République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Echahid Hamma Lakhdar
Faculté des Sciences Exacts
Département de Mathématiques

Introduction à la théorie des opérateurs et spectrale

Cours et exercices corrigés

Pour les étudiants de Master 1

Par: Dr. Messaoud Guesba

Année Universitaire: 2020/2021

N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Minstère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Echahid Hamma Lakhdar

Faculté des Sciences Exacts

Département de Mathématiques

Introduction à la théorie des opérateurs et spectrale

Cours et exercices corrigés de Master 1

Réalisé par:

Dr. Messaoud Guesba

Année Universitaire: 2020/2021

Table des matières

Introduction

Ce polycopié contient le programme officiel de la matière "Théorie Spectrale des opérateurs" destiné principalement aux étudiants en première année master mathématiques. De plus, il est utile pour les doctorants en mathématiques. Dans ce but, nous avons illustré le texte avec des exemples variés toutes les fois que nous avons introduit une nouvelle notion ou montré un théorème.

Le contenu de cette matière est la base de toute introduction à l'analyse fonctionnelle. Pour bien préciser ses spécificités un rappel historique sur le développement de l'analyse fonctionnelle n'est pas inutile.

La théorie des opérateurs linéaires trouve ses origines d'une part dans l'étude des systèmes finis d'équations linéaires à un nombre fini d'inconnues et d'autres part dans des équations linéaires différentielles et intégrales.En effet, c'est l'analogie entre les systèmes d'équations linéaires en dimension finie et les équations intégrales, qui a permis à quelques mathématiciens du début du siècle tels que I. Fredholm ou J. Volterra de dégager les éléments essentiels de la théorie qui porte aujourd'hui le nom de la théorie des équations de Fredholm.

Dans un effort pour compléter les travaux de I. Fredholm, Hilbert parvient à des conceptions plus générales. En particulier il découvre que le succés de la méthode de I .Fredholm repose sur la notion de « complète continuité » qu'il dégage en la formulant pour les formes bilinéaires et qu'il étudie de façon approfondie. Puis juste après, E. Schmidt et M. Frechet introduisent délibérément le langage de la géométrie euclidienne dans l'espace de Hilbert.

La notion d'application linéaire complètement continue se trouve pour la première fois définie de façon générale dans le célèbre mémoire de F. Riesz 1918 sur la théorie de I.

Fredholm. Vers les années vingt de ce siécle, S.Banach ajoute une étude poussée des relations entre une application linéaire continue et sa transposée, étendue aux espaces normés. Cette période verra naître de grands théorèmes tels que le théorème du graphe fermé ou le théorème de Banach-Steinhaus.

La publication traité de Banach sur les opérations linéaires marque le début de l'âge adulte de l'Analyse fonctionnelle et de la théorie des opérateurs.

Le contenu de ce polycopié est composé de cinq chapitres.

Chapitre 1: Formes bilinéaires et quadratiques.

Chapitre 2: Généralités sur les opérateurs linéaires bornes.

Chapitre 3: Quelques classes des opérateurs.

Chapitre 4: Image numérique d'un opérateur.

Chapitre 5: Eléments de correction des exercices.

À la fin des chapitres 1, 2, 3 et 4, on trouve des exercices. Le but des exercices est de vérifier si l'étudiant a bien compris et assimilé le contenu du texte. Ce sont donc des exemples ou des applications directs de la matière qu'on a vue dans le chapitre et qui sont faciles à résoudre.

Enfin, je ne serais pas terminer cet avant-propos sans passer un grand remerciement à mes collègues de l'université d'El Oued et je souhaite remercier également et tout particulièrement nos lecteurs, en particulier mes étudiants en première année master mathématiques.

Chapitre 1

Formes bilinéaires et quadratiques

1.1 Formes sesquilinéaires et bilinéaires

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle forme sesquilinéaire sur E une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{k}$ vérifiant:*

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$, $\forall x, y, z \in E$

(i) $\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \varphi(x, z) + \beta \varphi(y, z)$.

(ii) $\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} \varphi(x, z) + \overline{\beta} \varphi(x, z)$.

Définition 1.1.2 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle forme bilinéaire sur E une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{k}$ vérifiant: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$, $\forall x, y, z \in E$,*

(i) $\varphi(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \varphi(x, z) + \beta \varphi(y, z)$.

(ii) $\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \alpha \varphi(x, z) + \beta \varphi(x, z)$.

Remarque 1.1.1 *Remarquons que si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, une forme sesquilinéaire est une forme bilinéaire.*

Exemple 1.1.1 .

1. Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n,$$

   où $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^n$.

2. Le produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$,

$$\varphi(x,y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + ... + x_n\overline{y_n},$$

   est une forme sesquilinéaire sur $\mathbb{C}^n$ et n'est pas forme bilinéaire.

3. Si f_1 et f_2 sont linéaires, et φ est une forme bilinéaire. Alors, l'application

$$(x,y) \mapsto \varphi(f_1(x), f_2(y)),$$

   est bilinéaire.

Proposition 1.1.1 *Soit $\varphi : E \times E \to \Bbbk$ une forme sesquilinéaire. Alors, pour tous $x, y \in E$. On a*

$$\varphi(x+y, x+y) + \varphi(x-y, x-y) = 2\left[\varphi(x,x) + \varphi(y,y)\right].$$

Preuve. Des propriétés d'une forme sesquilinéaire on a le développements suivants:

$$\begin{aligned} \varphi(x+y, x+y) &= \varphi(x, x+y) + \varphi(y, x+y) \\ &= \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi(x-y, x-y) &= \varphi(x, x-y) + \varphi(y, x-y) \\ &= \varphi(x,x) - \varphi(x,y) - \varphi(y,x) + \varphi(y,y), \end{aligned}$$

pour tous $x, y \in E$.

D'où la somme membre à membre donne le résultat. ■

Définition 1.1.3 *Une forme bilnéaire φ est dite symétrique, si pour tous $x, y \in E$. On a*

$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$

Définition 1.1.4 *Une forme sesquilinéaire φ est dite hermitienne, si pour tous $x, y \in E$. On a*

$$\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}.$$

Exemple 1.1.2 *Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ est une forme bilinéaire symétrique.*

Exemple 1.1.3 *Soit $E = C[-1,1]$, l'application*

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}, \varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt,$$

est une forme bilinéaire symétrique.

Exemple 1.1.4 *Soit $E = C[-1,1]$, l'application*

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{C}, \varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)\, \overline{g(t)} dt,$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne.

Théorème 1.1.1 (Indentité de polarisation) *Toute forme bilinéaire symétrique φ vérifie*

$$4\varphi(x,y) = \varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) \text{ pour tous } x, y \in E.$$

Toute forme sesquilinéaire φ (hermitienne ou non) vérifie

$$4\varphi(x,y) = \varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) + i\varphi(x+iy, x+iy) - i\varphi(x-iy, x-iy),$$

pour tous $x, y \in E$.

Preuve. 1. On a

$$\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = 2\varphi(x,y) + 2\varphi(y,x),$$

comme φ est symétrique. D'où

$$\varphi(x+y, x+y) - \varphi(x-y, x-y) = 4\varphi(x,y).$$

2. Exercice. ■

Proposition 1.1.2 *Soit φ une forme sesquilnéaire sur E, les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. φ est hermitienne.

2. Pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$.

Preuve. Si φ est hermitienne. Alors,

$$\varphi(x,x) = \overline{\varphi(x,x)}, \forall x \in E.$$

D'où $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$.

Pour montre la réciproque, on pose:

$$\phi(x,y) = \varphi(x,y) - \overline{\varphi(y,x)}, \forall x,y \in E.$$

Alors, ϕ est une forme sesquilinéaire, par hypothèse

$$\phi(x,x) = 0, \forall x \in E.$$

Et par le théorème précédent ϕ est une nulle. D'où

$$\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}, \forall x,y \in E.$$

■

Remarque 1.1.2 *Si φ est hermitienne alors, pour tous $x,y \in E$:*

$$\begin{aligned}\varphi(x+y,x+y) &= \varphi(x,x) + 2\operatorname{Re}\varphi(x,y) + \varphi(y,y),\\ \varphi(x-y,x-y) &= \varphi(x,x) - 2\operatorname{Im}\varphi(x,y) + \varphi(y,y).\end{aligned}$$

Définition 1.1.5 *Une forme hermitienne φ sur E est dite positive. Si*

$$\phi(x,x) \geq 0, \forall x \in E.$$

Exemple 1.1.5 *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne, i.e., $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Alors, l'application f_A de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par*

$$f_A(x,y) = \langle Ax, y\rangle,$$

est une forme hermitienne. f_A est positive si et seulement si les valeurs propres de A sont positives.

Définition 1.1.6 *Une forme hermitienne φ sur E est dite définie positive. Si*

$$\phi(x,x) > 0, \forall x \in E \backslash \{0\}.$$

Proposition 1.1.3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit φ une forme hermitienne sur E, pour tous $x, y \in E$. On a*

$$|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\,\varphi(y,y).$$

Preuve. Soient $x, y \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi(x+\lambda y, x+\lambda y)$ est positif et par développement, elle sécrit

$$\varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) = |\lambda|^2 \varphi(y,y) + \overline{\lambda}\varphi(x,y) + \lambda\varphi(y,x) + \varphi(x,x).$$

Supposons $\varphi(y,x) = |\varphi(y,x)|\, e^{i\theta}$ et soit $\lambda = te^{-i\theta}, t \in \mathbb{R}$.

D'où, on trouve

$$\varphi(x+\lambda y, x+\lambda y) = t^2\varphi(y,y) + 2t\,|\varphi(x,y)| + \varphi(x,x) \geq 0.$$

Il en résulte que son discriminant, à savoir négatif ou nul.

On aura donc

$$|\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x)\,\varphi(y,y).$$

■

Théorème 1.1.2 (L'inégalité de Minkowski) *Soit φ une forme positive sur E. Alors,*

$$\varphi(x+y, x+y)^{\frac{1}{2}} \leq \varphi(x,x)^{\frac{1}{2}} + \varphi(y,y)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. D'aprés l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) + \varphi(y,x) &= 2\,\mathrm{Re}\,\varphi(x,y) \\ &\leq \varphi(x,x)^{\frac{1}{2}}\,\varphi(y,y)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}\varphi(x+y, x+y) &= \varphi(x,x) + \varphi(x,y) + \varphi(y,x) + \varphi(y,y) \\ &\leq 2\varphi(x,x)^{\frac{1}{2}}\,\varphi(y,y)^{\frac{1}{2}} + \left[\varphi(x,x)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + \left[\varphi(y,y)^{\frac{1}{2}}\right]^2.\end{aligned}$$

D'où
$$\varphi(x+y,x+y)\leq\left[\varphi(x,x)^{\frac{1}{2}}+\varphi(y,y)^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

Ce qui implique que
$$\varphi(x+y,x+y)^{\frac{1}{2}}\leq\varphi(x,x)^{\frac{1}{2}}+\varphi(y,y)^{\frac{1}{2}}.$$

■

Exemple 1.1.6 *Les inégalités de Caucy-Shawrz et Minkowski pour le produit scalaire s'ecrivent pour $x,y\in H$ comme suit*
$$|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\,\|y\|,$$

et
$$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|.$$

Définition 1.1.7 *Si E est un espace normé. On dit qu'une forme bilinéaire $\varphi:E\times E\to\mathbb{k}$ est continue s'il existe une constante $c>0$ telle que*
$$|\varphi(x,y)|\leq c\,\|x\|\,\|y\|,\forall x,y\in E.$$

1.2 Formes quadratiques

Définition 1.2.1 *Une application $q:E\to\mathbb{R}$ est appelée forme quadratique sur E s'il existe une forme bilinéaire symétrique φ sur $E\times E$ telle que*
$$q(x)=\varphi(x,x),\forall x\in E.$$

La forme quadratique q est dite associée à la forme bilinéaire symétrique φ.

Exemple 1.2.1 *Soit $\varphi:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, telle que*
$$\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2))=x_1y_1+x_2y_2.$$

Alors,
$$q(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2.$$

Remarque 1.2.1 *La forme hermitienne φ est positive, si la forme quadratique q est postive, i.e.,*

$$q(x) \geq 0, \forall x \in E.$$

Proposition 1.2.1 *Une forme quadratique q sur E est une application $q : E \to \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes:*

1. $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.
2. L'application $\psi(x, y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$ est bilinéaire symétrique.

