

N° d'ordre :
N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Les Opérateurs Linéaires Bornés Des
Puissances Normaux et Leurs Applications

Présenté par : ◀ Bella Baci Safia
◀ Ben bederi Soumia

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Mr. Said Touati	MCA/Prof	Président	Univ El oued
Mr. Lourabi Hariz-Bakkar	Prof	Rapporteur	Univ El oued
Mr. Massoud Guesba	MCA/MC	Examineur	Univ El oued

L'année universitaire : 2018/2019

N° d'ordre :
N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Les Opérateurs Linéaires Bornés Des
Puissances Normaux et Leurs Applications

Présenté par : ◀ Bella Baci Safia

◀ Ben bederi Soumia

Soutenu publiquement devant le jury composé de :

Mr. Said Touati	MCA/Prof	Président	Univ El oued
Mr. Lourabi Hariz-Bakkar	Prof	Rapporteur	Univ El oued
Mr. Massoud Guesba	MCA/MC	Examineur	Univ El oued

L'année universitaire : 2018/2019

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier tout d'abord « Allah » Seigneur le tout puissant de l'univers, qui a permis que ce travail voit la lumière.

A lui toute louange.

La présentation de ce modeste travail nous offre l'opportunité d'exprimer notre gratitude et reconnaissance à notre professeurs encadreur

"Lourabi Hariz- Bakkar".

pour son assistance académique constante qui nous ont permis de mener à bien notre mémoire.

Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseignés durant nos études à la faculté des sciences exactes.

Nous remercions également tous nos collègues d'étude, particulièrement notre promotion de Master mathématique, 2018/2019

*à l'université de **Echahid Hamma Lakhdar***

El-Oued.

En-fin, nous remercions vivement notre famille pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation.

Resumé

Dans ce mémoire, nous avons intéressé en particulier aux opérateurs des puissances normaux et leurs applications, on commence par quelques préliminaires sur les opérateurs linéaires bornés et leurs propriétés, notions initiales et des théorèmes fondamentaux. Après, on donne un rappel élémentaire sur des définitions et des résultats de base sur les opérateurs normaux bornés, la normalité d'une somme et d'un produit de deux opérateurs normaux.

Utiliser une théorie importante propriété de Fuglede-Putnam. Après des définitions et des résultats de base sur les opérateurs des puissances normaux, et l'opérateur n -quasi normal.

Enfin, nous avons utilis les techniques de la théorie des opérateurs pour étudier les équations des opérateurs $AX - XB = C$, et $AXB - X = E$, et en généralisé l'équation $A^n X (A^*)^n - X = E$ avec la nature des solutions, et nous appliquons les résultats que nous avons obtenus.

Mots clés

Opérateur normal, n -normal, (n, k) -normal, propriété Fuglede-Putnam.

ملخص

هذه المذكرة، تتعلق بصفة خاصة بمؤثرات القوى الناعمية و تطبيقاتها، نبدأ ببعض التمهيدات حول المؤثرات الخطية المحدودة وخصائصها، مفاهيم أولية ونظريات أساسية. ثم نعطي تعاريف ونتائج أساسية حول المؤثرات الناعمية المحدودة، والمعايير والشروط اللازمة لناعمية جداء ومجموع مؤثرين ناعمين، باستعمالنا لخاصية Fuglede-Putnam الشهيرة، وبعد ذلك نعطي التعاريف والنتائج المهمة حول مؤثرات القوى الناعمية وأهم اصنافها.

أخيراً، استخدمنا نظرية المؤثرات لدراسة المعادلات التي من الشكل $AX - BX = C$ و $AXB - X = E$ وبصفة عامة المعادلات التي من الشكل $A^n X (A^*)^n - X = E$ مع تحديد طبيعة حلولها وتطبيق النتائج المتحصل عليها.

كلمات مفتاحية

مؤثر ناعمي، مؤثر قوى n الناعمي، مؤثر القوى (n, k) الناعمي، خاصية Fuglede-Putnam.

Resume

In this memory, we are particularly interested in the power-normal operators, and its applications. We begin with a few preliminaries on bounded linear operators and their properties, initial notions and fundamental theories. Then, we shall give a basic reminder on definitions and will as basic results on bounded normal operators, the normality of a sum and a product two normal operators. By using famous Fuglede-Putnam theory. After this we shall give a definitions and basic results on power-normal operators, and the operator n power quasi normal.

Finally, we have used the techniques of operator theory to study the equations of form $AX - BX = C$ and $AXB - X = E$, end in general $A^n X (A^*)^n - X = E$, with the nature of the solutions and we applied the results we have got.

Keywords

Operator normal, n -normal, (n, k) -normal, property Fuglede-Putnam.

Table des matières

resumé	ii
	vi
Notations générales	vi
Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Espaces de Hilbert	3
1.1.1 Définitions et exemples	3
1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert	4
1.2 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés	6
1.2.1 Définitions et exemples	6
1.2.2 L'inverse d'un opérateur linéaire borné	9
1.2.3 Adjoint d'un opérateur linéaire borné	10
1.2.4 Opérateurs isométriques, unitaires, auto-adjoints, positifs	11
1.2.5 Racine carrée d'un opérateur linéaire borné	13
1.2.6 Les commutateurs	14
1.3 Spectre des opérateurs linéaires bornés	15
2 Les opérateurs linéaires bornés et normaux	17
2.1 Définitions et propriétés	17
2.2 Propriété de Fuglede-Putnam	20
2.2.1 Propriété de Fuglede pour les opérateurs bornés	20

2.3	Quelques classes des opérateurs normaux	21
2.3.1	Opérateurs quasi-normaux	21
2.3.2	Opérateurs sous normaux	22
2.3.3	Opérateurs hyponormaux	22
2.4	Spectre d'un opérateur normal	24
2.5	Normalité d'une somme de deux opérateurs normaux bornés	26
2.6	Normalité d'un produit de deux opérateurs normaux bornés	28
3	Les opérateurs bornés des puissances normaux	31
3.1	Les opérateurs n -normal	31
3.2	Les opérateurs (n, k) -normal	38
3.3	Les opérateurs n -quasi normaux	44
3.3.1	Les opérateurs n -quasi normaux	44
3.3.2	Quelques classes des opérateurs n -quasi normaux	44
3.4	Théorie spectrale des opérateurs des puissances normaux	46
4	Applications des opérateurs n-normaux	49
4.1	L'équation $AX - XB = C$ dans $B(\mathcal{H})$	49
4.2	L'équation $AXB - X = E$ dans $B(\mathcal{H})$	53
4.3	La nature de solution l'équation $A^n X A^* - X = E$	57
	Conclusion	58
	Bibliographie	61

Notations générales

$\mathcal{H}$	Espace de Hilbert .
$\langle ., . \rangle$	Produit scalaire . $\ \cdot \ $ La norme .
T	L'opérateur linéaire .
$B(\mathcal{H})$	L'espace des opérateurs linéaires bornés sur espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
$\mathcal{L}(E, F)$	L'ensemble des applications linéaires continues de E dans F .
T^{-1}	L'inverse de l'opérateur T .
T^*	L'adjoint de l'opérateur T .
$\text{Im}(T)$	L'image de l'opérateur T .
$\ker(T)$	Le noyau de l'opérateur T .
$D(T)$	Le domaine de l'opérateur T .
$\rho(T)$	L'ensemble résolvante de l'opérateur T .
$R_\lambda(T)$	La résolvante de l'opérateur T .
$\sigma(T)$	Le spectre de l'opérateur T .
$\sigma_p(T)$	Le spectre ponctuel de l'opérateur T .
$\sigma_r(T)$	Le spectre résiduel de l'opérateur T .
$\sigma_c(T)$	Le spectre continu de l'opérateur T .
$r(T)$	Le rayon spectral de l'opérateur T .
$\sigma_a(T)$	L'ensemble spectre approximatif.
$\text{tr } T$	Trace de T .
$(FP)_{B(\mathcal{H})}$	propriété de Fuglede-Putnam.

On désigne par opérateur n -normal l'opérateur normal de puissance n .

Introduction

La théorie des opérateurs qui est une extension naturelle de la théorie de matrices, et ces applications trouvent essentiellement dans plusieurs domaines comme la mécanique quantique et la théorie de symplectique.

Le contenu de ce mémoire, se décompose de Quatre chapitres, une introduction et une conclusion :

Dans le premier chapitre, on rappelle tous les outils nécessaires pour l'élaboration de ce travail. On commence par généralités sur les opérateurs linéaires bornés, ainsi on rappelle leurs propriétés fondamentaux et notions portant sur les espaces de Hilbert, et nous avons étudié et présenté quelques classes d'opérateurs linéaires [15] (isométrique, unitaire, auto-adjoints et positif).

Dans Le deuxième chapitre on présente les définitions et les propriétés importants, avec quelques classes des opérateurs normaux. Nous intéressons au théorème classique et très important dans la théorie des opérateurs bornés, et non bornés avec toutes applications [36] à savoir : **Propriété de Fuglede-Putnam** .

Il existe plusieurs versions de ce propriété pour les opérateurs [18] " subnormaux, hyponormaux, p-hyponormaux, dominants, log-hyponormaux.....etc".

Mais on va se contenter dans ce chapitre quelques applications de ce propriété pour les opérateurs bornés.

- Sur la somme, et le produit des deux opérateurs linéaires bornés et normaux.

L'objectif du troisième chapitre est de donner des définitions, des résultats de base et les propriétés importants des opérateurs linéaires bornés des puissances normaux et l'opérateur

n -quasi normal, et leurs quelques classes .

Finalement, dans le quatrième chapitre, nous examinons les applications des opérateurs des puissances normaux, commençons par la famille d'équations $AX - XB = C$ sont résolubles ssi : $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ sont similaires, avec la condition de propriété de $(FP)_{B(\mathcal{H})}$.

Rosenblum [?] a montré que ce résultat reste vrai, quand A et B sont des opérateurs bornés auto-adjoints dans $B(\mathcal{H})$. Nous avons généralisé ces résultats pour l'équation

$$(A + i\alpha)X - X(B + i\beta) = C;$$

où $A + i\alpha$ et $B + i\beta$ sont normaux et la paire (A, B) satisfait la propriété de Fuglède-Putnam $(FP)_{B(\mathcal{H})}$, et en général pour l'équation

$$(A - \lambda)X + X(B - \mu) = C;$$

telle que $(T - \lambda)$ est un opérateur n -normal $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C})$.

Nous avons traité d'autres d'équations sous la forme $AXB - X = E$ qui sont l'objet du dernier chapitre de ce mémoire, et sont admettent une solution si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} A - \lambda I & 0 \\ 0 & I - \lambda B \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A - \lambda I & E \\ 0 & I - \lambda B \end{pmatrix},$$

sont équivalentes dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dans ce chapitre, nous avons démontré la solvabilité pour résoudre des équations

$$A^n X (A^*)^n - X = E, \text{ telle que } B = A^*.$$

Dans les cas A est un opérateur n -normal et (A, B) satisfait la propriété de $(FP)_{B(\mathcal{H})}$, comme le détail suivant :

- si A est un opérateur 2-normal et en générale n -normal.
- si A est un opérateur $(2, 2)$ -normal et en générale (n, k) -normal.

Et nous avons montré la nature de Cettes solutions .

hapitre 1

Préliminaires

Chapitre 1

Préliminaires

Pour simplifier la lecture de ce travail, nous présentons dans ce chapitre quelques définitions et des résultats principaux d'analyse fonctionnelle, ces rappels concernent les espaces de Hilbert, les opérateurs et leurs propriétés sur les espaces de Hilbert, ainsi que quelques classes d'opérateurs.

1.1 Espaces de Hilbert

1.1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1.1. Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur $\mathcal{H}$ toute forme bilinéaire, définie positive.

On notera $\langle x, y \rangle$ le produit scalaire des vecteurs $x, y \in \mathcal{H}$ cela signifie que l'application :

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\rightarrow K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

vérifiant :

- Pour tout $y \in \mathcal{H}$ l'application $x \in \mathcal{H} \rightarrow \langle x, y \rangle \in K$ est une forme linéaire.
- Pour tout $x, y \in \mathcal{H}$ on a :

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} \langle y, x \rangle & \text{si l'espace est réel} \\ \overline{\langle y, x \rangle} & \text{si l'espace complexe} \end{cases}$$

- Pour tout $x \in \mathcal{H}$:
$$\begin{cases} \langle x, x \rangle = 0 & \text{si } x = 0 \\ \langle x, x \rangle > 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$
- L'espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est de plus complet pour la norme

$$\{ \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \}.$$

- Tous les espaces de Hilbert que nous considérerons seront supposés **séparables** c'est-à-dire admettant un sous-ensemble dénombrable dense.

Remarque 1.1.1. Notons que dans le cas complexe, on a donc pour $x, y \in \mathcal{H}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle.$$

Exemple 1.1.1.

- 1) • Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^N$ est défini par :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n \\ \text{où } x &= (x_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \end{aligned} \right\} \text{ forme bilinéaire sur } \mathbb{R}^N.$$

- Le produit scalaire sur $\mathbb{C}$ est défini par :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \cdots + x_n \bar{y}_n \\ \text{où } x &= (x_i)_{1 \leq i \leq n}, \quad y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \end{aligned} \right\} \text{ n'est pas forme bilinéaire.}$$

- 2) L'espace $L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable tel que } : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}$
le produit scalaire :
 $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx$ et la norme définie par $\|f\| = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$

1.1.2 Propriétés des espaces de Hilbert

Proposition 1.1.1. (L'inégalité de Cauchy -Schwartz)

$\mathcal{H}$ espace de Hilbert

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_{\mathcal{H}} \cdot \|y\|_{\mathcal{H}}. \text{ Pour tout } x, y \in \mathcal{H}.$$

Définition 1.1.2. (L'orthogonal)

On dit que x et y sont orthogonaux, si : $\forall x, y \in \mathcal{H} : \langle x, y \rangle = 0$
alors l'orthogonal de M (partie de $\mathcal{H}$) est défini par :

$$M^\perp = \{y \in \mathcal{H} \text{ tq : } \forall x \in \mathcal{H}; y \perp x\}.$$

Proposition 1.1.2. (Identité du parallélogramme)

Pour tout $(x, y) \in \mathcal{H}^2$, on a l'identité :

$$\|x + y\|_{\mathcal{H}}^2 + \|x - y\|_{\mathcal{H}}^2 = 2(\|x\|_{\mathcal{H}}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}}^2).$$

Appelé l'identité du parallélogramme.

Proposition 1.1.3. (Identité polarisation)

Soient $x, y \in \mathcal{H}$

1/ Si $\varphi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto K$ est une forme bilinéaire symétrique sur E , on a :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y)]$$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

2/ Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si $\varphi : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire sur H on a :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} [\varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y) + i\varphi(x + iy, x + iy) - i\varphi(x - iy, x - iy)].$$

Alors :

$$\forall x, y : \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

$$\forall x, y : \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2.$$

Théorème 1.1.1. [6] (Projection)

Soit A un ensemble convexe fermé (et non vide) de $\mathcal{H}$ alors pour tout $x \in \mathcal{H}$, il existe un unique $y \in A$ tel que :

$$\inf_{a \in A} \|x - a\| = \|x - y\|.$$

Autrement dit : il existe un unique point $y \in A$ qui est à une distance de x , la plus petite possible ce point y , s'appelle **la projection** de x sur A .

