

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Théorie de l'interpolation : Identification de
quelques espaces d'interpolation faisant
intervenir des sommes et intersections
d'autres espaces**

Présenté par: ZAIZ Khaoula

Soutenu publiquement le : 31/05/2016

Soutenu devant le jury composé de

Bachir DIOUB
T.HADJ AMMAR
B.K. SADALLAH

MAA
MCB
PROF

Président
Examineur
Rapporteur

Univ. d'El Oued
Univ. d'El Oued
ENS. KOUBA

Année universitaire 2015 – 2016

Remerciements

Je remercie « Allah » qui m'a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.

*Je remercie Monsieur **SADALLAH Boubaker-Khaled** : Professeur à **ENS Kouba**, qui a encadré ce mémoire avec beaucoup de patience et de gentillesse. Il a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes. Je le remercie très sincèrement pour sa disponibilité.*

Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseigné durant nos études à la faculté des sciences exactes.

*Je remercie également tous nos collègues d'étude, particulièrement notre promotion de master mathématique, 2015/2016 à l'université de **Chahid Hama Lakhdar El_ Oued**.*

A tous mes amis surtout : Beggas Samia, Neftia Saida, Sahraoui Djihad.

En fin, je ne voudrais pas oublier ma famille qui m'a soutenu moralement, sans les nommer explicitement, je le remercie pour leur encouragement.

Notations

$\mathcal{D}(T)$	Domaine de l'opérateur T ,
$D^\alpha u$	Dérivée de u au sens des distributions,
$L(X)$	Ensemble des opérateurs linéaires et bornés de X dans X ,
L^p	Espaces de Lebesgue,
$L^{p,q}$	Espaces de Lorentz,
$H^m, W^{m,p}$	Espaces de Sobolev,
$(X, Y)_{\theta,p}$	Espaces d'interpolation réelle,
$\mathbf{C}^b(\mathbb{R}^d)$	Espaces des fonctions continues et uniformément bornées sur $\mathbb{R}^d$,
$\mathbf{C}^\theta(\mathbb{R}^d)$	Espaces des fonctions Hölderiennes d'exposant θ ,
$\mathbf{Lip}(\mathbb{R}^d)$	Espaces des fonctions Lipschitziennes sur $\mathbb{R}^d$,
L_*^p	Espaces L^p avec poids,
$\mathcal{R}(T)$	Image de l'opérateur T .

Table des matières

Introduction	1
1 Notions préliminaires	3
1.1 Rappel d'analyse fonctionnelle	3
1.1.1 Les espaces vectoriels	3
1.1.2 Les espaces de Sobolev	4
1.2 Théorie de l'interpolation	6
1.2.1 Les opérateurs	6
1.2.2 Espaces d'interpolation	7
2 Les espaces d'interpolation réelle	11
2.1 Quelques méthodes d'interpolation réelle	11
2.1.1 La méthode K	11
2.1.2 La méthode J	21
2.1.3 La méthode des traces	25
2.2 Espace intermédiaire et réitération	29
2.2.1 Classes d'espaces intermédiaires	29
3 Identification de quelques espaces d'interpolation réelle	34
3.1 Théorème	34
3.2 Démonstration du théorème	35
3.3 Corollaires	44
3.4 Applications	47
3.4.1 Opérateurs sectoriels	49

3.4.2 Le problème d'intersection	51
Bibliographie	54

Introduction

La théorie de l'interpolation a débuté par le théorème de convexité de Marcel Riesz (1926) qui a été prouvé partiellement. En 1939 Thorin a achevé la démonstration de ce théorème. Quelque temps après Marcinkiewicz a donné une autre version de même théorème. Ces deux théorèmes ont ouvert respectivement la voie à théorie de l'interpolation complexe et réelle.

Pendant plusieurs années, les études de l'interpolation sont restées limitées aux espaces classiques L^p et aux espaces de Marcinkiewicz $L^{p,\infty}$.

Le changement est intervenu dans les années soixante, quand Calderón, Lions, Peetre et autres mathématiciens se sont intéressés à des couples d'espaces de Banach quelconques pour en construire d'autres ayant une certaine propriété.

En particulier, les théorèmes de la théorie d'interpolation sont appliqués dans les situations du type suivant : Etant donné deux couples d'espaces Banach (X_0, X_1) et (Y_0, Y_1) avec des propriétés qu'on précisera plus tard. À partir de ces couples on construit des espaces (dits d'interpolation) $\{X_\theta\}$ et $\{Y_\theta\}$, $0 < \theta < 1$, qui vérifient la propriété suivante : Supposons qu'il y a, pour tout opérateur T linéaire et continu de X_0 à Y_0 et de X_1 dans Y_1 , alors T est continu de X_θ dans Y_θ , pour $0 < \theta < 1$.

Ces espaces d'interpolation ont naturellement d'autres propriétés intéressantes pour la définition de certains espaces et aussi dans la résolution d'équations aux dérivées partielles, telle que la densité, la compacité des opérateurs, etc.

La théorie a continué à se développer, et on la trouve en particulier dans la théorie des espaces de Banach et des espaces des fonctions, la théorie des opérateurs, la théorie des équations différentielles et intégrales, et la théorie de l'approximation.

Dans ce mémoire, on ne s'intéressa qu'aux espaces d'interpolation réelle introduire en particulier par J.Peetre et J.L.Lions.

Ce travail est composé d'une introduction et de trois chapitres.

On commence tout d'abord au premier chapitre par présenter brièvement certaines notions utilisées tout le long de ce mémoire, à savoir les espaces de Sobolev, de Lebesgue, ainsi que des notions de base de la théorie de l'interpolation.

Le second chapitre est consacré à l'étude des espaces de l'interpolation réelle, on parlera alors de quelques méthodes d'interpolation, il s'agit de la K-méthode, J-méthode et la méthode des traces.

Au chapitre trois, on expose le contenu d'un article de M. Haase fournissant des propriétés d'interpolation liées aux sommes et intersections d'espaces.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques outils qui nous seront utiles par la suite. Il sera divisé en deux parties. La première partie présente les définitions de quelques espaces dont nous avons besoin dans notre étude. Quant à la deuxième partie, elle sera une introduction à la théorie d'interpolation.

1.1 Rappel d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Les espaces vectoriels

Espace de Banach

Définition 1.1.1. Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

On dit que $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une norme si :

1. $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X \quad f(\lambda x) = |\lambda|f(x)$;
3. $\forall x \in X, \forall y \in X \quad f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

En général, on note $f(x)$ par $\|x\|$.

$(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé.

Définition 1.1.2. On dit qu'un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$ est de Banach si toute suite de Cauchy dans X est convergente. Cela veut dire que X est complet.

Espace vectoriel topologique

Définition 1.1.3. Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel muni d'une topologie τ . On dit que $(\mathcal{V}, \tau)$ est un espace vectoriel topologique si les applications

$$\begin{aligned} f : \mathcal{V} \times \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} & g : (\mathbb{K}, \mathcal{V}) &\rightarrow \mathcal{V} \\ (x, y) &\mapsto x + y & (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

sont continues.

Proposition 1.1.1. On dit que $(\mathcal{V}, \tau)$ est un espace vectoriel topologique séparé si τ est une topologie séparée.

i.e.,

$$\forall x, y \in \mathcal{V} \ x \neq y, \ \exists O_1, O_2 \in \tau \text{ tels que } \left\{ \begin{array}{l} x \in O_1 \text{ et } y \in O_2 \\ \text{et} \\ O_1 \cap O_2 = \emptyset. \end{array} \right.$$

1.1.2 Les espaces de Sobolev

Espaces L^p

Définition 1.1.4. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \ f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Définition 1.1.5. On pose

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \text{ mesurable et il existe une constante } C > 0 \text{ telle que} \right.$$

$$\left. |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf \left\{ C > 0; \ |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}.$$

Espaces L^p avec poids

Définition 1.1.6. [7] Soit I un intervalle $I \subset (0, +\infty)$. $1 \leq p < \infty$, on note par $L_*^p(I)$ l'espace de fonction dans I par rapport à la mesure de Haar dt/t .

On note

$$\|f\|_{L_*^p(I)} = \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } p < +\infty.$$

Définition 1.1.7. On définit l'espace L_*^∞ comme L^∞ , i.e

$$L_*^\infty(I) = L^\infty(I).$$

Proposition 1.1.2. [7] (L'inégalité de Hardy-Young) Pour toute fonction positive mesurable

$\varphi : (0, a) \mapsto \mathbb{R}$, $0 < a \leq +\infty$, et tous $\alpha > 0$, $p \geq 1$. On a

$$\begin{cases} (i) & \int_0^a t^{-\alpha p} \left(\int_0^t \varphi(s) \frac{ds}{s} \right)^p \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_0^a s^{-\alpha p} \varphi(s)^p \frac{ds}{s}, \\ (ii) & \int_0^a t^{\alpha p} \left(\int_t^a \varphi(s) \frac{ds}{s} \right)^p \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_0^a s^{\alpha p} \varphi(s)^p \frac{ds}{s}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Définition 1.1.8. [7] Soient X un espace de Banach et $p \in [0, \infty]$.

On définit l'espace $L_*^p(I, X)$ comme l'ensemble de toutes les fonctions mesurables de Bochner $f : I \mapsto X$ telle que $t \mapsto \|f(t)\|_X$ est dans $L_*^p(I)$. Il le munit de la norme

$$\|f\|_{L_*^p(I; X)} = \|t \mapsto \|f(t)\|_X\|_{L_*^p(I)}.$$

Corollaire 1.1.1. [7] Soit u une fonction telle que $t \mapsto t^\theta u(t)$ appartient à $L_*^p(0, a; X)$ avec $0 < a < +\infty$, $0 < \theta < 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$. Puis aussi la valeur moyenne

$$v(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u(s) ds, \quad t > 0$$

admet la même propriété, et l'application $v_\theta(t) = t^\theta v(t)$, on a

$$\|v_\theta\|_{L_*^p(0, a; X)} \leq \frac{1}{1 - \theta} \|u_\theta\|_{L_*^p(0, a; X)}.$$

Espaces de Sobolev

Définition 1.1.9. Soit $m \in \mathbb{N}$. L'espace de Sobolev $H^m(I)$ d'ordre m est défini par

$$H^m(I) = \left\{ u \in L^2(I) : D^\alpha u \in L^2(I), |\alpha| \leq m \right\}.$$

On note que $D^\alpha u$ est la dérivée de u au sens des distributions.

Remarque 1.1.1. On peut généraliser la définition précédente : On considère l'espace $L^p(I)$ à la place de $L^2(I)$. Donc, l'espace de Sobolev, est noté $W^{m,p}(I)$, est défini par

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) : D^\alpha u \in L^p(I), |\alpha| \leq m \right\}.$$

$W^{m,p}$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{W^{m,p}} = (u, v)_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

il est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^m \|D^\alpha u\|_{L^p}.$$

C'est un espace de Banach (muni parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $(\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}$).

1.2 Théorie de l'interpolation

1.2.1 Les opérateurs

Définition 1.2.1. [4] Soient X, Y deux espaces vectoriels normés et

$$T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$$

T est une application d'une partie $\mathcal{D}(T)$ de X dans Y .

T est dit opérateur linéaire si, $\mathcal{D}(T)$ est un sous espace vectoriel de X et

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T) : T(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 T(x) + \lambda_2 T(y).$$

Un ensemble borné

Définition 1.2.2. *On dit qu'un ensemble K est borné dans X s'il existe une boule $B(0; r)$ pour $r < \infty$ telle que $K \subset B(0; r)$.*

Opérateur linéaire borné

Proposition 1.2.1. *[4] Soient X, Y deux espaces vectoriels normés et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *L'ensemble $\{Tx : \|x\| \leq 1\}$ est borné dans Y ,*
2. *T est continu en l'origine 0 de X ,*
3. *T est continu,*
4. *$\exists \alpha > 0$ tel que $\forall x \in X \ \|Tx\|_Y \leq \alpha \|x\|_X$.*

Remarque 1.2.1. *On note $L(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés.*

Si $X = Y$, on notera $L(X)$.

1.2.2 Espaces d'interpolation

Couple d'interpolation

Définition 1.2.3. *[1] On dit que deux espaces de Banach X et Y forment un couple d'interpolation si tous les deux s'injectent continûment dans un même espace vectoriel topologique (séparé) $\mathcal{V}$.*

Espace somme

Définition 1.2.4. *[1] Soit (X, Y) un couple d'interpolation d'espaces de Banach, alors $X + Y$ est un espace de Banach, si on le munit de la norme*

$$\{\|v\|_{X+Y} = \inf_{v=x+y} (\|x\|_X + \|y\|_Y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Preuve. À l'aide de la propriété caractéristique de la borne inférieure et des normes des espaces X et Y , on montre que $\{\|v\|_{X+Y} = \inf_{v=x+y} (\|x\|_X + \|y\|_Y) \mid x \in X, y \in Y\}$ est une norme.

- $\forall v \in X + Y \quad \|v\|_{X+Y} \geq 0$?

on a

$$\|x\|_X \geq 0 \text{ et } \|y\|_Y \geq 0;$$

d'où

$$\|x\|_X + \|y\|_Y \geq 0;$$

alors

$$\inf_{x \in X, y \in Y} (\|x\|_X + \|y\|_Y) \geq 0;$$

- $\|v\|_{X+Y} = 0 \Leftrightarrow v = 0$?

On pose

$$\|v\|_{X+Y} = \inf A, \text{ où } A = \{\|x\|_X + \|y\|_Y : v = x + y\}.$$

1. $\Rightarrow$) Soit $v \in X + Y$, supposons que $\inf A = 0$ i.e $\|v\| = 0$.

La propriété caractéristique de la borne inférieure dit que

$$(\forall \epsilon > 0 \exists z_\epsilon \in A \text{ t.q : } z_\epsilon < \inf A + \epsilon).$$

Soit $j \in \mathbb{N}^*$, choisissons $\epsilon = \frac{1}{j}$. Donc, $\exists z_j \in A$ t.q : $z_j < 0 + \frac{1}{j} = \frac{1}{j}$.

On sait que $z_j \geq 0$ et que z_j s'écrit forcément comme

$$z_j = \|x_j\| + \|y_j\|, x_j \in X, y_j \in Y \quad \forall j \in \mathbb{N}^*.$$

Ainsi :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \|x_j\|_X + \|y_j\|_Y < \frac{1}{j} \quad (1.2)$$

De plus, on sait que $v = x_j + y_j, \forall j \in \mathbb{N}$. On fait un passage à la limite dans (1.2) qui donne

$$\|x_j\| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0 \quad \wedge \quad \|y_j\| \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où

$$x_j \xrightarrow{X} 0 \quad \wedge \quad y_j \xrightarrow{Y} 0. \quad (1.3)$$

Par conséquent (se rappeler que $X \hookrightarrow V \wedge Y \hookrightarrow V, X + Y \subset V$).

Par suite :

$$(1.3) \Rightarrow x_j \xrightarrow{V} 0 \quad \wedge \quad y_j \xrightarrow{V} 0.$$

$$\Rightarrow x_j + y_j \xrightarrow{V} 0$$

$$\Rightarrow v = 0.$$

2. $(\Leftarrow) v = 0 \Rightarrow \inf A = 0$. Cela est évident car $v = 0 + 0$ est une décomposition possible et $\inf A \geq 0$.