Preuve. 1. On a

$$\begin{aligned} q(\lambda x) &= \varphi(\lambda x, \lambda x) \\ &= \lambda \varphi(x, \lambda x) \\ &= \lambda^2 \varphi(x, x). \end{aligned}$$

2. Exercice. ■

Remarque 1.2.2 *L'inégalité de Minkowski montre que l'application $x \mapsto q(x)^{\frac{1}{2}}$ est une semi-norme, et est une norme si et seulement si la forme q est non dégénérée, c'est-à-dire vérifie: $q(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$. On dit, dans ce cas, que c'est une norme induite par la forme hermitienne φ.*

Remarque 1.2.3 *Le produit scalaire sur E est une forme hermitienne positive et non dégénérée.*

Définition 1.2.2 *Un élément x de E est dit isotrope pour la forme quadratique q quand $q(x) = 0$.*

Exemple 1.2.2 *Soit la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^2$ définie par*

$$q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2,$$

L'ensemble de ses vecteurs isotropes est la réunion des deux droites vectorielles d'équations $x_2 = x_1$ et $x_2 = -x_1$.

Théorème 1.2.1 (Théorème de Riesz-Fréchet (Rappel)) *Soit H un espace de Hilbert et f une forme linéaire continue sur H. Alors, il existe $a \in H$ et un seul tel que*

$$f(x) = \langle x, a \rangle, \forall x \in H.$$

Preuve. i) Si $f = 0$, alors $\langle x, 0 \rangle = 0$ d'où il existe $a \in H$, $a = 0$.

ii) Si $f \neq 0$, soit $M = \ker f$ (fermé car f est continue). Donc $M^{\perp} \neq \{0\}$, il existe $b \in H \backslash \{0\}$ tel que $b \in M^{\perp}$ i.e., $f(b) \neq 0$.

On pose

$$x_0 = x - \frac{f(x)}{f(b)} b \in \ker f = M,$$

car $f(x_0) = 0$.

On a

$$\left\langle x - \frac{f(x)}{f(b)} b, b \right\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, b \rangle = \left\langle \frac{f(x)}{f(b)} b, b \right\rangle.$$

D'où

$$\begin{aligned} \langle x, b \rangle &= \frac{f(x)}{f(b)} \langle b, b \rangle \\ &= \frac{f(x)}{f(b)} \|b\|^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f(b)}{\|b\|^2} \langle x, b \rangle \\ &= \left\langle x, \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b \right\rangle. \end{aligned}$$

On deduit que

$$a = \frac{\overline{f(b)}}{\|b\|^2} b.$$

Pour preuve l'unicité, soit $a_1, a_2 \in H$ tel que pour tout $x \in H$,

$$\langle x, a_1 \rangle = \langle x, a_2 \rangle = f(x).$$

Alors, en prenant $x = a_1 - a_2$, on obtient

$$\langle a_1 - a_2, a_1 - a_2 \rangle = 0.$$

Ce qui implique que

$$\|a_1 - a_2\|^2 = 0.$$

D'où

$$a_1 = a_2.$$

■

Théorème 1.2.2 *Soit φ une forme sesquilinéaire bornée sur H. Alors, il existe une application linéaire unique T de H dans H tel que*

$$\varphi(x, y) = \langle x, Ty \rangle,$$

pour tous $x, y \in H$.

Preuve. Fixons $y \in H$, alors d'aprés le théorème se Riesz il existe un élement unique $Z(y) \in H$ tel que

$$\varphi(x, y) = \langle x, Z(y) \rangle.$$

Il nous montrer que l'application $y \mapsto Z(y)$ est linéaire.

En effet, pour tous $x, y_1, y_2 \in H$. On a

$$\begin{aligned} \langle x, Z(y_1 + y_2) \rangle &= \varphi(x, y_1 + y_2) \\ &= \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2) \\ &= \langle x, Z(y_1) \rangle + \langle x, Z(y_2) \rangle \\ &= \langle x, Z(y_1) + Z(y_2) \rangle. \end{aligned}$$

D'où

$$Z(y_1 + y_2) = Z(y_1) + Z(y_2).$$

D'autre part, nous avons pour tous $x, y \in H$ et $\lambda \in \Bbbk$.

On a

$$\begin{aligned}\langle x, Z(\lambda y)\rangle &= \varphi(x, \lambda y) \\ &= \overline{\lambda}\varphi(x, y) \\ &= \overline{\lambda}\langle x, Z(y)\rangle \\ &= \langle x, \lambda Z(y)\rangle .\end{aligned}$$

D'où

$$Z(\lambda y) = \lambda Z(y).$$

Alors, $Z(y)$ est linéaire. Ce qui termine la preuve. ■

1.3 Exercices

Exercice 1.3.1 *Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel réel des polynômes de degré ≤ 2.*

On considère l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par:

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)\, Q'(t)\, dt.$$

1. Montrer que est une forme bilinéaire sur E.
2. Déterminer la matrice B représentant dans la base canonique de E.
3. φ est - elle symétrique? anti-symétrique?
4. Mêmes questions pour: $\varphi(P, Q) = \int_0^1 P(t)\, Q(1-t)\, dt$, $\varphi(P, Q) = \sum_{i=1}^{k} P(i)\, Q(i)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 1.3.2 *Montrer que l'application:*

$$\varphi : (P, Q) \mapsto P(1)\, Q'(0) + P'(0)\, Q(1),$$

définit une forme bilinéaire sur $E = \mathbb{R}[X]$. Est-ce un produit scalaire?

Exercice 1.3.3 *Donner une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c, d pour que l'application:*

$$\varphi(x, y) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2,$$

définisse un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 1.3.4 *On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que:*

$$(|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|)^2 \leq n\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right).$$

Exercice 1.3.5 *Montrer que si φ est une forme sesquilinéaire sur un espace vectoriel complexe E, telle que $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in E$, alors φ est une forme hermitienne.*

Exercice 1.3.6 *Soit φ une forme bilinéaire sur un espace vectoriel E, et soit q sa forme quadratique associée.*

1. Montrer que:

$$q(q(u)v - \varphi(u, v)u) = q(u)(q(u)q(v) - \varphi(u, v)\varphi(v, u)).$$

2. En déduire, si q est définie positive l'inégalité de Cauchy-Schawrz

$$\varphi(u, v)\varphi(v, u) \leq q(u)q(v).$$

Exercice 1.3.7 *Montrer que $q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ est définie positive si et seulement si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.*

Exercice 1.3.8 *Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère l'application $q : E \to \mathbb{R}$ définie par:*

$$q(p) = q\left(ax^2 + bx + c\right) = b^2 - 4ac.$$

Montrer que q est une forme quadratique et déterminer la forme bilinéaire associée.

Chapitre 2

Généralités sur les opérateurs linéaires bornés

Dans l'analyse fonctionnelle la notion d'opérateur linéaire est une notion fondamentale puisque en grande partie l'analyse fonctionnelle s'est dévelopéé en étudiant des opérateurs linéaires donnés par certaines équations intégrales. Nous donnons ici les définitions et propriétés de base des opérateurs linéaires bornés.

2.1 Opérateurs linéaires sur un espace vectoriel

Définition 2.1.1 (Opérateur linéaire) *Soient E et F deux espaces vectoriels. On appelle opérateur linéaire de $D(T) \subset E$ dans F toute application $T : D(T) \subset E \to F$ ($D(T)$ est le domaine de T, noté aussi D_T) qui vérifie les conditions suivantes:*

(1) $T(x+y) = T(x) + T(y)$ pour tous $x, y \in D(T)$ (condition additive).

(2) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{k} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, $\forall x \in D(T)$ (condition homogène).

Remarque 2.1.1 .

(1) En d'autres termes l'opérateur $T : D(T) \subset E \to F$ est linéaire si seulement si

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y),$$

pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{k}$ et $x, y \in D(T)$.

(2) Le vecteur $T(x)$ est en général écrit Tx.

(3) On suppose que $D(T)$ est une varieté linéaire i.e,

$$\forall x, y \in D(T), \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k} : \lambda x + \mu y \in D(T).$$

Exemple 2.1.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels.*

(1) On considére l'opérateur

$$Ix = x, \forall x \in E.$$

L'opérateur I s'appelle opérateur identique.

(2) Soit $0x = x$, $\forall x \in E$. Alors, 0 s'appelle opérateur nul.

(3) Considérons l'opérateur $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$

$$Tf(x) \to xf(x).$$

L'opérateur T est appelé opérateur de multiplication par x.

Définition 2.1.2 *Soit T un opérateur linéaire de $D(T) \subset E$ dans F. L'ensemble*

$$\ker T = \{x \in D(T) : Tx = 0\},$$

est appelé noyau d'opérateur T, et aussi noté parfois $\mathcal{N}(T)$.

Définition 2.1.3 *Soit T un opérateur linéaire de $D(T) \subset E$ dans F. L'image de T défini par*

$$\operatorname{Im} T = \{Tx : x \in D(T)\},$$

et aussi noté parfois $\mathcal{R}(T)$.

Exemple 2.1.2 *Soit $E = C([0,1])$. On définit l'opérateur linéaire de Volterra:*

$$\forall f \in E, Af(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Alors, on a

$$\ker A = \{0\},$$

et

$$\operatorname{Im} A = \{g \in E : g(0) = 0\}.$$

Définition 2.1.4 *Soient A et B deux opérateurs linéaires, on dit que A et B sont égales si*

1. $D(A) = D(B)$.
2. $\forall x \in D(A) : Ax = Bx$.

On note alors, $A = B$.

Définition 2.1.5 *On dit que B est une extension de A, si*

1. $D(A) \subset D(B)$.
2. $\forall x \in D(A) : Ax = Bx$.

On note alors, $A \subset B$.

Notation 2.1.1 *On note par $L(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires de E vers F. Si $F = \mathbb{k}$ est la dual algebrique de E, il est noté E^*.*

Enfin, si $E = F$ on écrira $L(E)$ au lieu de $L(E, E)$.

Définition 2.1.6 (Somme d'opérateurs) *Soient A et B deux opérateurs linéaires de E dans F. On définit l'opérateur $A + B$ par:*

$$(A + B)x = Ax + Bx; \forall x \in D(A + B),$$

et $D(A + B) = D(A) + D(B)$.

Définition 2.1.7 (Produit d'opérateur) *Soient A et B deux opérateurs linéaires, $A \in L(E,X)$ et $B \in L(X,F)$ tel que X un espace vectoriel. On définit l'opérateur BA comme l'opérateur linéaire de E dans F par:*

$$(BA)x = B(Ax), \forall x \in D(BA);$$

tel que

$$D(BA) = \{x \in D(A), Ax \in D(B)\}.$$

Définition 2.1.8 *On définit l'opérateur kA produit d'un opérateur A par un nombre k comme suit:*

$$(kA)x = k(Ax), \forall x \in D(A).$$

Remarque 2.1.2 *On dit que A et B commetent et on écrit $AB = BA$, si*

$$ABx = BAx, \forall x \in D_{AB} \cap D_{BA}.$$

2.2 Opérateurs bornés entre espace normé

Définition 2.2.1 (Opérateur continu) *Soient E, F deux espaces normés, $A \in L(E,F)$ est dit continu si pour tous $(x_n)_n \subset E$,*

$$x_n \overset{\|\cdot\|_E}{\to} x \Rightarrow Ax_n \overset{\|\cdot\|_F}{\to} Ax.$$

Exemple 2.2.1 *Considerons l'opérateur de dérivation*

$$T : C[a,b] \to C[a,b], Tf(t) = f'(t).$$

L'opérateur T est linéaire, mais pas continu. Cela résulte par exemple du fait que la suite $x_n(t) = \frac{\sin(nt)}{n}$ converge vers 0 pour la métrique de $C[a,b]$, tendis que la suite $Tx_n(t) = \cos(nt)$ est diverge.

Définition 2.2.2 (Opérateur borné) *Soit $A \in L(E,F)$ est dit borné, s'il est définit partout dans E (i.e, $D(A) = E$) et transforme tout ensemble borné dans E en ensemble borné dans F.*

Définition 2.2.3 *Un opérateur $A \in L(E,F)$ est dit borné s'il existe une constante positive c, telle que*

$$\|Ax\|_F \leq c\,\|x\|_E\,,\ \forall x \in E. \tag{2.2.1}$$

Exemple 2.2.2 *L'opérateur de multiplication $T : C[0,1] \to C[0,1]$,*

$$Tf(x) \to xf(x)\,,$$

est borné, car

$$\|Tf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |xf(x)| \leq \|f\|_\infty\,.$$

Exemple 2.2.3 *L'opérateur de dérivation*

$$T : C^1[a,b] \to C[a,b]\,, Tf(t) = f'(t)\,,$$

est borné, on a

$$\|Tf\|_\infty = \left\|f'\right\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \left|f'(t)\right|,$$

et on a

$$\|f\|_{C^1[a,b]} = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} \left|f'(t)\right|.$$

D'où

$$\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_{C^1[a,b]}\,.$$

Donc, T est borné.