Corollaire 1.1.1. Soit F sous espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$, et soit $x \in \mathcal{H}$

- 1) Soit $y \in F$ tel que $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$.
Alors $(x - y)$ est orthogonal à F (i.e orthogonal à tous les vecteurs $z \in F$)
- 2) **Réciproquement** si $y \in F$, et tel que : $(x - y) \perp F$, alors
 $\|x - y\| = \inf_{z \in F} \|x - z\|$; i.e y est la projection de x sur F .

Définition 1.1.3. On notera $y = P_F(x)$, et on dira que y est la **projection orthogonale** de x sur F .

1.2 Généralités sur les opérateurs linéaires bornés

1.2.1 Définitions et exemples

Définition 1.2.1. (Opérateur linéaire)

Soient E et F deux espaces vectoriels $D(T) \subset E$ dans F l'application

$$T : D(T) \subset E \mapsto F;$$

($D(T)$ est la domaine de T) qui vérifie les conditions suivantes :

- 1) $\forall x, y \in D(T) : T(x, y) = T(x) + T(y)$ (condition additive).
- 2) $\forall x \in D(T), \forall \lambda \in \mathcal{K} (\mathcal{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}) : T(\lambda x) = \lambda T(x)$ (condition homogène).

Remarque 1.2.1.

1. d'autre termes, l'opérateur $T : D(T) \subset E \mapsto F$ est linéaire ssi :

$$T(\lambda x, \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y), \forall \lambda, \mu \in \mathcal{K} \text{ et } \forall x, y \in D(T).$$

2. Le vecteur $T(x)$ est en générale T_x .

Définition 1.2.2. (Opérateur continu)

Soient E et F deux espaces de Hilbert un opérateur linéaire continu, A défini de E dans F est une application linéaire et continue de E et F c'est -à -dire : $\forall x \in E, Ax \in F$

$$\forall (x, y) \in E \times E, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R} : A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

$$\exists c > 0 : \forall x \in E, \text{ tel que : } \|Ax\|_F \leq c \|x\|_E.$$

le plus petit nombre "c" s'appelle **la norme** de l'opérateur A et se note $\|A\|$ i.e

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_F = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_F.$$

Définition 1.2.3. (L'opérateur borné)

On dit que l'opérateur $A : E \mapsto F$ est borné s'il fait correspondre à tout ensemble borné dans $D(A)$ un ensemble borné dans l'espace F .

Définition 1.2.4. Un opérateur linéaire $A : E \mapsto F$ tel que $D(A) = \mathcal{H}$ est borné si et seulement si pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a

$$\|Ax\|_F \leq c\|x\|_{\mathcal{H}}.$$

Théorème 1.2.1. Soit un opérateur linéaire $A : E \mapsto F$ tel que $D(A) = \mathcal{H}$.

A est continu si et seulement s'il est borné.

Exemple 1.2.1. 1. L'opérateur de multiplication

$$\begin{aligned} Tx : \quad c[0, 1] &\mapsto c[0, 1] \\ f(x) &\mapsto xf(x); \end{aligned}$$

$$\text{est borné car : } \|Tf\| = \sup_{x \in [0, 1]} |xf(x)| \leq \|f\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow \|f\|_{\infty}; \quad c = 1.$$

2. L'opérateur de dérivation

$$\begin{aligned} T : c^1[a, b] &\mapsto c[a, b] \\ f(t) &\mapsto f'(t). \end{aligned}$$

T est borné ssi :

$$\exists c > 0 : \quad \|Tf\|_{\infty} \leq c\|f\|_{c^1}; \quad \forall f \in c^1[a, b].$$

On a :

$$\|Tf\|_{\infty} = \sup_{t \in [a, b]} |Tf(t)| = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| = \|f'\|_{\infty}.$$

On sait que : $\|f\|_{c^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

D'où :

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_{c^1}.$$

Donc T est borné.

Théorème 1.2.2. Pour tout opérateur linéaire T sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) T est borné.
- (ii) T est continu dans l'espace $\mathcal{H}$.
- (iii) T est continu en un point x_0 de l'espace $\mathcal{H}$.

Preuve : On remarque que $(ii) \implies (iii)$, donc il suffit de démontrer $(i) \implies (ii)$ et $(iii) \implies (i)$.

- $(i) \implies (ii)$: Soit x_0 vecteur quelconque de $\mathcal{H}$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{H}$. Comme

$$\|Tx_n - Tx_0\| = \|T(x_n - x_0)\| \leq \|T\| \|x_n - x_0\|.$$

On a donc

$$(x_n \longrightarrow x_0) \implies (\{Tx_n\} \longrightarrow \{Tx_0\}),$$

d'où la continuité de T .

- $(iii) \implies (i)$: Soit T un opérateur linéaire continu en $x_0 \in \mathcal{H}$
supposons le contraire, Soit T non borné, alors pour tout entier naturel n , il existe un vecteur non nul $x_n \in \mathcal{H}$ tel que $\|Tx_n\| > n \|x_n\|$.

Si on pose $y_n = \frac{x_n}{n \|x_n\|}$, alors $\|y_n\| = \frac{1}{n}$.

Or $y_n \longrightarrow 0$, donc $y_n + x_0 \longrightarrow x_0$; mais

$$\|T(y_n + x_0) - Tx_0\| = \|Ty_n\| = \frac{\|Tx_n\|}{n \|x_n\|} > \frac{n \|x_n\|}{n \|x_n\|} = 1.$$

Donc T n'est pas continu en x_0 d'où la contradiction, et par conséquent T est borné.

Définition 1.2.5. [8](Type des convergences)

Une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et soit $T \in B(\mathcal{H})$.

a) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **uniformement** vers T si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

b) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **fortement** vers T si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n x - T x\| = 0.$$

c) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **faiblement** vers T si

$$\langle T_n x, y \rangle - \langle T x, y \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

1.2.2 L'inverse d'un opérateur linéaire borné

Définition 1.2.6. (Inversibilité)

Soient E et F deux espaces normés, $A \in \mathcal{L}(E, F)$ l'opérateur A est dit inversible si pour tout $y \in F$ l'équation $Ax = y$ admet une seule solution.

Définition 1.2.7. [12](Opérateur inversé)

On dit que $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible. S'il existe $S \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que

$$AS = I_E \quad \text{et} \quad SA = I_F.$$

On appelle l'inverse de A est noté par A^{-1} .

Théorème 1.2.3. L'opérateur A^{-1} inverse d'un opérateur linéaire A est aussi linéaire.

Remarque 1.2.2. $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible s'il est injectif et A^{-1} est continu (borné).

Définition 1.2.8. [15] (Similarité)

Soient A, B deux opérateurs dans $B(\mathcal{H})$, on dit que A, B Sont similaires si et seulement il existe un opérateur inversible T , tel que

$$B = TAT^{-1}.$$

Définition 1.2.9. Si T est un opérateur linéaire borné, La trace de T est la somme des éléments diagonaux de la matrice de T dans une base quelconque. On note trT .

Remarque 1.2.3. [12] Si $T \in B(\mathcal{H})$, La trace de l'opérateur inverse de T

$$trT^{-1} = \frac{1}{trT}.$$

1.2.3 Adjoint d'un opérateur linéaire borné

Définition 1.2.10. [47] L'unique opérateur linéaire $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ tel que :

$\forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{H} : \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ est appelé l'adjoint de T .

Exemple 1.2.2. Soit

$$A : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \mapsto (x, 0).$$

On pose $X = (x_1, y_1), Y = (x_2, y_2)$

on a $\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^*Y \rangle$, alors $\langle AX, Y \rangle = \langle (x_1, 0), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2$.

D'autre part : on pose

$$A^*Y = Z = (z_1, z_2).$$

On a : $\langle X, A^*Y \rangle = \langle (x_1, y_1), (z_1, z_2) \rangle = x_1z_1 + y_1z_2$.

Donc $z_1 = x_2, z_2 = 0$ d'où : $A^*Y = A^*(x_2, y_2) = (x_2, 0)$.

Donc $A^*(x, y) = (x, 0)$.

Proposition 1.2.1. Soit $\mathcal{H}$, espace de Hilbert et soit $T \in B(\mathcal{H})$ alors, l'application $T \mapsto T^*$ est isométrique de $B(\mathcal{H})$ dans $B(\mathcal{H})$ de plus :

1. $(T^*)^* = T$.
2. $\|T^*\| = \|T\|$.
3. $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Preuve :

1. On montre que : $\langle Tx, y \rangle = \langle (T^*)^*x, y \rangle, \forall x \in \mathcal{H}, \forall y \in \mathcal{K}$. On a :

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \overline{\langle T^*y, x \rangle} = \overline{\langle y, (T^*)^*x \rangle} = \langle (T^*)^*y, x \rangle. \quad \text{D'où } (T^*)^* = T.$$

2. On a d'après la preuve de théorème précédent $\|T^*\| \leq \|T\|$ et $\|T\| = \|(T^*)^*\|$ donc $\|T^*\| = \|T\|$.

3. On a $\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$.

D'autre part, en utilisant $\forall x \in \mathcal{H}$:

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \leq \|T^*Tx\|\|x\| \leq \|T^*T\|\|x\|^2.$$

Et on sait que : $\|T\|^2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|^2}{\|x\|^2} \leq \sup_{x \neq 1} \|T^*T\| \|x\|^2 \leq \|T^*T\|.$

Donc : $\|T\|^2 = \|T^*T\|.$

Proposition 1.2.2. [47] Soient $S, T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ on a :

1. $(\alpha T + \beta S)^* = \bar{\alpha} T^* + \bar{\beta} S^*, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$
2. $(TS)^* = S^* T^*.$
3. Si T est inversible T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$

Lemme 1.2.1. [8] Soient $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ deux espaces de Hilbert et $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ on a :

- i) $\ker T = (\text{Im } T^*)^\perp.$
- ii) $\ker T^* = (\text{Im } T)^\perp.$
- iii) $\ker T^* = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\text{Im } T} = \mathcal{K}.$

Lemme 1.2.2. Soit $T \in B(\mathcal{H})$ inversible

alors T^* est inversible et satisfait : $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}.$

Preuve

$$TT^{-1} = T^{-1}T = I \text{ (} T \text{ est inversible) } \text{ d'où } (TT^{-1})^* = I^* = I(T^{-1})^* T^* = T^* (T^{-1})^* = I.$$

Alors T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$

1.2.4 Opérateurs isométriques, unitaires, auto-adjoints, positifs

Opérateur isométrie

Définition 1.2.11. On dit que $A \in B(\mathcal{H})$ un opérateur isométrie (ou isométrique) si :

$$A^* A = I; \text{ où bien : } \|Ax\| = \|x\|, \forall x \in H.$$

Opérateur unitaire

Définition 1.2.12. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $U \in B(\mathcal{H})$. On dit que U est un opérateur unitaire si : U est inversible et

$$U^{-1} = U^*.$$

Proposition 1.2.3. Soient $U, V \in B(\mathcal{H})$ des opérateurs unitaires. Alors :

- (i) U est isométrique .
- (ii) $\|U\| = 1$.
- (iii) U^{-1} et U^* sont unitaires.
- (iv) UV est unitaire.

Preuve

- (i) Pour tout $v \in \mathcal{H}$, on a bien :

$$\|Uv\|^2 = \langle Uv, Uv \rangle = \langle U^*Uv, v \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2.$$

- (ii) Si $\|Uv\| = \|v\|$ pour tout $v \in \mathcal{H}$, alors :

$$\|U\| = \sup_{v \in \mathcal{H}} \frac{\|Uv\|}{\|v\|} = 1.$$

- (iii) C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

- (iv) On a bien $(UV)^{-1} = U^{-1}V^{-1} = V^*U^* = (UV)^*$.

Pour contre, une application linéaire isométrique n'est pas forcément unitaire.

Opérateur auto-adjoint

Définition 1.2.13. [47] Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux espaces de Hilbert et $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

L'opérateur adjoint de T est l'opérateur linéaire $T^* : \mathcal{H}_2 \mapsto \mathcal{H}_1$ caractérisé par

$$\langle T^*y, x \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle y, Tx \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$, on dit que T est **symétrique** ou que T est **hermitien** .

Exemple 1.2.3. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ tq

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad d'où \quad A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque que : $A = A^*$ donc est auto-adjoint.

Théorème 1.2.4. [15](Norme d'un opérateur auto-adjoint)

Si T est un opérateur auto-adjoint alors

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Proposition 1.2.4. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, et $T \in B(\mathcal{H})$ auto-adjoint alors :

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Corollaire 1.2.1. Si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, et $T \in B(\mathcal{H})$ un opérateur auto-adjoint alors

$$\langle Tx, x \rangle = 0 \quad \Rightarrow T = 0, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Proposition 1.2.5. [7] Si T_1 et T_2 deux opérateurs auto-adjoint alors

1. $\alpha T_1 + \beta T_2$ est un opérateur auto-adjoint, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $T_1 T_2$ est un opérateur auto-adjoint si $T_1 T_2 = T_2 T_1$.
3. Si T est un opérateur quelconque alors, $T^* T$, $T T^*$ et $T + T^*$ sont auto-adjoints.

Opérateurs positifs

Définition 1.2.14. On dit qu'un opérateur T sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est positif s'il vérifie :

$$\langle x, Tx \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathcal{H};$$

on écrit TB est positif si $T \geq B$.

En utilisant l'identité de polarisation on voit qu'un opérateur positif est nécessairement auto-adjoint.

1.2.5 Racin carrée d'un opérateur linéaire borné

Définition 1.2.15. Soit $T \in B(\mathcal{H})$, on dit que $S \in B(\mathcal{H})$ est la racine carré de T si : $S^2 = T$.

Théorème 1.2.5. Soit T un opérateur linéaire borné positif, alors il existe un unique opérateur positif S tel que : $S^2 = T$.

De plus : Si T commute avec B , alors B commute avec S on note $S = T^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 1.2.4.

1. L'opérateur $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est la racine carrée de l'opérateur $T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$.

Théorème 1.2.6. (Décomposition polaire d'un opérateur linéaire borné)

Soit $T \in B(\mathcal{H})$ et inversible, alors $T = UR$ où R est positif et U est unitaire.

Preuve : Puisque T est inversible, T^* est aussi, donc d'où T^*T est inversible.

Puisque $T^*T \geq 0$, alors $(T^*T)^{\frac{1}{2}} = |T|$ existe, et elle est même inversible, on prend :

$$R = (T^*T)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad U = TR^{-1}$$

donc Il reste de montrer que U est unitaire on a :

$$U^*U = (TR^{-1})^*(TR^*) = (R^{-1})^*T^*TR^{-1},$$

$$(R^{-1} = (R^{-1})^* \text{ car } R \text{ positif}) \quad R^{-1}(T^*T)R^{-1} = I, \quad (\text{car } T^*T = R^2).$$

1.2.6 Les commutateurs

Soit E un espace vectoriel normé complexe de dimension infinie.