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in X + Y, \|\lambda v\|_{X+Y} = |\lambda| \|v\|_{X+Y}$?

on a

$$\begin{aligned} \|\lambda v\|_{X+Y} &= \inf_{v=x+y} (\|\lambda x\|_X + \|\lambda y\|_Y); \\ &= \inf_{v=x+y} (|\lambda| \|x\|_X + |\lambda| \|y\|_Y); \\ &= \inf_{v=x+y} (|\lambda| (\|x\|_X + \|y\|_Y)); \\ &= |\lambda| \inf_{v=x+y} (\|x\|_X + \|y\|_Y); \\ &= |\lambda| \|v\|_{X+Y}. \end{aligned}$$

- $\forall (u = x' + y', v = x + y) \in (X + Y, X + Y) \quad \|u + v\|_{X+Y} \leq \|u\|_{X+Y} + \|v\|_{X+Y}$?

on pose $z = x + x'$ et $z' = y + y'$

on a

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{X+Y} &= \inf_{v+u=z+z'} (\|z\|_X + \|z'\|_Y); \\ &\leq \inf_{v+u=z+z'} ((\|x\|_X + \|x'\|_X) + (\|y\|_Y + \|y'\|_Y)); \\ &\leq \inf_{v+u=z+z'} ((\|x\|_X + \|y\|_Y) + (\|x'\|_X + \|y'\|_Y)); \\ &\leq \inf_{v=x+y} (\|x\|_X + \|y\|_Y) + \inf_{u=x'+y'} (\|x'\|_X + \|y'\|_Y); \\ &\leq \|u\|_{X+Y} + \|v\|_{X+Y}. \end{aligned}$$

Donc $\|\cdot\|_{X+Y}$ est une norme.

□

Remarque 1.2.2. En général $\|v\|_{X+Y} = \inf_{v=x+y} (\|x\|_X + t\|y\|_Y)$ est une norme pour $t > 0$.

La démonstration de cette propriété est similaire à la précédente.

Espace intersection

Définition 1.2.5. [1] Soit (X, Y) un couple d'interpolation d'espaces de Banach, alors $X \cap Y$ est un espace de Banach, si on le munit de la norme

$$\{\|x\|_{X \cap Y} = \max(\|x\|_X, \|x\|_Y)\}.$$

Corollaire 1.2.1. $X \cap Y$ s'injecte dans X et Y , qui, eux mêmes, s'injectent dans $X + Y$.

Espace intermédiaire

Définition 1.2.6. [5] Soit (X, Y) un couple d'interpolation d'espaces de Banach. On appelle espace intermédiaire entre X et Y tout espace de Banach E tel que

$$X \cap Y \subset E \subset X + Y$$

avec injections continues.

Espace d'interpolation

Définition 1.2.7. [5] Soit (X, Y) un couple d'interpolation d'espaces de Banach, et soit E un espace intermédiaire entre X et Y . On dit que E est un espace d'interpolation entre X et Y si tout opérateur linéaire de $X + Y$ dans $X + Y$ et continu de X dans X et de Y dans Y , est automatiquement continu de E dans E .

Chapitre 2

Les espaces d'interpolation réelle

Dans le second chapitre, on étudiera les espaces d'interpolation réelle. On définira quelques méthodes d'interpolation : K-méthode, J-méthode et la méthode des traces, on étudiera ces propriétés principales et la relation entre eux. Ensuite, on présentera les classes d'espaces intermédiaires et le théorème de réitération.

2.1 Quelques méthodes d'interpolation réelle

2.1.1 La méthode K

Définitions

Définition 2.1.1. [5] (*Fonction K de Lions-Peetre*). Soient X et Y deux espaces de Banach formant un couple d'interpolation. Pour tout $x \in X + Y$, on définit la fonction K par

$$\forall t > 0 \quad K(t, x, X, Y) := \inf_{x=a+b} \{\|a\|_X + t\|b\|_Y\}$$

où l'infimum est pris sur toutes les décompositions de x en somme d'un élément a de X et d'un élément b de Y .

Dans toute la suite, on écrira $K(t, x)$ au lieu de $K(t, x, X, Y)$, sauf exception.

Remarque 2.1.1.

(i) On note que $K(1, x) = \inf_{x=a+b} \{\|a\|_X + \|b\|_Y\} = \|x\|_{X+Y}$.

(ii) Pour $t > 0$ fixé, la fonction $K(t, x)$ est une norme sur $X + Y$, équivalente à la norme habituelle.

En effet : $\|x\|_{X+Y}$ et $K(t, x)$ sont équivalentes i.e ;

$$\exists \alpha, \beta > 0 : \alpha \|x\|_{X+Y} \leq K(t, x) \leq \beta \|x\|_{X+Y}.$$

On a

$$\min\{1, t\} \|x\|_{X+Y} \leq K(t, x). \quad (2.1)$$

Par ailleurs, on a

$$K(t, x) \leq \max\{1, t\} \|x\|_{X+Y}. \quad (2.2)$$

Donc d'après (2.1) et (2.2) les deux normes sont équivalentes.

(iii) La fonction $t \mapsto K(t, x)$ est croissante, concave de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et continue.

En effet

— la fonction $t \mapsto K(t, x)$ est croissante parce qu'elle est affine et son coefficient de directeur est positive.

— La fonction $K(t, x)$ est concave i.e,

$$\forall x \in X+Y, \quad s \in [0, 1] \quad t_1, t_2 \in (0, +\infty) \quad K(st_1 + (1-s)t_2, x) \geq sK(t_1, x) + (1-s)K(t_2, x).$$

$$\begin{aligned} sK(t_1, x) + (1-s)K(t_2, x) &= s \left(\inf_{x=a+b} \|a\|_X + t_1 \|b\|_Y \right) + (1-s) \left(\inf_{x=a+b} \|a\|_X + t_2 \|b\|_Y \right) \\ &\leq s \inf \|a\|_X + st_1 \inf \|b\|_Y + (1-s) \inf \|a\|_X + (1-s)t_2 \inf \|b\|_Y \\ &\leq (s + 1-s) \inf_{a \in X} \|a\|_X + (st_1 + (1-s)t_2) \inf_{b \in Y} \|b\|_Y \\ &\leq \inf \|a\|_X + t(st_1 + (1-s)t_2) \inf \|b\|_Y \\ &\leq \inf_{x=a+b} (\|a\|_X + (st_1 + (1-s)t_2) \|b\|_Y) \\ &= K(st_1 + (1-s)t_2, x). \end{aligned}$$

D'où $K(t, x)$ est continue.

On définit maintenant une famille d'espaces de Banach à l'aide de la fonction K .

Définition 2.1.2. [8] (*Espaces d'interpolation réelle*). Soient X et Y deux espaces de Banach formant un couple d'interpolation. On définit sur $\mathbb{R}_+ \times (X + Y)$ la fonction K associée à ces deux espaces. Pour tout $0 < \theta < 1$, on définit

$$(X, Y)_\theta = \left\{ x \in X + Y : \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-\theta} K(t, x, X, Y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\theta} K(t, x, X, Y) = 0 \right\}.$$

Un paramètre auxiliaire, $1 \leq p \leq \infty$ étant donné, on définit également

$$(X, Y)_{\theta, p} = \left\{ x \in X + Y : t \mapsto t^{-\theta} K(t, x, X, Y) \in L_*^p(0, +\infty) \right\}.$$

Ces espaces sont des espaces de Banach si on les munit des normes

$$p < +\infty \quad \|x\|_{(X, Y)_{\theta, p}} = \|t^{-\theta} K(t, x, X, Y)\|_{L_*^p(0, +\infty)};$$

$$p = +\infty \quad \|x\|_{(X, Y)_{\theta, \infty}} = \|t^{-\theta} K(t, x, X, Y)\|_{L^\infty(0, +\infty)}.$$

Ces espaces sont appelés *espaces d'interpolation réelle*.

Dans toute la suite, on remplacera la notation $\|x\|_{(X, Y)_{\theta, p}}$ par $\|x\|_{\theta, p}$ sauf exception.

Propriétés élémentaires de l'interpolation réelle

Proposition 2.1.1. [6] Soit (X, Y) un couple d'interpolation. Alors pour tous $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$, on a

$$(X, Y)_\theta = (Y, X)_{1-\theta}; \quad (X, Y)_{\theta, p} = (Y, X)_{1-\theta, p},$$

avec égalité des normes.

Preuve. Tout d'abord, cette propriété est une conséquence de la relation d'homogénéité

$$K(t, x, X, Y) = tK(t^{-1}, x, Y, X).$$

On vérifie cette relation

$$\begin{aligned} K(t, x, X, Y) &= \inf(\|a\|_X + t\|b\|_Y) \\ &= t \inf(t^{-1}\|a\|_X + \|b\|_Y); \\ &= t \inf(\|b\|_Y + t^{-1}\|a\|_X); \end{aligned}$$

$$= tK(t^{-1}, x, Y, X).$$

Par le changement de variables $t \mapsto t^{-1} = \tau$, $d\tau = -\frac{dt}{t^2}$, on obtient, pour tout $x \in (X, Y)_{\theta, p}$

$$\begin{aligned} \|x\|_{\theta, p} &= \left(\int_0^{+\infty} (t^{-\theta} K(t, x, X, Y))^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ &= \left(- \int_{+\infty}^0 (\tau^\theta \tau^{-1} K(\tau, x, Y, X))^p \frac{d\tau}{\tau^2 \cdot \tau^{-1}} \right)^{1/p} \\ &= \left(\int_0^{+\infty} (\tau^{\theta-1} K(\tau, x, Y, X))^p \frac{d\tau}{\tau} \right)^{1/p} \\ &= \|x\|_{1-\theta, p}. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.1.2. [9] Soit (X, Y) un couple d'interpolation.

Pour $0 < \theta < 1$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, on a

$$X \cap Y \subset (X, Y)_{\theta, p_1} \subset (X, Y)_{\theta, p_2} \subset (X, Y)_\theta \subset (X, Y)_{\theta, \infty} \subset X + Y.$$

De plus

$$(X, Y)_{\theta, \infty} \subset \overline{X} \cap \overline{Y};$$

où $\overline{X}$, $\overline{Y}$ sont les fermetures de X , Y dans $X + Y$.

Preuve. On montre que $(X, Y)_{\theta, \infty}$ est contenu dans $\overline{X} \cap \overline{Y}$ et il s'injecte dans $X + Y$.

Soit $x \in (X, Y)_{\theta, \infty}$. Alors on a

$$\|x\|_{\theta, \infty} = \|t^{-\theta} \inf_{x=a+b} (\|a\| + t\|b\|)\|_{L^\infty(0, \infty)} \quad t > 0;$$

d'où

$$K(t, x) \leq t^\theta \|x\|_{\theta, \infty}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in X$, $b_n \in Y$ tel que $x = a_n + b_n$, et

$$\|a_n\|_X + t\|b_n\|_Y \leq K(t, x) + \varepsilon \leq t^\theta \|x\|_{\theta, \infty} + \varepsilon;$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{choisir } \varepsilon = \frac{1}{n^\theta} \|x\|_{\theta, p} \\ \text{et} \\ \text{choisir } t = \frac{1}{n} \end{array} \right\} \Rightarrow \|a_n\|_X + \frac{1}{n} \|b_n\|_Y \leq \frac{1}{n^\theta} \|x\|_{\theta, \infty} + \frac{1}{n^\theta} \|x\|_{\theta, \infty} = \frac{2}{n^\theta} \|x\|_{\theta, \infty};$$

en particulier,

$$\|x - b_n\|_{X+Y} = \|a_n\|_{X+Y} \leq \|a_n\|_X \leq \|x\|_{\theta,\infty} n^{-\theta}.$$

Donc, b_n tend vers x dans $X + Y$ quand $n \rightarrow \infty$. Ainsi, $(X, Y)_{\theta,\infty}$ est contenu dans $\overline{Y}$.

En suivant les même étapes, montrons que $(X, Y)_{\theta,\infty} \subset \overline{X}$ (en prend $t = n$), on obtient

$$\|a_n\|_X + n\|b_n\|_Y \leq 2n^\theta \|x\|_{\theta,\infty};$$

en particulier,

$$\|x - a_n\|_{X+Y} = n\|b_n\|_{X+Y} \leq n\|b_n\|_Y \leq \|x\|_{\theta,\infty} n^{\theta-1};$$

alors a_n tend vers x dans $X + Y$ quand $n \rightarrow +\infty$. Donc, $(X, Y)_{\theta,\infty}$ est contenu dans $\overline{X}$.

De plus, avec la définition $K(1, x) = \|x\|_{X+Y}$, on a

$$K(1, x) = \|x\|_{X+Y} \leq \|x\|_{\theta,\infty}, \quad \forall x \in (X, Y)_{\theta,\infty};$$

de sorte que $(X, Y)_{\theta,\infty}$ s'injecte dans $X + Y$.

On montre que $(X, Y)_\theta \subset (X, Y)_{\theta,\infty}$.

Soit $x \in (X, Y)_\theta$ alors la norme du $\sup t^{-\theta} K(t, x)$ est bornée. Elle l'est, car d'une part, $t^{-\theta} K(t, x)$ tend vers 0 quand t tend vers 0 ou $+\infty$ (ce qui implique que la fonction $t^{-\theta} K(t, x)$ est bornée aux voisinages (qu'on peut choisir ouverts) de 0 et $+\infty$). D'autre part, dans le complémentaire compact de ces deux voisinages, la même fonction est continue, donc bornée. Ainsi $x \in (X, Y)_{\theta,\infty}$.

Montrons maintenant que $(X, Y)_{\theta,p}$ est contenu dans $(X, Y)_\theta$ et qu'il s'injecte dans $(X, Y)_{\theta,\infty}$ pour $p < \infty$.

Pour tout $x \in (X, Y)_{\theta,p}$ et $t > 0$, d'abord on vérifie que

$$\frac{1}{t^\theta} = (\theta p)^{1/p} \left(\int_t^{+\infty} \frac{ds}{s^{\theta p+1}} \right).$$

En effet

$$\begin{aligned} (\theta p)^{1/p} \left(\int_t^{+\infty} \frac{ds}{s^{\theta p+1}} \right) &= (\theta p)^{1/p} \left(\frac{1}{-\theta p} \left[s^{-\theta p} \right]_t^\infty \right)^{1/p} \\ &= (\theta p)^{1/p} \left(\frac{1}{-\theta p} \right)^{1/p} (-t^{-\frac{\theta p}{p}}) = \frac{1}{t^\theta}. \end{aligned}$$

Et d'après la croissance de la fonction $K(., x)$, on a

$$\frac{K(t, x)}{t^\theta} = (\theta p)^{1/p} \left(\int_t^{+\infty} \frac{ds}{s^{\theta p+1}} \right)^{1/p} K(t, x) \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{K(t, x)}{t^\theta} = (\theta p)^{1/p} \left(\int_t^{+\infty} s^{-\theta p - 1} K(t, x)^p ds \right)^{1/p} \quad t > 0 \\ &\leq (\theta p)^{1/p} \|x\|_{\theta, p} \leq +\infty. \end{aligned}$$

Donc $x \in (X, Y)_{\theta, \infty}$ et

$$\|x\|_{\theta, \infty} \leq (\theta p)^{1/p} \|x\|_{\theta, p}.$$

Par le changement de θ en $1 - \theta$ et X en Y , on obtient

$$\|x\|_{\theta, \infty} \leq ((1 - \theta)p)^{1/p} \|x\|_{\theta, p}.$$

D'où

$$\|x\|_{\theta, \infty} \leq [\min\{\theta, 1 - \theta\}p]^{1/p} \|x\|_{\theta, p}. \quad (2.3)$$

Faisant $t \rightarrow \infty$, on obtient $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\theta} K(t, x) = 0$.

Pour prouver que $x \in (X, Y)_\theta$, nous avons besoin aussi de $\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\theta} K(t, x) = 0$. Cela peut être vu comme suit. Comme $(X, Y)_{\theta, p} = (Y, X)_{1-\theta, p}$ alors

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-(1-\theta)} K(t, x, Y, X) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^\theta K(t^{-1}, x, X, Y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \tau^{-\theta} K(\tau, x, X, Y).$$

On prouve que $(X, Y)_{\theta, p_1} \subset (X, Y)_{\theta, p_2}$ pour $p_1 < p_2 < +\infty$.

