existence : il existe $T > 0$ et $x \in \mathcal{C}^1([t_0 - T, t_0 + T]; J)$ solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= f(t, x), \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Unicité : Si y est une autre solution du problème de Cauchy ci-dessus, elle coïncide avec x sur un intervalle d'intérieur non vide inclus dans $[t_0 - T; t_0 + T]$.

Régularité si de plus f est de classe $\mathcal{C}^r$, $r \geq 1$ alors x est de classe $\mathcal{C}^{r+1}$.

Existence et unicité globale

Théorème 3.3.2 (voir [13]) *On suppose $f \in \mathcal{C}(I \times \mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ et globalement lipschitzienne par rapport à x . Alors, quel que soit $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^m$, il existe une unique $x \in \mathcal{C}^1(I; \mathbb{R}^m)$ solution de (3.4).*

3.3.2 Équations différentielles fractionnaires

Équation différentielle fractionnaire à un seul terme

Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficient constants suivante (voir [11]) :

$$aD_0^\alpha y(t) = f(t), (n-1 \leq \alpha < n), \quad (3.5)$$

avec

$$[D^{\alpha-k-1}y(t)]_{t=0} = 0, (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (3.6)$$

Appliquant la transformée de Laplace sur deux côtés de l'équation (3.5) nous obtenons :

$$as^\alpha Y(s) = F(s), \quad (3.7)$$

et comme

$$G_1(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{as^\alpha} \right\} = \frac{1}{a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (3.8)$$

où $G_1(t)$ est appelée la fonction fractionnaire de Green à un seul terme.

Sous les conditions initiales données, la solution $y(t)$ de l'équation (3.5) est obtenue par la convolution

$$y(t) = \int_0^t G_1(t-s)f(s)ds = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds = \frac{1}{a}I_0^\alpha f(t). \quad (3.9)$$

Exemple 3.3.1 *Si nous prenons $a = 1$, $f(t) = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ l'équation est devenue*

$$D_0^{\frac{1}{2}}y(t) = 1, \quad (3.10)$$

$$[D^{\alpha-1}y(t)]_{t=0} = 0. \quad (3.11)$$

La solution est donnée par,

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma_{\frac{1}{2}}} \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t}. \quad (3.12)$$

Équation différentielle fractionnaire à deux termes

Considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficient constants suivante (voir [11]) :

$$aD_0^\alpha y(t) + by(t) = f(t), (n-1 \leq \alpha < n), \quad (3.13)$$

avec les mêmes conditions par (3.11).

L'utilisation de la transformée de Laplace donne :

$$as^\alpha Y(s) + bY(s) = F(s). \quad (3.14)$$

Nous pouvons aussi écrire (3.14) sous la forme

$$Y(s) = \frac{1}{a} \frac{1}{s^\alpha + \frac{b}{a}} F(s), \quad (3.15)$$

et comme,

$$G_2(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{a} \frac{1}{s^\alpha + \frac{b}{a}} \right\} = \frac{1}{a} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{b}{a} t^\alpha \right), \quad (3.16)$$

où $G_2(t)$ est appelée la fonction fractionnaire de Green à deux termes, et $E_{\alpha,\beta}$ la fonction Mittag-Leffler de deux paramètres.

La solution $y(t)$ de l'équation (3.13) est obtenue par la convolution

$$y(t) = \int_0^t G_2(t-s) f(s) ds. \quad (3.17)$$

Exemple 3.3.2 Si nous prenons $a = 1, b = 1, f(t) = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ nous obtenons :

$$D_0^{\frac{1}{2}} y(t) + y(t) = 1, \quad (3.18)$$

avec les mêmes conditions par (3.11).