Définition 1.2.16. [13] et [16]

1. Un élément X de $B(E)$ est appelé commutateur s'il existe T et B de $B(E)$, tels que

$$X = TB - BT.$$

2. Le commutant de $T \in B(E)$ est l'ensemble défini par

$$\{T\}' = \{B \in B(E), TB = BT\}.$$

3. Le bicommutant de $T \in B(E)$ est l'ensemble défini par

$$\{A\}'' = \{C \in B(E), CB = BC, \forall B \in A'\}.$$

Proposition 1.2.6.

- i) $A'' = \left\{ \{A\}' \right\}'$
- ii) A' est une sous-algèbre de $B(E)$.
- iii) A'' est une sous-algèbre commutative de $B(E)$.
- iv) Tout polynôme de A appartient à A''

1.3 Spectre des opérateurs linéaires bornés

Définition 1.3.1. [47] Soit T un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert complexe :

- Le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle un **point régulier** de l'opérateur T , si $(T - \lambda I)$ est inversible de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ et $(T - \lambda I)^{-1} \in B(\mathcal{H})$.
- L'ensemble des points régulier de l'opérateur T s'appelle l'**ensemble résolvant** et note par $\rho(T)$ tel que

$$\rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ inversible} \right\}.$$

- La complémentaire de $\rho(T)$ on note par $\sigma(T)$ est appelé **le spectre de l'opérateur** T , et enfin la **résolvante** de T défini par :

$$R_\lambda(T) \doteq \left\{ (T - \lambda)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(T) \right\}.$$

Définition 1.3.2. [16] Pour $T \in B(\mathcal{H})$

- Si $\lambda \in \sigma(T)$ et $\exists \varphi \in \mathcal{H}, \varphi \neq 0$ tel que : $T\varphi = \lambda\varphi$ on dit que φ est un **vecteur propre** de T associé à la valeur propre λ .
- L'ensemble des valeurs propres de T est appelé **spectre ponctuel**, noté $\sigma_p(T)$ et défini par : $\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ non injectif} \right\} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \text{Ker}(T - \lambda I) \neq 0 \right\}$.
- Si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$ et $\overline{\text{Im}(T - \lambda I)} = \mathcal{H}$, on dit que λ est dans le **spectre continue** de T noté $\sigma_c(T)$ donc est défini par

$$\sigma_c(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I)} = \mathcal{H} \right\}.$$

- Si $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$ et $\overline{\text{Im}(T - \lambda I)} \neq \mathcal{H}$, on dit que : λ appartient au **spectre résident** noté $\sigma_r(T)$ telque :

$$\begin{aligned} \sigma_r(T) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ injectif et } \overline{\text{Im}(T - \lambda I)} \neq \mathcal{H} \right\} \\ &= \left\{ \lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T), \overline{\text{Im}(T - \lambda I)} \neq \mathcal{H} \right\}. \end{aligned}$$

- Le spectre **approché** de $T \in B(\mathcal{H})$ est l'ensemble

$$\sigma_a(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n) \subset X; \|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I)x_n = 0 \right\}$$

Remarque 1.3.1. $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$.

Définition 1.3.3. [6](Rayon spectrale)

Soit T opérateur borné dans $B(\mathcal{H})$, le rayon spectral de T est $r(T)$ où

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Théorème 1.3.1. Soit $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe et $T \in B(\mathcal{H})$ alors on a :

- 1) La limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\|T^n\|)^{\frac{1}{n}}$ existe et elle égale à $r(T)$
 $\left(\text{i, e } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\|T^n\|)^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} (\|T^n\|)^{\frac{1}{n}} \right).$

- 2) Si T est un opérateur auto-adjoint, alors : $r(T) = \|T\|$.

haptre 2

**Les opérateurs linéaires
bornés et normaux**

Chapitre 2

Les opérateurs linéaires bornés et normaux

Nous présentons Dans ce chapitre les définitions et les principaux résultats sur les opérateurs normaux.

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1. [15] On dit que $T \in B(\mathcal{H})$ est un opérateur normal, si T commute avec son adjoint : $T^*T = TT^*$.

Exemple 2.1.1.

1/ soit $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, tel que $a, b \in \mathbb{C}$, d'où $T^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ 0 & \bar{b} \end{pmatrix}$.

On a : $T^*T = TT^*$, alors T est normal.

2/ On considère l'opérateur (multiplication T_φ par une fonction mesurable borné φ .)

$$T_\varphi : L^2[0, 1] \longrightarrow L^2[0, 1]$$

$$T_\varphi f(t) = \varphi(t)f(t).$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi f, g \rangle &= \int_0^1 \varphi(t)f(t)\overline{g(t)}dt \\ &= \int_0^1 f(t)\overline{\varphi(t)} \overline{g(t)}dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 f(t) \overline{\varphi(t)g(t)} dt = \langle f(t), \overline{\varphi(t)g(t)} \rangle.$$

Donc : $T_\varphi^* g(t) = \overline{\varphi(t)} g(t)$, où bien $T_\varphi^* f(t) = \overline{\varphi(t)} f(t)$.

Donc, $T_\varphi^* T_\varphi = T_\varphi T_\varphi^*$.

L'opérateur T_φ est un hermitien (auto-adjoint) s'il la fonction φ est réelle.

Proposition 2.1.1. Soit $T \in B(\mathcal{H})$, les assertions suivantes sont équivalentes

1. T est normal.
2. $\|Tx\| = \|T^*x\|$, pour tout $x \in \mathcal{H}$.
3. Dans les cas complexes, les parties réelles et imaginaires de T commutent.

Preuve :

- Pour $x \in \mathcal{H}$, alors :

$$\begin{aligned} & \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 \\ &= \langle Tx, Tx \rangle - \langle T^*x, T^*x \rangle. \\ &= \langle (T^*T - TT^*)x, x \rangle. \end{aligned}$$

Donc l'équivalence de 1 et 2.

- On pose : $T = A + iB$, tel que : $A = \operatorname{Re}(T)$, et $B = \operatorname{Im}(T)$.

On a :

$$T^* = A - iB, \text{ et } T^*T - TT^* = 2i(AB - BA).$$

D'où : $T^*T = TT^*$ si et seulement si $AB = BA$.

Corollaire 2.1.1. Si $T \in B(H)$ est normal, on a

$$\operatorname{Ker}(T) = \operatorname{Ker}(T^*).$$

Proposition 2.1.2. Soit T est normal, on a :

1. L'opérateur aT est aussi normal pour tout $a \in \mathbb{C}$.
2. L'opérateur T^n est normal pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve :

1) Nous avons :

$$(aT)(aT)^* = a\bar{a}TT^*, \quad \text{et} \quad (aT)^*(aT) = \bar{a}aT^*T.$$

Puisque T est normal, d'où il sont égaux.

2) T est normal, d'où $TT^* = T^*T$

$$\implies (TT^*)^n = (T^*T)^n$$

$$\implies T^n(T^*)^n = (T^*)^nT^n$$

$$\implies T^n(T^n)^* = (T^n)^*T^n. \text{ C'est -à-dire } T^n \text{ est normal, pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Corollaire 2.1.2. Soit P est polynôme et T est un opérateur normal. Alors $P(T)$ est aussi normal.

Remarque 2.1.1. T^n normal $\not\Rightarrow T$ normal.

Exemple 2.1.2. Soit $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

On a : $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \implies T^2$ est normal, mais T n'est pas normal.

Proposition 2.1.3. Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est normal, on a :

$$\text{Ker}(T) \oplus \overline{\text{Im}(T)} = \mathcal{H}.$$

Preuve : On sait que : $\text{Ker}(T^*) = (\text{Im}T)^\perp$,

d'où

$$(\text{Ker}(T^*))^\perp = ((\text{Im}T)^\perp)^\perp = \overline{(\text{Im}T)}.$$

Donc

$$\mathcal{H} = \text{Ker}(T^*) \oplus (\text{Ker}(T^*))^\perp = \text{Ker}(T) \oplus \overline{(\text{Im}T)}.$$

Proposition 2.1.4. (Inverse d'un opérateur normal)

Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est normal et inversible d'inverse T^{-1} . Alors T^{-1} est aussi normal.

Preuve : On a :

$$\begin{aligned} (T^{-1})^*T^{-1} &= (T^*)^{-1}T^{-1} \\ &= (TT^*)^{-1} = (T^*T)^{-1} \quad (\text{car } T \text{ normal}) \\ &= T^{-1}(T^*)^{-1} = T^{-1}(T^{-1})^*. \end{aligned}$$

Donc T^{-1} est un opérateur normal.

Proposition 2.1.5. Soit $T \in B(\mathcal{H})$, les assertions suivantes sont équivalentes

- i) T est normal.
- ii) $T^{-1}T^*$ (ou T^*T^{-1}) est unitaire.
- iii) Il existe un opérateur unitaire U tel que : $T^* = UT$.

Preuve : Montrons que :

- $i) \implies ii)$ On a :

$$\begin{aligned} (T^{-1}T^*)^*(T^{-1}T^*) &= T(T^{-1})^*T^{-1}T^* \\ &= TT^{-1}(T^{-1})^*T^* = I(TT^{-1})^* = I. \end{aligned}$$

- $ii) \implies iii)$ Clair .
- $iii) \implies i)$ Pour tout $x \in \mathcal{H}$, on a :

$$\begin{aligned} \|T^*x\|^2 &= \|UTx\|^2 \\ &= \langle UTx, UTx \rangle = \langle Tx, U^*UTx \rangle \\ &= \|Tx\|^2. \end{aligned}$$

Donc, T est normal.

2.2 Propriété de Fuglede-Putnam

La propriété de Fuglede joue un rôle très important dans la théorie des opérateurs bornés et non-bornés avec toutes ses applications. Plusieurs travaillent sur ce propriété. Après la preuve de Fuglede-Putnam, Rosenblum a donné une preuve simple en utilisant le théorème de Liouville. Berberian a donné une autre preuve avec une matrice qui fait l'équivalence entre celle de Fuglede et Putnam.

2.2.1 Propriété de Fuglede pour les opérateurs bornés

Théorème 2.2.1. [36](Fuglede - 1950)

Soient T et N deux opérateurs bornés sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, tels que $TN = NT$ où N est normal. Alors,

$$AN^* = N^*A.$$

Puis en 1951 Putnam a fait la généralisation au cas de deux opérateurs normaux.

Théorème 2.2.2. [36](Fuglede-Putnam-Rosenblum) :

Supposons que M , N et $T \in B(\mathcal{H})$ avec M , N sont normaux et $MT = TN$. Alors

$$M^*T = TN^*.$$

2.3 Quelques classes des opérateurs normaux

2.3.1 Opérateurs quasi-normaux

Définition 2.3.1. On dit que $S \in B(\mathcal{H})$ est un opérateur quasi-normal si :

$$S \text{ commute avec } S^*S.$$

Proposition 2.3.1. Si $S = UT$ est la décomposition polaire de S , alors S est quasi-normal si et seulement si : T et U commutent.

Preuve : $T = |S| = (S^*S)^{\frac{1}{2}}$, U est une isométrie partielle.

1. Si S est quasi-normal alors S et S^*S commutent, avec $S^*S = T^2$. Cela implique :
 S et T commutent d'où :

$$\begin{aligned} ST - TS &= 0 \\ &= UTT - TUT \\ &= (UT - TU)T \\ &\implies (UT - TU) = 0 \\ &\implies UT = TU. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \text{Si } UT = TU &\implies UTTT = TUTT = TTUT \\ &\implies ST^2 = T^2S \\ &\implies S \text{ est quasi-normal.} \end{aligned}$$

Proposition 2.3.2. Chaque opérateur quasi-normal est un opérateur sous-normal.

Lemme 2.3.1. Si N est une extension minimale normal de S alors : S est quasi-normal si et seulement si $\mathcal{H}$ est invariant par N^*N .

Preuve : Si S est quasi-normal et $f \in \mathcal{H}$ alors

$$\begin{aligned}\|S^*Sf\|^2 &= \langle S^*Sf, S^*Sf \rangle \\ &= \langle Sf, SS^*Sf \rangle \\ &= \langle Sf, S^*S^2f \rangle = \langle S^2f, S^2f \rangle \\ &= \|S^2f\|^2 \\ &= \|N^2f\|^2 \\ &= \|N^*Nf\|^2.\end{aligned}$$

Par conséquent $N^*Nf \in \mathcal{H}$. L'inverse est clair.

2.3.2 Opérateurs sous normaux

Définition 2.3.2. Un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est dit sous-normal, s'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ et un opérateur normal $N \in B(\mathcal{K})$, tels que $\mathcal{H}$ est invariant pour N et $T = N|_{\mathcal{H}}$.

En d'autres termes, T est dit sous-normal s'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{K}$, tel que $\mathcal{H}$ est un sous-espace de $\mathcal{K}$, et il existe un opérateur normal $N \in B(\mathcal{K})$ qui s'écrit, selon la décomposition $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^\perp$, sous la forme

$$N = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & C \end{bmatrix}, \text{ et } A \in B(\mathcal{H}), B \in (\mathcal{H}^\perp, \mathcal{H}), C \in B(\mathcal{H}^\perp)$$

Exemple 2.3.1.

1. Tout opérateur normal est un sous-normal.
2. Tout opérateur isométrique est un sous-normal.

2.3.3 Opérateurs hyponormaux

Définition 2.3.3. Un opérateur T est hyponormal si :

$$T^*T \geq TT^*.$$

Proposition 2.3.3. Soit T un opérateur hyponormal. Si T est inversible alors T^{-1} est hyponormal.

Preuve : Cette preuve utilise le fait que si T est un opérateur inversible positif et $T \geq I$, alors $T^{-1} \leq I$.

Puisque :

$$T^*T \geq TT^*;$$

et T est inversible alors

$$T^{-1}T^*TT^{*-1} \geq T^{-1}TT^*T^{*-1} = I.$$

Par conséquent : $T^*T^{-1}T^{*-1}T \leq 1$ donc :

$$T^{-1}T^{*-1} \leq T^{*-1}T^{-1}.$$

D'où T^{-1} est hyponormal.

Proposition 2.3.4. Si T un opérateur hyponormal, alors $\|T^n\| = \|T\|^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : Si $f \in \mathcal{H}$ et $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} \|T^n f\|^2 &= \langle T^n f, T^n f \rangle \\ &= \langle T^* T^n f, T^{n-1} f \rangle \leq \|T^* T^n f\| \|T^{n-1} f\| \\ &\leq \|T^{n+1} f\| \|T^{n-1} f\| \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1} f\| \|T^{n-1} f\|$$

Nous allons maintenant prouver l'égalité par récurrence.

Clairement, il est vrai pour $n = 1$, et supposons donc que :

$$\|T^k\| = \|T\|^k, \text{ pour } 1 \leq k \leq n.$$

Alors : $\|T\|^{2n} = \|T^n\|^2 \leq \|T^{n+1} f\| \|T^{n-1} f\|$, d'où $\|T f\|^{n+1} \leq \|T^{n+1} f\|$.