Pour $x \in (X, Y)_{\theta, p_1}$, on a

$$\begin{aligned} \|x\|_{\theta, p_2} &= \left(\int_0^{+\infty} t^{-\theta p_2} K(t, x)^{p_2} \frac{dt}{t} \right)^{1/p_2} \\ &= \left(\int_0^{+\infty} t^{-\theta p_2} K(t, x)^{p_1} (t^{-\theta} K(t, x))^{p_2 - p_1} \frac{dt}{t} \right)^{1/p_2} \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} t^{-\theta p_1} K(t, x)^{p_2} \frac{dt}{t} \right)^{1/p_2} \left(\sup_{t > 0} t^{-\theta} K(t, x) \right)^{(p_2 - p_1)/p_2} \\ &= (\|x\|_{\theta, p_1})^{p_1/p_2} (\|x\|_{\theta, \infty})^{1 - p_1/p_2}, \end{aligned}$$

en utilisant (2.3), on obtient

$$\|x\|_{\theta, p_2} \leq [\min\{\theta, 1 - \theta\}]^{1/p_1 - 1/p_2} \|x\|_{\theta, p_1}.$$

D'où l'inclusion.

Enfin, à partir de l'inégalité $K(t, x) \leq \min\{1, t\} \|x\|_{X \cap Y}$ pour tout $x \in X \cap Y$, il suit

immédiatement que $X \cap Y$ s'injecte dans $(X, Y)_{\theta, p}$, pour $0 < \theta < 1$, $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$.

La proposition est ainsi démontrée. □

Remarque 2.1.2. *La première partie de la preuve de la proposition 2.1.2 montre le lien entre la théorie de l'interpolation et la théorie de l'approximation.*

En particulier, si $x \in (X, Y)_{\theta, \infty}$, alors $\|x - b_n\|_{X+Y} \leq \text{const.} n^{-\theta}$ et $\|b_n\|_Y \leq \text{const.} n^{1-\theta}$.

Proposition 2.1.3. [7] *Pour tout $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$, $(X, Y)_{\theta, p}$ est un espace de Banach. Pour tout $\theta \in (0, 1)$, $(X, Y)_{\theta}$ est un espace de Banach, par rapport à la norme de $(X, Y)_{\theta, \infty}$.*

Preuve. On a déjà vu que $(X, Y)_{\theta, p}$ est un espace vectoriel normé, il faut maintenant démontrer seulement que $(X, Y)_{\theta, p}$ est complet.

Soit $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(X, Y)_{\theta, p}$. Par l'injection, on a $(X, Y)_{\theta, p} \subset X + Y$.

Donc, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est aussi une suite de Cauchy dans $X + Y$, et comme $X + Y$ est un espace de Banach alors la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers $x \in X + Y$.

Estimons $\|x_n - x\|_{\theta, p}$.

$$\text{Pour } \epsilon > 0 \text{ fixé } \exists n_{\epsilon} \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_{\epsilon} : \|x_n - x_m\|_{\theta, p} \leq \epsilon.$$

Mais $y \mapsto K(t, y)$ est une norme de $X + Y$, donc pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ et $t > 0$ on a

$$K(t, x_n - x) \leq K(t, x_n - x_m) + K(t, x_m - x),$$

de sorte que

$$t^{-\theta} K(t, x_n - x) \leq t^{-\theta} K(t, x_n - x_m) + t^{-\theta} K(t, x_m - x),$$

pour $p = +\infty$.

Pour tout $t > 0$ et $\forall n, m \geq n_{\epsilon}$, on a

$$t^{-\theta} K(t, x_n - x) \leq \epsilon + t^{-\theta} \max\{t, 1\} \|x_m - x\|_{X+Y}. \quad (2.4)$$

Quand $m \rightarrow +\infty$, on prend $t^{-\theta} K(t, x_n - x) \leq \epsilon \quad \forall t > 0$. Ceci implique que $x \in (X, Y)_{\theta, \infty}$ et $x_n \rightarrow x$ dans $(X, Y)_{\theta, \infty}$. Donc $(X, Y)_{\theta, \infty}$ est complet.

On montre maintenant que $(X, Y)_\theta$ est fermé dans $(X, Y)_{\theta, \infty}$.

Soit $x_n \in (X, Y)_\theta$ et $x_n \rightarrow x$ dans $(X, Y)_{\theta, \infty}$ alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, \quad \|x_n - x\|_{\theta, \infty} \leq \varepsilon.$$

D'après l'équivalence des normes de $\|\cdot\|_{\theta, \infty}$ et $\|\cdot\|_\theta$, on a

$$\exists \alpha > 0 \quad \alpha \|x_n - x\|_\theta \leq \|x_n - x\|_{\theta, \infty} \leq \varepsilon,$$

d'où

$$\|x_n - x\|_\theta \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\alpha},$$

donc $(X, Y)_\theta$ est fermé dans $(X, Y)_{\theta, \infty}$ cela signifie que $(X, Y)_\theta$ est complet.

Et pour $p < \infty$

$$\|x_n - x\|_{\theta, p} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_\delta^{1/\delta} t^{-\theta p - 1} K(t, x_n - x)^p dt \right)^{1/p}.$$

Du fait grâce à (2.4), $\forall \delta \in (0, 1)$, on obtient, pour $n, m \geq n_\epsilon$,

$$\begin{aligned} \left(\int_\delta^{1/\delta} t^{-\theta p - 1} K(t, x_n - x)^p dt \right)^{1/p} &\leq \|x_n - x\|_{\theta, p} + \|x_n - x\|_{X+Y} \left(\int_\delta^{1/\delta} t^{-\theta p - 1} \max\{t, 1\} dt \right)^{1/p} \\ &\leq \epsilon + C(\delta, p) \|x_n - x\|_{X+Y}. \end{aligned}$$

Faisant tout d'abord $m \rightarrow \infty$ et $\delta \rightarrow 0$, on obtient $x \in (X, Y)_{\theta, p}$ et $x_n \rightarrow x$. Alors $(X, Y)_{\theta, p}$ est complet.

□

Théorème 2.1.1. [6] Soient $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ deux couples d'interpolation. On suppose que $T \in L(X_1, X_2) \cap L(Y_1, Y_2)$. Alors pour tout $\theta \in (0, 1)$, $p \in [1, \infty]$, T admet une extension continue de $(X_1, Y_1)_{\theta, p}$ dans $(X_2, Y_2)_{\theta, p}$, et de $(X_1, Y_1)_\theta$ dans $(X_2, Y_2)_\theta$ i.e.,

$$T \in L((X_1, Y_1)_{\theta, p}, (X_2, Y_2)_{\theta, p}) \cap L((X_1, Y_1)_\theta, (X_2, Y_2)_\theta).$$

De plus

$$\|T\|_{L((X_1, Y_1)_{\theta, p}, (X_2, Y_2)_{\theta, p})} \leq (\|T\|_{L(X_1, X_2)})^{1-\theta} (\|T\|_{L(Y_1, Y_2)})^\theta. \quad (2.5)$$

Preuve. Si T est un opérateur nul, il n'y a rien à prouver.

Si $T \neq 0$, soit $\|T\|_{L((X_1, X_2))} \neq 0$ ou $\|T\|_{L((Y_1, Y_2))} \neq 0$. Supposons que $\|T\|_{L((X_1, X_2))} \neq 0$. Soit $x \in (X_1, Y_1)_{\theta, p}$: alors pour tous $a \in X_1$ et $b \in Y_1$ tels que $x = a + b$ et pour tout $t > 0$ on a

$$\|Ta\|_{X_2} + t\|Tb\|_{Y_2} \leq \|T\|_{L(X_1, X_2)} \left(\|a\|_{X_1} + t \frac{\|T\|_{L(Y_1, Y_2)}}{\|T\|_{L(X_1, X_2)}} \|b\|_{Y_1} \right),$$

de sorte que, on prend la borne inférieure pour tous les a, b comme ci-dessus, on obtient

$$\inf_{Tx=Ta+Tb} \left(\|Ta\|_{X_2} + t\|Tb\|_{Y_2} \right) \leq \inf_{x=a+b} \left(\|T\|_{L(X_1, X_2)} \left(\|a\|_{X_1} + t \frac{\|T\|_{L(Y_1, Y_2)}}{\|T\|_{L(X_1, X_2)}} \|b\|_{Y_1} \right) \right),$$

$$\Leftrightarrow \inf_{Tx=Ta+Tb} \left(\|Ta\|_{X_2} + t\|Tb\|_{Y_2} \right) \leq \|T\|_{L(X_1, X_2)} \inf_{x=a+b} \left(\|a\|_{X_1} + t \frac{\|T\|_{L(Y_1, Y_2)}}{\|T\|_{L(X_1, X_2)}} \|b\|_{Y_1} \right),$$

finalemt on obtient

$$K(t, Tx, X_2, Y_2) \leq \|T\|_{L(X_1, X_2)} K\left(t \frac{\|T\|_{L(Y_1, Y_2)}}{\|T\|_{L(X_1, X_2)}}, x, X_1, Y_1\right). \quad (2.6)$$

On pose $s = t \frac{\|T\|_{L(Y_1, Y_2)}}{\|T\|_{L(X_1, X_2)}}$, on obtient $Tx \in (X_2, Y_2)_{\theta, p}$, et d'après cette propriété

$$(K(s, x, X_1, Y_1) \leq s^\theta \|x\|_{(X_1, Y_1)_{\theta, p}})$$

on a

$$\|Tx\|_{(X_2, Y_2)_{\theta, p}} \leq \|T\|_{L(X_1, X_2)} \left(\frac{\|T\|_{L(Y_1, Y_2)}}{\|T\|_{L(X_1, X_2)}} \right)^\theta \|x\|_{(X_1, Y_1)_{\theta, p}}. \quad (2.7)$$

D'où

$$\|T\|_{L((X_1, Y_1)_{\theta, p}, (X_2, Y_2)_{\theta, p})} \leq \left(\|T\|_{L(X_1, X_2)} \right)^{1-\theta} \left(\|T\|_{L(Y_1, Y_2)} \right)^\theta.$$

De (2.6) il découle également que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} t^{-\theta} K(t, x, X_1, Y_1) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\theta} K(t, x, X_1, Y_1) = 0 \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} t^{-\theta} K(t, x, X_2, Y_2) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\theta} K(t, x, X_2, Y_2) = 0, \end{aligned}$$

qui signifie que T est un opérateur de $(X_1, Y_1)_\theta$ dans $(X_2, Y_2)_\theta$.

Dans le cas où $\|T\|_{L((X_1, X_2))} = 0$. On substitue dans (2.7) X_i en Y_i pour $i = 1, 2$, et θ par $1 - \theta$, on obtient

$$\|Tx\|_{(Y_2, X_2)_{1-\theta, p}} \leq \|T\|_{L(Y_1, Y_2)} \left(\frac{\|T\|_{L(X_1, X_2)}}{\|T\|_{L(Y_1, Y_2)}} \right)^{1-\theta} \|x\|_{(Y_1, X_1)_{1-\theta, p}}.$$

$$\Leftrightarrow \|Tx\|_{(Y_2, X_2)_{1-\theta, p}} \leq \left(\|T\|_{L(Y_1, Y_2)} \right)^{1-(1-\theta)} \left(\|T\|_{L(X_1, X_2)} \right)^{1-\theta} \|x\|_{(Y_1, X_1)_{1-\theta, p}}.$$

Donc

$$\|T\|_{L((X_1, Y_1)_{\theta, p}, (X_2, Y_2)_{\theta, p})} \leq \left(\|T\|_{L(X_1, X_2)} \right)^{1-\theta} \left(\|T\|_{L(Y_1, Y_2)} \right)^{\theta}.$$

□

Corollaire 2.1.1. *Soit (X, Y) un couple d'interpolation. Pour $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq +\infty$ il existe une constante $c(\theta, p)$ telle que*

$$\|y\|_{(X, Y)_{\theta, p}} \leq c(\theta, p) \|y\|_X^{1-\theta} \|y\|_Y^{\theta} \quad \forall y \in X \cap Y. \quad (2.8)$$

Preuve. On définit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ selon le fait que X, Y sont des espaces de Banach en rappelant réel ou complexes. Soit $y \in X \cap Y$, et on définit T par

$$T(\lambda) = \lambda y \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Alors

$$\|T\|_{L(\mathbb{K}, X)} = \|y\|_X, \quad \|T\|_{L(\mathbb{K}, Y)} = \|y\|_Y, \quad \text{et} \quad \|T\|_{L(\mathbb{K}, (X, Y)_{\theta, p})} = \|y\|_{(X, Y)_{\theta, p}}.$$

L'étape suivante : on prend $X_1 = Y_1 = \mathbb{K}$ et $X_2 = X, Y_2 = Y$ dans le théorème 2.1.1, en rappelant que

$$(\mathbb{K}, \mathbb{K})_{\theta, p} = \mathbb{K}.$$

Une autre preuve plus directe est la suivante : pour $y \in X \cap Y \setminus \{0\}$, on a $K(t, y) \leq \min\{\|y\|_X, t\|y\|_Y\}$, alors

$$t \leq \frac{\|y\|_X}{\|y\|_Y} \Rightarrow K(t, y) \leq t\|y\|_Y \Rightarrow t^{-\theta} K(t, y) \leq t^{1-\theta} \|y\|_Y \leq \|y\|_X^{1-\theta} \|y\|_Y^{\theta},$$

et

$$t \geq \frac{\|y\|_X}{\|y\|_Y} \Rightarrow K(t, y) \leq \|y\|_X \Rightarrow t^{-\theta} K(t, y) \leq \left(\frac{\|y\|_Y}{\|y\|_X} \right)^{\theta} \|y\|_X = \|y\|_X^{1-\theta} \|y\|_Y^{\theta}.$$

Par conséquent ,

$$\|y\|_{(X, Y)_{\theta, \infty}} = \sup_{t>0} t^{-\theta} K(t, y) \leq \|y\|_X^{1-\theta} \|y\|_Y^{\theta},$$

et l'assertion en découle pour $p = +\infty$ avec une constante $c(\theta, \infty) = 1$.

Pour $p < +\infty$ l'inégalité est vérifiée car $(X, Y)_{\theta, p}$ s'injecte dans $(X, Y)_{\theta, \infty}$.

□

2.1.2 La méthode J

Définitions

Définition 2.1.3. Soient X et Y deux espaces de Banach formant un couple d'interpolation. Pour tout $x \in X \cap Y$, on définit la fonctionnelle J par

$$\forall t > 0 \quad J(t, x, X, Y) := \max\{\|x\|_X, t\|x\|_Y\}.$$

Dans toute la suite, on écrira $J(t, x)$ au lieu de $J(t, x, X, Y)$, sauf en cas de besoin.

Proposition 2.1.4. [1] Pour tout $x \in X \cap Y$, la fonction $t \mapsto J(t, x)$ est positive, croissante, convexe et vérifie

$$J(t, x) \leq \max\{1, \frac{t}{s}\} J(s, x),$$

$$K(t, x) \leq \min\{1, \frac{t}{s}\} J(s, x).$$

On définit maintenant une famille d'espaces de Banach à l'aide de la fonction J .

Définition 2.1.4. (Espaces d'interpolation réelle). Soient X et Y deux espaces de Banach formant un couple d'interpolation. Pour tous $0 < \theta < 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$, ou pour $\theta = 0, 1$, et $p = 1$, on définit l'espace

$$(X, Y)_{\theta, p, J} = \left\{ x = \int_0^{+\infty} v(t) \frac{dt}{t} \in X+Y \mid v(t) \in X \cap Y \text{ p.p. } t > 0, \text{ et } t^{-\theta} J(t, v(t)) \in L_*^p(0, +\infty) \right\},$$

qu'on munira de la norme

$$\|x\|_{\theta, p, J} = \inf_v \|t^{-\theta} J(t, v)\|_{L_*^p(0, +\infty)}.$$

L'infimum est pris sur toutes les v telles que $x = \int_0^{+\infty} v(t) \frac{dt}{t}$.