La fonction de Green est donnée par :

$$G_2(t) = t^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-t^{\frac{1}{2}}), \quad (3.19)$$

et comme

$$y(t) = \int_0^t G_2(t-s) ds. \quad (3.20)$$

La solution prend la forme

$$y(t) = - \int_0^t s^{-\frac{1}{2}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-s^{\frac{1}{2}}) ds = -\sqrt{t} E_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}(-\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^{\frac{1}{2}}(k+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}k + \frac{3}{2})}. \quad (3.21)$$

Équation différentielle fractionnaire à trois termes

Nous considérons l'équation différentielle d'ordre fractionnaire linéaire à coefficient constants suivante (voir [11]) :

$$aD_0^\beta y(t) + bD_0^\alpha y(t) + cy(t) = f(t), (n-1 \leq \alpha < n), \quad (3.22)$$

avec les conditions par (3.6) est

L'utilisation de la transformée de Laplace donne : $[D^{\beta-k-1}y(t)]_{t=0} = 0$,
($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Sous ces condition, la transformée de Laplace donne

$$Y(s) = \frac{1}{as^\beta + bs^\alpha + c} F(s). \quad (3.23)$$

Nous posons

$$g(s) = \frac{1}{as^\beta + bs^\alpha + c}. \quad (3.24)$$

Et comme nous avons supposé que $\beta > \alpha$, nous pouvons écrire $g(s)$ sous la forme

$$g(s) = \frac{1}{c} \frac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha} + b} \frac{1}{1 + \frac{cs^{-\alpha}}{as^{\beta-\alpha} + b}} \quad (3.25)$$

$$= \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{c}{a}\right)^{k+1} \frac{s^{-\alpha k - \alpha}}{(s^{\beta-\alpha} + \frac{b}{a})^{k+1}}. \quad (3.26)$$

Nous appliquons la transformée inverse de Laplace sur les deux côté de (3.25), on obtient :

$$G_3(t) = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{c}{a}\right)^k t^{\beta(k+1)-1} E_{\beta-\alpha, \beta+\alpha k} \left(-\frac{b}{a} t^{\beta-\alpha}\right), \quad (3.27)$$

où $G_3(t)$ la fonction de Green, et $E_{\lambda, \mu}$ la fonction de Mittag-Leffler de deux paramètres, avec

$$E_{\lambda, \mu}^k(z) = \frac{d^k}{dz^k} E_{\lambda, \mu}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! z^j}{j! \Gamma(\lambda j + \lambda k + \mu)}. \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Finalement, la solution de l'équation (3.22) est donnée sous forme de convolution définie par :

$$y(t) = \int_0^t G_3(t-s) f(s) ds.$$

Exemple 3.3.3 Si nous prenons $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $f(t) = 1$ et $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{3}{2}$,

alors l'équation (3.22) est écrite sous forme

$$D_0^\beta y(t) + D_0^\alpha y(t) + y(t) = 1, \quad (3.28)$$

et La fonction $G_3(t)$ définit par

$$G_3(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^{\frac{1}{2}(3k+1)} E_{1, \frac{1}{2}(3k+1)}^k(-t). \quad (3.29)$$

3.3.3 Problème de Sturm-Liouville

Soit L un opérateur formellement auto-adjoint de la forme

$$L = \frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) + r(x). \quad (3.30)$$

L'équation de la valeur propre

$$Lu + \lambda \rho(x)u = 0, \quad x \in [a, b] \quad (3.31)$$

sous réserve des conditions aux limites homogènes séparées

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| > 0, \quad (3.32)$$

$$\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0, \quad (3.33)$$

où α_i et β_i sont des constantes réelles, est appelé un problème de valeur propre de Sturm-Liouville, ou un problème SL en abrégé.

Les problèmes de type Sturm-Liouville sont considérés en général en tant que problèmes spectraux. Ce qui nous intéresse dans la suite, c'est l'application du théorème de Perov pour montrer l'existence et l'unicité de la solution pour un problème de ce type, mais où la dérivée est d'ordre fractionnaire.

Chapitre 4

Application et résultat principal

4.1 Le système considéré

Dans ce chapitre, qui constitue l'essentiel de notre travail et la contribution de ce mémoire, nous considérons le système d'équations fractionnaires de type Sturm-Liouville suivant.

$$\begin{cases} {}^C D^\alpha(p(t)u'(t)) = f(u(t), v(t)), \\ {}^C D^\alpha(q(t)v'(t)) = g(u(t), v(t)), \\ a_{11}u(0) - a_{12}u'(0) = 0, \\ a_{21}u(T) - a_{22}u'(T) = 0, \\ b_{11}v(0) - b_{12}v'(0) = 0, \\ b_{22}v(T) - b_{22}v'(T) = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Où ${}^C D^\alpha$ est la dérivée de Caputo, $0 < \alpha < 1$ et $t \in J = [0, T]$, u et $v \in C(J, \mathbb{R}_+)$ l'espace de Banach des fonctions continues muni de la norme : $\|u\|_\infty = \{\sup |u(t)| : t \in J\}$. On dira que l'hypothèse (H) est vérifiée, si les conditions suivante sont satisfaites.