Remarque 2.2.1 *L'opérateur $A \in L(E,F)$ est non borné si et seulement si il existe une suite $(x_n)_n \subset D(A)$ telle que:*

$$\|x_n\|_E = 1 \ \textit{et} \ \lim_{n\to+\infty} \|Ax_n\|_F = +\infty.$$

Exemple 2.2.4 *On suppose $E = F = L^2(\mathbb{R})$. Alors, l'opérateur A défini par:*

$$Af(x) = xf(x)\,,$$

de domaine

$$D(A) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : xf \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

est non borné. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la suite $(f_n)_n \subset D(A)$ donnée par:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < n \text{ ou } x > n+1 \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

En effet,

$$\|f_n\| = 1 \text{ et } \|Af_n\| = \sqrt{\frac{3n^2+3n+1}{3}}.$$

Alors, A est un opérateur non borné.

Proposition 2.2.1 *Soient E et F deux espaces normés et $A \in L(E,F)$. Il ya équivalence entre*

1. L'opérateur A est continu.

2. L'opérateur A est continu en 0.

3. L'opérateur A est continu en un point.

4. L'opérateur A est borné.

Notation 2.2.1 *On notée par $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des opétateurs bornés de E dans F. Lorsque $F = \mathbb{k}$, $\mathcal{L}(E,\mathbb{k})$ est le dual topologique de E, il est noté par E'.*

Enfin si $E = F$ on écriva $\mathcal{L}(E)$.

Définition 2.2.4 (Norme d'un opérateur) *Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Le plus petit des nombres c vérifiant l'inégalité (2.2.1) s'appelle norme de l'opérateur A et se note $\|A\|$.i.e,*

$$\|A\| = \inf\left\{c > 0 : \forall x \in E, \|Ax\| \leq c\|x\|\right\}.$$

Proposition 2.2.2 *Pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(E,F)$, on a*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|.$$

Preuve. En effet, de la relation (2.2.1) les constantes c s'écrivent

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq c, \forall x \in E \ , \ x \neq 0.$$

De plus, on a aussi

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left\| \frac{1}{\|x\|} Ax \right\| \\ &= \sup_{x \neq 0} \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| . \end{aligned}$$

D'où la dexieme égalité.

Pour la troisème égalité, il est clair que l'on a la relation

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| . \tag{2.2.2}$$

De plus, $\forall x \in E$, $\|x\| \leq 1$ et $x \neq 0$ on écrit

$$\|Ax\| = \|x\| \left\| A\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| ,$$

ou encore $\|Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Passons au suprimum sur la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ des deux membres, on obtient

$$\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| . \tag{2.2.3}$$

Des deux inégalités (2.2.2) et (2.2.3) on déduit la troisème égalité. ■

Exemple 2.2.5 *Soit $T : C[0,1] \to \mathbb{R}, Tf(x) = f(0)$.*

On a

$$\|Tf\|_\infty = |f(0)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq \|f\|_\infty .$$

Donc, $\|T\| \leq 1$. Maintenant, montrons que $\|T\| \geq 1$, en prenant

$$g(x) = 1, \forall x \in [0,1] .$$

Alors, $Tg(x) = g(0) = 1$. D'où $\|Tg\| = 1$ et $\|Tg\| \leq \|T\|$ ce implique que $\|T\| = 1$.

Exemple 2.2.6 *Soit $E = C([a,b])$. On définit sur E l'opérateur T suivant:*

$$Tf(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

On vérifie facilement que

$$\|T\| = b - a.$$

Exemple 2.2.7 *Soient H un espace de Hilbert et a un vecteur donné de H. L'opérateur A défini pour tout $x \in H$, par:*

$$Ax = \langle a, x \rangle \, a,$$

est borné et l'inégalité de Cauchy-Schwartz montre que:

$$\|A\| = 1.$$

On déduit de la proposition peécédente l'inégalité suivante.

Corollaire 2.2.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$, on a*

$$\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\| \, , \forall x \in E. \tag{2.2.4}$$

Théorème 2.2.1 *Soient E et F deux espaces normés. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme $\|.\|$ est un espace normé.*

Preuve. (1) Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\|A\| = 0$, en utilisant (2.2.4) nous donne

$$Ax = 0, \forall x \in E.$$

Donc $A = 0$.

(2) Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{k}$, alors on a $\lambda A \in \mathcal{L}(E, F)$.i.e,

$$\|\lambda Ax\| = |\lambda| \, \|Ax\| \leq |\lambda| \, \|A\| \, \|x\| \, .$$

Notions que $\|\lambda A\|$ est une borné supérieure, autrement dit le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où

$$\|\lambda A\| \leq |\lambda| \, \|A\| \, .$$

D'autre part, on a $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$.

Ou encore

$$\begin{aligned}\|Ax\| &= \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda Ax\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda A\|\|x\|.\end{aligned}$$

D'où

$$\|A\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda A\|,$$

ou encore

$$|\lambda|\|A\| \leq \|\lambda A\|.$$

Des deux inégalités précédentes, on déduit l'égalité

$$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|.$$

(3) Soit $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$ alors, on a $A + B \in \mathcal{L}(E, F)$ c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\|Ax + Bx\| &\leq \|Ax\| + \|Bx\| \\ &\leq \|A\|\|x\| + \|B\|\|x\| \\ &= (\|A\| + \|B\|)\|x\|.\end{aligned}$$

Notions que $\|A + B\|$ est une borné supérieure, autrement dit le plus petit des majorants vérifiant l'inégalité.

D'où

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

■

Proposition 2.2.3 *Soient A et B deux opérateurs linéairés bornés et $\lambda \in \Bbbk$, alors $\lambda A, A+B$ et AB sont des opérateurs linéairés bornés et on a*

1. $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$.

2. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

3. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

4. $\|A^n\| = \|A\|^n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.2.2 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach. Alors, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.*

Définition 2.2.5 (Graphe d'opérateur) *Le graphe $G(A)$ d'un opérateur $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace de $E \times F$ définie par:*

$$G(A) = \{(x, Ax) : x \in D(A)\}.$$

Théorème 2.2.3 (Théorème du graphe fermé) *Soient E et F deux espaces de Banach et A opérateur linéaire de E dans F. Alors,*

$$G(A) \text{ fermé dans } E \times F \Leftrightarrow A \in \mathcal{L}(E, F).$$

Proposition 2.2.4 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, H est un espace de Hibert complexe. Alors,*

$$\langle Ax, x\rangle = 0, \forall x \in H \Rightarrow A = 0.$$

Preuve. Comme $\langle A(x+y), x+y\rangle = 0, \forall x, y \in H$, on voit que

$$\langle Ax, y\rangle + \langle Ay, x\rangle = 0.$$

On remplace y par iy le résultat est

$$-i\langle Ax, y\rangle + i\langle Ay, x\rangle = 0.$$

Multipions par i, on trouve

$$\langle Ax, y\rangle = 0. \tag{2.2.5}$$

On pose $y = Ax$, (2.2.5) donne $\|Ax\|^2 = 0$. Alors, $Ax = 0, \forall x \in H$, d'où $A = 0$. ∎

2.3 Types des convergences - Inverse d'un opérateur

2.3.1 Types des convergences

Dans ce paragraphe, nous étudierons trois genres de convergence des suites d'opérateurs linéaires bornés dans un espace normé.

Définition 2.3.1 *Soient E et F deux espaces normés, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs linéaires bornés ($T_n \in \mathcal{L}(E,F)$) et soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$.*

1. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers T, si
$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0,$$
et nous écrivons $T_n \xrightarrow{U} T$.

2. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers T, si
$$\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0, \forall x \in E,$$
et nous écrivons $T_n \xrightarrow{S} T$.

3. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers T, si
$$f(T_n x) \to f(Tx), \forall f \in F', \forall x \in E.$$
et nous écrivons $T_n \xrightarrow{W} T$.

Exemple 2.3.1 *Soit $T_n \in \mathcal{L}(l_2)$,*
$$T_n(\alpha_1, \alpha_2 ...) = \left(\frac{1}{n}\alpha_1, \frac{1}{n}\alpha_2 ...\right), n \geq 1.$$

Montrer que $T_n \xrightarrow{U} T$.

On pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 ...) \in l_2$. On a
$$\begin{aligned}
\|T_n\| &= \sup_{\|\alpha\|\leq 1} \|T_n \alpha\| \\
&= \sup_{\|\alpha\|\leq 1} \left\| \left(\frac{1}{n}\alpha_1, \frac{1}{n}\alpha_2 ...\right) \right\| \\
&= \sup_{\|\alpha\|\leq 1} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{n}\alpha_k \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{n} \sup_{\|\alpha\|\leq 1} \|\alpha\| \\
&= \frac{1}{n} \to 0.
\end{aligned}$$

Exemple 2.3.2 *Considérons la suite d'opérateurs $T_n \in \mathcal{L}(l_2)$ comme suit*

$$T_n(\alpha_1, \alpha_2 ...) = (0, ..., 0, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, ...) .$$

Montrer que $T_n \overset{S}{\to} 0$.

On pose $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 ...)$, $\forall \alpha \in l_2$. On a

$$\begin{aligned} \|T_n \alpha\|^2 &= \|(0, ..., 0, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, ...)\| \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\alpha_k|^2 \to 0. \end{aligned}$$

Donc, $\forall \alpha \in l_2, \|T_n \alpha\| \to 0$.i.e, $T_n \overset{S}{\to} 0$.

Exemple 2.3.3 *Considérons*

$$T_n : \mathbb{R} \to l_2, T_n \xi = \xi e_n.$$

Alors, $T_n \overset{W}{\to} 0$.

Remarque 2.3.1 *La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}(H)$ converge faiblement vers T. Si, pour tous $x, y \in H$*

$$T_n \overset{W}{\to} T \Leftrightarrow \langle T_n x, y \rangle \to \langle Tx, y \rangle .$$

Théorème 2.3.1 *Soient E et F deux espaces normés, soit $T_n \in \mathcal{L}(E, F)$ et $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On a*

1. $T_n \overset{U}{\to} T \Rightarrow T_n \overset{S}{\to} T$.
2. $T_n \overset{S}{\to} T \Rightarrow T_n \overset{W}{\to} T$.

Preuve. 1. Nous avons pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|T_n x - Tx\| &= \|(T_n - T) x\| \\ &\leq \|T_n - T\| \|x\| \to 0. \end{aligned}$$

2. Nous avons pour tout $f \in E'$,

$$\begin{aligned} \|f(T_n x) - f(Tx)\| &= \|f(T_n x - Tx)\| \\ &\leq \|f\| \|T_n x - Tx\| \to 0. \end{aligned}$$

■

Remarque 2.3.2 $T_n \xrightarrow{S} T \nRightarrow T_n \xrightarrow{U} T$. *Considérons,* $T_n \in \mathcal{L}(l_2)$ *tel que*

$$T_n(\alpha_1, \alpha_2 ...) = (0, ..., 0, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, ...) .$$

On a $T_n \xrightarrow{S} 0$ (Exemple 2.3.2). Mais, d'autre part

$$\|T_n\| \geq \|T_n e_n\| = 1 \nrightarrow 0.$$

C-à-d, $T_n \overset{U}{\nrightarrow} 0$.

2.3.2 Inverse d'un opérateur

Définition 2.3.2 (Inversibilité) *Soient E et F deux espaces normés et soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. L'opérateur A est dit inversible si pour tout $y \in F$ l'équation $Ax = y$ a une solution $x \in E$ est une seule.*

Définition 2.3.3 (Opérateur inverse) *On dit que $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible s'il existe $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que*

$$AB = I_E \text{ et } BA = I_F.$$

L'orsque existe et unique on appelle l'inverse de A et noté A^{-1}.

Remarque 2.3.3 .

1. Si $AB = I_E$ alors, $B = A_d^{-1}$.

2. Si $BA = I_F$ alors, $B = A_g^{-1}$.

Remarque 2.3.4 *$A \in \mathcal{L}(E, F)$ est inversible s'il est bijectif et A^{-1} est continu (borné).*

L'exemple suivant montre que l'inverse d'un opérateur borné n'est pas forcement borné.

Exemple 2.3.4 *Soit $E = l_2(\mathbb{C})$, l'opérateur A défini par:*

$$A(\alpha_1, \alpha_2 ...) = \left(\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2 ..., ..., \frac{1}{n}\alpha_n, ...\right), n \geq 1.$$

A est borné, car

$$\begin{aligned}
\|A(\alpha_1, \alpha_2...)\| &= \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\alpha_k|^2}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |\alpha_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|(\alpha_1, \alpha_2...)\|,
\end{aligned}$$

et son inverse donné par

$$A^{-1}(\alpha_1, \alpha_2...) = (\alpha_1, 2\alpha_2..., ..., n\alpha_n, ...).$$

Cependent, A^{-1} est non borné.