Une propriété importante de cette famille d'espaces est le résultat suivant. En dehors des cas $\theta = 0, 1$, la J -méthode donne les mêmes espaces que la K -méthode.

Théorème 2.1.2. [6] Soit (X, Y) un couple d'interpolation. Pour $0 < \theta < 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$, la J -méthode donne les mêmes espaces que la K -méthode, avec des normes équivalentes.

Preuve. D'abord, on montre que $(X, Y)_{\theta, p, J} \subset (X, Y)_{\theta, p}$. Soit $x \in (X, Y)_{\theta, p, J}$, alors

$$x = \int_0^{+\infty} u(s) \frac{ds}{s} \in X + Y \text{ et } s^{-\theta} J(s, u(s)) \in L_*^p(0, +\infty).$$

On utilise les décompositions suivantes $u = u + 0 = 0 + u$, on en déduit que, pour $u \in X \cap Y$ on a

$$K(t, u) \leq \min\{\|u\|_X, t\|u\|_Y\},$$

et, comme $x \mapsto K(t, x)$ est une norme, on déduit que

$$\begin{aligned} K(t, x) &\leq \int_0^{+\infty} K(t, u(s)) \frac{ds}{s}, \\ &\leq \int_0^{+\infty} \min\{\|u(s)\|_X, t\|u(s)\|_Y\} \frac{ds}{s}, \end{aligned}$$

et pour tout $u \in X \cap Y$, $s > 0$ on a

$$J(s, u) \geq \|u\|_X, \text{ et } J(s, u) \geq s\|u\|_Y.$$

Donc

$$\min\{\|u\|_X, t\|u\|_Y\} \leq \min\{1, \frac{t}{s}\} J(s, u(s)),$$

alors

$$t^{-\theta} K(t, x) \leq \int_0^{+\infty} \min\left\{\left(\frac{t}{s}\right)^{-\theta}, \left(\frac{t}{s}\right)^{1-\theta}\right\} s^{-\theta} J(s, u(s)) \frac{ds}{s}.$$

Ceci est le produit de convolution pour le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+$ (i.e si f et g deux fonctions localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$, on appelle produit de convolution de f et g en x , la valeur définie par l'intégrale (si elle est convergente) $f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(y - x)dx$). Comment passer de la convolution multiplicative

$$\varphi * \psi(t) = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{s}\right) \psi(s) \frac{ds}{s}$$

à la convolution usuelle

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(y - x)dx ?$$

On pose $s = e^y$, $x = e^x$ et $f(r) = \varphi(e^r)$, $g(y) = \psi(e^y)$ dans l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{s}\right) \psi(s) \frac{ds}{s}, \text{ on obtient :}$$

$$\begin{aligned}
\varphi * \psi(t) &= \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{s}\right) \psi(s) \frac{ds}{s} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(e^{x-y}) \psi(e^y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) g(y) dy \\
&= f * g(y).
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\|t^{-\theta} K(t, x)\|_{L^p_*(0, +\infty)} \leq C \|t^{-\theta} J(t, u(t))\|_{L^p_*(0, +\infty)}.$$

Maintenant, on montre que $(X, Y)_{\theta, p} \subset (X, Y)_{\theta, p, J}$. Pour cela, nous avons besoin d'un lemme.

Lemme 2.1.1. (*fondamental*)

Soit $x \in X + Y$ tel que

$$K(t, x) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow 0 \text{ et } \frac{K(t, x)}{t} \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Alors, il existe une fonction u vérifiant $x = \int_0^{+\infty} u(t) \frac{dt}{t}$

$$\text{où} \quad u(t) = u_n \text{ pour } e^n < t < e^{n+1}.$$

De plus, il existe une constante C universelle suffisant

$$J(t, u(t)) \leq CK(t, x) \quad \forall t > 0.$$

Avant de démontrer le lemme fondamental, on complète la démonstration du théorème 2.1.2. Par la proposition 2.1.2 si $x \in (X, Y)_{\theta, p} \subset (X, Y)_{\theta, \infty}$, alors on a

$$K(t, x) \leq Ct^\theta.$$

Ainsi, il en résulte que $K(t, x) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ et $\frac{K(t, x)}{t} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Par conséquent, le lemme fondamental implique l'existence d'une représentation $u_n \in X \cap Y$ telle que si on pose $u(t) = u_n$ pour $e^n < t < e^{n+1}$. Alors

$$x = \int_0^{+\infty} u(t) \frac{dt}{t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{e^n}^{e^{n+1}} u_n \frac{dt}{t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n,$$

et

$$J(t, u(t)) \leq CK(t, x) \quad \forall t > 0,$$

donc

$$t^{-\theta} J(t, u(t)) \leq C t^{-\theta} K(t, x),$$

d'où

$$\|x\|_{\theta, p, J} \leq C \|x\|_{\theta, p}.$$

□

Preuve. (du lemme fondamental).

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe une décomposition $x = x_{0,n} + x_{1,n}$ telle que pour tout $C_0 > 0$, on a

$$\|x_{0,n}\|_X + e^n \|x_{1,n}\|_Y \leq C_0 K(e^n, x).$$

Cela implique

$$\|x_{0,n}\|_X \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow -\infty \text{ et } \|x_{1,n}\|_Y \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

On écrit

$$u_n = x_{0,n+1} - x_{0,n} = x_{1,n} - x_{1,n+1} \in X \cap Y,$$

alors $u_n \in X \cap Y$. et pour $i < j$ on a

$$x - \sum_i^j u_n = x_{1,j+1} - x_{0,i} = x - x_{1,j+1} - x_{0,i}.$$

Par conséquent, on a

$$K(1, x - \sum_i^j u_n) \leq \|x_{1,j+1}\|_Y + \|x_{0,i}\|_X.$$

Faisant $i \rightarrow -\infty$ et $j \rightarrow +\infty$, on obtient

$$x = \sum_{-\infty}^{+\infty} u_n \quad \text{converge dans } X + Y.$$

Vu que $K(t, x)$ est croissante en t et $\frac{K(t, x)}{t}$ est décroissante en t , on a

$$K(e^n, x) \leq K(t, x) \leq K(e^{n+1}, x)$$

et

$$\frac{t}{e^{n+1}} K(e^{n+1}, x) \leq K(t, x) \leq \frac{t}{e^n} K(e^n, x),$$

pour tout $e^n < t < e^{n+1}$, et

$$\begin{aligned}
\|u_n\|_X &\leq \|x_{0,n+1}\|_X + \|x_{0,n}\|_X \\
&\leq C_0 K(e^{n+1}, x) + C_0 K(e^n, x) \leq C_0(1+e)K(t, x), \\
t\|u_n\|_Y &\leq t\|x_{1,n+1}\|_Y + t\|x_{1,n}\|_Y \\
&\leq C_0 \frac{t}{e^{n+1}} K(e^{n+1}, x) + C_0 \frac{t}{e^n} K(e^n, x) \leq C_0(1+e)K(t, x).
\end{aligned}$$

Donc

$$J(t, u(t)) \leq C_0(1+e)K(t, x).$$

□

2.1.3 La méthode des traces

Définition 2.1.5. Soient $0 < \theta < 1$ et $1 \leq p \leq \infty$.

$V(p, \theta, Y, X)$ est l'ensemble de toutes les fonctions

$$u : \mathbb{R}_+ \mapsto X + Y \text{ telles que } \begin{cases} u \in W^{1,p}(a, b; X + Y) \text{ pour tout } 0 < a < b < +\infty, \\ \text{et} \\ t \mapsto u_\theta(t) = t^\theta u(t) \in L_*^p(0, +\infty; Y); \\ t \mapsto v_\theta(t) = t^\theta u'(t) \in L_*^p(0, +\infty; X). \end{cases}$$

Cet espace est un espace de Banach si on le munit de la norme

$$\|u\|_{V(p, \theta, X, Y)} = \|u_\theta\|_{L_*^p(0, \infty; Y)} + \|v_\theta\|_{L_*^p(0, \infty; X)}.$$

Par ailleurs, pour $p = +\infty$, on définit un sous-espace de $V(\infty, \theta, Y, X)$, par

$$V_0(\infty, \theta, Y, X) = \{u \in V(\infty, \theta, Y, X) \mid \lim_{t \rightarrow 0} \|t^\theta u(t)\|_X = \lim_{t \rightarrow 0} \|t^\theta u'(t)\|_Y = 0\}.$$

Proposition 2.1.5. [7] Soit $(\theta, p) \in (0, 1) \times [1, +\infty]$, $(X, Y)_{\theta, p}$ est l'ensemble de toutes les traces en $t = 0$ des fonctions dans $V(p, 1 - \theta, X, Y)$, et

$$\|x\|_{\theta, p}^{Tr} = \inf\{\|u\|_{V(p, 1-\theta, Y, X)} : x = u(0), u \in V(p, 1 - \theta, Y, X)\}$$

est une norme équivalente avec la norme usuelle dans $(X, Y)_{\theta, p}$. Par ailleurs, pour $0 < \theta < 1$, $(X, Y)_\theta$ est l'ensemble de toutes les traces en $t = 0$ des fonctions dans $V_0(\infty, 1 - \theta, Y, X)$.

Preuve. Soit $x \in (X, Y)_{\theta, p}$. On a besoin de définir une fonction $u \in V(p, 1 - \theta, Y, X)$ par $u(0) = x$.

Pour tout $t > 0$ il existe $a_t \in X$, $b_t \in Y$ tels que $\|a_t\|_X + t\|b_t\|_Y \leq 2K(t, x)$. Il vient

$$t^{1-\theta}\|b_t\|_Y \leq 2t^{-\theta}K(t, x),$$

et la fonction $t \mapsto t^{-\theta}K(t, x)$ est dans $L_*^p(0, +\infty)$. De plus, nous savons déjà (voir la preuve de la proposition 2.1.2) que $\lim_{t \rightarrow 0} b_t = x$ dans $X + Y$. Alors, la fonction $t \mapsto b_t$ est un bon choix pour u . Mais en général elle n'est pas mesurable dans Y , et n'est pas dans $W_{loc}^{1,1}(0, +\infty)$ dans X . Donc on la modifie et on continue comme suit

$\forall n \in \mathbb{N}$, soient $a_n \in X$, $b_n \in Y$ tels que $a_n + b_n = x$, et

$$\|a_n\|_X + \frac{1}{n}\|b_n\|_Y \leq 2K(1/n, x).$$

Pour $t > 0$ on pose

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{n+1} \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (x - a_{n+1}) \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(t),$$

où χ_I est la fonction caractéristique de l'intervalle I , et

$$v(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u(s) ds.$$

Puisque $(X, Y)_{\theta, p}$ est contenu dans $(X, Y)_{\theta, \infty}$ alors $t^{-\theta}K(t, x)$ est borné, de sorte que $\lim_{t \rightarrow 0} K(t, x) = 0$.

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|a_n\|_X = 0$, alors $\|x - b_n\|_{X+Y} \leq \|a_n\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$,

et $x = \lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{t \rightarrow 0} v(t)$ dans $X + Y$.

De plus,

$$\|t^{1-\theta}u(t)\|_Y \leq t^{1-\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(t) 2(n+1)K(1/(n+1), x) \leq 4t^{-\theta}K(t, x), \quad (2.9)$$

alors $t \mapsto t^{1-\theta}u(t) \in L_*^p(0, +\infty; Y)$. Par le corollaire 1.1.1, $t \mapsto t^{1-\theta}v(t)$ appartient à $L_*^p(0, +\infty; Y)$, et

$$\begin{aligned} \|t^{1-\theta}v\|_{L_*^p(0, +\infty; Y)} &\leq \frac{1}{1 - 1 + \theta} \|t^{1-\theta}u\|_{L_*^p(0, +\infty; Y)} \\ &\leq 4\theta^{-1}\|x\|_{\theta, p}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$v(t) = x - \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(s) a_{n+1} ds,$$

alors v est différentiable pour toutes les valeurs de X , et

$$v'(t) = \frac{1}{t^2} \int_0^t g(s) ds - \frac{1}{t} g(t),$$

où $g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(t) a_{n+1}$. Notons que

$$\|g(t)\|_X \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(t) 2K(1/(n+1), x) \leq 2t^{-\theta} K(t, x).$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \|t^{1-\theta} v'(t)\| &= \left\| t^{1-\theta} \left(\frac{1}{t^2} \int_0^t g(s) ds - \frac{1}{t} g(t) \right) \right\| \\ &\leq t^{-\theta-1} \sup_{0 < s < t} \|g(s)\| \int_0^t ds - \|t^{-\theta} g(t)\| \\ &\leq t^{-\theta} \sup_{0 < s < t} \|g(s)\| + \|t^{-\theta} g(t)\| \leq 4t^{-\theta} K(t, x). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ainsi $t \mapsto t^{1-\theta} v'(t)$ appartient à $L_*^p(0, +\infty; X)$, et

$$\|t^{1-\theta} v'\|_{L_*^p(0, +\infty; X)} \leq 4\|x\|_{\theta, p}.$$

Donc x est une trace en $t = 0$ de la fonction $v \in V(p, 1 - \theta, Y, X)$, et

$$\begin{aligned} \|x\|_{\theta, p}^{Tr} &\leq \|t^{1-\theta} v\|_{L_*^p(0, +\infty; Y)} + \|t^{1-\theta} v'\|_{L_*^p(0, +\infty; X)} \\ &\leq 4\theta^{-1} \|x\|_{\theta, p} + 4\|x\|_{\theta, p} \leq 2(2 + 1/\theta) \|x\|_{\theta, p}. \end{aligned}$$

Si $x \in (X, Y)_\theta$, alors, (2.9) donne,

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\theta} \|u(t)\|_Y = 0.$$

Donc

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\theta} \|v(t)\|_Y = 0.$$

D'après (2.10), on a

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\theta} \|g(t)\|_X = 0,$$

d'où

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\theta} \|v'(t)\|_X = 0.$$

Donc $v \in V_0(\infty, 1 - \theta, Y, X)$.

Inversement, soit x la trace en $t = 0$ d'une fonction $u \in V(p, 1 - \theta, Y, X)$. Alors

$$x = x - u(t) + u(t) = - \int_0^t u'(s) ds + u(t) \quad \forall t > 0,$$

de sorte que

$$t^{-\theta} K(t, x) \leq \left\| \frac{1}{t} \int_0^t u'(s) ds \right\|_X + t^{1-\theta} \|u(t)\|_Y. \quad (2.11)$$

Le corollaire 1.1.1 implique que $t \mapsto t^{-\theta} K(t, x)$ appartient à $L_*^p(0, +\infty)$, donc

$x \in (X, Y)_{\theta, p}$, et

$$\|x\|_{\theta, p} \leq \frac{1}{\theta} \|x\|_{\theta, p}^{Tr}.$$

Si x est la trace d'une fonction $u \in V_0(\infty, 1 - \theta, Y, X)$, on peut supposer sans perte de généralité que u s'annule pour t grand. Ensuite, (2.11) donne

$$\lim_{t \rightarrow 0} K(x, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} K(x, t) = 0.$$

Par conséquent $x \in (X, Y)_{\theta}$.