L'inégalité inverse est valable pour tous les opérateurs alors :

$$\|T f\|^{n+1} \leq \|T^{n+1} f\| \leq \|T f\|^{n+1} \implies \|T f\|^{n+1} = \|T^{n+1} f\|.$$

Ainsi, pour chaque nombre naturel n , $\|T^n\| = \|T\|^n$.

Proposition 2.3.5. : Chaque opérateur sous-normal est hyponormal.

Preuve : Soit S un opérateur sous-normal, et N son extension minimale normal. Si nous écrivons

$$N = \begin{pmatrix} S & X \\ 0 & T \end{pmatrix}, \quad N^* = \begin{pmatrix} S^* & 0 \\ X^* & T^* \end{pmatrix}.$$

Alors

$$0 = N^*N - NN^* = \begin{pmatrix} S^*S & S^*X \\ X^*S & X^*X + TT^* \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} SS^* + XX^* & XT \\ T^*X^* & TT^* \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $0 = S^*S - SS^* - XX^*$, ou $S^*S - SS^* = XX^* \geq 0$.

En généralisant le concept de normalité, plusieurs auteurs ont introduit les classes des opérateurs non-normaux.

Notre nouvelle classe occupe l'endroit indiqué dans les schéma suivant et les inclusions sont tous appropriés :

opérateur normal $\subset$ opérateur quasi-normal $\subset$ opérateur sous-normal $\subset$ opérateur hyponormal.

2.4 Spectre d'un opérateur normal

Proposition 2.4.1. [7] Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est normal, alors :

1. Si $Tx = \lambda x$, tel que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in H$. Alors : $T^*x = \bar{\lambda}x$.
2. Deux espaces propres de T associé à des valeurs propres distincts sont orthogonaux.

Proposition 2.4.2. Le rayon spectral d'un opérateur normal $T \in B(\mathcal{H})$ vérifie :

$$r(T) = \|T\|.$$

Preuve : On suppose d'abord que T est auto-adjoint.

On a $\|T^2\| = \|T\|^2$ et par récurrence sur n l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation

$$\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}, \text{ il vient } r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|T\|.$$

On revient au cas normal, l'élément TT^* est auto-adjoint et il s'ensuit que l'on a :

$$\begin{aligned} r(T) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|T^n(T^n)^*\|^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (r(TT^*))^{\frac{1}{2}} = (\|TT^*\|)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

Proposition 2.4.3. Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.

Dans le résultat suivant, nous présentons certaines caractérisations du spectre continu d'un opérateur normal borné.

Théorème 2.4.1. Soit $T \in B(H)$ est normal, les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $\lambda \in \sigma_c(T)$.
- ii) $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$.
- iii) $T - \lambda I$ est injectif, et l'image de $(T - \lambda I)(\mathcal{H})$ n'a pas fermée.

Preuve :

$ii) \implies i)$ Puisque $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$, alors $T - \lambda I$ est injectif, mais ne pas surjectif.

Supposons que l'image $(T - \lambda I)(\mathcal{H})$ n'est pas dense dans $\mathcal{H}$, alors

il existe $z \in (T - \lambda I)(\mathcal{H})^\perp$. Par conséquent nous avons,

$$z \in (T - \lambda I)(\mathcal{H})^\perp = \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda}I)(\mathcal{H})^\perp = \text{Ker}(T - \lambda I).$$

D'où contradiction, donc nous concluons que : $\lambda \in \sigma_c(T)$.

$i) \implies iii)$ Est évidente à partir de la définition du spectre continu.

$iii) \implies ii)$ On a $T - \lambda I$ est injectif, alors $\lambda \notin \sigma_p(T)$.

Supposons que $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors il existe un opérateur (inversible) $S \in B(\mathcal{H})$ tel que : $S(T - \lambda I)x = x$, pour tout $x \in \mathcal{H}$.

En particulier nous avons

$$\frac{1}{\|S\|} \|x\| \leq \|(T - \lambda I)x\|, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

D'où $(T - \lambda I)(\mathcal{H})$ est complet et fermée dans $\mathcal{H}$, qui est une contradiction.

Nous concluons que : $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$.

Proposition 2.4.4. Le spectre d'un opérateur normal est égale à le spectre approximatif

$$\sigma(T) = \sigma_a(T).$$

Corollaire 2.4.1. Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est un opérateur normal. Alors,

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \sigma_a(T).$$

Théorème 2.4.2. Soit $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert complexe, soit $T \in B(\mathcal{H})$ un opérateur normal et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a

1. $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}(T_\lambda) = \mathcal{H}\}$
2. $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} \neq \mathcal{H}\}$
3. $\sigma_c = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathcal{R}(T_\lambda)} = \mathcal{H} \text{ et } \mathcal{R}(T_\lambda) \neq \mathcal{H}\}$
4. $\sigma_r(T) = \emptyset$

2.5 Normalité d'une somme de deux opérateurs normaux bornés

Dans cette section les opérateurs sont supposés être bornés. Tout d'abord, nous notons que la somme de deux opérateurs normaux n'est pas toujours normal, comme indiqué en exemple suivant :

Exemple 2.5.1. Considérons les matrices A et B définies que :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que A et B sont normaux (B auto-adjoint) mais :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{n'est pas normal.}$$

Proposition 2.5.1. Soient A et B deux opérateurs normaux bornés, si A commute avec B^* . Alors, $A + B$ est normal.

Preuve Montrons que : $(A + B)(A + B)^* = (A + B)^*(A + B)$.

On a :

$$\begin{aligned}(A + B)(A + B)^* &= (A + B)(A^* + B^*) \\ &= AA^* + AB^* + BA^* + BB^*.\end{aligned}$$

Et

$$(A + B)(A + B)^* = AA^* + AB^* + BA^* + BB^*.$$

D'après la **propriété de Fuglede-Putnum**, et par la normalité de A et B on aura :

$$\begin{aligned}(A + B)(A + B)^* &= A^*A + B^*A + A^*B + B^*B \\ &= A^*(A + B) + B^*(A + B) \\ &= (A^* + B^*)(A + B) \\ &= (A + B)^*(A + B).\end{aligned}$$

Puisque

$$AB^* = B^*A, \quad BA^* = A^*B.$$

Combinaison de ces deux équations avec la normalité de A et B donnent l'égalité des deux équations, donc établir la normalité de $A + B$.

Remarque 2.5.1. L'inverse de la proposition précédente n'est pas toujours vrai. On peut construire beaucoup de contre-exemples.

Exemple 2.5.2. Soit $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est normal, comme

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors on a : $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont normaux mais n'est pas commutent.

Remarque 2.5.2. [32]

1. Dans la proposition précédente on peut remplacer la commutativité de A et B^* , par la commutativité de A et B .

2. La normalité de $A + B$ n'implique pas la commutativité de A et B .

Corollaire 2.5.1. Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints commutant, alors :
 $A + iB$ est normal.

Proposition 2.5.2. Soient A et B deux opérateurs normaux bornés.

Si AB^* et B^*A sont auto-adjoints. Alors

la normalité de $A + B$ implique que la commutativité de A et B .

Preuve : Puisque A , B et $A + B$ sont normaux, on trouve

$$A^*B + B^*A = BA^* + AB^*$$

Comme AB^* et B^*A sont auto-adjoints. Alors,

$$(AB^*)^* = BA^* = AB^* \text{ et } (B^*A)^* = A^*B = B^*A.$$

On obtient $B^*A = AB^*$. D'après la propriété de **Fuglede-Putnam**. Alors :

$$AB = BA.$$

2.6 Normalité d'un produit de deux opérateurs normaux bornés

Théorème 2.6.1. [27] Soient A et B deux opérateurs bornés tels que A et AB sont normaux.
Alors : $A^*AB = BA^*A \iff (BA)$ est normal.

Preuve : Montrons que : $A^*AB = BA^*A \Rightarrow (BA)$ est normal.

Nous posons $A = UP$ alors $A = PU$, ou U est unitaire et P est positif

de plus ils commutent, $A^*A = AA^* = P^2$ car A est normal et d'après le calcul on obtient
 $P^2B = P^2B$ implique $PB = PB$

$$\begin{aligned} U^*(AB)U &= U^*UPBU \\ &= PBU \\ &= BPU \\ &= BA. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (BA)(BA)^* &= U^*(AB)U (U^*(AB)U)^* \\
 &= U^*(AB)UU^*(AB)^*U \\
 &= U^*(AB)(AB)^*U \\
 &= U^*(AB)^*(AB)U \\
 &= U^*(AB)^*UU^*(AB)U \\
 &= (BA)^*(BA).
 \end{aligned}$$

Alors BA est normal.

Montrons que :

$$(BA) \text{ est normal} \Rightarrow A^*AB = BA^*A?$$

On a $ABA = ABA \Rightarrow (AB)A = A(BA)$, et d'après la propriété de Fuglede-Putnam

$$(AB)^*A = A(BA)^* \Rightarrow ((AB)^*A)^* = (A(BA)^*)^*,$$

alors $A^*(AB) = (BA)A^*$, donc $A^*AB = BAA^*$.

Théorème 2.6.2. [27] Soient A et B deux opérateurs bornés et normaux. Alors :

$$\begin{cases} A^*AB = BA^*A \\ BB^*A = ABB^* \end{cases} \iff (BA) \text{ et } (AB) \text{ sont normaux.}$$

Preuve :

$$1- \begin{cases} A^*AB = BA^*A \\ BB^*A = ABB^* \end{cases} \Rightarrow (BA) \text{ et } (AB) \text{ sont normaux.}$$

On a :

$$\begin{aligned}
 (AB)^*(AB) &= B^*A^*AB = B^*BAA^* \\
 &= ABB^*A^* \\
 &= (AB)(AB)^*
 \end{aligned}$$

donc AB est normal

$$\begin{aligned}
 (BA)^*(BA) &= A^*B^*BA \\
 &= A^*ABB^* \\
 &= BAA^*B^* \\
 &= (BA)(BA)^*
 \end{aligned}$$

alors BA est normal.

L'implication inverse

$$2- (BA) \text{ et } (AB) \text{ sont normaux} \Rightarrow \begin{cases} A^*AB = BA^*A \\ BB^*A = ABB^* \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned} ABA = ABA &\Rightarrow (AB)A = A(BA) \\ &\Rightarrow (AB)^*A = A(BA)^*, \text{ d'après Fuglede-Putnam} \\ &\Rightarrow B^*A^*A = AA^*B^* \\ &\Rightarrow (B^*A^*A)^* = (AA^*B^*)^* \\ &\Rightarrow A^*AB = BA^*A \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} BAB = BAB &\Rightarrow (BA)B = B(AB) \\ &\Rightarrow (BA)^*B = B(AB)^*, \text{ d'après Fuglede-Putnam} \\ &\Rightarrow A^*B^*B = BB^*A^* \\ &\Rightarrow (A^*B^*B)^* = (BB^*A^*)^* \\ &\Rightarrow B^*BA = ABB^* \end{aligned}$$

Théorème 2.6.3. [27] Soient A et B deux opérateurs hyonormaux supposons A commute avec la partie réel de B , et B commute avec la partie réel de A^* .

Alors AB et BA sont hyonormaux.

haptre 3

**Les opérateurs des
puissances normaux**

Chapitre 3

Les opérateurs bornés des puissances normaux

3.1 Les opérateurs n -normal

Dans cet section, nous présentons les opérateurs n -normaux sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Nous donnons quelques propriétés de ces opérateurs. En général, un opérateur n -normal n'a pas nécessaire d'être un opérateur normal, un opérateur hyponormal.

Définition 3.1.1. [4] Soit $T \in B(\mathcal{H})$, est appelé un opérateur n -normal si

$$T^n T^* = T^* T^n.$$

Proposition 3.1.1. Soit $T \in B(\mathcal{H})$, alors T est n -normal si et seulement si : T^n est normal.

Preuve :

– Soit T opérateur n -normal, $T^n T^* = T^* T^n$. Donc

$$\begin{aligned} T^n (T^*)^n &= T^* T^n (T^*)^{n-1} = T^* (T^n T^*) (T^*)^{n-2} \\ &= (T^*)^2 T^n (T^*)^{n-2} = (T^*)^n T^n. \end{aligned}$$

Alors T^n est normal.

– Soit T^n est normal. Comme $T^n T = T T^n$, après propriété de Fuglede $T^* T^n = T^n T^*$. Donc T est n -normal.

Remarque 3.1.1. L'opérateur borné normal est n -normal pour tout n .

Mais l'inverse n'est pas vrai.

Exemple 3.1.1. Soit $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, on a T est 2-normal mais n'est pas normal.

Proposition 3.1.2. Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est n -normal. Alors

- 1- T^* est n -normal.
- 2- Si T^{-1} existe, alors (T^{-1}) est n -normal.
- 3- Si S, T deux opérateurs $\in B(\mathcal{H})$ sont unitairement équivalents, alors S est n -normal.

Preuve :

- 1- Comme T est n -normal, donc T^n est normal. On a

$$(T^n)^* = (T^*)^n \quad \text{est normal,}$$

alors T^* est un opérateur n -normal.

- 2- Comme T est n -normal, donc T^n est normal. Et on a

$$(T^n)^{-1} = (T^{-1})^n \quad \text{est normal,}$$

alors T^{-1} est un opérateur n -normal.

- 3- Soit T est un opérateur n -normal et T, S sont unitairement équivalents.

Donc existe un opérateur unitaire U tel que $S = UTU^*$, alors $S^n = UT^nU^*$.

Comme T^n est normal, alors S^n est normal $\implies S$ est un opérateur n -normal.

Théorème 3.1.1. Si S, T deux opérateurs n -normaux commutent, alors

ST est un opérateur n -normal .

Preuve : Comme S, T deux opérateurs n -normaux commutent $\implies S^n, T^n$ sont aussi.

Alors $S^n T^n$ est un opérateur normal.

Et on a $S^n T^n = (ST)^n, (ST)^n$ est normal. Donc ST est un opérateur n -normal.

Remarque 3.1.2. Cette résultat n'est pas nécessairement vrai Si S, T non commutent.

Exemple 3.1.2. Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ opérateurs sur espace

de Hilbert $\mathbb{C}^2$. S et T sont 2-normal. On remarque que

$$ST = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} i & -2 \\ 0 & i \end{pmatrix} = TS.$$

Mais $(ST)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 4i \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas normal donc ST n'est pas 2-normal.

Proposition 3.1.3. Soit T, S deux opérateurs n -normaux commutent, tel que :

$(S + T)^*$ commute avec $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k$. Alors $(S + T)$ est un opérateur n -normal.