Les fonctions

$$p : J \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad q : J \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

sont continues telles que $p(t) > 0$ et $q(t) > 0$ pour tout $t \in J$. Les constantes $a_{ij}, b_{ij}, i, j = 1, 2$ sont des paramètres réels non nuls.

Notre objective dans cette partie est de montrer que le problème (4.1) possède une solution unique, en utilisons de théorème de Perov. Ce théorème de point fixe est une généralisation du principe de contraction (usuel) suivant.

4.2 Système intégral équivalent

A fin d'appliquer le théorème de Perov, on doit d'abord transformer le problème (4.1) en un système d'équations intégrales du type Volterra.

Lemme 4.2.1 *Si l'hypothèse (H) est vérifiée alors, u et v sont solutions du problème (4.1) Si et seulement si u et v sont des solutions du système intégrales fractionnaires suivantes :*

$$\begin{cases} u(t) = u(0) \left(1 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right) + \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} f(u(r), v(r)) \right] ds dr \\ v(t) = v(0) \left(1 + \frac{b_{11}}{b_{12}} \int_0^t \frac{q(0)}{q(s)} ds \right) + \int_0^t \frac{1}{q(s)} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} g(u(r), v(r)) \right] ds dr \end{cases} \quad (4.2)$$

Preuve Supposons que u et v satisfont (4.1) alors on a

$$D^\alpha(p(t)u'(t)) = f(u(t), v(t)). \quad (4.3)$$

Ainsi, d'après les hypothèses du lemme 4.2.1 on obtient

$$p(t)u'(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(u(s), v(s)) ds + p(0)u'(0), \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} u'(t) &= \frac{1}{p(t)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(u(s), v(s)) ds + \frac{\frac{a_{11}}{a_{12}} p(0) u(0)}{p(t)}, \\ u'(t) &= \frac{u'(0)p(0)}{p(t)} + \frac{1}{p(t)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(u(s), v(s)) ds. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Après une intégration sur l'intervalle $[0, t]$, on trouve

$$u(t) = u(0) + u'(0) \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds + \int_0^t \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} f(u(r), v(r)) dr ds$$

La condition $a_{11}u(0) - a_{12}u'(0) = 0$ implique $u'(0) = \frac{a_{11}}{a_{12}}u(0)$, d'où

$$u(t) = u(0) + \frac{a_{11}}{a_{12}} u(0) \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds + \int_0^t \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} f(u(r), v(r)) dr ds$$

$$u(t) = u(0) \left(1 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right) + \int_0^t \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} f(u(r), v(r)) dr ds \quad (4.6)$$

En utilisant la condition $a_{21}u(T) + a_{22}u'(T) = 0$ on obtient

$$\begin{aligned}
 & a_{21} \left[u(0) + \frac{a_{11}}{a_{12}} u(0) \int_0^T \frac{p(0)}{p(s)} ds + \int_0^s \frac{1}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} f(u(r), v(r)) dr ds \right] \\
 & - a_{22} \left[\frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{p(0)}{p(T)} + \frac{1}{p(T)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} f(u(s), v(s)) ds \right] = 0 \\
 & u(0) = \frac{\frac{a_{22}}{p(T)\Gamma(\alpha)} \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} f(u(s), v(s)) ds}{a_{21} + a_{21} \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^T \frac{p(0)}{p(s)} ds - a_{22} \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{p(0)}{p(T)}} \\
 & - \frac{\int_0^T \frac{a_{21}}{p(s)\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} f(u(r), v(r)) dr ds}{a_{21} + a_{21} \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^T \frac{p(0)}{p(s)} ds - a_{22} \frac{a_{11}}{a_{12}} \frac{p(0)}{p(T)}}.
 \end{aligned}$$

De la même façon, on peut montrer que v est une solution de la deuxième équation du système (4.2).

Inversement, si u est solution du (4.2) alors elle vérifie (4.4). On appliquant la dérivation fractionnaire d'ordre α aux deux membres de (4.4) on obtient (4.3).

On obtient le même résultat pour la fonction v .