□

Remarque 2.1.3. [7] D'après la proposition 2.1.5, si $x \in (X, Y)_{\theta, p}$ ou $x \in (X, Y)_{\theta}$, alors x est la trace en $t = 0$ d'une fonction appartenant à $L^p(a, b; Y) \cap W^{1, p}(a, b; X)$ pour $0 < a < b$. Mais il est possible de trouver une fonction plus régulière $v \in V(p, 1 - \theta, Y, X)$ (ou $v \in V_0(\infty, 1 - \theta, Y, X)$) telle que $v(0) = x$. Par exemple, on peut prendre

$$v(t) = \frac{1}{t} \int_0^t u(s) ds, \quad t \geq 0.$$

On remarque que $v \in W^{1, p}(a, b; Y) \cap W^{2, p}(a, b; Y)$ et $v(0) = x$. En outre $t \mapsto t^{1-\theta} v(t)$ appartient à $L_*^p(0, +\infty; Y)$, $t \mapsto t^{2-\theta} v'(t)$ appartient à $L_*^p(0, +\infty; Y)$ et $t \mapsto t^{1-\theta} v'(t)$ appartient à $L_*^p(0, +\infty; X)$, avec les normes s'écrivant sous la forme $\text{const.} \|u\|_{V(p, 1-\theta, Y, X)}$.

Mieux encore. On choisit une fonction régulière positive $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, ayant un support compact telle que $\int_0^{+\infty} s^{-1} \varphi(s) ds = 1$. On pose

$$v(t) = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{t}{\tau}\right) u(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \int_0^{+\infty} \varphi(s) u\left(\frac{t}{s}\right) \frac{ds}{s},$$

de sorte que $v \in C^\infty(\mathbb{R}_+; X \cap Y)$, $v(0) = x$, et

$$t \mapsto t^{n-\theta} v^{(n)}(t) \in L_*^p(0, +\infty; X), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$t \mapsto t^{n+1-\theta} v^{(n)}(t) \in L_*^p(0, +\infty; Y), \quad n \in \mathbb{N},$$

avec les normes égales à $c(n)\|u\|_{V(p,1-\theta,Y,X)}$. Si, $p = +\infty$ et $x \in (X, Y)_\theta$ alors

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{n-\theta} \|v^{(n)}(t)\|_X = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{n+1-\theta} \|v^{(n)}(t)\|_Y = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.2 Espace intermédiaire et réitération

Soit (X, Y) un couple d'interpolation.

2.2.1 Classes d'espaces intermédiaires

Définition 2.2.1. Soient $0 \leq \theta \leq 1$ et E un espace intermédiaire.

(i) E appartient à la classe $J(\theta)$ entre X et Y s'il existe une constante c telle que

$$\|x\|_E \leq c \|x\|_X^{1-\theta} \|x\|_Y^\theta, \quad \forall x \in X \cap Y.$$

Dans ce cas, on écrit $E \in J_\theta(X, Y)$.

(ii) E appartient à la classe $K(\theta)$ entre X et Y s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$K(t, x, X, Y) \leq kt^\theta \|x\|_E, \quad \forall x \in E, \quad t > 0.$$

Dans ce cas, on écrit $E \in K_\theta(X, Y)$.

Si $\theta \in (0, 1)$ alors E s'injecte dans $(X, Y)_{\theta, \infty}$.

Théorème 2.2.1. [1] Soit $0 \leq \theta_0, \theta_1 \leq 1$, $\theta_0 \neq \theta_1$. On fixe $\theta \in (0, 1)$ et on fixe $\omega = (1 - \theta)\theta_0 + \theta\theta_1$.

Les affirmations suivantes sont vérifiées :

(i) Si E_i appartient à la classe K_{θ_i} ($i = 0, 1$) entre X et Y , alors

$$(E_0, E_1)_{\theta, p} \subset (X, Y)_{\omega, p}, \quad \forall p \in [1, +\infty], \quad (E_0, E_1)_\theta \subset (X, Y)_\omega.$$

(ii) Si E_i appartient à la classe J_{θ_i} ($i = 0, 1$) entre X et Y , alors

$$(X, Y)_{w,p} \subset (E_0, E_1)_{\theta,p}, \quad \forall p \in [1, +\infty], \quad (X, Y)_w \subset (E_0, E_1)_\theta.$$

Donc, si E_i appartient à la classe $K_{\theta_i}(X, Y) \cap J_{\theta_i}(X, Y)$ ($i = 0, 1$), alors

$$(X, Y)_{w,p} = (E_0, E_1)_{\theta,p}, \quad \forall p \in [1, +\infty], \quad (X, Y)_w = (E_0, E_1)_\theta,$$

avec équivalence des normes respectives.

Preuve. On montre l'assertion (i). Soit E_i appartenant à la classe K_{θ_i} . Il existe des constantes $k_i > 0$ telles que

$$K(t, x) \leq k_i t^{\theta_i} \|x\|_{E_i}, \quad \forall x \in E_i, \quad i = 0, 1, \quad t > 0.$$

Pour tout $x \in (E_0, E_1)_{\theta,p}$, soit $a \in E_0$, $b \in E_1$ tel que $x = a + b$. Alors

$$K(t, x, X, Y) \leq K(t, a, X, Y) + K(t, b, X, Y).$$

Comme a et b sont arbitraires, il en résulte que

$$K(t, x, X, Y) \leq \max\{k_0, k_1\} t^{\theta_0} K(x, t^{\theta_1 - \theta_0}, E_0, E_1).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} t^{-\omega} K(t, x, X, Y) &\leq \max\{k_0, k_1\} t^{\theta_0 - \omega} K(t^{\theta_1 - \theta_0}, x, E_0, E_1), \\ \Rightarrow t^{-\omega} K(t, x, X, Y) &\leq \max\{k_0, k_1\} t^{-\theta(\theta_1 - \theta_0)} K(x, t^{\theta_1 - \theta_0}, E_0, E_1). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Avec le changement de variable $s = t^{\theta_1 - \theta_0}$ on vérifie que l'application $t \mapsto t^{-\omega} K(t, x, X, Y)$ est dans $L_*^p(0, +\infty)$.

En effet

$$\begin{aligned} \|t^{-\omega} K(t, x, X, Y)\|_{L_*^p(0, +\infty)} &= \left(\int_0^{+\infty} (t^{-\omega} K(t, x, X, Y))^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_0^{+\infty} \left(\max\{k_0, k_1\} t^{-\theta(\theta_1 - \theta_0)} K(x, t^{\theta_1 - \theta_0}, E_0, E_1) \right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ &\leq \max\{k_0, k_1\} \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\theta_1 - \theta_0} s^{-\theta} K(x, s, E_0, E_1) \right)^p \frac{ds}{s} \right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\leq \max\{k_0, k_1\}(\theta_1 - \theta_0)^{-1/p} \|x\|_{(E_0, E_1)_{\theta, p}} \leq +\infty.$$

Ce qui signifie que x appartient à $(X, Y)_{\omega, p}$, et

$$\begin{cases} \|x\|_{(X, Y)_{\omega, p}} \leq \max\{k_0, k_1\}(\theta_1 - \theta_0)^{-1/p} \|x\|_{(E_0, E_1)_{\theta, p}}, & \text{si } p < +\infty, \\ \|x\|_{(X, Y)_{\omega, \infty}} \leq \max\{k_0, k_1\} \|x\|_{(E_0, E_1)_{\theta, p}}, & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Si $x \in (E_0, E_1)_{\theta}$, par (2.12) on obtient

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\omega} K(t, x, X, Y) \leq \max\{k_0, k_1\} \lim_{s \rightarrow 0} s^{-\theta} K(s, x, E_0, E_1) = 0,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-\omega} K(t, x, X, Y) \leq \max\{k_0, k_1\} \lim_{s \rightarrow +\infty} s^{-\theta} K(s, x, E_0, E_1) = 0,$$

donc $x \in (X, Y)_{\omega}$.

Maintenant, on montre l'assertion (ii). Par la proposition 2.1.5 et la remarque 2.1.3, tout $x \in (X, Y)_{\omega, p}$ est la trace en $t = 0$ d'une fonction régulière $v : \mathbb{R}_+ \mapsto X \cap Y$ telle que $v(+\infty) = 0$, $t \mapsto t^{1-\omega} v'(t)$ appartient à $L_*^p(0, +\infty; X)$, $t \mapsto t^{2-\omega} v'(t)$ appartient à $L_*^p(0, +\infty; Y)$, et

$$\|t^{1-\omega} v'(t)\|_{L_*^p(0, +\infty; X)} + \|t^{2-\omega} v'(t)\|_{L_*^p(0, +\infty; Y)} \leq k \|x\|_{(X, Y)_{\omega, p}}^{Tr},$$

avec k indépendant de x et v . Nous allons montrer que la fonction

$$g(t) = v(t^{1/(\theta_1 - \theta_0)}), \quad t > 0,$$

appartient à $V(p, 1 - \theta, E_0, E_1)$, sachant que $g(0) = x$. Cela impliquera, à travers la proposition 2.1.5, que $x \in (E_0, E_1)_{\theta, p}$.

Dans ce but, on fait une estimation préliminaire de $\|v'(t)\|_{E_i}$, $i = 0, 1$. Soit c_i des constantes vérifiant

$$\|y\|_{E_i} \leq c_i \|y\|_X^{1-\theta_i} \|y\|_Y^{\theta_i} \quad \forall y \in Y, \quad i = 0, 1.$$

Donc

$$\|v'(s)\|_{E_i} \leq \frac{c_i}{s^{\theta_i + 1 - \omega}} \|s^{1-\omega} v'(s)\|_X^{1-\theta_i} \|s^{2-\omega} v'(s)\|_Y^{\theta_i}, \quad i = 0, 1,$$

avec

$$\theta_0 + 1 - \omega = 1 - \theta(\theta_1 - \theta_0), \quad \theta_1 + 1 - \omega = 1 + (1 - \theta)(\theta_1 - \theta_0),$$

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \|s^{1-\theta(\theta_1-\theta_0)}v'(s)\|_{L^p_*(0,+\infty;E_0)} \leq c_0k\|x\|_{(X,Y)_{\omega,p}}^{Tr}, \\ (ii) \quad \|s^{1+(1-\theta)(\theta_1-\theta_0)}v'(s)\|_{L^p_*(0,+\infty;E_1)} \leq c_0k\|x\|_{(X,Y)_{\omega,p}}^{Tr}. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

On a l'égalité $v(t) = -\int_t^{+\infty} v'(s)ds$. Dans l'équation (2.13)(ii), on utilise l'inégalité de Hardy-Young (la définition 1.1.2(ii)) si $p < +\infty$, alors on a

$$\|t^{(1-\theta)(\theta_1-\theta_0)}v(t)\|_{L^p_*(0,+\infty;E_1)} \leq \frac{c_0k}{(1-\theta)(\theta_1-\theta_0)}\|x\|_{(X,Y)_{\omega,p}}^{Tr}.$$

Il en résulte que $t \mapsto t^{1-\theta}g(t) \in L^p_*(0,+\infty;E_1)$, et

$$\|t^{1-\theta}g(t)\|_{L^p_*(0,+\infty;E_1)} \leq (\theta_1 - \theta_0)^{-1/p} \|t^{(1-\theta)(\theta_1-\theta_0)}v(t)\|_{L^p_*(0,+\infty;E_1)}.$$

Par ailleurs, $g'(t) = (\theta_1 - \theta_0)^{-1}t^{-1+1/(\theta_1-\theta_0)}v'(t^{1/(\theta_1-\theta_0)})$, de sorte que, par (2.13)(i), $t \mapsto t^{1-\theta}g'(t) = (\theta_1 - \theta_0)^{-1}t^{(1-\theta)(\theta_1-\theta_0)/(\theta_1-\theta_0)}v'(t^{1/(\theta_1-\theta_0)}) \in L^p_*(0,+\infty;E_0)$, et

$$\|t^{1-\theta}g'(t)\|_{L^p_*(0,+\infty;E_0)} \leq (\theta_1 - \theta_0)^{-1-1/p} \|t^{1-\theta(\theta_1-\theta_0)}v(t)\|_{L^p_*(0,+\infty;E_0)}.$$

Donc $g \in V(p, 1-\theta, E_0, E_1)$, si bien que $x = g(0)$ appartient à $(E_0, E_1)_{\theta,p}$, et

$$\|x\|_{(E_0,E_1)_{\theta,p}}^T \leq (\theta_1 - \theta_0)^{-1-1/p}k\|x\|_{(X,Y)_{\omega,p}}^T.$$

Si $x \in (X, Y)_{\omega}$, alors (2.13)(i) doit être remplacée par

$$\lim_{t \rightarrow 0} s^{1-\theta(\theta_1-\theta_0)}\|v'(s)\|_{E_0} = 0,$$

de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\theta}\|g'(t)\|_{E_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{-\theta+1/(\theta_1-\theta_0)}}{\theta_1 - \theta_0} \|v'(t^{1/(\theta_1-\theta_0)})\|_{E_0} = 0.$$

De même, (2.13)(ii) doit être remplacée par

$$\lim_{t \rightarrow 0} s^{1+(1-\theta)(\theta_1-\theta_0)}\|v'(s)\|_{E_1} = 0.$$

On utilise l'égalité

$$t^{1-\theta}g(t) = t^{1-\theta} \int_{t^{1/(\theta_1-\theta_0)}}^{\varepsilon^{1/(\theta_1-\theta_0)}} v'(s)ds + \frac{t^{1-\theta}}{\varepsilon^{1-\theta}} \left(\varepsilon^{1-\theta} \int_{\varepsilon^{1/(\theta_1-\theta_0)}}^{+\infty} v'(s)ds \right),$$

qui est vraie pour $0 < t < \varepsilon$. On en déduit que $\lim_{t \rightarrow 0} t^{1-\theta}\|g(t)\|_{E_1} = 0$.

□

Remarque 2.2.1. L'hypothèse $\theta_0 \neq \theta_1$ est incontournable. Considérons par exemple, le cas $E_1 = E_0 = (X, Y)_{\theta_0, \infty}$, dans $K_\theta(X, Y)$. Si l'affirmation (i) du théorème de la réitération est vraie pour $\theta_0 = \theta_1$ alors $(X, Y)_{\theta_0, \infty} \subset (X, Y)_{\theta_0, p}$, pour chaque $p < +\infty$, ce qui est faux en général.

Remarque 2.2.2. $(X, Y)_{\theta, p}$ et $(X, Y)_\theta$ sont dans $K_\theta(X, Y) \cap J_\theta(X, Y)$ pour $0 < \theta < 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$. Le théorème de la réitération donne

$$((X, Y)_{\theta_0, q_0}, (X, Y)_{\theta_1, q_1})_{\theta, p} = (X, Y)_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1, p},$$

$$((X, Y)_{\theta_0}, (X, Y)_{\theta_1, q})_{\theta, p} = (X, Y)_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1, p},$$

$$((X, Y)_{\theta_0, q}, (X, Y)_{\theta_1})_{\theta, p} = (X, Y)_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1, p},$$

pour $0 < \theta_0, \theta_1 < 1$, $1 \leq p, q \leq +\infty$. En outre, comme X appartient à $K_0(X, Y) \cap J_0(X, Y)$, et Y appartient à $K_1(X, Y) \cap J_1(X, Y)$, alors

$$((X, Y)_{\theta_0, q}, Y)_{\theta, p} = (X, Y)_{(1-\theta)\theta_0 + \theta, p}, \quad ((X, Y)_{\theta_0}, Y)_\theta = (X, Y)_{(1-\theta)\theta_0 + \theta},$$

et

$$(X, (X, Y)_{\theta_1, q})_{\theta, p} = (X, Y)_{\theta\theta_1, p}, \quad (X, (X, Y)_{\theta_1})_\theta = (X, Y)_{\theta\theta_1},$$

pour $0 < \theta_0, \theta_1 < 1$, $1 \leq p, q \leq +\infty$.

Chapitre 3

Identification de quelques espaces d'interpolation réelle

(d'après Markus Haase. Proc.AMS.,134,8, P 2349-2358,2006).