Preuve :
$$(S + T)^n (S + T)^* = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S^{n-k} T^k \right) (S^* + T^*),$$

$$(S + T)^n (S + T)^* = S^n S^* + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k (S + T)^* + T^n S^* + S^n T^* + T^n T^*.$$

Comme $(S + T)^*$ est commute avec $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k$,

$$(S + T)^n (S + T)^* = S^* S^n + (S + T)^* \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k + S^* T^n + T^* S^n + T^* T^n.$$

Alors
$$(S + T)^n (S + T)^* = (S + T)^* (S^n + T^n) + (S + T)^* \left(\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} S^{n-k} T^k \right).$$

Donc
$$(S + T)^n (S + T)^* = (S + T)^* \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S^{n-k} T^k \right) = (S + T)^* (S + T)^n$$

Remarque 3.1.3. la somme de deux opérateurs n -normal commutent ne pas nécessairement n -normal.

Exemple 3.1.3. Soit $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a S et T sont 2-normal, et commutent. Mais

$$S + T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ donc } (S + T)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est non-normal.}$$

Donc $S + T$ est un opérateur non 2-normal.

Lemme 3.1.1. Soient $S, T \in B(\mathcal{H})$ sont deux opérateurs 2-normaux. Si

$$ST + TS = 0;$$

alors $T + S$ et ST sont 2-normaux.

Preuve :

- On a $ST + TS = 0$, $S^2T^2 = T^2S^2$. Alors $(S + T)^2 = S^2 + T^2$ est normal.
Donc $(S + T)$ est un opérateur 2-normal.
- $ST + TS = 0$, $(ST)^2 = -S^2T^2 = -T^2S^2$, après (3.1.1) ST est un opérateur 2-normal.

Théorème 3.1.2. Soit $T_1, \dots, T_m$ sont opérateurs n -normaux sur $B(\mathcal{H})$.

alors : $(T_1 \oplus \dots \oplus T_m)$ et $(T_1 \otimes \dots \otimes T_m)$ sont opérateurs n -normaux.

Preuve :

$$\begin{aligned} & \bullet (T_1 \oplus \dots \oplus T_m)^n (T_1 \oplus \dots \oplus T_m)^* = (T_1^n \oplus \dots \oplus T_m^n) (T_1^* \oplus \dots \oplus T_m^*) \\ & \quad = T_1^n T_1^* \oplus \dots \oplus T_m^n T_m^* = T_1^* T_1^n \oplus \dots \oplus T_m^* T_m^n \\ & \quad = (T_1^* \oplus \dots \oplus T_m^*) (T_1^n \oplus \dots \oplus T_m^n) = (T_1 \oplus \dots \oplus T_m)^* (T_1 \oplus \dots \oplus T_m)^n. \end{aligned}$$

Alors $(T_1 \oplus \dots \oplus T_m)$ est un opérateur n -normal.

- Pour $x_1, \dots, x_m \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
 & (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^n (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^* (x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \\
 &= (T_1^n \otimes \dots \otimes T_m^n) (T_1^* \otimes \dots \otimes T_m^*) (x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \\
 &= T_1^n T_1^* x_1 \otimes \dots \otimes T_m^n T_m^* x_m \\
 &= T_1^* T_1^n x_1 \otimes \dots \otimes T_m^n T_m^* x_m = (T_1^* \otimes T_m^*) (T_1^n \otimes T_m^n) (x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \\
 &= (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^* (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^n (x_1 \otimes \dots \otimes x_m).
 \end{aligned}$$

Alors $(T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^n (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^* = (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^* (T_1 \otimes \dots \otimes T_m)^n$.

Donc $(T_1 \otimes \dots \otimes T_m)$ est n -normal.

Proposition 3.1.4. Soit $T \in B(H)$ avec la décomposition cartésienne $T = A + iB$ où A et B sont auto-adjoint. Alors T est 2-normal si et seulement si

$$B^2 \text{ commute avec } A, \text{ et } A^2 \text{ commute avec } B.$$

Preuve :

- Supposer $B^2 A = A B^2$ et $A^2 B = B A^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
 T^2 T^* &= (A + iB)^2 (A - iB) = (A^2 + iAB + iBA - B^2) (A - iB) \\
 &= A^3 - iA^2 B - B^2 A + iB^3 + iABA + AB^2 + iBA^2 + BAB
 \end{aligned}$$

et

$$T^* T^2 = A^3 - AB^2 + iA^2 B + iABA - iBA^2 + iB^3 + BAB + B^2 A$$

comme $B^2 A = A B^2$ et $A^2 B = B A^2$, d'où $T^2 T^* = T^* T^2$.

Donc T est 2-normal.

- Soit T est 2-normal $\implies T^2 T^* = T^* T^2$, alors :

$$-B^2 A + iBA^2 - iA^2 B + AB^2 = -AB^2 + iA^2 B - iBA^2 + B^2 A,$$

$$(AB^2 - B^2 A) + i(BA^2 - A^2 B) = 0.$$

Soit $T_1 = AB^2 - B^2 A$, $T_2 = BA^2 - A^2 B$. Alors $T_1^* = -T_1$, $T_2^* = -T_2$

(T_1, T_2 sont symétriques hermitiens), et $T_1 + iT_2 = 0$. Alors $-T_1 + iT_2 = 0$.

Donc $T_1 = AB^2 - B^2 A = 0$. Même, $B^2 A = AB^2$.

Remarque 3.1.4. L'opérateur 2-normal est un opérateur $2k$ -normal, et l'opérateur 3-normal est un opérateur $3k$ -normal.

Exemple 3.1.4.

1) Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Alors $T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ est un opérateur normal.

Mais $T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ est non normal.

2) Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $T^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ est un opérateur normal.

Mais $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$ est un opérateur non normal.

Proposition 3.1.5. Si T est un opérateur k -normal et $(k+1)$ -normal pour tout k entier positif. Alors T est $(k+2)$ -normal.

Donc, T est n -normal pour tout $n \geq k$

Preuve : On a T est k -normal, $T^k T^* = T^* T^k$. Donc

$$T T^k T^* T = T T^* T^k T. \text{ Alors } T^{k+1} T^* T = T T^* T^{k+1}.$$

Comme T est $(k+1)$ -normal, $T^* T^{k+2} = T^{k+2} T^*$.

Alors T est $(k+2)$ -normal.

Corollaire 3.1.1. Si T est 2-normal et 3-normal, alors T est n -normal pour tout $n \geq 2$.

Exemple 3.1.5. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$ est un opérateur sur espace de Hilbert complexe.

Alors T est 2-normal, 3-normal, donc est n -normal $\forall n \geq 2$ mais est non normal.

Proposition 3.1.6. Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est un opérateur k -normal et est un isométrie partielle. Alors T est $(k+1)$ -normal.

Et donc T est n -normal ($\forall n \geq k$,) et k entier positif.

Preuve : Comme T est un isométrie partielle [16], $TT^*T = T$. Donc

$$TT^*T^k = T^k \quad \text{et} \quad T^kT^*T = T^k.$$

Comme T est k -normal

$$T^{k+1}T^* = T^k \quad \text{et} \quad T^*T^{k+1} = T^k.$$

Alors

$$T^{k+1}T^* = T^*T^{k+1}.$$

Donc T est $(k+1)$ -normal. Après la proposition (3.1.5) est n -normal ($\forall n \geq k$).

Corollaire 3.1.2. Si $T \in B(\mathcal{H})$ est 2-normal et isométrie partielle, alors

T est n -normal ($\forall n \geq 2$).

Lemme 3.1.2. Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est k -normal et $(k+1)$ -normal. Si T ou T^* est injectif, alors T est normal.

Preuve : On a T est $(k+1)$ -normal $\implies T^{k+1}T^* = T^*T^{k+1}$.

Et on a T est k -normal $\implies T^{k+1}T^* = T^kT^*T$.

Donc

$$T^k(TT^* - T^*T) = 0.$$

Comme T est injectif $\implies TT^* - T^*T = 0$. Alors T est normal.

Dans cas T^* est injectif, comme T^* est k -normal et $(k+1)$ -normal $\implies T^*$ est normal.

Donc T est normal.

Proposition 3.1.7. Pour $n \geq 2$. On a $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ est n -normal si et seulement si $b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1}) = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Preuve : Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Alors T est n -normal si et seulement si

$$T^n = \begin{pmatrix} a^n & b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1}) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}, \quad T^*T^n = T^nT^*.$$

T est normal si et seulement si

$$|b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1})| = 0.$$

Donc

$$b(a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1}) = 0.$$

Exemple 3.1.6. Considérer $n = 3$ dans la proposition précédent, alors T est 3-normal si et seulement si $b(a^2 + ac + c^2) = 0$. Prendre $a = 2$, $b = 1$, et $c = -1 + \sqrt{3}i$. Alors

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 + \sqrt{3}i \end{pmatrix} \text{ est 3-normal.}$$

$$\text{Mais } T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \text{ est normal, donc } T \text{ est 3-normal.}$$

Proposition 3.1.8. En générale et après la proposition (3.1.7). On a Si

$$T = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad T^n = \begin{pmatrix} A^n & \sum_{i=0}^{n-1} A^i X B^{n-i-1} \\ 0 & B^n \end{pmatrix}.$$

Où A, B et X sont opérateurs dans $B(\mathcal{H})$

3.2 Les opérateurs (n, k) -normal

Définition 3.2.1. [19] Soit T est opérateur borné . on appelle T est (n, k) -normal si et seulement si

$$T^n (T^k)^* = (T^k)^* T^n,$$

où n, k entiers non négatifs.

Remarque 3.2.1. tout opérateur normal borné est (n, k) -normal

(où $n = k = 1$). Et tous les opérateur n -normal est (n, k) -normal (où $m = 1$).

Mais l'inverse n'est pas toujours vrai .

Exemple 3.2.1. Soit $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$

$$\text{Alors, } T^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } (T^2)^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ alors } T^3 (T^2)^* = \begin{pmatrix} 32 & 16 \\ 0 & -32 \end{pmatrix} = (T^2)^* T^3.$$

Donc, T est $(3, 2)$ -normal. Mais est non 3-normal,

$$\left(T^3 T^* = \begin{pmatrix} 20 & -8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 16 & 8 \\ 8 & 20 \end{pmatrix} = T^* T^3 \right)$$

Corollaire 3.2.1. Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors T est $(2, 2)$ -normal si $b = c$

Preuve : T est $(2, 2)$ -normal si et seulement si $T^2 (T^2)^* = (T^2)^* T^2$.

$$\text{On a } T^* = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \text{ et } T^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix} \implies (T^2)^* = \begin{pmatrix} a^2 + bc & c(a + d) \\ b(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors } (T^2)^* T^2 = \begin{pmatrix} (a^2 + bc)^2 + c^2(a + d)^2 & (a + d)(b(a^2 + bc) + d(d^2 + bc)) \\ (a + d)(b(a^2 + bc) + c(d^2 + bc)) & b^2(a + d)^2 + (d^2 + bc)^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{et } T^2 (T^2)^* = \begin{pmatrix} (a^2 + bc)^2 + b^2(a + d)^2 & (a + d)(c(a^2 + bc) + c(d^2 + bc)) \\ (a + d)(c(a^2 + bc) + b(d^2 + bc)) & c^2(a + d)^2 + (d^2 + bc)^2 \end{pmatrix}.$$

ce qui implique T est $(2, 2)$ -normal si et seulement si $b = c$.

Proposition 3.2.1. Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, où a, b, c sont des nombres complexes,

et $n, k \geq 2$. Alors T est (n, k) -normal si et seulement si

$$b^2 (a^{n-1} + a^{n-2}c + \dots + c^{n-1}) (a^{k-1} + a^{k-2}c + \dots + c^{k-1}) = 0, \quad c^k = a^k \text{ et } c^n = a^n.$$

$$\text{Preuve : On a } T^n = \begin{pmatrix} a^n & b \left(\sum_{d=1}^n a^{n-d} c^{d-1} \right) \\ 0 & c^n \end{pmatrix}$$

$$\text{et } (T^k)^* = \begin{pmatrix} a^k & o \\ b \left(\sum_{d=1}^k a^{k-d} c^{d-1} \right) & c^k \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc : } T^n (T^m)^* = \begin{pmatrix} \left[a^n a^k + b^2 \left(\sum_{d=1}^n a^{n-d} c^{d-1} \right) \left(\sum_{d=1}^k a^{k-d} c^{d-1} \right) \right] & \left[b c^k \left(\sum_{d=1}^n a^{n-d} c^{d-1} \right) \right] \\ b c^n \left(\sum_{d=1}^k a^{k-d} c^{d-1} \right) & c^n c^k \end{pmatrix}.$$

$$\text{Et } (T^k)^* T^n = \begin{pmatrix} a^n a^k & b a^k \left(\sum_{d=1}^n a^{n-d} c^{d-1} \right) \\ \left[b a^n \left(\sum_{d=1}^k a^{k-d} c^{d-1} \right) \right] & \left[(c^n c^k + b^2 \left(\sum_{d=1}^n a^{n-d} c^{d-1} \right) \left(\sum_{d=1}^k a^{k-d} c^{d-1} \right)) \right] \end{pmatrix}.$$

Par conséquent T est (n, k) -normal si et seulement si

$$b^2 \left(\sum_{d=1}^n a^{n-d} c^{d-1} \right) \left(\sum_{d=1}^k a^{k-d} c^{d-1} \right) = 0, \quad c^k = a^k \quad \text{et} \quad c^n = a^n.$$

Préposition 3.2.1. Soit T est un opérateur borné. Si T est (n, k) -normal, alors T^{nk} est un opérateur normal.

Preuve : T est un opérateur (n, k) -normal, alors $T^n (T^k)^* = (T^k)^* T^n$, et $(T^c)^* = (T^*)^c$ pour chaque c entier non négatif, Donc :

$$\begin{aligned} T^{nk} (T^{nk})^* &= (T^n)^k ((T^k)^n)^* = \underbrace{(T^n T^n \dots T^n)}_{k \text{ - times}} \underbrace{(T^k T^k \dots T^k)^*}_{n \text{ times}} \\ &= T^n T^n \dots T^n (T^k)^* \dots (T^k)^* = T^n T^n \dots (T^k)^* T^n (T^k)^* \dots (T^k)^* \\ &\vdots \\ &= \underbrace{(T^k)^* (T^k)^* \dots (T^k)^*}_{n \text{ - times}} \underbrace{(T^n T^n \dots T^n)}_{k \text{ - times}} = \underbrace{(T^k T^k \dots T^k)^*}_{n \text{ - times}} \underbrace{(T^n T^n \dots T^n)}_{k \text{ - times}} \end{aligned}$$

$$= ((T^k)^n)^* (T^n)^k = ((T^n)^k)^* (T^n)^k = (T^{nk})^* T^{nk}.$$

Donc T^{nk} est normal.

Proposition 3.2.2. T est un opérateur (n, k) -normal si et seulement si T est (k, n) -normal.

Preuve : Soit T est (n, k) -normal, alors $T^n (T^k)^* = (T^k)^* T^n$. Donc :

$$T^k (T^n)^* = \left((T^k (T^n)^*)^* \right)^* = \left(T^n (T^k)^* \right)^* = \left((T^k)^* T^n \right)^* = (T^n)^* T^k.$$

Alors T est (k, n) -normal.