4.3 Existence et unicité de la solution

Dans ce paragraphe on montre l'existence et l'unicité de la solution du système (4.1).

Notre résultat est basé sur le théorème de point fixe de Perov.

Théorème 4.3.1 *On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées*

(H₁) Pour tout $i, j = \{1, 2\}$ il existe des constantes positives $L_{ij} > 0$ et

$u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ telle que

$$\|f(u_1, u_2) - f(v_1, v_2)\| \leq L_{11}\|(u_1 - v_1)\| + L_{12}\|(u_2 - v_2)\|$$

et

$$\|g(u_1, u_2) - g(v_1, v_2)\| \leq L_{21}\|(u_1 - v_1)\| + L_{22}\|(u_2 - v_2)\|$$

pour tout $t \in J$ et $u_1, u_2, v_1, v_2 \in C^1$

(H₂) Les constantes $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ et $(b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 2}}$ sont telles que $a_{11}a_{12} < 0$ et $b_{11}b_{12} < 0$.

Si les constantes $\theta_1, \theta_2, \eta_1, \eta_2$ sont définies par

$$\begin{aligned}\theta_1 &\doteq \left[\left(1 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^T \frac{p(0)}{p(s)} ds \right) + \int_0^T \frac{1}{p(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L_{11} ds \right] \\ \theta_2 &\doteq \int_0^T \frac{1}{p(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L_{12} ds \\ \eta_1 &\doteq \left[\left(1 + \frac{b_{11}}{b_{12}} \int_0^T \frac{q(0)}{q(s)} ds \right) + \int_0^T \frac{1}{q(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L_{21} ds \right] \\ \eta_2 &\doteq \int_0^T \frac{1}{q(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L_{22} ds\end{aligned}$$

vérifient

$$\frac{\eta_2 + \theta_1 + \sqrt{(\eta_2 - \theta_1)^2 + 4\eta_1\theta_2}}{2} \leq 1, \quad (4.7)$$

alors le système (4.1) admet une solution unique sur $[0, T]$.

preuve Nous transformons le problème (4.1) en problème de point fixe. Considérons l'opérateur $F = (F_1, F_2) : C(J, \mathbb{R}_+) \times C(J, \mathbb{R}_+) \rightarrow C(J, \mathbb{R}_+) \times C(J, \mathbb{R}_+)$ défini par :

$$\begin{aligned}F_1(u, v)(t) &= u(0) \left[1 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right] \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} f(u(r), v(r)) dr \right] ds, \quad (4.8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_2(u, v)(t) &= v(0) \left[1 + \frac{b_{11}}{b_{12}} \int_0^t \frac{q(0)}{q(s)} ds \right] \\ &\quad + \int_0^t \frac{1}{q(s)} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} g(u(r), v(r)) dr \right] ds. \quad (4.9)\end{aligned}$$

Il est clair que tous les points fixes des opérateurs F_1 et F_2 sont solutions du système (4.1). On utilise le théorème (3.2.1) de point fixe de Perov pour montrer que F admet un point fixe unique. En effet, si $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in C(J, \mathbb{R}_+) \times C(J, \mathbb{R}_+)$.

Alors, pour tout $t \in J$ on a

$$\begin{aligned}
 |F_1(u_1, u_2)(t) - F_1(v_1, v_2)(t)| &= \left| u_1(0) \left[1 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right] \right. \\
 &\quad + \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} f(u_1(r), u_2(r)) dr \right] ds \\
 &\quad - v_1(0) \left[1 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right] \\
 &\quad + \left. \int_0^t \frac{1}{p(s)} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} f(v_1(r), v_2(r)) dr \right] ds \right| \\
 &= \left| (u_1(0) - v_1(0)) \left[1 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right] \right. \\
 &\quad + \left. \left[\int_0^t \frac{1}{p(s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (f(u_1(r), u_2(r)) - f(v_1(r), v_2(r))) dr \right] ds \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |F_1(u_1, u_2)(t) - F_1(v_1, v_2)(t)| &\leq \left| \|u_1 - v_1\| \left[1 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right] \right| \\
 &\quad + \left| \left[\int_0^t \frac{1}{p(s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (L_{11}\|u_1 - v_1\| + L_{12}\|u_2 - v_2\|) dr \right] ds \right| \\
 &\leq \left| \|u_1 - v_1\| \left(1 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right) \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^t \frac{1}{p(s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} L_{11}\|u_1 - v_1\| dr ds \right| \\
 &\quad + \left| \int_0^t \frac{1}{p(s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} L_{12}\|u_2 - v_2\| dr ds \right| \\
 &\leq \|u_1 - v_1\| \left| \left[\left(1 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^t \frac{p(0)}{p(s)} ds \right) + \int_0^t \frac{1}{p(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L_{11} ds \right] \right| \\
 &\quad + \|u_2 - v_2\| \left| \int_0^t \frac{1}{p(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L_{12} ds \right|
 \end{aligned}$$