Après la présentation de quelques méthodes d'interpolation réelle, dans ce chapitre nous appliquerons une de ces méthodes (la K-méthode). Pour cela, nous allons d'abord énoncer un théorème principal d'identification de quelques espaces d'interpolation réelle. La deuxième partie est consacrée aux preuves. Enfin, dans la dernière partie, nous esquissons quelques applications liées au problème d'intersection et à la théorie des opérateurs sectoriels.

Dans ce qui suit, (X, Y) est un couple d'interpolation. Pour $\theta \in [0, 1]$ on note $\bar{\theta} = \max(\theta, 1 - \theta)$ et $\underline{\theta} = \min(\theta, 1 - \theta)$. On introduit l'ensemble

$$\Gamma := ([0, 1] \times [1, +\infty]) \setminus (\{0, 1\} \times [1, +\infty)).$$

3.1 Théorème

Théorème 3.1.1. [3] Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $(\theta, p) \in \Gamma$. Alors

$$(X + Y, Y)_{\theta, p} \cap X = (X, Y)_{\theta, p} \cap X = (X, X \cap Y)_{\theta, p}, \quad (3.1)$$

$$(X \cap Y, Y)_{\theta, p} + X = (X, Y)_{\theta, p} + X = (X, X + Y)_{\theta, p}, \quad (3.2)$$

$$(X + Y, Y)_{\theta, p} \cap (X, X + Y)_{\theta, p} = (X, Y)_{\theta, p}, \quad (3.3)$$

$$(X \cap Y, Y)_{\theta,p} + (X, X \cap Y)_{\theta,p} = (X, Y)_{\theta,p}, \quad (3.4)$$

$$(X + Y, X)_{\theta,p} \cap (X + Y, Y)_{\theta,p} = (X + Y, X \cap Y)_{\theta,p}, \quad (3.5)$$

$$(X, X \cap Y)_{\theta,p} + (Y, X \cap Y)_{\theta,p} = (X + Y, X \cap Y)_{\theta,p}, \quad (3.6)$$

$$(X, Y)_{\theta,p} \cap (X, Y)_{1-\theta,p} = (X + Y, X \cap Y)_{\bar{\theta},p}, \quad (3.7)$$

$$(X, Y)_{\theta,p} + (X, Y)_{1-\theta,p} = (X + Y, X \cap Y)_{\underline{\theta},p}, \quad (3.8)$$

$$(X, X \cap Y)_{\theta,p} \cap (X + Y, X \cap Y)_{1-\theta,p} = (X, X \cap Y)_{\bar{\theta},p}; \quad (3.9)$$

$$(X + Y, Y)_{\theta,p} + (X + Y, X \cap Y)_{1-\theta,p} = (X, X \cap Y)_{\underline{\theta},p}, \quad (3.10)$$

$$(X, X \cap Y)_{\underline{\theta},p} + (X + Y, X \cap Y)_{\bar{\theta},p} = (X, Y)_{\underline{\theta},p}, \quad (3.11)$$

$$(X + Y, Y)_{\bar{\theta},p} \cap (X + Y, X \cap Y)_{\underline{\theta},p} = (X, Y)_{\underline{\theta},p}. \quad (3.12)$$

3.2 Démonstration du théorème

Nous allons commencer avec quelques lemmes

Lemme 3.2.1. *Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $x \in X + Y$. Alors*

$$K(t, x, X, Y) = K(t, x, X, X + Y) \quad (t \geq 1).$$

Preuve. Soit $x = a + b$ avec $a \in X$, $b \in X + Y$ et soit $b = c + d$ avec $c \in X$, $d \in Y$. Alors

$$\begin{aligned} K(t, x, X, Y) &= \inf_{x=a+b} (\|a + c\|_X + t\|d\|_Y), \\ &\leq \|a + c\|_X + t\|d\|_Y, \quad \forall a, c \in X; \quad \forall d \in Y, \quad x = a + c + d, \\ &\leq \|a\|_X + \|c\|_X + t\|d\|_Y, \\ &\leq \|a\|_X + t[\|c\|_X + \|d\|_Y], \quad t \geq 1, \\ &\leq \inf_{x=a+b} (\|a\|_X + t[\|c\|_X + \|d\|_Y]) \leq K(t, x, X, X + Y). \end{aligned} \quad (3.13)$$

D'autre part, pour tout $t > 0$

$$K(t, x, X, X + Y) = \inf_{x=a+b} (\|a\|_X + t\|b\|_{X+Y}),$$

$$\begin{aligned} &\leq \|a\|_X + t[\|c\|_X + \|d\|_Y], \quad b = c + d \in X + Y \\ &\leq \|a\|_X + t\|d\|_Y, \quad \forall a \in X, d \in X + Y, x = a + d \end{aligned}$$

donc

$$K(t, x, X, X + Y) \leq \inf_{a+d} (\|a\|_X + t\|d\|_Y) = K(t, x, X, Y). \quad (3.14)$$

(3.13) et (3.14) donnent l'égalité.

□

Remarque 3.2.1. Rappelons que si (A, B) est un couple d'interpolation avec $A \subset B$, alors si $a \in (A, B)_{\theta, p}$ seul le comportement de $K(t, a, A, B)$ sur $(1, \infty)$ est pertinent. De plus

$$\|t^{-\theta} K(t, a, A, B)\|_{L_*^p(1, +\infty)}$$

est une norme équivalente dans $(A, B)_{\theta, p}$. Une remarque analogue s'applique dans le cas $B \subset A$.

Lemme 3.2.2. Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $(\theta, p) \in \Gamma$. Alors

$$(X, X + Y)_{\theta, p} = \{x \in X + Y | t^{-\theta} K(t, x, X, Y) \in L_*^p(1, +\infty)\}, \quad (3.15)$$

$$(X + Y, Y)_{\theta, p} = \{x \in X + Y | t^{-\theta} K(t, x, X, Y) \in L_*^p(0, 1)\}. \quad (3.16)$$

Preuve. Pour la première assertion, on a

$$(X, X + Y)_{\theta, p} = \{x \in X + Y | t^{-\theta} K(t, x, X, X + Y) \in L_*^p(0, +\infty)\}, \quad (3.17)$$

d'où grâce au lemme 3.2.1

$$(3.17) = \{x \in X + Y | t^{-\theta} K(t, x, X, Y) \in L_*^p(0, +\infty)\}, \quad t \geq 1 \quad (3.18)$$

et d'après la remarque précédente, on a

$$(3.18) = \{x \in X + Y | t^{-\theta} K(t, x, X, Y) \in L_*^p(1, +\infty)\}.$$

Concernant la deuxième assertion, on a

$$(X + Y, Y)_{\theta, p} = \{x \in X + Y | t^{-\theta} K(t, x, X + Y, Y) \in L_*^p(0, +\infty)\}, \quad (3.19)$$

la remarque précédente implique

$$\begin{aligned}
(3.19) &= \{x \in X + Y | t^{-\theta} K(t, x, X + Y, Y) \in L_*^p(1, +\infty)\}, \\
&= \{x \in X + Y | t^{-\theta+1} K(t^{-1}, x, X + Y, Y) \in L_*^p(1, +\infty)\}, \tag{3.20}
\end{aligned}$$

le changement de variable $\tau = t^{-1}$ qui preserve les espaces L_*^p donne

$$d\tau = \frac{-dt}{t^2}, \quad t = 1 \longrightarrow \tau = 1, \quad t = +\infty \longrightarrow \tau = 1,$$

donc

$$(3.20) = \{x \in X + Y | \tau^\theta K(\tau, x, Y, X + Y) \in L_*^p(0, 1)\}, \tag{3.21}$$

moyenant le lemme 3.2.1, on obtient

$$\begin{aligned}
(3.21) &= \{x \in X + Y | \tau^\theta K(\tau, x, Y, X) \in L_*^p(0, 1)\}, \\
&= \{x \in X + Y | t^{-\theta} K(t, x, X, Y) \in L_*^p(0, 1)\}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.3. Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $x \in X$. Alors

$$K(t, x, X, Y) \leq K(t, x, X, X \cap Y) \quad (t > 0),$$

$$K(t, x, X, X \cap Y) \leq 2K(t, x, X, Y) + t\|x\|_X \quad (t \leq 1).$$

Preuve. On montre la première affirmation. Soit $x = a + b \in X + Y$ où $a \in X$, $b \in Y$

$$\begin{aligned}
K(t, x, X, Y) &\leq \|a\|_X + t\|b\|_Y \\
&\leq \|a\|_X + t\|b\|_Y + t\|b\|_X \\
&= \|a\|_X + t\|b\|_{X \cap Y} = K(t, x, X, X \cap Y).
\end{aligned}$$

Pour montrer la deuxième affirmation, on prend $x = a + b$, où $a \in X$, $b \in Y$. Alors évidemment $b \in X \cap Y$ et

$$\begin{aligned}
K(t, x, X, X \cap Y) &\leq \|a\|_X + t\|b\|_{X \cap Y} \\
&= \|a\|_X + t\|b\|_Y + t\|b\|_X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|a\|_X + t\|b\|_Y + t\|x - a\|_X \\
&\leq \|a\|_X + t\|b\|_Y + t\|x\|_X + t\|a\|_X \text{ car } t \leq 1 \\
&\leq 2\|a\|_X + 2t\|b\|_Y + \|x\|_X,
\end{aligned}$$

on prend l'infimum sur les décompositions de x , on obtient

$$K(t, x, X, X \cap Y) \leq 2K(t, x, X, Y) + t\|x\|_X \quad (t \leq 1).$$

□

Proposition 3.2.1. *Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $(\theta, p) \in \Gamma$. Alors les assertions suivantes (3.1, 3.2) sont vérifiées :*

$$\begin{aligned}
(X + Y, Y)_{\theta, p} \cap X &= (X, Y)_{\theta, p} \cap X = (X, X \cap Y)_{\theta, p}, \\
(X \cap Y, Y)_{\theta, p} + X &= (X, Y)_{\theta, p} + X = (X, X + Y)_{\theta, p}.
\end{aligned}$$

Preuve. On montre l'identité (3.1). Les inclusions " $\supset$ " sont claires car si on prend $x \in (X, X \cap Y)$, grâce aux lemmes 3.2.3 et 3.2.1 on obtient

$$\begin{aligned}
K(t, x, X + Y, Y) + t\|x\|_X &= tK(t^{-1}, x, Y, X + Y) + t\|x\|_X \\
&= tK(t^{-1}, x, Y, X) + t\|x\|_X \\
&= K(t, x, X, Y) + t\|x\|_X \\
&\leq K(t, x, X, X \cap Y).
\end{aligned}$$

Par conséquent, il suffit de montrer

$$(X + Y, Y)_{\theta, p} \cap X \subset (X, Y)_{\theta, p} \cap X \subset (X, X \cap Y)_{\theta, p}.$$

On prend $x \in (X + Y, Y)_{\theta, p} \cap X$. Comme $x \in X$, alors on étudie le comportement de $K(t, x, X, X \cap Y)$ seulement dans $(0, 1)$. D'après le lemme 3.2.3 et le lemme 3.2.1 on a

$$\begin{aligned}
K(t, x, X, X \cap Y) &\leq 2K(t, x, X, Y) + t\|x\|_X \\
&= 2tK(t^{-1}, x, Y, X) + t\|x\|_X
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2tK(t^{-1}, x, Y, X + Y) + t\|x\|_X \\
&= 2K(t, x, X + Y, Y) + t\|x\|_X.
\end{aligned}$$

Maintenant, l'identité (3.1) est vérifiée.

Pour prouver l'identité (3.2), on note que les inclusions " $\subset$ " sont triviales car si on prend $x \in (X, Y)_{\theta, p} + X$ on a

$$(X \cap Y, Y)_{\theta, p} \subset (X, Y)_{\theta, p} \subset (X, X + Y)_{\theta, p} \text{ et } X \subset (X, X + Y)_{\theta, p}.$$

On prend $x \in (X, X + Y)_{\theta, p}$ et on écrit $x = a + b$ avec $a \in X, b \in Y$. Ensuite, par le lemme 3.2.1 on a

$$\begin{aligned}
K(t, b, X, Y) &\leq K(t, x, X, Y) + K(t, a, X, Y) \\
&\leq K(t, x, X, X + Y) + \|a\|_X \text{ pour } t \geq 1
\end{aligned}$$

et $K(t, b, X, Y) \leq t\|b\|_Y$ pour $t \leq 1$. Donc on a $b \in (X, Y)_{\theta, p}$.

D'où $x = a + b \in (X, Y)_{\theta, p} + X$. □

Remarque 3.2.2. Dans notre preuve, en général on prend soin de l'inclusion au sens de la théorie des ensembles et non au sens topologique. Celles sont automatiques par le théorème du graphe fermé (i.e X, Y espaces de Banach, T application linéaire de X dans Y . $[G(T)$ fermé dans $X \times Y] \Leftrightarrow [T \in L(X, Y)]$, où $G(T) = \{(x, Tx); x \in X\} \subset X \times Y$). Cependant, une analyse approfondie de nos arguments mène inégalités désirées.

Par exemple, en montrant l'existence d'une constante C telle que

$$\|x\|_{X+(X,Y)_{\theta,p}} \leq C\|x\|_{(X,X+Y)_{\theta,p}}$$

pour tout $x \in (X, X + Y)_{\theta, p}$, on aura l'inclusion topologique

$$(X, X + Y)_{\theta, p} \hookrightarrow (X + (X, Y)_{\theta, p}).$$

Dans la preuve du résultat suivant, on utilise la loi modulaire pour les sous-espaces vectoriels A, B, C d'un espace vectoriel Z

$$B \subset C \Rightarrow (A + B) \cap C = (A \cap C) + B. \quad (3.22)$$

Preuve. D'abord on montre que

$$B + (A \cap C) \subseteq (A + B) \cap C.$$

On note que $B \subset C$, $A \cap C \subset C$, donc

$$B + (A \cap C) \subset C,$$

de plus

$$B \subset B + A, \quad A \cap C \subset B + A.$$

Ainsi

$$B + (A \cap C) \subset A + B,$$

d'où l'inclusion.

Après cela, on montre l'inclusion inverse. Soit $c \in C \cap (A + B)$, alors $c = a + b$ où $a \in A$ et $b \in B$, par conséquent $a = b - c$, ainsi $a \in C$ car $c \in C$, $b \in B \subset C$. Donc $a \in A \cap C$, de sorte que

$$c = a + b \in B + (A \cap C).$$

□

Proposition 3.2.2. Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $(\theta, p) \in \Gamma$. Alors les assertions suivantes (3.3, 3.4) sont vérifiées :

$$(X + Y, Y)_{\theta, p} \cap (X, X + Y)_{\theta, p} = (X, Y)_{\theta, p},$$

$$(X \cap Y, Y)_{\theta, p} + (X, X \cap Y)_{\theta, p} = (X, Y)_{\theta, p}.$$

Preuve. La première identité est immédiate grâce au lemme 3.2.2 et à la définition de $(X, Y)_{\theta, p}$. En effet

$$(X + Y, Y)_{\theta, p} \cap (X, X + Y)_{\theta, p} = \{x \in X + Y \mid t^{-\theta} K(t, x, X, Y) \in L_*^p((0, 1) \cup (1, +\infty))\} = (X, Y)_{\theta, p}.$$

On montre la seconde identité. On montre l'inclusion " $\supset$ ".

Soit $x \in (X \cap Y, Y)_{\theta, p} + (X, X \cap Y)_{\theta, p}$. Alors

$$(X \cap Y, Y)_{\theta, p} + (X, X \cap Y)_{\theta, p} = (X \cap Y, Y)_{\theta, p} + (X, Y)_{\theta, p} \cap X$$

$$\begin{aligned}
&= (X, Y)_{\theta, p} \cap (X + (X \cap Y, Y)_{\theta, p}) \\
&= (X, Y)_{\theta, p} \cap ((X, Y)_{\theta, p} + X) = (X, Y)_{\theta, p}.
\end{aligned}$$

Pour établir l'autre inclusion, on prend $x \in (X, Y)_{\theta, p}$ et on écrit $x = a + b$ avec $a \in X$, $b \in Y$.