En effet, si

$$e_n = \left(0, ..., \underset{\underset{n}{\downarrow}}{1}, ..0, ...\right).$$

On a

$$\|e_n\| = 1 \text{ et } \left\|A^{-1}e_n\right\| = n.$$

D'où A^{-1} n'est pas borné. Donc l'opérateur A n'est pas inversible.

Théorème 2.3.2 *L'opérateur A^{-1} inverse d'un opérateur linéaire $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est aussi linéaire.*

Preuve. (1) On montre que

$$A^{-1}(x + y) = A^{-1}x + A^{-1}y, \forall x, y \in F.$$

Nous avons

$$x \in F \Rightarrow \exists x' \in E : x = Ax',$$

et

$$y \in F \Rightarrow \exists y' \in E : y = Ay'.$$

On a

$$\begin{aligned}
A^{-1}(x + y) &= A^{-1}\left(Ax' + Ay'\right) \\
&= A^{-1}A\left(x' + y'\right) \\
&= x' + y' \\
&= A^{-1}x + A^{-1}y.
\end{aligned}$$

(2) On montre que

$$A^{-1}(\lambda x) = \lambda A^{-1}x, \forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{k}.$$

On a

$$\begin{aligned} A^{-1}(\lambda x) &= A^{-1}\left(\lambda A x'\right) \\ &= A^{-1}A\left(\lambda x'\right) \\ &= \lambda x' \\ &= \lambda A^{-1}x. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.3.3 *Soient E et F deux espaces de Banach et $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors,*

$$A \text{ est bijectif} \Rightarrow A^{-1} \in \mathcal{L}(E,F).$$

Théorème 2.3.4 (Série de Neumann) *Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ (E espace Banach) tel que $\|A\| < 1$, et soit I l'opérateur identique I dans E. Alors, l'opérateur $I - A$ admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann suivante:*

$$(I-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k,$$

de plus

$$\left\|(I-A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}.$$

Preuve. De la relation $\|A\| < 1$, on a la convergence absolue

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left\|A^k\right\| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1-\|A\|}.$$

On définit un opérateur linéaire $S = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$, avec la relation $\|S\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$ de plus S est l'inverse de $I - A$.

En effet, utilisons les notations $A^0 = I$ et $A^k = AA^{k-1}$. On peut voit que

$$\begin{aligned} S(I-A) &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} A^k\right)(I-A) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} A^k (I-A) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(I - A^{n+1}\right) \\ &= I. \end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned}(I-A)\,S &= (I-A)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} A^k\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(I-A^{n+1}\right)\\ &= I.\end{aligned}$$

Puisque la norme $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0$, lorsque $n \to +\infty$. ■

Remarque 2.3.5 *Le résultat du théorème précédent peut être utile dans la situation suivante. La question qui se pose est: résoudre l'équation intégrale avec $A \in \mathcal{L}(E)$, $g \in E$ donnés et $\varphi \in E$ est l'inconnue:*

$$\varphi(x) = g(x) + A\varphi(x).$$

2.4 L'adjoint d'un opérateur

2.4.1 Définitions et exemples

Théorème 2.4.1 *Soient H et K deux espaces de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H,K)$. Il existe un unique opérateur continu de K dans H noté T^* tel que*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \forall x \in H, \forall y \in K.$$

Preuve. Soit $y \in K$ et $f : H \to \mathbb{C}, f(x) = \langle Tx, y\rangle$. Alors, f est linéaire et borné car

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |\langle Tx, y\rangle|\\ &\leq \|Tx\|\,\|y\|\\ &\leq \|T\|\,\|x\|\,\|y\|.\end{aligned}$$

D'aprés le théoème de Riesz-Fréchet il existe un unique $z \in H$ tel que

$$f(x) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, z\rangle.$$

Posons $z = T^*y$ donc T^* est un opérateur de K vers H. C'est simple de voir que T^* est linéaire et aussi borné car,

$$\begin{aligned} \|T^*y\|^2 &= \langle T^*y, T^*y \rangle \\ &= \langle TT^*y, y \rangle \\ &\leq \|TT^*y\| \, \|y\| \\ &\leq \|T\| \, \|T^*y\| \, \|y\| \, . \end{aligned}$$

D'où

$$\|T^*y\| \leq \|T\| \, \|y\| \, .$$

Alors, T^* est borné et

$$\|T^*\| \leq \|T\| \, .$$

Montrons l'unicté de l'opérateur adjoint, supposons il existe $B_1, B_2 \in \mathcal{L}(K, H)$ tel que

$$\forall x \in H, \langle Tx, y \rangle = \langle x, B_1 y \rangle = \langle x, B_2 y \rangle \, .$$

Ce qui implique que $B_1 y = B_2 y$. ■

Définition 2.4.1 *L'unique opérateur linéaire $T^* \in \mathcal{L}(K, H)$ tel que*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \, , \forall x \in H, \forall y \in K,$$

est applé adjoint de T.

Exemple 2.4.1 *Soit $I \in \mathcal{L}(H)$ l'opérateur de l'indité.*

C'est clair que

$$\langle Ix, y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, Iy \rangle \, , \forall x \in H.$$

D'où $I^* = I$.

Exemple 2.4.2 *Soit*

$$A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, A\,(x, y) = (x, 0) \, .$$

Posons $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$; on a

$$\begin{aligned} \langle AX, Y \rangle &= \langle (x_1, 0) \, , (y_1, y_2) \rangle \\ &= x_1 y_1 . \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\langle AX, Y\rangle = \langle X, A^{*}Y\rangle .$$

Posons $A^{*}Y = Z = (z_1, z_2)$, d'où

$$\begin{aligned} \langle X, A^{*}Y\rangle &= \langle (x_1, x_2), (z_1, z_2)\rangle \\ &= x_1 z_1 + x_2 z_2. \end{aligned}$$

Donc $z_1 = y_1$ et $z_2 = 0$.

D'où

$$A^{*}(y_1, y_2) = (y_1, 0) .$$

Ou bien

$$A^{*}(x, y) = (x, 0) .$$

Exemple 2.4.3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 2i \end{pmatrix}$, *alors* $A^{*} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 1 & 2i \end{pmatrix}$.

Dans le cas général soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$A^{*} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.4.4 *On considère l'opérateur de shift défini par:*

$$S : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C}),\ S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...) .$$

Soit $X = (x_1, x_2, ...), Y = (y_1, y_2, ...)$ dans $l_2(\mathbb{C})$. Alors,

$$\begin{aligned} \langle S^{*}X, Y\rangle &= \langle X, SY\rangle \\ &= \langle (x_1, x_2, ...), (0, y_1, y_2, ...)\rangle \\ &= x_2\overline{y_1} + x_3\overline{y_2} + ... \\ &= \langle (x_2, x_3, ...), (y_1, y_2, ...)\rangle . \end{aligned}$$

D'où

$$S^{*}(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...) .$$

2.4.2 Propriétés de l'adjoint

Proposition 2.4.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Alors,*

1. $(T^*)^* = T$.

2. $\|T^*\| = \|T\|$.

3. $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Preuve. 1. Démontrons que $(T^*)^* = T$. Pour cela on montre que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle (T^*)^* x, y\rangle, \forall x \in H, \forall y \in K.$$

On a

$$\begin{aligned}
\langle Tx, y\rangle &= \langle x, T^*y\rangle \\
&= \overline{\langle T^*y, x\rangle} \\
&= \overline{\langle y, (T^*)^* x\rangle} \\
&= \langle (T^*)^* x, y\rangle .
\end{aligned}$$

D'où $(T^*)^* = T$.

2. D'aprés le preuve de le théorème précedent, on a $\|T^*\| \leq \|T\|$. Donc $\|(T^*)^*\| \leq \|T^*\|$, c'est-à-dire $\|T^*\| = \|T\|$.

3. Démontrons que $\|T^*T\| = \|T\|^2$. Tout d'abord on a

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2 .$$

D'autre part, en utilisant la définition de la norme d'un opérateur. On obtient

$$\begin{aligned}
\|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx\rangle, \forall x \in H \\
&= \langle T^*Tx, x\rangle \\
&\leq \|T^*Tx\| \|x\| \\
&\leq \|T^*T\| \|x\|^2 .
\end{aligned}$$

En prenant le supremum sur tout $x \in H$ avec $\|x\| = 1$, on obtient

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| .$$

Donc, $\|T\|^2 = \|T^*T\|$. ∎

Proposition 2.4.2 *Soient T et S deux éleménts de $\mathcal{L}(H,K)$. On a*

1. $(\alpha T+\beta S)^* = \overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}S^*$ pour $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$.

2. $(TS)^* = S^*T^*$.

3. Si T est inversible, T^* est aussi inversible et $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Preuve. Soient $x \in H, y \in K$.

1. On a

$$\begin{aligned} \left\langle (\alpha T+\beta S)^* x, y\right\rangle &= \left\langle x, (\alpha T+\beta S)\, y\right\rangle \\ &= \overline{\alpha}\left\langle x, Ty\right\rangle + \overline{\beta}\left\langle x, Sy\right\rangle \\ &= \overline{\alpha}\left\langle T^*x, y\right\rangle + \overline{\beta}\left\langle S^*x, y\right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}S^*x, y\right\rangle. \end{aligned}$$

D'où

$$(\alpha T+\beta S)^* = \overline{\alpha}T^* + \overline{\beta}S^*.$$

2. Et pour vérifier que $(TS)^* = S^*T^*$. Il suffit de montre que

$$\left\langle (TS)^* x, y\right\rangle = \left\langle S^*T^*x, y\right\rangle.$$

On par définition de l'adjoint

$$\begin{aligned} \left\langle (TS)^* x, y\right\rangle &= \left\langle x, TSy\right\rangle \\ &= \left\langle T^*x, Sy\right\rangle \\ &= \left\langle S^*T^*x, y\right\rangle. \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tous $x \in H, y \in K$.

D'où

$$(TS)^* = S^*T^*.$$

3. On a T est invesible, d'où

$$TT^{-1} = T^{-1}T.$$

Donc
$$\left(TT^{-1}\right)^* = \left(T^{-1}T\right)^* = I^* = I.$$

Ce qui imlique que
$$T^*\left(T^{-1}\right)^* = \left(T^{-1}\right)^* T^* = I.$$

Alors, T^* est inversible et
$$\left(T^*\right)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*.$$

■

Lemme 2.4.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H, K)$. On a*

1. $\ker T = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$.
2. $\ker T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$.
3. $\ker T^* = \{0\} \Leftrightarrow \overline{\operatorname{Im} T} = K$.

Corollaire 2.4.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H, K)$. Alors,*
$$T \text{ est invesible} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \alpha > 0, \forall x \in H : \|Tx\| \geq \alpha \|x\| . \\ \ker T^* = \{0\} . \end{cases}$$

Exemple 2.4.5 *L'opérateur de shift S définit de l_2 vers l_2 n'est pas inversible. En effet, puisque*
$$S^*(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...) .$$

Alors, $\ker T^* \neq \{0\}$ car $S^*(1, 0, 0, ...) = (0, 0, ...)$.

2.5 Spectre d'un opérateur

Définition 2.5.1 (Valeur propre et vecteur propre) *Soit E un espace normé et $T \in \mathcal{L}(E)$,un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle valeur propre de l'opérateur T si l'équation*
$$(T - \lambda I)\, x = 0,$$

a une solution $x \neq 0$ dans E. Une telle solution x est aplée vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Exemple 2.5.1 *L'opérateur de shift S de l_2 vers l_2 n'a pas de valeur propre. En effet, soit λ une valeur propre alors $\exists X = (x_1, x_2, ...) \in l_2$ tel que $SX = \lambda X$. D'où*

$$S(x_1, x_2, ...) = \lambda (x_1, x_2, ...) .$$

Ce qui implique que

$$(0, x_1, x_2, ...) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ...) .$$

- Si $\lambda = 0$ alors $X = 0$ imposible, car il faut $X \neq 0$.
- Si $\lambda \neq 0$ alors aussi imposible.