on pose

$$\theta_1 = \left| \left[\left(1 + \frac{a_{11}}{a_{12}} \int_0^T \frac{p(0)}{p(s)} ds \right) + \int_0^T \frac{1}{p(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L_{11} ds \right] \right|$$

et

$$\theta_2 = \left| \int_0^T \frac{1}{p(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L_{12} ds \right|$$

donc

$$|F_1(u_1, u_2)(t) - F_1(v_1, v_2)(t)| \leq \theta_1 \|u_1 - v_1\| + \theta_2 \|u_2 - v_2\| \quad (4.10)$$

et

$$\begin{aligned}
 |F_2(u_1, u_2)(t) - F_2(v_1, v_2)(t)| &= \left| (v_1(0) \left[1 + \frac{b_{11}}{b_{12}} \int_0^t \frac{q(0)}{q(s)} ds \right] \right. \\
 &\quad + \int_0^t \frac{1}{q(s)} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} g(u_1(r), u_2(r)) dr \right] ds \\
 &\quad - (u_1(0) \left[1 + \frac{b_{11}}{b_{12}} \int_0^t \frac{q(0)}{q(s)} ds \right] \\
 &\quad + \int_0^t \frac{1}{q(s)} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} g(v_1(r), v_2(r)) dr \right] ds) \Big| \\
 &= \left| (u_1(0) - v_1(0)) \left[1 + \frac{b_{11}}{b_{12}} \int_0^t \frac{q(0)}{q(s)} ds \right] \right. \\
 &\quad + \left. \left[\int_0^t \frac{1}{q(s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (g(u_1(r), u_2(r)) - g(v_1(r), v_2(r))) dr \right] ds \right|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |F_2(u_1, u_2)(t) - F_2(v_1, v_2)(t)| &\leq \left\| u_1 - v_1 \right\| \left[1 + \frac{b_{11}}{b_{12}} \int_0^t \frac{q(0)}{q(s)} ds \right] \\
 &\quad + \left| \int_0^t \frac{1}{q(s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} (L_{21} \|u_1 - v_1\| + L_{22} \|u_2 - v_2\|) ds \right| \\
 &\leq \|u_1 - v_1\| \left[\left| 1 + \frac{b_{11}}{b_{12}} \int_0^t \frac{q(0)}{q(s)} ds \right| + \int_0^t \frac{1}{q(s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} L_{21} dr ds \right] \\
 &\quad + \|u_2 - v_2\| \left| \int_0^t \frac{1}{q(s)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^s (s-r)^{\alpha-1} L_{22} dr ds \right| \\
 &\leq \|u_1 - v_1\| \left[\left| 1 + \frac{b_{11}}{b_{12}} \int_0^t \frac{q(0)}{q(s)} ds \right| + \left| \int_0^t \frac{1}{q(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L_{21} ds \right| \right] \\
 &\quad + \|u_2 - v_2\| \left| \int_0^t \frac{1}{q(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L_{22} ds \right|
 \end{aligned}$$

On pose

$$\eta_1 = \left[\left| 1 + \frac{b_{11}}{b_{12}} \int_0^T \frac{q(0)}{q(s)} ds \right| + \left| \int_0^T \frac{1}{q(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L_{21} ds \right| \right]$$

et

$$\eta_2 = \left| \int_0^T \frac{1}{q(s)} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} L_{22} ds \right|$$

donc

$$|F_2(u_1, u_2)(t) - F_2(v_1, v_2)(t)| \leq \eta_1 \|u_1 - v_1\| + \eta_2 \|u_2 - v_2\|. \quad (4.11)$$

Ainsi, on peut reformuler les inégalités (4.10) et (4.11) sous la forme matricielle suivante

$$M = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{pmatrix}$$

$$\|F(U) - F(V)\| \leq M \begin{pmatrix} \|u_1 - v_1\| \\ \|u_2 - v_2\| \end{pmatrix}$$

Pour appliquer le théorème de Perov il suffit de montrer que la matrice M est convergente vers zéro.