Alors

$$\begin{aligned}
b = x - a &\in [X + (X, Y)_{\theta, p}] \cap Y = [X + (X \cap Y, Y)_{\theta, p}] \cap Y \\
&= X \cap Y + (X \cap Y, Y)_{\theta, p} = (X \cap Y, Y)_{\theta, p},
\end{aligned}$$

où on a utilisé la proposition 3.2.1 et la loi modulaire (3.22). De la même manière

$$\begin{aligned}
a = x - b &\in [Y + (X, Y)_{\theta, p}] \cap X = [(X, X \cap Y)_{\theta, p} + Y] \cap X \\
&= X \cap Y + (X, X \cap Y)_{\theta, p} = (X, X \cap Y)_{\theta, p}.
\end{aligned}$$

Par conséquent la deuxième identité est prouvée. $\square$

Proposition 3.2.3. *Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $(\theta, p) \in \Gamma$. Alors les assertions suivantes (3.5, 3.6) sont vérifiées :*

$$\begin{aligned}
(X + Y, X)_{\theta, p} \cap (X + Y, Y)_{\theta, p} &= (X + Y, X \cap Y)_{\theta, p}, \\
(X, X \cap Y)_{\theta, p} + (Y, X \cap Y)_{\theta, p} &= (X + Y, X \cap Y)_{\theta, p}.
\end{aligned}$$

Preuve. On utilise (3.2) et (3.22)

$$\begin{aligned}
(X + Y, X)_{\theta, p} \cap (Y, X \cap Y)_{\theta, p} &= [X + (Y, X \cap Y)_{\theta, p}] \cap [Y + (X, X \cap Y)_{\theta, p}] \\
&= \{X \cap [Y + (X, X \cap Y)_{\theta, p}]\} + (Y, X \cap Y)_{\theta, p} \\
&= (X \cap Y) + (X, X \cap Y)_{\theta, p} + (Y, X \cap Y)_{\theta, p} \\
&= (X, X \cap Y)_{\theta, p} + (Y, X \cap Y)_{\theta, p} \\
&\subset (X + Y, X \cap Y)_{\theta, p} \subset (X, X \cap Y)_{\theta, p} + (Y, X \cap Y)_{\theta, p}.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 3.2.4. *Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $(\theta, p) \in \Gamma$. Alors les assertions suivantes (3.7, 3.8) sont vérifiées :*

$$\begin{aligned}
(X, Y)_{\theta, p} \cap (X, Y)_{1-\theta, p} &= (X + Y, X \cap Y)_{\bar{\theta}, p}, \\
(X, Y)_{\theta, p} + (X, Y)_{1-\theta, p} &= (X + Y, X \cap Y)_{\underline{\theta}, p}.
\end{aligned}$$

Preuve. Sans toucher à la généralité du problème, on peut supposer $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$. L'identité (3.5) donne

$$\begin{aligned} (X, Y)_{\theta, p} \cap (X, Y)_{1-\theta, p} &\subset (X + Y, X)_{1-\theta, p} \cap (X + Y, Y)_{1-\theta, p} \\ &= (X + Y, X \cap Y)_{1-\theta, p}. \end{aligned}$$

En outre, puisque $\theta \leq 1 - \theta$,

$$\begin{aligned} (X + Y, X \cap Y)_{1-\theta, p} &\subset (X + Y, X)_{1-\theta, p} \cap (X + Y, Y)_{1-\theta} \\ &\subset (X, X + Y)_{\theta, p} \cap (X + Y, Y)_{\theta, p} = (X, Y)_{\theta, p} \end{aligned}$$

grâce à la proposition 3.2.1. En échangeant les rôles de X et Y dans cette inclusion, on obtient

$$(X + Y, X \cap Y)_{1-\theta, p} \subset (Y, X)_{\theta, p} = (X, Y)_{1-\theta, p}.$$

Par conséquent, l'identité (3.7) est complètement prouvée.

On passe maintenant à (3.8). On a

$$(X + Y, X \cap Y)_{\theta, p} = (X, X \cap Y)_{\theta, p} + (Y, X \cap Y)_{\theta, p} \subset (X, Y)_{\theta, p} + (Y, X)_{\theta, p}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} (X, Y)_{\theta, p} &= (X, X \cap Y)_{\theta, p} + (X \cap Y, Y)_{\theta, p} \subset (X + Y, X \cap Y)_{\theta, p} \\ &\quad + (X \cap Y, X + Y)_{\theta, p} \subset (X + Y, X \cap Y)_{\theta, p}, \end{aligned}$$

puisque $\theta \leq 1 - \theta$. Ceci achève la preuve. □

Proposition 3.2.5. Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $(\theta, p) \in \Gamma$. Alors les assertions suivantes (3.9, 3.10) sont vérifiées :

$$\begin{aligned} (X, X \cap Y)_{\theta, p} \cap (X + Y, X \cap Y)_{1-\theta, p} &= (X, X \cap Y)_{\bar{\theta}, p}, \\ (X + Y, Y)_{1-\theta, p} + (X + Y, X \cap Y)_{\theta, p} &= (X, X \cap Y)_{\underline{\theta}, p}. \end{aligned}$$

Preuve. On prouve l'identité (3.9). On utilise (3.6) et (3.22) qui conduisent à

$$\begin{aligned}
& (X, X \cap Y)_{\theta,p} \cap (X + Y, X \cap Y)_{1-\theta,p} \\
&= (X, X \cap Y)_{\theta,p} \cap [(X, X \cap Y)_{1-\theta,p} + (Y, X \cap Y)_{1-\theta,p}] \\
&= (X, X \cap Y)_{\theta,p} \cap [(X, X \cap Y)_{1-\theta,p} + (X \cap (Y, X \cap Y)_{1-\theta,p})] \\
&= (X, X \cap Y)_{\theta,p} \cap [(X, X \cap Y)_{1-\theta,p} + X \cap Y] \\
&= (X, X \cap Y)_{\theta,p} \cap (X, X \cap Y)_{1-\theta,p} = (X, X \cap Y)_{\bar{\theta},p}.
\end{aligned}$$

Pour prouver l'identité (3.10), alors on se sert de (3.5) et (3.22) (mais dans le sens inverse) on écrit

$$\begin{aligned}
& (X + Y, Y)_{1-\theta,p} + (X + Y, X \cap Y)_{\theta,p} \\
&= (X + Y, Y)_{1-\theta,p} + [(X + Y, X)_{\theta,p} \cap (X + Y, Y)_{\theta,p}] \\
&= (X + Y, Y)_{1-\theta,p} + [(Y + (X + Y, X)_{\theta,p}) \cap (X + Y, Y)_{\theta,p}] \\
&= (X + Y, Y)_{1-\theta,p} + [(X \cap Y) \cap (X + Y, Y)_{\theta,p}] \\
&= (X + Y, Y)_{1-\theta,p} + (X + Y, Y)_{\theta,p} = (X, X \cap Y)_{\underline{\theta},p}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.6. Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $(\theta, p) \in \Gamma$. Alors les assertions suivantes (3.11, 3.12) sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
& (X, X \cap Y)_{\underline{\theta},p} + (X + Y, X \cap Y)_{\bar{\theta},p} = (X, Y)_{\underline{\theta},p}; \\
& (X + Y, Y)_{\bar{\theta},p} \cap (X + Y, X \cap Y)_{\underline{\theta},p} = (X, Y)_{\underline{\theta},p}.
\end{aligned}$$

Preuve. On peut supposer $\theta \leq \frac{1}{2}$ sans toucher à la généralité du problème. On déduit de (3.6) et (3.4)

$$\begin{aligned}
& (X, X \cap Y)_{\theta,p} + (X + Y, X \cap Y)_{1-\theta,p} \\
&= (X, X \cap Y)_{\theta,p} + (X, X \cap Y)_{1-\theta,p} + (Y, X \cap Y)_{1-\theta,p} \\
&= (X, X \cap Y)_{\theta,p} + (Y, X \cap Y)_{1-\theta,p} = (X, Y)_{\theta,p}
\end{aligned}$$

De même, en utilisant (3.5) et (3.3), on obtient

$$\begin{aligned}
& (X + Y, X)_{1-\theta, p} \cap (X + Y, X \cap Y)_{\theta, p} \\
&= (X + Y, X)_{1-\theta, p} \cap (X + Y, X)_{\theta, p} \cap (X + Y, Y)_{\theta, p} \\
&= (X + Y, X)_{1-\theta, p} \cap (X + Y, Y)_{\theta, p} = (X, Y)_{\theta, p}.
\end{aligned}$$

□

3.3 Corollaires

Corollaire 3.3.1. *Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $(\theta, p) \in \Gamma$. Alors*

$$(X + Y, X \cap Y)_{\bar{\theta}, p} \subset (X, Y)_{\theta, p} \subset (X + Y, X \cap Y)_{\underline{\theta}, p}, \quad (3.23)$$

$$(X, Y)_{\theta, p} \in K_{\underline{\theta}}(X + Y, X \cap Y) \cap J_{\bar{\theta}}(X + Y, X \cap Y), \quad (3.24)$$

$$(X, Y)_{\frac{1}{2}, p} = (X + Y, X \cap Y)_{\frac{1}{2}, p}. \quad (3.25)$$

Preuve. On commence par (3.23). Grâce à (3.7) on a

$$(X + Y, X \cap Y)_{\bar{\theta}, p} \subset (X, Y)_{\theta, p},$$

d'autre part, d'après (3.8) on a

$$(X, Y)_{\theta, p} \subset (X + Y, X \cap Y)_{\underline{\theta}, p},$$

d'où (3.23).

La deuxième assertion est un résultat immédiat de (3.23) car

$$(X + Y, X \cap Y)_{\bar{\theta}, p} \subset (X, Y)_{\theta, p} \quad \text{i.e.} \quad (X, Y)_{\theta, p} \in J_{\bar{\theta}},$$

et

$$(X, Y)_{\theta, p} \subset (X + Y, X \cap Y)_{\underline{\theta}, p} \quad \text{i.e.} \quad (X, Y)_{\theta, p} \in K_{\underline{\theta}},$$

donc

$$(X, Y)_{\theta, p} \in K_{\underline{\theta}}(X + Y, X \cap Y) \cap J_{\bar{\theta}}(X + Y, X \cap Y).$$

Conservant l'égalité (3.25), on prend $\theta = \frac{1}{2}$ dans (3.23) on obtient $\underline{\theta} = \bar{\theta} = \frac{1}{2}$, alors

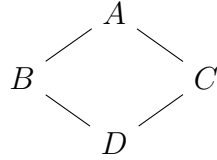
$$(X + Y, X \cap Y)_{\frac{1}{2},p} \subset (X, Y)_{\frac{1}{2},p} \subset (X + Y, X \cap Y)_{\frac{1}{2},p}.$$

Donc

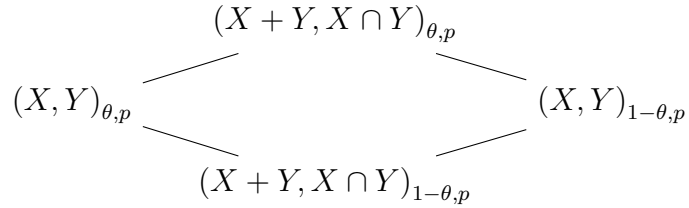
$$(X, Y)_{\frac{1}{2},p} = (X + Y, X \cap Y)_{\frac{1}{2},p}.$$

□

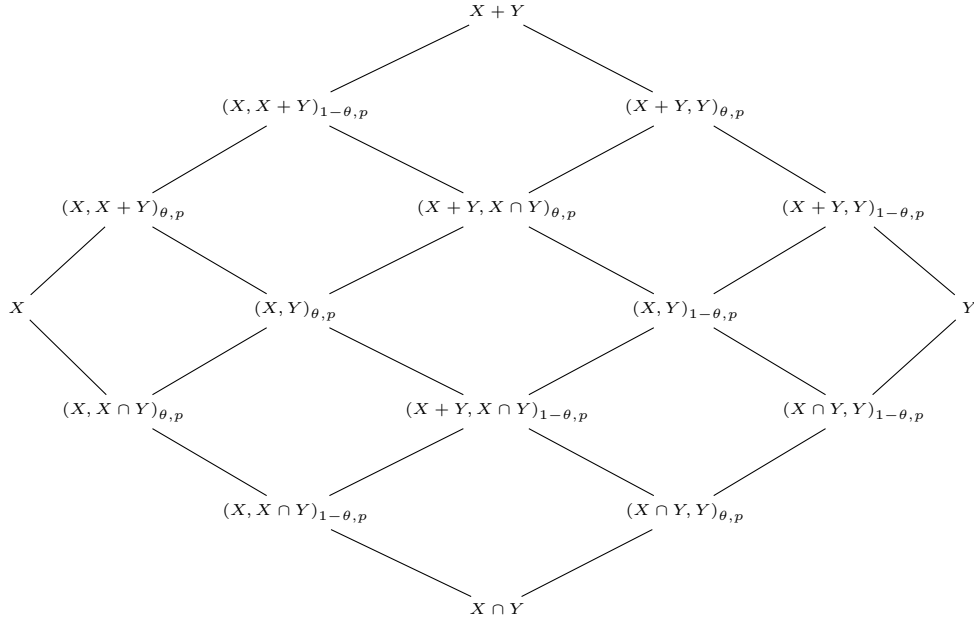
On va maintenant donner une illustration géométrique du théorème ci-dessus. Soit A un espace vectoriel et $B, C, D \subset A$ des sous-espaces de A et $D \subset B \cap C$. Une telle situation est représenté dans le diagramme.



On appellera ce diagramme bloc élémentaire. On dira que le bloc élémentaire ci-dessus est propre si $A = B + C$ et $D = B \cap C$. Ainsi, (3.7) et (3.8) du théorème 3.1.1 affirment que si $\theta \leq \frac{1}{2}$ le bloc



est propre. Maintenant, en supposant à nouveau $\theta \leq \frac{1}{2}$, considérons le diagramme suivant



on peut alors résumer les résultats du théorème 3.1.1 comme suit

Théorème 3.3.1. *Soit (X, Y) un couple d'interpolation et soit $(\theta, p) \in \Gamma$ avec $\theta \leq \frac{1}{2}$. Dans le diagramme ci-dessus tous les blocs élémentaires sont propres.*

Preuve. Le résultat découle directement du théorème 3.1.1. □

Théorème 3.3.2. *Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $(\theta, p) \in \Gamma$. Alors les identités suivantes sont vérifiées :*

$$((X, X \cap Y)_{\theta, p}, (X + Y, Y)_{\theta, p})_{\theta, p} = (X, Y)_{\theta, p}, \quad (3.26)$$

$$((X, X \cap Y)_{\theta, p}, (X + Y, Y)_{\theta, p})_{1-\theta, p} = (X + Y, X \cap Y)_{\theta, p}. \quad (3.27)$$

Preuve. On montre l'identité (3.26). Moyennant les identités (3.3) et (3.4) et

$$(X, X \cap Y)_{\theta, p} \subset X \text{ et } (X + Y, Y)_{\theta, p} \subset X + Y,$$

on a

$$\begin{aligned} ((X, X \cap Y)_{\theta, p}, (X + Y, Y)_{\theta, p})_{\theta, p} &\subset (X, X + Y)_{\theta, p} \cap (X + Y, Y)_{\theta, p} \\ &\stackrel{(3.3)}{=} (X, Y)_{\theta, p} \stackrel{(3.4)}{=} (X, X \cap Y)_{\theta, p} + (X \cap Y, Y)_{\theta, p} \\ &\subset ((X, X \cap Y)_{\theta, p}, (X + Y, Y)_{\theta, p})_{\theta, p}. \end{aligned}$$

De la même manière, on montre la deuxième identité

$$((X, X \cap Y)_{\theta,p}, (X + Y, Y)_{\theta,p})_{1-\theta,p} \subset (X, X + Y)_{1-\theta,p} \quad (3.28)$$

$$((X, X \cap Y)_{\theta,p}, (X + Y, Y)_{\theta,p})_{1-\theta,p} \subset (X + Y, Y)_{\theta,p},$$

car $A \subset X$ et $B \subset X \implies (A, B)_{\theta,p} \subset X$.