Définition 2.5.2 (Point régulier) *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ le nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ s'appelle un point régulier de l'opérateur T. Si $T - \lambda I$ est inversible.*

Définition 2.5.3 (Ensemble résolvante) *On appelle ensemble résolvante de T l'ensemble des points réguliers de T et note par $\rho(T)$ tel que*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ est inversible}\} .$$

Exemple 2.5.2 *L'ensemble résolvante d'opérateur identique I comme suit*

$$\begin{aligned} \rho(I) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : (1 - \lambda) I \text{ est inversible}\} \\ &= \mathbb{C} \backslash \{1\} . \end{aligned}$$

Définition 2.5.4 (La résolvante) *On définit la résolvante de T comme*

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1} .$$

Théorème 2.5.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, si $|\lambda| > \|T\|$. Alors, λ est un point régulier de T.*

Preuve. Posons $G = \frac{1}{\lambda} T$ et $\lambda \neq 0$. Alors,

$$\|G\| = \frac{1}{|\lambda|} \|T\| < 1,$$

car $\lambda > \|T\|$. Donc l'opérateur $G - I$ est inversible et $(G - \lambda I)^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda} T - I\right)^{-1}$ existe et il est borné. C'est -à- dire λ est un point régulier de T. ■

Proposition 2.5.1 *Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E)$, on a*

1. Pour tous $\lambda, \mu \in \rho(T)$:
$$R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu.$$

2. Si $\lambda \in \rho(T_1) \cap \rho(T_2)$. Alors,
$$R_\lambda(T_1) - R_\lambda(T_2) = R_\lambda(T_1)(T_2 - T_1) R_\lambda(T_2).$$

Preuve. 1. On a

$$\begin{aligned} R_\lambda - R_\mu &= R_\lambda(T - \mu I) R_\mu - R_\lambda(T - \lambda I) R_\mu \\ &= R_\lambda T R_\mu - \mu R_\lambda R_\mu - R_\lambda T R_\mu + \lambda R_\lambda R_\mu \\ &= (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu. \end{aligned}$$

2. Exercice. ■

Corollaire 2.5.1 *On a*

1. Pour tous $\lambda, \mu \in \rho(T)$: $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.

2. Pour tous $\lambda, \mu \in \rho(T)$: $R_\lambda = [I - (\mu - \lambda) R_\lambda] R_\mu$.

Définition 2.5.5 (Spectre d'un opérateur) *On appelle spectre de T, et on note $\sigma(T)$ le complétaire de $\rho(T)$ dans $\mathbb{C}$. C'est-à-dire*

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \mathbb{C} \backslash \rho(T) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ non inversible}\}. \end{aligned}$$

Corollaire 2.5.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. Alors,*

1. $\sigma(T) \cup \rho(T) = \mathbb{C}$.

2. $\sigma(T) \cap \rho(T) = \emptyset$.

3. Si $\lambda \in \sigma(T)$ alors $|\lambda| \leq \|T\|$.i.e.,
$$\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}.$$

C'est-à-dire

$$\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|).$$

Exemple 2.5.3 *Soit $I : E \to E$, on cherche $\sigma(T)$.*

On a

$$\sigma(I) = \{\lambda \in \mathbb{C} : I - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}.$$

On remarque que $I - \lambda I$ non inversible si seulement si $\lambda = 1$. Alors,

$$\sigma(I) = \{1\}.$$

Proposition 2.5.2 *Le spectre d'un opérateur linéaire et borné sur un espace de Banach n'est pas vide et fermé.*

Proposition 2.5.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ (H un espace de Hilbert complexe). Alors,*

$$\sigma(T^*) = \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\right\}.$$

Preuve. Si $\lambda \notin \sigma(T)$ d'où $T - \lambda I$ est inversible et $(T - \lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$ est inversible. Donc $\overline{\lambda} \notin \sigma(T^*)$. On remplace T^* par T, on obtient si $\overline{\lambda} \notin \sigma(T^*)$ alors $\lambda \notin \sigma(T)$.

Donc

$$\sigma(T^*) = \left\{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\right\}.$$

■

Proposition 2.5.4 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ et soit P un polynôme de degré n à coefficient complexes. Alors,*

1. Le spectre de $P(T)$ est $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$.
2. Si T est inversible, on a $\sigma(T^{-1}) = (\sigma(T))^{-1} = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(T)\right\}$.

2.5.1 Classification de spectre

Définition 2.5.6 (Spectre ponctuel) *On appelle spectre ponctuel de T l'ensemble des valeurs propres de T, noté $\sigma_p(T)$ tel que*

$$\begin{aligned}\sigma_p(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ non injectif}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}.\end{aligned}$$

Remarque 2.5.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On a toujours*

$$\sigma_p(T) \subset \sigma(T).$$

Mais si E est dimension finie, on en déduit

$$\sigma_p(T) = \sigma(T).$$

Exemple 2.5.4 *L'opérateur de shift S n'a pas des valeurs propres. Donc $\sigma_p(T) = \emptyset$.*

Exemple 2.5.5 *Soit A un opérateur diagonal définit par*

$$A = diag\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right).$$

Les valeurs propres de A sont

$$\lambda_n = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1.$$

D'où

$$\sigma_p(T) = \left\{\frac{1}{n}, \forall n \geq 1\right\}.$$

Définition 2.5.7 (Spectre continu) *On appelle spectre continu de T et on note $\sigma_c(T)$, l'ensemble suivant*

$$\begin{aligned}\sigma_c(T) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ injectif et } \operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} = E\right\} \\ &= \left\{\lambda \in \sigma(T) \backslash \sigma_p(T) : \operatorname{Im}(T - \lambda I) \neq \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)} = E\right\}.\end{aligned}$$

Définition 2.5.8 (Spectre résiduel) *On appelle spectre résiduel de T et on note $\sigma_r(T)$, l'ensemble suivant*

$$\begin{aligned}\sigma_r(T) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} : T-\lambda I \text{ injectif et } \overline{\operatorname{Im}(T-\lambda I\ )} \neq E\right\} \\ &= \left\{\lambda \in \sigma(T) \backslash \sigma_p(T) : \overline{\operatorname{Im}(T-\lambda I\ )} \neq E\right\}.\end{aligned}$$

Définition 2.5.9 (Spectre approximatif) *On appelle spectre apporoximatif de T, noté $\sigma_{ap}(A)$ l'ensemble défini par*

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ :\ \exists (x_n)_n \text{ dans } E, \text{ tel que } \|x_n\| = 1 \text{ et } \|(A-\lambda I\ )x_n\| \to 0\ \}.$$

Remarque 2.5.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On a toujours*

1. $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$.

2. $\sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$.

3. $\partial\sigma(T) \subset \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.

Définition 2.5.10 (Rayon spectrale) *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$, on définit le rayon specteale de T comme suit*

$$r(T) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Théorème 2.5.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ alors on a*

$$r(T) = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\geq 1} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Corollaire 2.5.3 *On a*

$$r(T) \leq \|T\|.$$

2.5.2 Exemples

Exemple 2.5.6 *Soit $H = L^2[0,1]H = L2([0,1], R)$. On considère l'opérateur de multiplication $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ défini par:*

$$Tf(x) = xf(x), x \in [0,1].$$

Alors, on a $\sigma(T) = [0,1]$. De plus, l'opérateur T n'a pas de valeurs propres.

En effet, soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in H$ et $x \in [0,1]$. On a

$$(\lambda I - T) f(x) = (\lambda - x) f(x).$$

On distingue deux cas:

Si $\lambda \notin [0,1]$, alors, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\lambda - t}$ est bornée, et l'opérateur $(\lambda I - T)^{-1}$ défini par

$$(\lambda I - T)^{-1} g(x) = \frac{1}{\lambda - x} g(x), \; g \in H,$$

est un opérateur borné.

Si $\lambda \in [0,1]$, alors la fonction $t \mapsto \frac{1}{\lambda - t}$ n'est pas dans H, car il y a la singularité non intégrable en $t = \eta$. Il résulte que $\lambda I - T$ n'est pas inversible et tous les λ sont des points singuliers. D'o'u, on déduit que $\sigma(T) = [0,1]$.

On suppose maintenant que λ soit une valeur propre de T et f le vecteur propre associé dans H. Alors, on a

$$(\lambda - x) f(x) = 0, x \in [0,1].$$

Il s'en suit que $f = 0$ dans H. D'où, l'opérateur T n'a pas de valeurs propres et $\sigma_p(S) = \emptyset$.

Exemple 2.5.7 *Soit $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ défini par*

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Il est facile de montrer que le rayon spectral de T est nul i.e., $r(T) = 0$, ce qui implique que $\sigma(T) = \{0\}$.

De plus, on a $\sigma_p(T) = \sigma_r(T) = \emptyset$ et $\sigma_c(T) = \{0\}$.

Exemple 2.5.8 *On considère l'opérateur de shift défini par:*

$$S : l_2(\mathbb{C}) \to l_2(\mathbb{C}), S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...).$$

On peut montrer que

$$\sigma(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\},$$

avec $\sigma_p(S) = \emptyset$, $\sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ et $\sigma_r(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

Exemple 2.5.9 *Considérons dans $l_2(\mathbb{R})$ l'opérateur borné A défini par:*

$$Ax_n = x_{n-1} \text{ si } n \geq 1 \text{ et } Ax_0 = 0.$$

Par ailleurs, soit B l'opérateur borné de $l_2(\mathbb{R})$ défini par:

$$Bx_n = x_{n+1}.$$

Alors, comme

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{n \geq 1} x_{n-1} y_n = \sum_{n \geq 0} x_n y_{n+1} = \langle x, By \rangle .$$

D'où B est l'adjoint de A.

Comme $\|A\| = \|B\| = 1$, $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont inclus dans le disque unité de $\mathbb{C}$.

On vérifie facilement par récurrence sur n que A n'admet pas de valeur propre.

En revanche le spectre ponctuel de B est:

$$\sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}.$$

En effet, le vecteur λ^n est un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Il en résulte que

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}.$$

De plus, les spectres étant fermés, on a:

$$\sigma(A) = \sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Les spectres de A et de B coincident mais leurs structures sont très différentes puisque:

$$\sigma_r(A) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\},$$

et

$$\sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1 *Soit T un opérateur additif, continu et défini sur un espace vectoriel réel. Montrer que T est homogène.*

Exercice 2.6.2 *Montrer que les opérateurs suivants sont linéaires bornés:*

1. $Af(x) = x^2 f(x)$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$.
2. $Af(x) = \int\limits_0^1 f(s)\, ds$, $A : C[-1,1] \to C[0,1]$.
3. $Af(x) = f(x^2)$, $A : C[0,1] \to C[0,1]$.
4. $Af(x) = f(x)$, $A : C^1[0,1] \to C[0,1]$.
5. $Af(x) = x \int\limits_0^1 f(s)\, ds$, $A : L^2[-1,1] \to L^2[0,1]$.

Exercice 2.6.3 *On considère l'opérateur T définit comme suit:*

$$Tf(x) = xf(x), T : L^2[0,1] \to L^2[0,1].$$

Montrer que T est un opérateur linéaire continu et calculer sa norme.

Exercice 2.6.4 *Montrer que si (A_n) est une suite de Cauchy d'éléments de $\mathcal{L}(H)$, alors $(\|A_n\|)$ est elle aussi une suite de Cauchy.*

Exercice 2.6.5 *Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{L}(H)$ qui converge vers A et soit (x_n) une suite d'éléments de H qui converge vers x. Montrer que la suite $(A_n x_n)$ converge vers Ax.*

Exercice 2.6.6 *On considère la suite d'opérateurs suivante:*

$$A_n : C[0,1] \to C[0,1], A_n x(t) = x\left(t^{1+\frac{1}{n}}\right), n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que la suite d'opérateurs $(A_n)_{n\geq 1}$ est linéaire et bornée.
2. Montrer que $(A_n)_{n\geq 1}$ converge fortement vers l'opérateur identité.
3. La convergence de $(A_n)_{n\geq 1}$ vers I est-elle uniforme?

Exercice 2.6.7 *Chercher l'adjoint de l'opérateur A si:*

1. $Af(x) = xf(x)$, $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$.
2. $Af(x) = \int\limits_0^x f(s)\, ds$, $A : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$.

3. $Af(x) = \int_0^1 sf(s)\,ds,\ A : L^2[0,1] \to L^2[0,1].$

4. $Af(x) = x\int_0^1 f(s)\,ds,\ A : L^2[0,1] \to L^2[0,1].$

5. $A(x_1, x_2, ...) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, ...),\ A : l_2 \to l_2.$

Exercice 2.6.8 *Soit* $E = C[0,1\,]$ *muni de la norme* $\|.\|_\infty$ *et pour* $f \in E$, *on définit*

$$Tf(x) = f(0) + xf(1).$$

1. Montrer que T est linéaire et borné.
2. Montrer que $\sigma_p(T) = \{0, 1\}$.
3. Déterminer l'ensemble résolvante de T.
4. En déduire $\sigma(T)$ et $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$.
5. Déterminer le rayon spectral de T.

Exercice 2.6.9 *Soit* $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ *une suite bornée dans* $\mathbb{C}$ *et* $M = \sup\limits_n |\lambda_n|$. *Soit* $T : l_2 \to l_2$ *définie par:*

$$T(x_1, x_2, ...) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...).$$

1. Montrer que T est linéaire, continu, et calculer sa norme.

2. Montrer que si l'ensemble $\{|\lambda_n|, n \geq 1\}$ est minoré par un nombre strictement positif, alors T est bijective.