Montrons alors que ses valeurs propres sont dans la boule unité ouverte.

$$\begin{aligned} |M - I\lambda| &= \begin{vmatrix} \theta_1 - \lambda & \theta_2 \\ \eta_1 & \eta_2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (\theta_1 - \lambda)(\eta_2 - \lambda) - \theta_2\eta_1 \\ &= \theta_1\eta_2 - \lambda\eta_2 - \lambda\theta_1 + \lambda^2 - \eta_1\theta_2 \\ &= \lambda^2 - (\eta_2 + \theta_1)\lambda + (\theta_1\eta_2 - \eta_1\theta_2) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \Delta &= (\eta_2 + \theta_1)^2 - 4(\theta_1\eta_2 - \eta_1\theta_2) \\ &= (\eta_2 - \theta_1)^2 + 4\eta_1\theta_2. \end{aligned}$$

Donc les valeurs propre de la matrice M sont

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\eta_2 + \theta_1 + \sqrt{(\eta_2 - \theta_1)^2 + 4\eta_1\theta_2}}{2} < 1, \\ \lambda_2 &= \frac{\eta_2 + \theta_1 - \sqrt{(\eta_2 - \theta_1)^2 + 4\eta_1\theta_2}}{2} < 1. \end{aligned}$$

Puisque $|\lambda_2| < \lambda_1$, la matrice M converge vers zéro lorsque $\lambda_1 < 1$, ce qui est assuré par la condition (4.7).

Par conséquent, d'après la théorème de Perov l'application F possède un point fixe unique $U^* = (u^*, v^*)$ dans l'espace $C(J, \mathbb{R}_+) \times C(J, \mathbb{R}_+)$. Donc (u^*, v^*) est l'unique solution du système intégrale (4.2). Ce qui achève la démonstration du théorème, puisque d'après le lemme 4.2 les fonctions u^* et v^* sont des solutions du système différentiel fractionnaire (4.1).

4.4 Exemple

On présente un exemple afin d'illustrer l'utilité du résultat principal. Considérons le problème aux limites suivantes :

$$\begin{cases} D^\alpha(6u'(t)) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{T^{\alpha+1}}u(t) + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{4T^{\alpha+1}}v(t), \\ D^\alpha(3v'(t)) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{T^{\alpha+1}}u(t) + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2T^{\alpha+1}}v(t), \\ 5u(0) + 6Tu'(0) = 0, \\ u(T) - u'(T) = 0, \\ 5v(0) + 6Tv'(0) = 0, \\ v(T) - v'(T) = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

pour tout $t \in J = [0, T]$ et $u, v \in C(J, \mathbb{R}_+)$.

$p(t) = 6, q(t) = 3,$

$$f(u(t), v(t)) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{T^{\alpha+1}}u(t) + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{4T^{\alpha+1}}v(t),$$

$$g(u(t), v(t)) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{T^{\alpha+1}}u(t) + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2T^{\alpha+1}}v(t).$$

Soit $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in C(J, \mathbb{R}_+)$ et $t \in [0, T]$; alors on a

$$\|f(u_1, u_2) - f(v_1, v_2)\| \leq \frac{\Gamma(\alpha+2)}{T^{\alpha+1}}\|u_1 - v_1\| + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{4T^{\alpha+1}}\|u_2 - v_2\| \quad (4.13)$$

et

$$\|g(u_1, u_2) - g(v_1, v_2)\| \leq \frac{\Gamma(\alpha+2)}{T^{\alpha+1}}\|u_1 - v_1\| + \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2T^{\alpha+1}}\|u_2 - v_2\| \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \left| 1 - \frac{5}{6T}T \right| + \int_0^T \frac{1}{6} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{T^{\alpha+1}} ds = \frac{2}{6} \\ \theta_2 &= \int_0^T \frac{1}{6} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{4T^{\alpha+1}} ds = \frac{1}{24} \\ \eta_1 &= \left| 1 - \frac{5}{6T} \int_0^T \frac{6}{6} ds \right| + \int_0^T \frac{1}{3} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{T^{\alpha+1}} ds = \frac{1}{2} \\ \eta_2 &= \int_0^T \frac{1}{3} \frac{s^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{2T^{\alpha+1}} ds = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{\eta_2 + \theta_1 + \sqrt{(\eta_2 - \theta_1)^2 + 4\theta_2\eta_1}}{2} \\
 &= \frac{\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \sqrt{(\frac{1}{6} - \frac{2}{6})^2 + 4\frac{1}{24}\frac{1}{2}}}{2} \\
 &= \frac{5}{12} \\
 &< 1
 \end{aligned}$$