D'où

$$(3.28) \subset (X, X + Y)_{1-\theta} \cap (X + Y, Y)_{\theta,p}. \quad (3.29)$$

D'après (3.5)

$$(3.29) = (X + Y, X \cap Y)_{\theta,p},$$

et (3.6) donne

$$(X + Y, X \cap Y)_{\theta,p} = (X, X \cap Y)_{\theta,p} + (Y, X \cap Y)_{\theta,p},$$

or $A \subset X \implies A \subset (A, X)_{\theta,p}$.

D'où

$$\begin{aligned} (X, X \cap Y)_{\theta,p} &\subset ((X, X \cap Y)_{\theta,p}, (X + Y, Y)_{\theta,p})_{1-\theta,p} \\ &\subset (X + Y, X \cap Y)_{\theta,p} \subset ((X, X \cap Y)_{\theta,p}, (X + Y, Y)_{\theta,p})_{1-\theta,p}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.3.2. *Soient (X, Y) un couple d'interpolation et $(\theta, p) \in \Gamma$ avec $\theta \leq \frac{1}{2}$. Alors*

$$((X + Y, X \cap Y)_{\theta,p}, (X, X \cap Y)_{\theta,p})_{\frac{1-2\theta}{1-\theta},p} = (X, Y)_{\theta,p}.$$

Preuve. Ce résultat s'obtient par le théorème de réitération et application du théorème précédent. □

3.4 Applications

Espaces de Lorentz

Définition 3.4.1. [2] *Soit (Ω, μ) un espace de mesure σ -finie. Pour toute fonction mesurable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, ou $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, on a*

$$m(\sigma, f) = \mu\{x \in \Omega \mid |f(x)| \geq \sigma\}, \quad \sigma \geq 0,$$

et

$$f^*(s) = \inf\{\sigma, m(\sigma, f) \leq s\},$$

$m(., f)$ et f^* sont positives, décroissante et continue. De plus, on a pour chaque $\sigma_0 > 0$

$$|\{t > 0 : f^*(t) > \sigma_0\}| = m(\sigma_0, f) = \mu\{x \in \Omega : |f(x)| > \sigma_0\},$$

et par conséquent

$$|\{t > 0 : f^*(t) \in [\sigma_1, \sigma_2]\}| = \mu\{x \in \Omega : |f(x)| \in [\sigma_1, \sigma_2]\}.$$

Donc, pour tout $p \geq 1$,

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p \mu(dx) = \int_0^{+\infty} (f^*(t))^p dt; \sup_{ess} |f(x)| = f^*(0) = \sup_{ess} f^*(t),$$

et pour chaque ensemble mesurable $E \in \Omega$

$$\int_E |f(x)|^p \mu(dx) = \int_0^{\mu(E)} (f^*(t))^p dt.$$

f^* est appelé le réarrangement décroissant de f sur $(0, +\infty)$.

Définition 3.4.2. L'espace de Lorentz $L^{p,q}(X)$ est constitué des fonctions mesurables $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ pour lesquelles la quantité suivante est finie

$$\|f\|_{L^{p,q}} = \begin{cases} \left[\frac{p}{q} \int_0^{+\infty} \left\{ t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right\}^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q} & \text{si } 1 \leq p, q \leq +\infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) & \text{si } 1 \leq p \leq +\infty \text{ et } q = +\infty, \\ \sup_{t>0} f^*(t) & \text{si } p, q = +\infty. \end{cases}$$

Proposition 3.4.1. [2]/(Espaces de Lorentz comme espaces d'interpolation)

1. Pour $1 < p < +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$

$$L^{p,q} = (L^1, L^\infty)_{\theta,q} \quad \text{avec} \quad \theta = 1 - \frac{1}{p}. \quad (3.30)$$

2. Pour $p_0 \neq p_1$, on a

$$(L^{p_0}, L^{p_1})_{\theta,q} = (L^{p_0,q_0}, L^{p_1,q_1})_{\theta,q} = L^{p,q} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}. \quad (3.31)$$

3. Dans ce cas $p_0 = p_1 = p$ on a

$$(L^{p,q_0}, L^{p,q_1})_{\theta,q} = L^{p,q} \quad \text{si} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}. \quad (3.32)$$

Exemple 3.4.1. Soit (Ω, μ) un espace de mesure σ -finie. Alors $(L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))$ est un couple d'interpolation. Pour $0 < \theta < 1$, $1 \leq q \leq +\infty$. On peut montrer le résultat

$$((L^1(\Omega), L^\infty(\Omega))_{\theta,q} = L^{\frac{1}{1-\theta},q}(\Omega). \quad (3.33)$$

On en déduit que

$$L^1 \cap L^{\frac{1}{1-\theta},p} = (L^1, L^1 \cap L^\infty)_{\theta,p}.$$

Exemple 3.4.2. On prend $X = \mathbf{C}^b(\mathbb{R}^d)$ l'espace de Banach des fonctions continues et uniformément bornées sur $\mathbb{R}^d$ et $Y = \mathbf{Lip}(\mathbb{R}^d)$ qui est l'espace des fonctions Lipschitziennes continues sur $\mathbb{R}^d$ muni de la norme

$$\|f\|_{\mathbf{Lip}} = |f|_1 + |f(0)|.$$

Alors $(X, Y)_{\theta,\infty} = \mathbf{C}^\theta(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des fonctions Hölderiennes d'exposant θ .

Par suite l'identité (3.1) donne

$$\mathbf{C}^\theta(\mathbb{R}^d) \cap \mathbf{C}^b(\mathbb{R}^d) = (\mathbf{C}^b(\mathbb{R}^d), \mathbf{C}^b(\mathbb{R}^d) \cap \mathbf{Lip}(\mathbb{R}^d))_{\theta,\infty}.$$

3.4.1 Opérateurs sectoriels

Définition 3.4.3. [4] Soit l'opérateur $(T; \mathcal{D}(T))$ linéaire fermé avec domaine dense $(X = \overline{\mathcal{D}(T)})$ dans un espace de Banach X . Cet opérateur est dit sectoriel (d'angle δ) si

(1) Il existe δ , $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ tel que

$$\sum_{\delta - \frac{\pi}{2}} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \arg(\lambda) > \frac{\pi}{2} - \delta\} \cup (0) \subset \rho(T)$$

où $\rho(t)$ désigne l'ensemble résolvant.

(2) Pour $\varepsilon \in (0, \delta)$ il existe $M > 0$ tel que

$$\|\mathcal{R}(\lambda, T)\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \text{ pour } \lambda \in \overline{\sum_{\delta - \frac{\pi}{2} + \varepsilon}} \text{ et } \lambda \neq 0.$$

L'angle spectral $\delta(T)$ de l'opérateur sectoriel est défini par

$$\delta(T) = \inf\{\delta \in [0, \pi] \text{ tel que quand (1), (2) sont vérifiées }\}.$$

On pose

$$\sum_{\varepsilon,0} = \{\lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \mid \arg(\lambda) < \varepsilon\}.$$

On définit les espaces

$$H(\sum_{\varepsilon,0}) = \left\{ f \in \sum_{\varepsilon,0} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ holomorphe} \right\}.$$

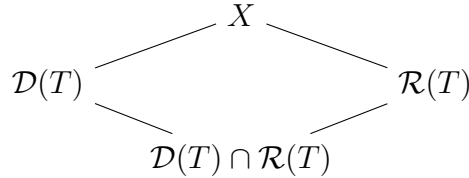
$$H^\infty(\sum_{\varepsilon,0}) = \left\{ f \in H(\sum_{\varepsilon,0}), \quad \|f\| < \infty \right\}.$$

$$H_0^\infty(\sum_{\varepsilon,0}) = \left\{ f \in H(\sum_{\varepsilon,0}), \quad \exists s > 0 \quad f\varphi^{-s} \in H^\infty(\sum_{\varepsilon,0}) \right\},$$

où

$$\varphi(\varsigma) = \frac{\varsigma}{1 + \varsigma^2} \text{ et } \|f\|_\infty = \|f\|_{\infty, \sum_{\varepsilon,0}} = \sup \left\{ f(\lambda) \mid \lambda \in \sum_{\varepsilon,0} \right\}.$$

Le théorème 3.1.1 a été motivée par l'étude du calcul fonctionnel pour les opérateurs sectoriels injectif non inversibles. On a le schéma suivant :



où X est l'espace de Banach sous-jacent, et $\mathcal{D}(T)$ et $\mathcal{R}(T)$ sont le domaine et l'image de l'opérateur sectoriel T .

On peut démontrer qu'on peut faire du calcul fonctionnel sur T quand on se restreint aux espaces d'interpolation verticale $(X, \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{R}(T))_{\theta,p}$, aux espaces d'interpolation horizontale $(\mathcal{D}(T), \mathcal{R}(T))_{\theta,p}$. Notre théorème 3.3.1 montre que le résultat de Dore (2002) sur le calcul fonctionnel (utilisant l'interpolation réelle) est un corollaire de ce travail.

Une seconde application en relation avec les opérateurs sectoriels apparaît dans la caractérisation des conditions de croissance comme

$$\sup_{t>0} \|t^\theta C(t+T)^{-1}\|_{Y \rightarrow X} < \infty \text{ ou } \sup_{t>0} \|t^\theta (t+T)^{-1} B\|_{Y \rightarrow \mathcal{D}(T)} < \infty$$

au moyen d'espaces d'interpolation (voir[3]). Soit Y un autre espace de Banach et

$$C : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y \text{ et } B : Y \rightarrow X$$

des opérateurs linéaires. La croissance ci-dessus des conditions sont des hypothèses usuelles dans les résultats de perturbation.

3.4.2 Le problème d'intersection

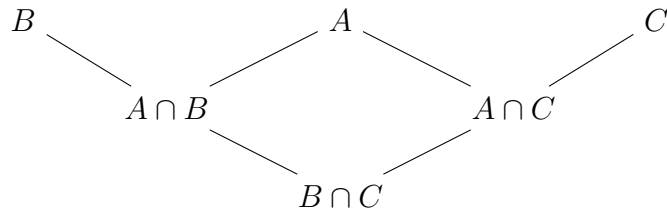
Comme autre conséquence de nos résultats, il y a le problème d'intersection. Il s'agit d'établir une identité du type

$$(A, B)_{\theta, p} \cap (A, C)_{\theta, p} = (A, B \cap C)_{\theta, p} \quad (3.34)$$

où A, B, C s'injectent dans un espace plus grand. Les résultats de Grisvard et Peetre (voir [3]) montrent que chaque identité reste vraie, si on suppose (A, B) un couple quasi-linéaire (voir [9] pour la définition de cette notion) Maintenant, l'identité (3.5) du théorème 3.1.1 montre aussi que $A = B + C$ est une hypothèse qui rend l'identité d'intersection vraie. On peut généraliser ce résultat en considérant la condition

$$B \cap C \subset A \subset (A \cap B) + (A \cap C)$$

qui implique (3.3).



En effet, il résulte d'abord que

$$(A + B) \cap (A + C) = A$$

et cela implique

$$(A, B)_{\theta, p} \cap (A, C)_{\theta, p} \subset A.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}(A, B)_{\theta, p} \cap (A, C)_{\theta, p} &= [(A, B)_{\theta, p} \cap A] \cap [(A, C)_{\theta, p} \cap A] \\ &= (A, A \cap B)_{\theta, p} \cap (A, A \cap C)_{\theta, p} = (A, A \cap B \cap A \cap C)_{\theta, p} \\ &= (A, B \cap C)_{\theta, p},\end{aligned}$$

où on a utilisé les identités (3.1) et (3.5).

Conclusion

Dans ce mémoire, on définit quelques espaces d'interpolation réels à partir des sommes ou intersections des autres espaces d'interpolation.

Pour prouver cela, on utilise les espaces d'interpolation qui sont définis par la méthode K et les relations algébriques de la théorie des ensembles.

Après avoir présenté la méthode K , la méthode J , la méthode des traces, et on vu la relation entre eux.

On s'est intéressé au contenu d'un article récent consacré à la démonstration d'une douzaine d'identités nouvelles ayant trait à la théorie de l'interpolation réelle.

Bibliographie

- [1] BERGH.J and LÖFSTRÖM.J. *Interpolation Spaces. An Introduction.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [2] CHAMORRO DIEGO and LEMARIÉ –RIEUSSET P.G . *Real Interpolation method, Lorentz spaces and refined Sobolev inequalities.* ArXiv : 12113320v1 [math.AP], 2012.
- [3] HAASE MARKUS. *Identification of Some Real Interpolation Spaces, Proc.AMS.,134,8, P 2349-2358, 2006.*
- [4] HAASE MARKUS. *The Functional Calculus for Sectorial Operators, Birkhäuser, Basel, 2006.*
- [5] LECH MALIGRANDA. *Interpolation between Sum and Intersection of Banach Spaces, Aprox. Th. Jour, 47, P 42-53, 1986.*
- [6] LUC TARTAR. *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces, Springer, 2007.*
- [7] LUNARDI ALESSANDRA. *Interpolation Theory. Appunti, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2007.*
- [8] Mikhail S. Agranovich. *Sobolev Spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Smooth and Lipschitz Domains, Springer, 2015.*
- [9] TRIEBEL HANS. *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.*

Abstract

In this work, we present the theory of the real interpolation after some basic concepts of functional analysis. There are many methods in this theory. Among them, there is the so called K -Method which is detailed in the chapter II. The chapter III is devoted to the identification of some interpolation spaces related to the sum and intersection spaces. These results (12 identities) have been proved in an article published by Markus Haase in 2006.

Keywords

Interpolation couple, interpolation space, intersection space, real method of interpolation, sum space, sectorial operator.

Résumé

Dans ce mémoire, on définit quelques espaces d'interpolation réels à partir des sommes ou intersections des autres espaces d'interpolation. Pour prouver cela, on utilise les espaces d'interpolation qui sont définis par la méthode K et les relations algébriques de la théorie des ensembles. Après avoir présenté la méthode K , on s'est intéressé au contenu d'un article récent consacré à la démonstration d'une douzaine d'identités nouvelles ayant trait à la théorie de l'interpolation réelle.

Mots-clés

couple d'interpolation, espace d'interpolation, espace d'intersection, espace somme, méthode d'interpolation, opérateur sectoriel.

ملخص

في هذا العمل، بعد تعريف بعض المفاهيم الأساسية في التحليل الدالي قدمنا نظرية الاستقطاب الحقيقي. يوجد الكثير من الطرق في هذه النظرية، في الفصل الثاني اخترنا واحدة منهم والمسماة بالطريقة K ، وذكرنا بعض خواصها الأساسية. بينما خصصنا الفصل الثالث لتعريف بعض فضاءات استقطاب انطلاقاً من عمليات جمع وتقاطع فضاءات استقطاب أخرى. هذه النتائج تم اثباتها في مقال لماركس هاس نشر مؤخراً.

الكلمات المفتاحية

الطريقة K ، ثنائية استقطاب، فضاء الاستقطاب، فضاء التقاطع، فضاء المجموع، طرق الاستقطاب الحقيقي، مؤثر قطاعي.