Préciser dans ce cas T^{-1} et déterminer sa norme.

3. On suppose que l'un des λ_n est nul. Montrer que T n'est ni injective ni surjective et que $\overline{Im(T)} \neq l_2$.

Exercice 2.6.10 *Soit* $E = C^1[0,1]$ *et* $E = C[0,1]$ *tous deux munis de la norme* $\|.\|_\infty$, *on définit l'opérateur de dérivation* $T : E \to F$ *tel que* $\forall f \in E, Tf = f'$.

On note $G(T) = \{(f, Tf), f \in E\}$ le graphe de T.

1. Montrer que $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.
2. Montrer que T n'est pas continu. (on pourra utiliser la suite $f_n \in E$, $f_n(x) = x^n$)
3. Expliquer le résultat.

Exercice 2.6.11 *Montrer que si A et B sont deux opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert H on a nécessairement*

$$[A, B] := AB - BA \neq I.$$

Exercice 2.6.12 *Soit T un opérateur continu sur un espace de Banach E.*

Démontrer que si $|\lambda| > \|T\|$, alors

$$\left\|(\lambda I - T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Exercice 2.6.13 *Soit $E = C\,[0, 1]$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et pour $f \in E$, on définit*

$$Tf\,(x) = \int_0^x K\,(x, t)\, f\,(t)\, dt,$$

où $K\,(.,.) \in C\,([0, 1] \times [0, 1])$. Soit $M = \sup\limits_{\leq 0x,t\leq 1} |K\,(x, t)|$.

(1) Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.

(2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $|T^n f\,(x)| \leq \frac{M^n}{n!} x^n \|f\|_\infty$.

(3) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $\|T^n\| \leq \frac{M^n}{n!}$.

(4) Déterminer le spectre de T.

Chapitre 3

Quelques classes des opérateurs

3.1 Opérateur auto-adjoint

3.1.1 Définitions et exemples

Définition 3.1.1 *Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit auto-adjoint (ou hermitien) si $A^* = A$ c'est -à- dire*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \forall x, y \in H.$$

Exemple 3.1.1 *Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.*

D'où $A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que $A^* = A$, donc A est auto-adjoint.

Exemple 3.1.2 *Considérons l'opérateur A défini sur $L^2(\mathbb{R})$ par:*

$$Ax(t) = e^{-|t|}x(t).$$

L'opérateur A est auto-adjoint, car pour tous $x, y \in L^2(\mathbb{R})$.

On a

$$\begin{aligned}
\langle Ax, y\rangle &= \left\langle e^{-|t|}x(t), y(t)\right\rangle \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}x(t)\overline{y(t)}dt \\
&= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{e^{-|t|}y(t)}dt \\
&= \langle x, Ay\rangle .
\end{aligned}$$

Remarque 3.1.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, alors l'opérateurs*

$$A = \frac{T + T^*}{2} \quad et \quad B = \frac{T + T^*}{2},$$

sont auto-adjoints et $T = A + iB$.

L'opérateurs A et B sont appelés respectivement partie réelle et partie imaginaire de T.

Définition 3.1.2 (Décomposition cartésienne) *Tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ peut s'écrire sous la forme $T = A + iB$, où*

$$A = \mathrm{Re}(T) = \frac{T + T^*}{2} \quad et \quad B = \mathrm{Im}(T) = \frac{T + T^*}{2},$$

A et B sont auto-adjoints, et la forme $T = A + iB$ dite décomposition cartésienne de T.

Théorème 3.1.1 (Norme d'un opérateur auto-adjoint) *Si A est auto-adjoint. Alors,*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| .$$

Proposition 3.1.1 *Si A , $B \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs auto-adjoints. Alors,*

1. $\alpha A + \beta B$ est un opérateur auto-adjoint pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. AB est auto-adjoint si seulement si $AB = BA$.
3. Si T est un opérateur quelconque, alors T^*T, TT^* et $T + T^*$ sont auto-adjoints.

Preuve. 1.Pour tous $x, y \in H$, on a

$$\begin{aligned} \langle (\alpha A + \beta B) x, y \rangle &= \langle \alpha A x, y \rangle + \langle \beta B x, y \rangle \\ &= \alpha \langle A x, y \rangle + \beta \langle B x, y \rangle \\ &= \langle x, \alpha A y \rangle + \langle x, \beta B y \rangle \\ &= \langle x, (\alpha A + \beta B) y \rangle . \end{aligned}$$

Donc l'opérateur $\alpha A + \beta B$ est auto-adjoint.

2. a) $\Rightarrow$ Soit AB est auto-adjoint. Alors,

$$(AB)^* = AB \Rightarrow B^* A^* = AB \Rightarrow BA = AB.$$

b) $\Leftarrow$ Si $AB = BA$. Alors,

$$(AB)^* = (BA)^* = A^* B^* = AB.$$

Donc AB est auto-adjoint.

3. On a

$$(T^*T)^* = T^*T^{*^*} = T^*T.$$

Aussi,

$$(TT^*)^* = T^{*^*}T^* = TT^*.$$

Et

$$(T + T^*)^* = T^* + T^{*^*} = T^* + T.$$

D'où T^*T, TT^* et $T + T^*$ sont auto-adjoints. ■

Proposition 3.1.2 *Soit H un espace de Hilbert complexe et $A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint. Alors,*

$$\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H.$$

Preuve. En effet,

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}.$$

Donc $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H$. ■

Remarque 3.1.2 *Si H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$. Alors,*

$$\langle Ax, x \rangle = 0, \forall x \in H \Rightarrow A = 0.$$

3.1.2 Théorie spectrale d'opérateur auto-adjoint

Proposition 3.1.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors, $\sigma_p(T) \subset \mathbb{R}$ et les vecteurs propres correspondant à des valeurs propres différentes sont orthogonaux.*

Preuve. Soit λ une valeur propre de T. Alors, pour tout $x \in H \backslash \{0\}$

$$\begin{aligned} \langle Tx, x \rangle &= \langle \lambda x, x \rangle \\ &= \lambda \|x\|^2 . \end{aligned}$$

Donc

$$\lambda = \frac{\langle Tx, x \rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

Soit μ une autre valeur propre de T et y un vecteur propre associé. Alors, pour tous $x, y \in H$. On a

$$\begin{aligned} \lambda \langle x, y \rangle &= \langle Tx, y \rangle \\ &= \langle x, Ty \rangle \\ &= \overline{\mu} \langle x, y \rangle \\ &= \mu \langle x, y \rangle . \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$(\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0.$$

Comme $\lambda \neq \mu$ on aura $\langle x, y \rangle = 0$. ■

Corollaire 3.1.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Alors, T est auto-adjoint si seulement si* $\mathrm{Im}(T) = 0$.

Preuve.

$$\begin{aligned} T \text{ est auto-adjoint} &\Leftrightarrow T = T^* \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Re}(T) + i \,\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Re}(T) - i \,\mathrm{Im}(T) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) = 0. \end{aligned}$$

■

Lemme 3.1.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$. On a*

$$\lambda \in \sigma_r(A) \Rightarrow \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*).$$

Théorème 3.1.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors,*

1. $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.

2. $\sigma_r(A) = \emptyset$.

3. $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$.

4. $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Preuve. 1. Voir la proposition précédente.

2. On en déduit facilement que $\sigma_r(A) = \emptyset$.

En effet, par lemme 3.1.1 soit $\lambda \in \sigma_r(A)$ alors $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*) = \sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$. On a donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \sigma_p(A)$, ce qui est absurde car $\sigma_r(A) \cap \sigma_p(A) = \emptyset$. Donc $\sigma_r(A) = \emptyset$.

3. Montrons maintenant que $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$.

Soit $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\beta \neq 0$, on pose que $\lambda \in \sigma_c(A)$. Alors, $A - \lambda I$ est injectif et son image dense mais distincte de H. On va montrer qu'en fait $\operatorname{Im}(A - \lambda I)$ est férmée dans H, ce qui contredit les hypothèses pour cela on a

$$\begin{aligned}
\|(A - \lambda I)x\|^2 &= \|(\lambda I - A)x\|^2 \\
&= \langle (\alpha + i\beta - A)x, (\alpha + i\beta - A)x \rangle \\
&= \|(\alpha - A)x\|^2 + \|\beta x\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle i\beta x, (\alpha - A)x \rangle.
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\langle i\beta x, (\alpha - A)x \rangle &= i\langle \beta x, (\alpha - A)x \rangle \\
&= i\beta\left(\|x\|^2 - \langle x, Ax \rangle\right) \in i\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\|(A - \lambda I)x\|^2 &= \|(\alpha - A)x\|^2 + \|\beta x\|^2 \qquad (3.1.1) \\
&\geq \beta^2 \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Considérons $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathrm{Im}\,(A-\lambda I)$, soit x sa limite dans H, pour chaque n il existe $y_n \in H$ tel que

$$x_n = (A-\lambda I)\, y_n.$$

Par (3.1.1) on a

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\|^2 &= \|(A-\lambda I)(y_m - y_n)\|^2 \\ &\geq \beta^2 \|y_m - y_n\|^2 . \end{aligned}$$

Il suit que $(y_n)_n$ est une suite de Cauchy elle est donc convergente, soit y sa limite par continuité de $A-\lambda I$ il suit que

$$x = (A-\lambda I)\, y \in \mathrm{Im}\,(A-\lambda I).$$

D'où $\mathrm{Im}\,(A-\lambda I)$ est férmée dans H. L'hypothèse $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ est donc incompatible avec $\lambda \in \sigma_c(A)$.i.e, $\sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$.

4. On sait que $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$. D'où le résultat. ■

3.2 Autres classes des opérateurs

3.2.1 Opérateur positif

Définition 3.2.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ on dit que A un opérateur positif et que l'on note $A \geq 0$. Si A est auto-adjoint et*

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in H.$$

Proposition 3.2.1 *Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est positif. Alors, A est auto-adjoint.*

Preuve. En effet, car l'opérateur A est auto-adjoint si seulement si

$$\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in H.$$

■

Corollaire 3.2.1 *$A \in \mathcal{L}(H)$ est positif si seulement si*

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in H.$$

Exemple 3.2.1 *Soit A l'opérateur défini par:*

$$A : L^2 [0,1] \to L^2 [0,1] \,, Af (x) = xf (x) \,.$$

On a A positif car pour tout $f \in L^2 [0,1]$,

$$\begin{aligned} \langle Af, f\rangle &= \int_0^1 xf (x) \overline{f (x)} dx \\ &= \int_0^1 x \left| f (x)\right|^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

Définition 3.2.2 (Comparaison des opérateurs) *Soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ on dit que $A \geq B$ si la différence $A - B$ est un opérateur positif. Autrement dit*

$$\langle (A - B)\, x, x\rangle \geq 0, \forall x \in H.$$

Théorème 3.2.1 (Inégalité de Caucy-Schwarz généralisé) *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur positif. Alors,*

$$\left|\langle A\varphi, \psi\rangle\right|^2 \leq \langle A\varphi, \varphi\rangle \langle A\psi, \psi\rangle \,,$$

pour tous $\varphi, \psi \in H$.

Preuve. En effet, pour tous $\varphi, \psi \in H$ et $\forall\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle A (\varphi - \lambda\psi) \,, \varphi - \lambda\psi\rangle \geq 0.$$

De plus, il vient

$$\langle A (\varphi - \lambda\psi) \,, \varphi - \lambda\psi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \overline{\lambda} \langle A\varphi, \psi\rangle - \lambda \langle A\psi, \varphi\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle A\psi, \psi\rangle \,.$$

D'où, avec A est auto-adjoint, on écrit

$$\langle A (\varphi - \lambda\psi) \,, \varphi - \lambda\psi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \overline{\lambda} \langle A\varphi, \psi\rangle - \lambda \langle \psi, A\varphi\rangle + \lambda\overline{\lambda} \langle A\psi, \psi\rangle \,,$$

ou encore,

$$\langle A (\varphi - \lambda\psi) \,, \varphi - \lambda\psi\rangle = \langle A\varphi, \varphi\rangle - \overline{\lambda} \langle A\varphi, \psi\rangle - \lambda\overline{\langle \varphi, A\varphi\rangle} + \lambda\overline{\lambda} \langle A\psi, \psi\rangle \,.$$

Prenons $\lambda = \frac{\langle A\varphi,\psi\rangle}{\langle A\psi,\psi\rangle}$, on obtient

$$\langle A\varphi, \varphi\rangle - \frac{\left|\langle A\varphi, \psi\rangle\right|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} - \frac{\left|\langle A\varphi, \psi\rangle\right|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle} + \frac{\left|\langle A\varphi, \psi\rangle\right|^2}{\langle A\psi, \psi\rangle^2} \langle A\psi, \psi\rangle \geq 0,$$

ou encore

$$\langle A\varphi,\varphi\rangle - \frac{|\langle A\varphi,\psi\rangle|^2}{\langle A\psi,\psi\rangle} \geq 0.$$

D'où le résultat voulu

$$|\langle A\varphi,\psi\rangle|^2 \leq \langle A\varphi,\varphi\rangle \langle A\psi,\psi\rangle .$$

■

Racine carrée d'un opérateur positif

Définition 3.2.3 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur positif , on dit que l'opérateur S est racine carrée de A si*

$$S^2 = A.$$

Ou encore $S = A^{\frac{1}{2}}$ (ou $S = \sqrt{A}$).