Alors, les hypothèses (H_1) et (H_2) du théorème 4.3.1 sont vérifiées pour chaque $0 < \alpha < 1$. Ainsi d'après le théorème 3.2.1, le problème (4.12) possède une solution unique définie sur $[0, T]$.

Bibliographie

- [1] Gustave Choquet, Cours de topologie, 2^{me} édition, Dunod, (juin 2000).
- [2] Hacem DIB, Equations différentielles fractionnaires, *EDA-EDO (4^{ème} Ecole)* , Tlemcen 23-27 mai 2009.
- [3] Kai Diethelm, The Analysis of Fractional Differential Equations, *An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type* , (2004).
- [4] Rabeea Mohammed Hani, Existence and uniqueness of the solution for fractional Sturm-Liouville boundary value Problem, *College of Basic Education Researchers Journal*, **11**(2), 698-710 (2011).
- [5] A. A. Kilbas and S. A. Marzan, Nonlinear differential equations with the Caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions, *Differential Equations* *41* (2005), 84-89.
- [6] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications; *Gordon and Breach, Yverdon*, (1993).
- [7] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, *Elsevier Science B.V. Amsterdam*, **204**, (2006).
- [8] V. Lakshmikantham, A.S. Vatsala General uniqueness and monotone iterative technique for fractional differential equations, *Appl. Math. Lett.*, **21**, 828-834 (2008).
- [9] F. Mainardi, Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity : An Introduction to Mathematical Models, *Imperial College Press, London*, (2010).
- [10] H. Medjekal, Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire impulsive de temps infini dans un espace de Banach, *Thèse de Doctorat Univ. Badji Mokhtar Annaba*, (2015).
- [11] I. N'doye, Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires, *Thèse de Doctorat Univ. Henri Poincaré-Nancy let Univ Hassan II Ain Chock-Casablanca* (2011).
- [12] I. Podlubny, Fractional Differential Equation, *Academic Press*, **198** (1999).
- [13] Radu Precup, Methods in Nonlinear Integral Equations (2002).

- [14] Radu Precup, The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems, *Mathematical and Computer Modelling*, (2009) 703-708.
- [15] L. Pujo-Menjouet, équation différentielle ordinaires et partielles, *Univ. Claude Bernard, Lyon I 43, boulevard 11 novembre 1918 69622 Villeurbanne cedex, France*.
- [16] Jean-Christophe Yoccoz, Cours de Topologie : calcul différentiel, equations différentielles, *Paris Onze, université de Paris-Sud*, (1990).

Résumé

Nous étudions l'existence et l'unicité de la solution de certains **problèmes aux limites** pour des systèmes d'équations différentielles fractionnaires non linéaires. Le but principal de ce mémoire est l'application du théorème de point fixe de Perov dans un espace à métrique vectorielle.

Mots clés : Équations différentielles fractionnaires, espace métrique généralisé, théorème de point fixe de Perov.

Abstract

We study the existence and uniqueness of the solution of boundary value problems for systems of nonlinear fractional differential equations. The main purpose of this thesis is the application of Perov's fixed point theorem in a vector metric space.

Keywords : fractional differential equations, generalized metric space, Perov's fixed point theorem.

ملخص

تمت في هذه المذكرة دراسة وجود ووحدانية الحل لبعض المسائل ذات قيم حديه من أجل جملة معادلات تفاضلية كسرية غير خطية. الهدف الأساسي لهذه المذكرة هو تطبيق نظرية النقطة الثابتة لبيروف في فضاء مزود بمسافة شعاعية. الكلمات المفتاحية : معادلات تفاضلية كسرية, فضاء متري معمم, نظرية النقطة الثابتة لبيروف.