Proposition 3.2.3. Si $T \in B(\mathcal{H})$ est un opérateur (n, k) -normal, alors

- 1) T^* est (n, k) -normal.
- 2) Si T^{-1} existe alors T^{-1} est (n, k) -normal.
- 3) Soient $S, T \in B(\mathcal{H})$ deux opérateurs sont unitairement équivalents, alors S est (n, k) -normal.

Preuve : On a T est (n, k) -normal, alors $T^n (T^k)^* = (T^k)^* T^n$.

- 1) Après la proposition (3.2.2)

$$(T^*)^n ((T^*)^k)^* = (T^*)^n T^k = T^k (T^*)^n = ((T^*)^k)^* (T^*)^n.$$

Alors T^* est (n, k) -normal.

- 2) On a : $(T^{-1})^n ((T^{-1})^k)^* = (T^n)^{-1} \left((T^k)^* \right)^{-1} = \left((T^k)^* (T^n) \right)^{-1} = ((T^n) (T^k)^*)^{-1}$
 $= \left(T^n (T^k)^* \right)^{-1} = \left((T^k)^* \right)^{-1} (T^n)^{-1} = ((T^{-1})^k)^* (T^{-1})^n.$

Alors T^{-1} est (n, k) -normal.

- 3) Comme S et T , sont unitairement équivalents, alors $S = UTU^*$.

Donc : $(UTU^*)^n = UT^n U^*$ ([11]).

Alors :

$$S^n (S^k)^* = (UTU^*)^n \left((UTU^*)^k \right)^* = UT^n U^* (UT^k U^*)^*$$

$$\begin{aligned}
 &= UT^n U^* U (T^k)^* U^* = UT^n (T^k)^* U^* = U (T^k)^* T^n U^* \\
 &= U (T^k)^* U^* UT^n U^* = \left((T^k U^*)^* U^* \right) UT^n U^* = \left(U (T^k U^*) \right)^* UT^n U^* \\
 &= \left((UTU^*)^k \right)^* (UTU^*)^n = (S^k)^* S^n.
 \end{aligned}$$

Donc S est (n, k) -normal.

Proposition 3.2.4. Soit T est (c, k) -normal et $(c+1, k)$ -normal, où c, k sont entiers non négatifs, alors T est $(c+2, k)$ -normal. Donc T est (n, k) -normal

Preuve : On a T est (c, k) -normal et $(c+1, k)$ -normal, Alors

$$\begin{aligned}
 &T^c (T^k)^* = (T^k)^* T^c \quad \text{et} \quad T^{c+1} (T^k)^* = (T^k)^* T^{c+1} \\
 \implies &T^{c+2} (T^k)^* = TT^{c+1} (T^k)^* = T (T^k)^* T^{c+1} = T (T^k)^* T^c T \\
 &= TT^c (T^k)^* T = T^{c+1} (T^k)^* = (T^k)^* T^{c+1} T = (T^k)^* T^{c+2}.
 \end{aligned}$$

Donc T est $(c+2, k)$ -normal, alors T est (n, k) -normal. $\forall n, k$.

Proposition 3.2.5. [19] Soit T est (n, c) -normal et $(n, c+1)$ -normal, où n, c sont entiers non négatifs, alors T est $(n, c+2)$ -normal. Donc T est (n, k) -normal.

Théorème 3.2.1. soient S et T deux opérateurs (n, k) -normaux, si S commute avec T , alors (ST) est (n, k) -normal.

Preuve : Comme S et T sont commutent, alors $(ST)^n = S^n T^n$.

De plus, S commute avec T^* et T commutes avec S^* , on a :

$$\begin{aligned}
 &(ST)^n ((ST)^k)^* = S^n T^n (S^k T^k)^* = S^n T^n (T^k)^* (S^k)^* \\
 &= S^n T^n (T^k)^* (S^k)^* = S^n (T^k)^* T^n (S^k)^* \quad (T \text{ est } (n, k)\text{-opérateur}) \\
 &= (T^k)^* S^n (S^k)^* T^n = (T^k)^* (S^k)^* S^n \quad (S \text{ est } (n, k)\text{-opérateur}) \\
 &= ((ST)^k)^* (ST)^n.
 \end{aligned}$$

Alors ST est (n, k) -normal.

Théorème 3.2.2. Soit $T_1, T_2, \dots, T_p$ sont des opérateurs (n, k) -normaux sur $B(\mathcal{H})$, alors $(T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)$ est un (n, k) -normal.

Preuve : Comme $T_1, T_2, \dots, T_p$ sont (n, k) -normaux, alors :

$$T_i^n (T_i^k)^* = (T_i^k)^* T_i^n \quad \forall i = 1, 2, \dots, p.$$

$$\begin{aligned} (T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)^n \left((T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)^k \right)^* &= (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) (T_1^k \oplus T_2^k \oplus \dots \oplus T_p^k)^* \\ &= (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) (T_1^k)^* \oplus (T_2^k)^* \oplus \dots \oplus (T_p^k)^* = T_1^n (T_1^k)^* \oplus T_2^n (T_2^k)^* \oplus \dots \oplus T_p^n (T_p^k)^* \\ &= (T_1^n)^* T_1^n \oplus (T_2^n)^* T_2^n \oplus \dots \oplus (T_p^n)^* T_p^n = ((T_1^n)^* \oplus (T_2^n)^* \oplus \dots \oplus (T_p^n)^*) (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) \\ &= (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n)^* (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) = ((T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)^n)^* (T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)^n. \end{aligned}$$

Alors $(T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_p)$ est (n, k) -normal.

Théorème 3.2.3. Soit $T_1, T_2, \dots, T_p$ sont (n, k) -normaux sur $B(\mathcal{H})$, alors $(T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)$ est un (n, k) -normal.

Preuve :

Comme $T_1, T_2, \dots, T_p$ sont (n, k) -normaux, alors :

$$T_i^n (T_i^k)^* = (T_i^k)^* T_i^n \quad \forall i = 1, 2, \dots, p. \text{ Et soit } x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathcal{H}, \text{ donc :}$$

$$\begin{aligned} &(T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)^n \left((T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)^k \right)^* (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) \\ &= (T_1^n \otimes T_2^n \otimes \dots \otimes T_p^n) (T_1^k \otimes T_2^k \otimes \dots \otimes T_p^k)^* (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) \\ &= T_1^n (T_1^k)^* x_1 \otimes T_2^n (T_2^k)^* x_2 \otimes \dots \otimes T_p^n (T_p^k)^* x_p = (T_1^k)^* T_1^n x_1 \otimes (T_2^k)^* T_2^n x_2 \otimes \dots \otimes (T_p^k)^* T_p^n x_p \\ &= \left((T_1^k)^* \oplus (T_2^k)^* \oplus \dots \oplus (T_p^k)^* \right) (T_1^n \oplus T_2^n \oplus \dots \oplus T_p^n) (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) \\ &= (T_1^k \otimes T_2^k \otimes \dots \otimes T_p^k)^* (T_1^n \otimes T_2^n \otimes \dots \otimes T_p^n) (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) \\ &= \left((T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)^k \right)^* (T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)^n (x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p). \end{aligned}$$

Alors $(T_1 \otimes T_2 \otimes \dots \otimes T_p)$ est (n, k) -normal.

3.3 Les opérateurs n -quasi normaux

3.3.1 Les opérateurs n -quasi normaux

Définition 3.3.1. [39] L'opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est n -quasi normal, si :

$$T^n T^* T = T^* T^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarque 3.3.1.

- i) L'opérateur 1-quasi normal est un opérateur quasi normal.
- ii) Chaque opérateur quasi-normal est n -quasi-normal, quelque soit n .

Préposition 3.3.1. L'opérateur n -normal est aussi n -quasi normal. Mais l'inverse n'est pas vrai.

3.3.2 Quelques classes des opérateurs n -quasi normaux

Définition 3.3.2. [42], [43] et [40]

A) L'opérateur quasi n - normal :

On dit qu'un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est un opérateurs quasi n - normal n normal si,
 $(\forall n \in \mathbb{Z}^+)$

$$T (T^* T^n) = (T^* T^n) T.$$

B) L'opérateur K -quasi-normal :

On dit qu'un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est K -quasi-normal si

$$T (T^* T)^k = (T^* T)^k T.$$

C) L'opérateur N -quasi-normal :

On dit qu'un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est N -quasi-normal si et seulement si

$$T (T^* T) = N (T^* T) T.$$

D) L'opérateurs (K, N) quasi-normal :

On dit qu'un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est (K, N) quasi-normal si satisfait :

$$T^k (T^* T) = N (T^* T) T^k, \quad \text{où } K \in \mathbb{Z}^+ \text{ et } N \in B(\mathcal{H}).$$

E) L'opérateur (K, N) quasi n -normal :

On dit qu'un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est (K, N) -quasi n -normal si satisfait

$$T^k (T^* T^n) = N (T^* T^n) T^k, \quad \text{où } K \in \mathbb{Z}^+ \text{ et } N \in B(\mathcal{H}).$$

F) L'opérateur $(K, N)^*$ quasi n -normal :

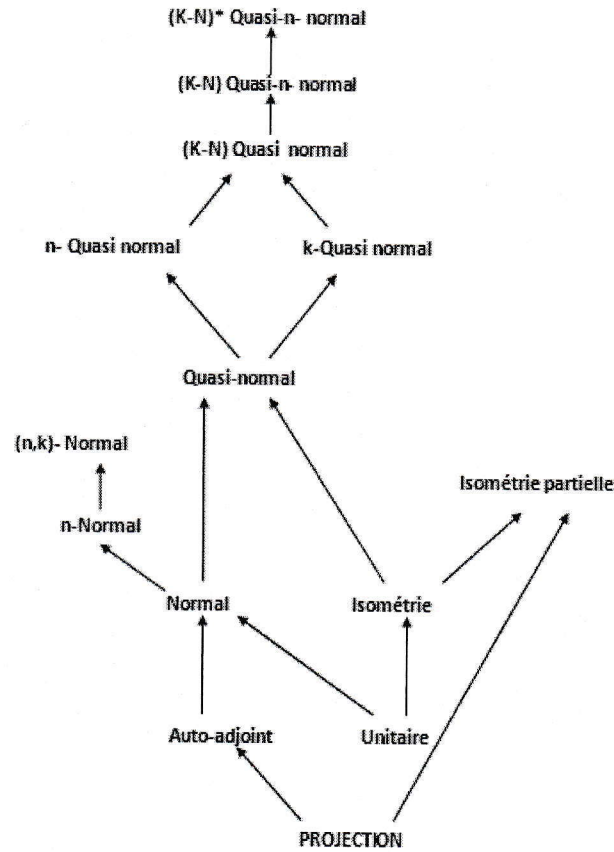
On dit qu'un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est $(K, N)^*$ -quasi n -normal si satisfait :

$$T^K (T^* T^n)^K = N (T^* T^n)^K T^K, \quad \text{où } K \in \mathbb{Z}^+ \text{ et } N \in B(\mathcal{H}).$$

Remarque 3.3.2. Soit T est un opérateur $(K, N)^*$ -quasi n -normal, tel que :

- 1- Si $N = I$ alors T est un opérateur quasi n -normal.
- 2- Si $K = 1, n = 1$ alors T est un opérateur N -quasi normal .
- 3- Si $K = 1, N = I$ alors T est un opérateur quasi n -normal .
- 4- Si $n = 1, N = I$ alors T est un opérateur quasi normal .
- 5- Si $K = 1, n = 1, N = I$ alors T est un opérateur quasi normal.

Pour illustrer ces propos, nous allons introduire le schéma suivant



3.4 Théorie spectrale des opérateurs des puissances normaux

Théorème 3.4.1. [34] Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est 2-normal et $\sigma(T) \cap \sigma(-T) \subset \{0\}$. Alors

$$\sigma(T) = \sigma_a(T)$$

Preuve : Comme $\sigma(T) = \sigma_a(T) \cup \sigma_r(T)$, il suffit de montrer $\sigma_r(T) \subset \sigma_a(T)$.

Soit $z \in \sigma_r(T)$. Alors il existe un vecteur non nul $x \in \mathcal{H}$ tel que $T^*x = \bar{z}x$.

Comme $T^{*2}x = \bar{z}^2x$ et T^2 est normal, on a $T^2x = z^2x$

1) Si $z \neq 0$, alors $(T - z)x = 0$.

Comme $-z \notin \sigma(T)$, $(T - z)x = 0$ donc $z \in \sigma_p(T)$.

2) Si $z = 0$, alors $T^2x = 0$ et on a $0 \in \sigma_p(T)$.

Donc $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

Théorème 3.4.2. [34] Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est 2-normal et $\sigma(T) \cap \sigma(-T) \subset \{0\}$.

- 1) Si z et w sont des valeurs propres distinctes de T , et x, y sont les vecteurs propres correspondants (respectivement), alors $\langle x, y \rangle = 0$
- 2) Si z et w sont des valeurs distinctes par $\sigma_a(T)$ et $\{x_n\}, \{y_n\}$ sont les séquences de vecteurs unitaires dans $\mathcal{H}$ tel que

$$(T - z)x_n \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad (T - w)y_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = 0$$

Preuve : Comme $(T^2 - z^2)x_n \rightarrow 0$ et $(T^2 - w^2)y_n \rightarrow 0$.

Et T^2 est normal $\implies (T^2 - \bar{w}^2)y_n \rightarrow 0$. Donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z^2 \langle x_n, y_n \rangle &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle z^2 x_n, y_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T^2 x_n, y_n \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, T^{*2} y_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} w^2 \langle x_n, y_n \rangle. \end{aligned}$$

Si $z^2 = w^2$, alors $(z + w)(z - w) = 0$.

Comme $z \neq w$, on a $z = -w$, et $\sigma(T) \cap \sigma(-T) \subset \{0\}$

ce qui implique $z = w = 0$, qui est impossible pour des valeurs distinctes.

Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = 0.$$

Corollaire 3.4.1. Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est 2-normal et $\sigma(T) \cap \sigma(-T) \subset \{0\}$

Si z et w sont des valeurs propres distinctes de T , alors

$$\ker(T - z) \perp \ker(T - w).$$

Soit M est un sous-espace de $\mathcal{H}$. on dit M est un sous-espace réduce pour T

Si $T(M) \subset M$ and $T^*(M) \subset M$. (M c'est un sous-espace invariant pour T et T^*).

Théorème 3.4.3. [34] Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est 2-normal et $\sigma(T) \cap \sigma(-T) \subset \{0\}$.

Si z est une valeur propre non nulle de T . Alors

$$\ker(T - z) = \ker(T^2 - z^2) = \ker(T^{*2} - \bar{z}^2) = \ker(T^* - \bar{z}).$$

Par conséquent $\ker(T - z)$ est un sous-espace réduce pour T .

Preuve : D'abord nous montrons

$$\ker(T - z) = \ker(T^2 - z^2).$$

Comme il est évident que $\ker(T - z) \subset \ker(T^2 - z^2)$, nous montrons

$$\ker(T^2 - z^2) \subset \ker(T - z).$$

Soit $x \in \ker(T^2 - z^2)$, i.e. $(T^2 - z^2)x = 0$. Alors $(T + z)(T - z)x = 0$.