Remarque 3.2.1 *La racine carrée d'un opérateur positif est unique.*

Exemple 3.2.2 *Dans l'exemple précédent. On a A est positif donc il existe S tel que $S^2 = A$. On remarque que*

$$S : L^2[0,1] \to L^2[0,1], Sf(x) = \sqrt{x}f(x).$$

3.2.2 Définitions élémentaires et exemples

Définition 3.2.4 (Opérateur unitaire) *On dit l'opérateur $U \in \mathcal{L}(H)$ est unitaire si*

$$U^*U = UU^* = I.$$

C'est-à-dire $U^{-1} = U^*$.

Exemple 3.2.3 *Soit A l'opérateur défini sur $L^2[0,1]$ par:*

$$Af(x) = f(1-x).$$

On calcul l'adjoint de A, pour tous $f, g \in L^2[0,1]$. On a

$$\begin{aligned} \langle Af, g\rangle &= \langle f(1-x), g(x)\rangle \\ &= \int_0^1 f(1-x)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_0^1 f(y)\overline{g(1-y)}dy \\ &= \int_0^1 f(x)\overline{g(1-x)}dx. \end{aligned}$$

(On prend $y = 1 - x$ d'où $dy = -dx$).

Donc

$$A^* f(x) = f(1-x).$$

Maintenant, on vérifie que A est unitaire.

On a

$$A^*Af(x) = A^*f(1-x) = f(x),$$

et

$$AA^*f(x) = Af(1-x) = f(x).$$

D'où

$$A^*A = AA^* = I.$$

Donc A est unitaire.

Définition 3.2.5 (Opérateur isométrie) *On dit $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur isométrie (ou isométrique). Si*

$$A^*A = I.$$

Ou bien,

$$\|Ax\| = \|x\|, \forall x \in H.$$

Exemple 3.2.4 *L'opérateur de shift*

$$S : l_2 \to l_2, S(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...),$$

est un opérateur isométrie.

En effet, on a

$$S^* (x_1, x_2, ...) = (x_2, x_{3,}...),$$

et

$$S^*S (x_1, x_2, ...) = (x_1, x_{2,}...).$$

Donc $S^*S = I$, c'est-à-dire S est isométrie.

Définition 3.2.6 (Opérateur projection) *Soit $P \in \mathcal{L}(H)$ on dit que P projection si*

$$P^2 = P.$$

Définition 3.2.7 (Projection orthogonale) *Un opérateur $P \in \mathcal{L}(H)$ est dit projection orthogonale si*

$$P^2 = P = P^*.$$

Exemple 3.2.5 *Soit l'opérateur T défini par:*

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, T (x, y, z) = (x, 0, z).$$

L'opérateur T est projection orthogonale.

En effet, on peut vérifier que

$$T^* (x, y, z) = (x, 0, z).$$

Et

$$\begin{aligned} T^2 (x, y, z) &= T (T (x, y, z)) \\ &= T (x, 0, z) \\ &= (x, 0, z) \\ &= T (x, y, z). \end{aligned}$$

Donc

$$T^2 = T = T^*.$$

C'est-à-dire T est un projection orthogonale.

Définition 3.2.8 (Opérateur anti-hermitien) *Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est dit anti-hermitien si*

$$T^* = -T.$$

Exemple 3.2.6 *Soit $T = iI$ d'où $T^* = -iI$. Donc $T^* = -T$. i.e., T est dit anti-hermitien.*

3.2.3 Opérateur intégral linéaire

Définition 3.2.9 *Un opérateur intégral linéaire A est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante:*

$$(A\varphi)\,x = \int_a^b K\,(x,t)\,\varphi\,(t)\,dt.$$

La fonction K étant appelée noyau de l'opérateur A.

Remarque 3.2.2 *Si K est une fonction continue de $[a,b] \times [a,b]$, l'opérateur A est appelé opérateur intégral à noyau continu K.*

Proposition 3.2.2 *Soit A un opérateur intégral défini à partir d'un noyau K continu sur $[a,b] \times [a,b]$ à valeurs complexes, par la formule suivante:*

$$\forall x \in [a,b]\,,\ (A\varphi)\,x = \int_a^b K\,(x,t)\,\varphi\,(t)\,dt.$$

Alors, l'opérateur A admet un unique opérateur adjoint A^* pour le produit scalaire usuel de $L^2\,([a,b])$. Pour tout $x \in [a,b]$,

$$(A^*\psi)\,x = \int_a^b K\,(t,x)\,\psi\,(t)\,dt.$$

Preuve. Pour φ et ψ deux fonctions de $C([a,b])$, on a

$$\begin{aligned}\langle A\varphi,\psi\rangle &= \int_a^b A\varphi\,(x)\,\psi\,(x)\,dx \\ &= \int_a^b \left\{ \int_a^b K\,(x,t)\,\varphi\,(t)\,dt \right\} \overline{\psi\,(x)}dx.\end{aligned}$$

En vertu du théorème de Fubini relatif aux intégrales doubles, on établit que

$$\langle A\varphi, \psi\rangle == \int_a^b \varphi(t) \overline{\left(\int_a^b \overline{K(x,t)}\psi(x)\,dx \right)} dt$$

$$= \langle \varphi, A^*\psi\rangle .$$

Il en résulte que l'adjoint A^* est défini pour tout x dans $[a,b]$ par:

$$A^*\psi(x) = \int_a^b \overline{K(t,x)}\psi(t)\,dt.$$

■

Corollaire 3.2.2 *Soit A l'opérateur intégral de noyau K, et A^* est l'opérateur intégral de noyau K^*, avec*

$$K^*(t,x) = \overline{K(x,t)}.$$

Corollaire 3.2.3 *L'opérateur integral A de noyau K est auto-adjoint si, et seulement si, le noyau K est symétrique i.e.,*

$$\overline{K(x,t)} = K(t,x), \quad \forall x, t \in [a,b] .$$

3.3 Les opérateurs normaux

Dans cette section on introduit quelques notions de base de la théorie des opérateurs normaux.

3.3.1 Définitions et propriétés

Définition 3.3.1 *On dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur normal si T commute avec son adjoint i.e.,*

$$T^*T = TT^*.$$

Exemple 3.3.1 *La multipliquation T_φ par une fonction mesurable bornée φ est un opérateur normal sur $L^2([0,1])$.*

En effet, on a

$$\left(T_\varphi f\right)(t) = f(t)\,\varphi(t),$$

où $\varphi \in C([0,1])$, $f \in L^2([0,1])$.

On a

$$\langle T_\varphi f, g\rangle = \langle \varphi(t)\, f(t), g(t)\rangle$$

$$= \left\langle f(t), \overline{\varphi(t)} g(t) \right\rangle.$$

Donc

$$\left(T_\varphi^* g\right)(t) = \overline{\varphi(t)} g(t),$$

c'est-à-dire

$$T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}.$$

D'où,

$$T_\varphi^* T_\varphi = T_\varphi T_\varphi^*.$$

L'opérateur T_φ est un hermitien (auto-adjoint) s'il la fonction φ est réelle.

Proposition 3.3.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. T est normal;
2. $\|Tx\| = \|T^*x\|$ pour tout $x \in H$;
3. Dans le cas complexes, les parties réelles et imaginaires de T commutent.

   Preuve. Pour $x \in H$, alors

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 - \|T^*x\|^2 &= \langle Tx, Tx\rangle - \langle T^*x, T^*x\rangle \\ &= \langle (T^*T - TT^*)\, x, x\rangle. \end{aligned}$$

   Donc l'équivalence de 1 et 2.

   On pose $T = A + iB$, tel que $A = \mathrm{Re}\,(T)$ et $B = \mathrm{Im}\,(T)$, on a $T^* = A - iB$, et

$$T^*T - TT^* = 2i\,(AB - BA).$$

   D'où, $T^*T = TT^*$ si et seulement si $AB = BA$. ■

Corollaire 3.3.1 *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal, on a*

$$\ker(T) = \ker(T^*).$$

Proposition 3.3.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, on a*

1. L'opérateur aT est aussi normal pour tout $a \in \mathbb{C}$.

2. L'opérateur T^n est normal pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve. 1. Nous avons

$$(aT)(aT)^* = a\overline{a}TT^*,$$

et

$$(aT)^*(aT) = \overline{a}aT^*T.$$

Piusque T est normal, d'où il sont égaux.

2. T est normal, d'où $TT^* = T^*T$

$$\Rightarrow (TT^*)^n = (T^*T)^n$$

$$\Rightarrow T^n(T^*)^n = (T^*)^n T^n$$

$$\Rightarrow T^n(T^n)^* = (T^n)^* T^n.$$

C'est -à-dire T^n est normal pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. ■

Corollaire 3.3.2 *Soit P unpolynôme et T un opérateur normal. Alors, $P(T)$ est aussi normal.*

Remarque 3.3.1 .

$$T^n \textit{ normal} \nRightarrow T \textit{ normal.}$$

En effet, soit $T = \begin{pmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$. On a $T^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est normal, mais T n'est pas normal.

Proposition 3.3.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, on a*

$$\ker(T) \oplus \overline{\operatorname{Im}(T)} = H.$$

Preuve. On sait que :

$$\ker(T^*) = (\operatorname{Im} T)^{\perp}.$$

D'où

$$(\ker(T^*))^{\perp} = \left((\operatorname{Im} T)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{(\operatorname{Im} T)}.$$

Donc

$$H = \ker(T^*) \oplus (\ker(T^*))^{\perp}$$

$$= \ker(T) \oplus \overline{\operatorname{Im}(T)}.$$

■

Proposition 3.3.4 ***(Inverse d'un opérateur normal)*** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et inversible d'inverse T^{-1}. Alors, T^{-1} est aussi normal.*

Preuve. On a

$$\left(T^{-1}\right)^* T^{-1} = (T^*)^{-1} T^{-1}$$

$$= (TT^*)^{-1} = (T^*T)^{-1} \text{ (car } T \text{ normal)}$$

$$= T^{-1} (T^*)^{-1} = T^{-1} \left(T^{-1}\right)^*.$$

Donc T^{-1} est un opérateur normal. ■

Proposition 3.3.5 *Pour tout U est unitaire. L'opérateur U^*TU est normal si et seulement si T est normal.*

Preuve. On a

$$(U^*TU)^* (U^*TU) = U^*T^*TU,$$

et

$$(U^*TU)(U^*TU)^* = U^*TT^*U.$$

On remarque que $T^*T = TT^*$ si et seulement si U^*TU est normal. ■

Proposition 3.3.6 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur inversible, les assertions suivantes sont équivalentes*

i. T est normal.

ii. $T^{-1}T^*$ (ou T^*T^{-1}) est unitaire.

iii. Il existe un opérateur unitaire U tel que: $T^* = UT$.

Preuve. Motrons que

1) i $\Rightarrow$ii On a

$$\left(T^{-1}T^*\right)^* \left(T^{-1}T^*\right) = T\left(T^{-1}\right)^* T^{-1}T^*$$

$$= TT^{-1}\left(T^{-1}\right)^* T^* = I\left(TT^{-1}\right)^* = I\ .$$

2) ii $\Rightarrow$iii clair. 3)

iii $\Rightarrow$i Pour tout $x \in H$, on a

$$\|T^*x\|^2 = \|UTx\|^2$$

$$= \langle UTx, UTx\rangle = \langle Tx, U^*UTx\rangle = \|Tx\|^2 .$$

Donc, T est normal. ■

3.3.2 Théorie spectrale des opérateurs normaux

Proposition 3.3.7 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Alors,*

1. Si $Tx = \lambda x$, tel que $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in H$. Alors, $T^*x = \overline{\lambda}x$.

2. Deux espaces propres de T associé à des valeurs propres distincts sont orthogonaux.

Preuve. 1. Si $Tx = \lambda x$ alors $(T - \lambda I)\,x = 0$. i.e., $x \in \ker(T - \lambda I)$ ce qui implique que $x \in Ker\left(T^* - \overline{\lambda}I\right)$. D'où $T^*x = \overline{\lambda}x$.