Comme $z \neq 0$, et $\sigma(T) \cap \sigma(-T) \subset \{0\}$, on a $-z \notin \sigma(T)$.

Ici, $(T - z)x = 0$ et $x \in \ker(T - z)$. Donc,

$$\ker(T^2 - z^2) \subset \ker(T - z) \quad \text{et} \quad \ker(T - z) = \ker(T^2 - z^2).$$

Comme T^2 est normal, c'est clair $\ker(T^2 - z^2) = \ker(T^2 - \bar{z}^2)$.

Et comme $-\bar{z} \notin \sigma(T^*)$ on a

$$\ker(T^2 - \bar{z}^2) = \ker(T^* - \bar{z}).$$

Théorème 3.4.4. [34] En générale, pour T un opérateur n -normal dans $B(\mathcal{H})$, nous définissons la propriété suivante :

$$\sigma(T) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} e^{\frac{2j\pi}{n}i} \sigma(T) \right) \subset \{0\}. \quad (3.1)$$

Ensuite, nous continuons avec le lemme suivant.

Lemme 3.4.1. Soit $T \in B(\mathcal{H})$ satisfait (3.1). Si $z \in \sigma_a(T)$, alors $z^n \in \sigma_a(T^n)$.

Preuve : Suppose que $z \in \sigma_a(T)$, et $z^n \in \sigma_a(T^n)$. Alors il existe une séquence $\{z_k\} \in \sigma(T)$ tel que $z_k^n \rightarrow z^n (k \rightarrow \infty)$.

1) Si $z = 0$, alors il est clair que $z_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$.

Donc, $0 \notin \sigma_a(T)$. (c'est une contradiction).

2) Soit $z \neq 0$. Comme

$$\left(z_k - e^{\frac{2\pi}{n}i} z \right) \cdot \left(z_k - e^{\frac{2 \cdot 2\pi}{n}i} z \right) \cdots \left(z_k - e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i} z \right) \cdot (z_k - z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On peut supposer :

(i) $z_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} z$.

(ii) il existe $j (j = 1, \dots, n-1)$ tel que $z_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} e^{\frac{j\pi}{n}i} z$.

comme $z \in \sigma_a(T)$, (i) ne pas vrai. Mais si $z_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} e^{\frac{j\pi}{n}i} z$, alors $z_k \rightarrow e^{\frac{2j\pi}{n}i} z$.

Comme $z_k \in \sigma(T)$ et $\sigma(T)$ est compact, $e^{\frac{2\pi j}{n}i} z \in \sigma(T)$.

Comme $z \neq 0$ et $z \in \sigma(T) \cap \left(e^{\frac{2\pi j}{n}i} \sigma(T) \right)$, c'est une contradiction.

Théorème 3.4.5. Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est n -normal et satisfait (3.1). Alors $\sigma(T) = \sigma_a(T)$

Théorème 3.4.6. Soit $T \in B(\mathcal{H})$ est n -normal et satisfait (3.1). Alors

1) Si z et w sont des valeurs propres distinctes de T et $x, y \in \mathcal{H}$ sont les vecteurs propres correspondants, respectivement, alors $\langle x, y \rangle = 0$

1) Si z, w sont des valeurs distinctes de $\sigma_a(T)$ et $\{x_n\}, \{y_n\}$ sont les séquences de vecteurs unitaires dans $\mathcal{H}$ tel que $(T - z)x_n \rightarrow 0$ et $(T - w)y_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = 0$$

haptre 4

**Applications des opérateurs
des puissances normaux**

Chapitre 4

Applications des opérateurs

n -normaux

Dans ce chapitre, on étudie la solvabilité d'une équations d'opérateurs dans l'algèbre $B(\mathcal{H})$ des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Hilbert complexe séparable et de dimension infinie $\mathcal{H}$, on considère l'équation $A^n X B^n - X D = C$, où A, B, C et D des opérateurs dans $B(\mathcal{H})$.

4.1 L'équation $AX - XB = C$ dans $B(\mathcal{H})$

Rappelons que si M est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{H}$ et $T \in B(\mathcal{H})$, alors T s'écrit suivant la décomposition $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ comme suit

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Où $A \in B(M)$, $B \in B(M^\perp, M)$, $C \in B(M, M^\perp)$ et $D \in B(M^\perp)$

Proposition 4.1.1. Soit A un opérateur linéaire borné défini sur $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, par $A = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$,

alors son adjoint A^* est donné par $A^* = \begin{pmatrix} Q^* & S^* \\ R^* & T^* \end{pmatrix}$.

Lemme 4.1.1. [5] Si la matrice d'opérateurs $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ définie sur $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ est inversible, alors l'opérateur $S^*S + Q^*Q$ est inversible dans $\mathcal{H}$

Théorème 4.1.1. Soient A et B deux opérateurs bornés dans $B(\mathcal{H})$, satisfait la propriété de $(FP)_{B(\mathcal{H})}$ et C est opérateur dans $B(\mathcal{H})$, alors l' équation :

$$AX - XB = C$$

admet une solution X dans $B(\mathcal{H})$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

sont deux opérateurs similaires dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$

Remarque 4.1.1. On peut généraliser dans le cas $A + i\alpha, B + i\beta \in B(H)$ sont normaux donc on a l'équation :

$$(A + i\alpha)X - X(B + i\beta) = C$$

Proposition 4.1.2. [48] Soient A et B deux opérateurs normaux bornés dans $B(\mathcal{H})$, et C est opérateur dans $B(\mathcal{H})$, alors l' équation :

$$(A + i\alpha)X - X(B + i\beta) = C, \tag{4.1}$$

admet une solution X dans $B(\mathcal{H})$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} (A + i\alpha) & 0 \\ 0 & (B + i\beta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} (A + i\alpha) & C \\ 0 & (B + i\beta) \end{pmatrix}$$

sont deux opérateurs similaires dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$

Preuve : Si l'équation (4.1) admet une solution X , alors

$$\begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A + i\alpha) & 0 \\ 0 & (B + i\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A + i\alpha) & (A + i\alpha)X - X(B + i\beta) \\ 0 & (B + i\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (A + i\alpha) & C \\ 0 & (B + i\beta) \end{pmatrix}$$

Par conséquent $\begin{pmatrix} (A + i\alpha) & 0 \\ 0 & (B + i\beta) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} (A + i\alpha) & C \\ 0 & (B + i\beta) \end{pmatrix}$ sont similaires.

Supposons maintenant que les opérateurs :

$$\begin{pmatrix} (A + i\alpha) & 0 \\ 0 & (B + i\beta) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} (A + i\alpha) & C \\ 0 & (B + i\beta) \end{pmatrix} \text{ sont similaires.}$$

Alors il existe un opérateur inversible $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ dans $B(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ telque

$$\begin{pmatrix} (A + i\alpha) & 0 \\ 0 & (B + i\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (A + i\alpha) & C \\ 0 & (B + i\beta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (A + i\alpha)Q & (A + i\alpha)R \\ (B + i\beta)S & (B + i\beta)T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q(A + i\alpha) & QC + R(B + i\beta) \\ S(A + i\alpha) & SC + T(B + i\beta) \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne après l'identification terme par terme

$$(A + i\alpha)Q = Q(A + i\alpha) \quad \text{et} \quad (A + i\alpha)R - R(B + i\beta) = QC.$$

$$(B + i\beta)S = S(A + i\alpha) \quad \text{et} \quad (B + i\beta)T - T(B + i\beta) = SC.$$

En appliquant la propriété $(FP)_{B(H)}$ on obtient

$$(B + i\beta)S^* = S^*(A + i\alpha) \text{ et } (A + i\alpha)Q^* = Q^*(A + i\alpha).$$

Par conséquent

$$(A + i\alpha)S^*S = S^*S(A + i\alpha),$$

d'où $(A + i\alpha)$ commute avec S^*S et Q^*Q , donc avec la somme $S^*S + Q^*Q$.

L'inverse $(S^*S + Q^*Q)^{-1}$ commute aussi avec $(A + i\alpha)$, car en général si :
 $(A + i\alpha)$ commute avec $(B + i\beta)$, donc il commute avec $(B + i\beta)^{-1}$. En effet

$$\begin{aligned} (A + i\alpha)(B + i\beta) &= (B + i\beta)(A + i\alpha) \\ \Leftrightarrow (B + i\beta)^{-1}(B + i\beta)(A + i\alpha)(B + i\beta)^{-1} &= (B + i\beta)^{-1}(A + i\alpha)(B + i\beta)(B + i\beta)^{-1} \\ \Leftrightarrow (A + i\alpha)(B + i\beta)^{-1} &= (B + i\beta)^{-1}(A + i\alpha). \end{aligned}$$

De plus on obtient

$$\begin{aligned} (S^*S + Q^*Q)C &= Q^*((A + i\alpha)R - R(B + i\beta)) + S^*((B + i\beta)T - T(B + i\beta)) \\ &= ((A + i\alpha)Q^*R + (A + i\alpha)S^*T) - (Q^*R(B + i\beta) + S^*T(B + i\beta)) \\ &= (A + i\alpha)(Q^*R + S^*T) - (Q^*R + S^*T)(B + i\beta). \end{aligned}$$

D'après lemme (4.1.1)

l'opérateur $S^*S + Q^*Q$ est inversible, son inverse commute avec $(A + i\alpha)$.

Par conséquent

$$C = (A + i\alpha)(S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T) - (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T)(B + i\beta)$$

d'où

$$X = (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T).$$

Proposition 4.1.3. [34] L'opérateur $(A - \lambda)$ est n -normal, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ si et seulement si A est un opérateur normal.

En générale et après la proposition précédente, nous concluons la même résultat.

Proposition 4.1.4. Soient A et B deux opérateurs bornés dans $B(\mathcal{H})$, satisfait la propriété de $(FP)_{B(\mathcal{H})}$ et E est opérateur dans $B(\mathcal{H})$, alors l'équation :

$$(A - \lambda)X + X(B - \mu) = E.$$

admet une solution X dans $B(\mathcal{H})$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} (A - \lambda) & 0 \\ 0 & (B - \mu) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} (A - \lambda) & E \\ 0 & (B - \mu) \end{pmatrix}$$

sont deux opérateurs similaires dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

4.2 L'équation $AXB - X = E$ dans $B(\mathcal{H})$

Maintenant, nous avons étudié cette famille d'équation où A est un opérateur n -normal

le cas A est un opérateur 1-normal :

Si $n = 1$ donc l'opérateur A est 1-normal, alors est normal.

Ainsi, l'équation $AXB - X = E$, est résolue si satisfait les conditions suivantes :

Soient A et B deux opérateurs normaux dans $B(\mathcal{H})$ et E quelconque dans $B(\mathcal{H})$. Tous d'abord il faut remarquer que si l'opérateur B est borné et inversible, l'équation

$$AXB - X = E. \quad (4.2)$$

Peut se mettre sous la forme

$$AX - XB^{-1} = EB^{-1}.$$

Alors il devient équation résoluble comme on a vu dans le section précédent (parceque si B est normal $\implies B^{-1}$ est aussi normal).

Définition 4.2.1. Deux matrices $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$ sont dites équivalentes sur

$\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, si et seulement s'ils existent deux matrices inversible U et V telles que

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} V$$

Théorème 4.2.1. Soient $A, B, E \in B(\mathcal{H})$. L'équation (4.2) admet une solution X si et seulement si

i) La paire (A, B) satisfait la propriété $(FP)_{B(H)}$

$$ii) \begin{pmatrix} A - \lambda I & 0 \\ 0 & I - \lambda B \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A - \lambda I & E \\ 0 & I - \lambda B \end{pmatrix}.$$

Sont équivalentes dans $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

le cas A est un opérateur 2-normal :

Si $n = 2$ alors A est un opérateur 2-normal.

Théorème 4.2.2. Soient $A, X, E \in B(\mathcal{H})$, A est un opérateur 2-normal, et $B = A^*$ alors

$$A^2 X (A^*)^2 - X = E \quad (4.3)$$

admet un solution.

Preuve : Comme A est 2-normal, donc A^2 est normal. On a $B = A^*$. Alors l'équation (4.3), peut se mettre sous la forme :

$$A (A X A^* + X) A^* - (A X A^* + X) = E \quad (4.4)$$

On suppose $U = (A X A^* + X)$ Alors

$$(4.4) \Leftrightarrow A U A^* - U = E$$

$$\Leftrightarrow A U B - U = E.$$

Par conséquent

$$A^2 X (A^*)^2 - X = E \Leftrightarrow \begin{cases} A U A^* - U = E \\ U = (A X A^* + X) \end{cases}$$

admet un solution U où X est la solution de l'équation $U = A X A^* + X$.

le cas A est un opérateur $(2, 2)$ -normal :

Théorème 4.2.3. Soient $A, X, E \in B(\mathcal{H})$, A est un opérateur $(2, 2)$ -normal, et $B = A^*$ alors

$$A^2 X (A^*)^2 - X = E \quad (4.5)$$

admet un solution.

Preuve : On a A est $(2, 2)$ -normal, $\implies A$ est 2-normal $\implies A^2$ est normal. Alors

En multiplier (4.5) à droite par (A^2) on obtient :

$$A^2 X (A^*)^2 A^2 - X A^2 = E A^2 \quad (4.6)$$

Comme A^2 est $(2, 2)$ -normal, alors $(A^*)^2 A^2 = A^2 (A^*)^2$. Maintenant

$$(4.6) \Leftrightarrow A^2 X A^2 (A^*)^2 - X A^2 = E A^2$$

On pose $X A^2 = Y$, alors

$$A^2 X A^2 (A^*)^2 - X A^2 = E A^2 \Leftrightarrow \begin{cases} A^2 Y (A^*)^2 - Y = D \\ Y = X A^2 \\ D = E A^2 \end{cases}$$

Donc l'équation $A^2 X (A^*)^2 - X = E$ admet un solution Y , où $Y = X A^2$.

le cas A est un opérateur n -normal :

Proposition 4.2.1. En générale, Si A est un opérateur n -normal, et $B = A^*$ alors l'équation

$$A^n X (A^*)^n - X = E, \quad (4.7)$$

admet un solution.

Preuve : Comme A est un opérateur n -normal, alors A^n est normal

Si $B = A^* \implies B^n = (A^*)^n$,

alors (4.7) $\Leftrightarrow$

$$(A X A^* - X) + A(A X A^* - X) A^* + A^2(A X A^* - X) (A^*)^2 \dots + A^{n-1}(A X A^* - X) (A^*)^{n-1} = E$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} A^i Z (A^*)^i = E.$$

Où $Z = A X A^* - X$. Donc

$$(4.7) \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} A^i Z (A^*)^i = E \\ Z = A X A^* - X \end{cases}$$

Une tres intéressante preuve a été donnée par **Bhatia** [11] pour résoluble l'équation

$$\sum_{i=0}^n A^{n-i} X B^i = Y.$$

Est admet un solution donné par

$$X = \frac{\sin \pi/n}{\pi} \int_0^\infty (t + A^n)^{-1} Y (t + A^n)^{-1} t^{1/n} dt.$$

En général et en fonction du résultat de **Bhatia**[11], nous pouvons résoudre cette famille d'équations. Alors $Z = AXA^* - X$ admet un solution X où Z est la solution de l'équation

$$\sum_{i=0}^{n-1} A^i Z (A^*)^i = E.$$

le cas A est un opérateur (n, k) -normal :

Proposition 4.2.2. En générale, Si A est un opérateur (n, k) -normal alors l'équation

$$A^n X (A^*)^n - X = E, \tag{4.8}$$

admet un solution dans $B(\mathcal{H})$.

Preuve : Comme A est un opérateur (n, k) -normal, alors A^n est normal, alors

En multiplier (4.8) à droite par (A^k) on obtient :

$$A^n X (A^*)^n A^k - X A^k = E A^k.$$

Comme A est (n, k) -normal, alors $(A^*)^n A^k = A^k (A^*)^n$ par conséquent

$$(4.8) \Leftrightarrow A^n X A^k (A^*)^n - X A^k = E A^k.$$

On pose $R = X A^k$ alors

$$(4.8) \Leftrightarrow \begin{cases} A^n R (A^*)^n - R = E A^k \\ R = X A^k \end{cases}$$

Donc, Si A un opérateur (n, k) -normal, et $B = A^*$, alors l'équation $A^n X (A^*)^n - X = E$ admet une solution R , où $R = X A^k$. ($\forall k, n$ deux entiers positifs)

4.3 La nature de solution l'équation $A^n X A^* - X = E$

Théorème 4.3.1. Soient $A, B, E \in B(\mathcal{H})$, A est normal et la paire (A, B) satisfait la propriété de Fuglede-Putnam.

Si l'opérateur E est auto-adjoint, et $B = A^*$ alors L'équation

$$A X A^* - X = E,$$

admet une solution X est auto-adjoint .

Preuve : On a

$$A X A^* - X = E. \tag{4.9}$$

On prendre l'adjoint de l'équation (4.9)

$$(A X A^* - X)^* = E^* \Leftrightarrow (A^*)^* X^* A^* - X^* = E^*.$$

En remplace $B = A^*$, donc on obtient

$$A X^* A^* - X^* = E^*. \tag{4.10}$$

Comme $E = E^*$, alors l'équation (4.9) devient

$$A X^* A^* - X^* = E.$$

Après (4.2.1) cette équation admet une solution X^* , tel que la solution est unique donc

$$X^* = X.$$

Théorème 4.3.2. Soient A, B et E sont opérateurs dans $B(\mathcal{H})$, tel que A est normal et la paire (A, B) satisfait la propriété de Fuglede-Putnam.

Si l'opérateur E est anti-auto-adjoint, et $B = A^*$ alors L'équation

$$A X A^* - X = E$$

admet une solution anti-auto-adjoint.

Preuve : On a

$$AXA^* - X = E. \quad (4.11)$$

On prendre l'adjoint de l'équation (4.11) et multiplie à gauche par (-1) on obtient

$$A(-X^*)A^* - (-X^*) = -E^*.$$

Alors si E est anti-auto-adjoint devient :

$$A(-X^*)A^* - (-X^*) = E.$$

Maintenant, pour l'unicité de la solution ce sur la solution est anti-auto-adjoint.

Remarque 4.3.1. En générale l'équation

$$A^n X (A^*)^n - X = E.$$

- Si A est un opérateur auto-adjoint la nature de solution X est auto-adjoint tel que E est auto-adjoint .

Mais :

- Si A est un opérateur normal ou n -normal dans $B(\mathcal{H})$, alors ne pas nécessaire que la solution normal ou n -normal.

)

Conclusion

L'essentiel du le travail présenté dans ce mémoire consiste aux les opérateurs des puissance normaux et ces applications. Donc après tous nous validans ces résultats :

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, séparable de dimension infini et soit $B(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$.

- Pour $T \in B(\mathcal{H})$ nous définissons les opérateurs normaux : T commute avec son adjoint : $T^*T = TT^*$.
- Il y-a quelques classes des opérateurs normaux :
 - les opérateurs quasi-normaux : Un opérateur $S \in B(\mathcal{H})$ est quasi-normal si :

$$S \text{ commute avec } S^*S.$$

- les opérateurs sous-normaux : Un opérateur $T \in B(\mathcal{H})$ est dit sous-normal s'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{K} \supseteq \mathcal{H}$ et un opérateur normal $N \in B(\mathcal{K})$ tels que $\mathcal{H}$ est invariant pour N et $T = N|_{\mathcal{H}}$.
- les opérateurs hypnormaux : Un opérateur T est hyponormal si :

$$T^*T \geq TT^*.$$

Cette classification nous donne un résultat important indiqué dans les schéma suivant et les inclusions sont tous appropriés :

opérateur normal $\subset$ opérateur quasinormal $\subset$ opérateur sous-normal $\subset$ opérateur hyponormal.

- La somme de deux opérateurs normaux A et B n'est pas toujours normal, la normalité de $A + B$ Il faut être réciproque que la commutativité de A et B .

- La question est que si A et B sont normaux, quand-est-ce qu'on a AB normal ? la réponse est positive dès que A et B , commutent avec une application du fameux théorème de Fuglede-Putnam.
- Pour $T \in B(\mathcal{H})$; les opérateurs n -normaux satisfait T^n commute avec son adjoint : $T^n T^* = T^* T^n$.
- Si T est un opérateur n -normal $\Leftrightarrow T^n$ est normal.
- T est un opérateur (n, k) -normal si et seulement si $T^n (T^k)^* = (T^k)^* T^n$
- Les opérateurs n - quasi normaux et quelques classes :
 - Les opérateurs n - quasi normaux : $T^n T^* T = T^* T^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
 - Les quelques classes d'opérateurs n -quasi normal où $K \in \mathbb{Z}^+$ et $N \in B(\mathcal{H})$:
 - L'opérateur quasi n - normal : $T (T^* T^n) = (T^* T^n) T$.
 - L'opérateur K -quasi-normal : $T (T^* T)^k = (T^* T)^k T$.
 - L'opérateur N -quasi-normal : $T (T^* T) = N (T^* T) T$.
 - L'opérateur (K, N) quasi-normal : $T^k (T^* T) = N (T^* T) T^k$.
 - L'opérateur (K, N) quasi n -normal : $T^k (T^* T^n) = N (T^* T^n) T^k$.
 - L'opérateur $(K, N)^*$ quasi n -normal : $T^K (T^* T^n)^K = N (T^* T^n)^K T^K$.
- L'équation d'opérateurs $(A - \lambda)X + X(B - \mu) = E$ où A et B sont des opérateurs normaux admet une solution X dans $B(\mathcal{H})$ si et seulement si

$$\begin{pmatrix} A - \lambda & 0 \\ 0 & B - \mu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} A - \lambda & E \\ 0 & B - \mu \end{pmatrix}.$$

Sont deux opérateurs similaires

- L'équation d'opérateurs $AXA^* - X = C$, telle que A est un opérateur n -normal et $B = A^*$ admet une solution.
- L'équation $A^n X (A^*)^n - X = E$, et $B = A^*$ admet un solution auto-adjoint, anti-auto-adjoint (respectivement) si E est aussi.
- Si A est un opérateur normal ou n -normal, et $B = A^*$ alors ne peut pas nécessaire la solution de l'équation $A^n X (A^*)^n - X = E$ est un opérateur normal ou n -normal.

Bibliographie

- [1] Adnan A. S.Jibril, *On operators whose squares are 2-normal*, *Journal of Mathematical Sciences : Advances and Applications Volume 8, Number 2*, 2011, 61 – 72
- [2] Akkouchi. M, *Remarks on the spectrum of bounded and normal operators on Hilbert space*, *An. St. Univ. Ovidius Constanta. Vol. 16(2)*, 2008, 7 – 14.
- [3] Albrecht. E, *P. G. Spain, When Products of Self-adjoints Are Normal*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128/8(2000), 2509 – 2511.
- [4] Alzuraiqi.S. A , A.B. Patel, *On n-Normal Operators*, *General Mathematics Notes*, Vol. 1, No. 2, December 2010, 61 – 73
- [5] Arendt.W, Rabiger.F, A.Sourour *Spectral Properties of the operator equation $AX - XB = Y$* , *Quart. J. Math. Oxford*, 45 : 2(1994), 133 – 149.
- [6] Arveson. W, *A Short Course on Spectral Theory*(Graduate texts in mathematics, 209), 2002 Springer-Verlag New York.
- [7] Aubrun. G, *Théorie des Opérateurs M1 Mathématiques*, Université de la Réunion.
- [8] Berberian.S.K, *Introduction to Hilbert space*. 1971, New York.
- [9] Bernau.S. J, *The Spectral Theorem For Normal Operators*, 15May, 1964, *journal london math. soc.*, 40(1965), 478 – 486.
- [10] Bhatia.R, *Matrix Analysis*, GTM169, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [11] Bhatia.R, and Mitsuru Uchiyama, *The operator equation $\sum_{i=0}^n A^{n-i} X B^i = Y$* , 18 May, 2009, New Delhi, India.
- [12] Brezis.H, *Analyse Fonctionnelle Théorie et applications*, masson Paris New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

-
- [13] Brooke.J. A, P.Busch, D.B.Pearson, *Commutativity up to a factor of bounded operators in complex Hilbert space, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.boucle fermée* /58/2017(2002), 109 – 118.
 - [14] Charles.J, M Mbekhta ,H. Queffélec, *Analyse Fonctionnelle et Theorie des Operateurs* ,Dunod, Paris, 2010.
 - [15] Conway.J.B, *A Course in Operator Theory*, (1999) .
 - [16] Conway.J. B, *A Course in functional Analysis*, Springer, 1990(2nd edition).
 - [17] Davis.H, *The Theory of Linear Operators* ,CopyelGHT, 1936, INC.
 - [18] Devinatz.A , Nussbaum.A. E, *On the Permutability of Normal operators*, *Ann. of Math.* (2), 65(1957), 144 – 152.
 - [19] Eiman H.Abood, Mustafa A. Al-loz, *On some generalization of normal operators on Hilbert space Iraqi Journal of Science*, 2015, Vol 56, No. 2C, 1786 – 1794
 - [20] Flanders.H and Wimmer.H.K, *On the matrix equation $AX - XB = C$ and $AX - YB = C$* , *SIAM.J.Appl. Math.* 32(1977), 707 – 710.
 - [21] Fuglede.B, *A Commutativity Theorem for Normal Operators*, *Proc. Nati. Acad. Sci*, 36(1950), 35 – 40.
 - [22] Gheondea. A, *When are the products of normal operators normal*, *Bull, Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N. S.)* 52(100)/2(2009), 129 – 150.
 - [23] Gohberg.I.C., Krein.M. G. *Introduction to the Theory of Linear Non-Self adjoint Operators*, 1969 by the American Mathematical Society.
 - [24] Gohberg.I, Goldberg Marinus, A. Kaashoek, *Basic Classes of Linear Operators*, 2003 Birkhäuser Verlag.
 - [25] Huet.D, *Décomposition Spectrale et Opérateurs*,1976, Presses Universitaires de France.
 - [26] Intissar.A, *Analyse Fonctionnelle Théorie Spectrale pour les Opérateurs Compacts non auto-adjoints*, 111, rue Nicolas-Vauquelin 31100 Toulouse Décembre 1997.
 - [27] Kaplansky.I, *Products of normal operators*, *Duke Math. J*, 20/2 (1953), 257 – 260.
 - [28] Kittaneh.F, *On the normality of operator products*, *Department of Mathematics, Indiana University Bloomington, IN, 47405 Published online : 01 Apr 2008*.

-
- [29] Kreyszig.E, *Introductory Functional Analysis with Applications*, 1978, John Wiley Sons. Inc.
 - [30] Lumer.G. and M.Rosenblum, *Linear operator equations*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 10(1959), 32 – 41.
 - [31] Mortad. M.H, *An application of the Putnam-Fuglede theorem to normal products of Self-adjoint operators*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131/10, (2003), 3135 – 3141.
 - [32] Mortad. M.H, *On the Normality of the Sum of two Normal Operators*, (2012), 105–112.
 - [33] Mortad. M.H, *On the Normality of the Unbounded Product of Two Normal Operators*, 18 September 2012.
 - [34] Muneo Chō^a, Biljana Načevska^b *Spectral Properties of n -Normal Operators*, *Department of Mathematics, Kanagawa University, Hiratsuka*, (2018).
 - [35] Patel .A.B, Ramanujan. P.B, *On Sum and Product of Normal Operators* , *Indian J. pure appl. Math.* 12(10)1981 : 1213 – 1218.
 - [36] Putnam. C.R, *On Normal Operators in Hilbert Space*, *Amer. J. Math.* 73 (1951) 357 – 362.
 - [37] Putnam. C.R, *Commutation Properties of Hilbert Space Operators and related Topics* , *Springer-Verlag, Berlin · Heidelberg* 1967.
 - [38] Raúl.T.A, Jung. C. B and Lee. W.Y, *Recent Advances in Operator Theory and Applications*, 2009 .
 - [39] Salah Mecheri, *On the class of n -power quasi-normal operators on Hilbert space*, Vol 3, 2(2011), 213 – 228.
 - [40] Salim Dawood Muhsin, Ahmed Mohammed Khalaf, *On The Class of $(K, N)^*$ Quasi- N -Normal Operators on Hilbert Space*, *Journal of Science*, 2017, Vol. 58, No. 4B, pp : 2172 – 2176.
 - [41] Schweinsberg. A, *The operator equation $AX - XB = C$ with normal A and B* , *Pac. J. Math.* 102(1982).
 - [42] Senthil. S, Thangaraju. P and Kumar. D.c, *n -Normal and n -Quasi-normal Composite Multiplication Operator on L^2 – Spaces*, *Journal of Scientific Research & Reports*, 8(4) : 1 – 9, 2015; Article no : 2320 – 0227.

- [43] Sivakumar. N, Bavithra. V, *On the class of (K, N) Quasi- n -Normal operators on Hilbert space*, international journal of advance research, ideas and innovations in technology, 2016.
- [44] Steliairene. J and Viayaiakshmi. P, *Fuglede-Putnam theorem and quasi-nilpotent part of n -normal operators*, Tamkang jorنال of mathematics, Volume 46, 2015.
- [45] Sterling. K, Berberian, *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*, 1974 Springer-Verlag, New York, Inc.
- [46] Stochel. J, *An asymmetric Putnam-Fuglede theorem for unbounded opertors*, Proc. Amer. Math. Soc., 129/8(2001), 2261 – 2271.
- [47] Sunder. V.S, *Operators on Hilbert space*, May 14, 2014. INDIA.
- [48] Ünalın Uzun. B, *A Note on the Operator Equation $AX - XB = Y$* , International Mathematical Forum, 5, 2010, 3211 – 3220.
- [49] Wiegmann. N. A, *Normal products of matrices*. Duke Math J, 15, (1948), 633 – 638.