2. Soit μ autre valeur propre de T et y un vecteur propre associé.

On a

$$\begin{aligned}
(\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^{*}y\rangle) &\Rightarrow (\langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \overline{\mu} y\rangle)\\
&\Rightarrow (\lambda \langle x, y\rangle = \mu \langle x, y\rangle)\\
&\Rightarrow (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0\\
&\Rightarrow \langle x, y\rangle = 0\\
&\Rightarrow x \perp y.
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.3.8 *Le rayon spectral d'un opérateur normal $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifie*

$$r(T) = \|T\|.$$

Preuve. On suppose d'abord que T est auto-adjoint. On a $\|T^2\| = \|T\|^2$ et par récurrence sur n l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation$\left\|T^{2^n}\right\| = \|T\|^{2^n}$, il vient

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \left\|T^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = \|T\|.$$

On revient au cas normal, l'élément TT^{*} est auto-adjoint et il s'ensuit que l'on a,

$$\begin{aligned}
r(T) &= \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\|T^n (T^n)^{*}\|^{\frac{1}{n}}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\|(TT^{*})^n\|^{\frac{1}{n}}}\\
&= \sqrt{r(TT^{*})}\\
&= \sqrt{\|TT^{*}\|} = \|T\|.
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.3.9 ([14]) *Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.*

Dans le résultat suivant, nous présentons certaines caractérisations du spectre continu d'un opérateur normal borné.

Théorème 3.3.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, les assertions suivantes sont équivalentes*

i) $\lambda \in \sigma_c(T)$

ii) $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$

iii) $T - \lambda I$ est injectif, et l'image de $(T - \lambda I)(H)$ n'a pas fermée.

Preuve. ii) $\Longrightarrow$ i) puisque $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$, alors $T - \lambda I$ est injectif; mais ne pas surjectif. Supposons que l'image $(T - \lambda I)(H)$ n'est pas dense dans H, alors il existe $z \in (T - \lambda I)(H)^{\perp}$. Par conséquent nous avons,

$$z \in (T - \lambda I)(H)^{\perp} = \ker\left(T^* - \overline{\lambda} I\right) = \ker(T - \lambda I).$$

D'où contradiction, donc nous concluons que $\lambda \in \sigma_c(T)$.

i) $\Longrightarrow$ iii) est évidente à partir de la définition du spectre continu.

iii) $\Longrightarrow$ ii) on a $T - \lambda I$ est injectif, alors $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Supposons que $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors il existe un opérateur (invérsible) $S \in \mathcal{L}(H)$ tel que $S(T - \lambda I)x = x$, pour tout $x \in H$.

En particulier nous avons,

$$\frac{1}{\|S\|}\|x\| \leq \|(T - \lambda I)x\|, \forall x \in H.$$

D'où $(T - \lambda I)(H)$ est complet et fermée dans H, qui est une contradiction.

Nous concluons que $\lambda \in \sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$. ■

Proposition 3.3.10 ([8]) *Le spectre d'un opérateur normal est égale à le spectre approximatif, i.e.,*

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T).$$

Corollaire 3.3.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal.*

Alors,

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \sigma_{ap}(T).$$

Le théorème ci-dessous a été établie par M. Akkouchi dans [1].

Théorème 3.3.2 (voir [1]) *Soit H est un espace de Hilbert complexe, soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et $\lambda \in \mathbb{C}$. On a*

1. $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(T_\lambda) = H\}$.
2. $\sigma_p(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\operatorname{Im}(T_\lambda)} \neq H\right\}$.
3. $\sigma_c(T) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\operatorname{Im}(T_\lambda)} = H \text{ et } \operatorname{Im}(T_\lambda) \neq H\right\}$.
4. $\sigma_r(T) = \phi$.

3.3.3 Le théorème de Fuglede-Putnam

Dans ce paragraphe on s'intéresse au théorème classique et très importont dans la théorie d'opérateurs bornés et non bornés avec toutes ses applications à savoir le théorème de Fuglede-Putnam. Beaucoup des auteurs travaillent sur ce théorème. Après la preuve de Fuglede et Putnam, Rosenblum a donné une preuve simple en utiisant le théorème de Liouville. Berberian a donné une autre preuve avec une matrice qui fait l'équivalance entre celle de Fuglede et Putnam.

La version classique du théorème dans le cas borné est la suivante:

Théorème 3.3.3 ([11]) ***(Fuglede - 1950)*** *Soient A et N deux opérateurs bornés sur un Hilbert H, tels que $AN = NA$ où N est normal. Alors,*

$$AN^* = N^*A.$$

En 1951 Putnam a fait la généralisation au cas de deux opérateurs normaux i.e.,

Théorème 3.3.4 ([23]) ***(Putnam - 1951)*** *Soient A, M, N trois opérateurs bornés sur un Hilbert H, avec N, M sont normaux et*

$$MA = AN.$$

Alors,

$$M^*A = AN^*.$$

Preuve. La preuve suivante est à M.Rosenblum. Supposons que $S \in \mathcal{L}(H)$ et posons $V = S - S^*$, on définit

$$Q = \exp(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^n.$$

Alors, $V^* = -V$ donc $Q^* = \exp(V^*) = \exp(-V) = Q^{-1}$.

D'où Q est unitaire, la conséquence dont nous avons besoin est que $\|\exp(S - S^*)\| = 1$ pour tout $S \in \mathcal{L}(H)$.

D'autre part, on a $MA = AN$ d'où par récurrence, alors $M^k A = AN^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'où $\exp(M) A = A \exp(N)$ ou bien,

$$A = \exp(-M) A \exp(N).$$

Posons $U_1 = \exp(M^* - M)$ et $U_2 = \exp(N - N^*)$, puisque M et N sont normaux il s'enuit que $\exp(M^*) A \exp(-N^*) = U_1 A U_2$ et $\|U_1\| = \|U_2\| = 1$, d'où

$$\|\exp(M^*) A \exp(-N^*)\| \leq \|A\|.$$

Maintenant, on définit

$$F(\lambda) = \exp(\lambda M^*) A \exp(-\lambda N^*),$$

tel que $\lambda \in \mathbb{C}$.

Les hypothèses du théorème sont vérifiées avec $\overline{\lambda} M$ et $\overline{\lambda} N$ à la place de M et N donc implique que $\|F(\lambda)\| \leq \|A\|$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors, F est une fonction bornée analytique à valeur dans $\mathcal{L}(H)$.

D'aprés le théorème de Liouville $F'(\lambda) = 0$ on a

$$F'(\lambda) = M^* \exp(\lambda M^*) A \exp(-\lambda N^*) + \exp(\lambda M^*) A (-N^*) \exp(-\lambda N^*).$$

Pour $\lambda = 0$, $F'(0) = 0$.

D'où,

$$M^* A = A N^*.$$

■

Remarque 3.3.2 *La preuve précédente a été donné par Rosenblum en 1958.*

En 1959 Berberian a remarqué l'équivalence entre les deux version celle de Fuglede et l'autre de Putnam. Cette relation est donnée par la matrice suivante:

Soient $T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ deux matrices d'opérateurs définies sur $H \times H$ où M et N normaux.

Alors, T est normal et on a

$$TS = ST.$$

La version de Fuglede donne alors,

$$T^*S = ST^*.$$

En écrivant les coefficient de ces deux dernière matrices on trouve la version de Putnam.

Remarque 3.3.3 *Les hypothèses du théorème précédent n'impliquent pas que $MA^* = A^*N$.*

Lorsque M et N sont auto-adjoints et A normal, si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors, $MA = AN$ mais $MA^* \neq A^*N$.

3.4 Les opérateurs compacts

Parmi tous les opérateurs bornés, on peut distinguer une classe importante d'opérateurs, dont les propriétés sont le plus proches de celles des opérateurs linéaires dans un espace de dimension finie c'est la classe des opérateurs compacts.

3.4.1 Définitions et propriétés

Nous commençons d'abord par rappeler la définition et quelques propriétés des opérateurs compacts. Soient E et F deux espaces normés. On désigne par $K(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose $K(E) = K(E, E)$.

Définition 3.4.1 (Compacité) *Soit X un ensemble d'un espace normé E, X est dit compact si de tout recouvrement de X par des ouverts de X on peut extaire un sous-recouvrement fini i.e.,*

$$\forall V_j, j \in J \text{ (ouverts)}; X \subset \bigcup_{j\in J} V_j, \exists V_{j_k},\ j_k = 1,2,...,n \text{ tel que } X \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j_k}.$$

Définition 3.4.2 *Un sous ensemble d'un espace normé est dit relativement compact si son adhérence est compacte.*

Définition 3.4.3 (Opérateur compact) *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$, on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné dans E à un ensemble relativement compact dans F.*

Définition 3.4.4 *On dit $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est un opérateur compact s'il transforme la boule unité B_E de E en une partie relativement compacte de F.*

Définition 3.4.5 (Critère de compacité) *L'opérateur T est compact, si et seulement si pour toute suite bornée $(x_n)_{n\geq 1} \subset E$, la suite $(Tx_n)_{n\geq 1}$ admet que sous suite convergente dans F.*

Exemple 3.4.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$, si E ou F est dimension finie. Alors, T est un opérateur compact car*

- Si $\dim E = n$, alors $\dim T(E) \leq n$. Soit B_E la boule unité de E, alors $T(B_E)$ est borné de $T(E)$ donc relativement compact dans $T(E)$.
- Si $\dim F = n$, alors $T(B_E)$ est borné de F il s'en suit que $T(B_E)$ est compact dans F.

Proposition 3.4.1 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(E,F)$ deux opérateurs compacts et $\lambda \in \Bbbk$. Alors, $A+B$, λA sont des opérateurs compacts.*

Preuve. Soit B_E la boule unité de E et soit $(A+B)(B_E)$ l'image de B_E par $A+B$. Soit $(x_n)_n$ une suite de B_E, alors $\exists (x_{n_k}) \subset (x_n)_n$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} Ax_{n_k} = a \in F$ (puisque A est compact) et comme B est un opérateur compact on peut extraire de la suite (x_{n_k}) une suite $\left(y_{n_{k'}}\right)$ telle que $\lim\limits_{k'\to+\infty} y_{n_{k'}} = b$. Alors, $\lim\limits_{k'\to+\infty} (A+B)\, y_{n_{k'}} = a+b$, ce qui implique que $A+B$ est compact.

D'autre part,

$$\begin{aligned} A \text{ est compact } &\Rightarrow \exists \left(x_{n_k}\right) \subset \left(x_n\right)_n \text{ telle que} \lim_{k\to+\infty} Ax_{n_k} = a \\ &\Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \left(\lambda A\right) x_{n_k} = \lambda a \\ &\Rightarrow \lambda A \text{ est compact.} \end{aligned}$$

■

Dans le cas particulier où $F = C\left([a,b]\right)$, le théorème suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de T.

Théorème 3.4.1 (Arzela-Ascoli) *Une condition nécessaire et suffisante q'une famille des fonctions continues définies sur l'intervalle compact $[a,b]$, est compacte dans $C\left([a,b]\right)$ est que cette famille est uniformément bornée et équicontinue.*

Remarque 3.4.1 *Soit G un ensemble, $G \subset C\left([a,b]\right)$, on dit que G est:*

1. uniformément borné, s'il existe une constante $M > 0$, telle que

$$|\varphi(x)| \leq M, \forall x \in [a,b], \forall \varphi \in G.$$

2. équicontinu, si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in G, |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon, \forall x, y \in [a,b], \ |x-y| < \delta.$$

Exemple 3.4.2 *Considérons l'opérateur de Volterra*

$$V : L^2[0,1] \to C[0,1], Vf(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Alors, T est un opérateur compact.

En effet, soit

$$\overline{B}(0,1) = \left\{ f \in L^2[0,1], \|f\| \leq 1 \right\}.$$

On va montrer que $V\overline{B}(0,1)$ est relativement compact dans $C[0,1]$.

On utilisé le théorème d'Arzela-Ascoli.

i) $V\overline{B}(0,1)$ est uniformément borné, car

$$\|Vf\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^x f(t)\,dt \right|.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^x f(t)\,dt\right| &\leq \int_0^1 |f(t)|\,dt \\
&= \|f\|_{L^1[0,1]} \\
&\leq \|f\|_{L^2[0,1]}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|Vf\|_\infty \leq 1.$$

ii) $V\overline{B}(0,1)$ est équicontinu, car $\forall x, y \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
|Vf(y) - Vf(x)| &= \left|\int_0^y f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\right| \\
&= \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \\
&\leq \int_x^y |f(t)|\,dt \\
&\leq \left(\int_x^y |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_x^y dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |y-x|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble $V\overline{B}(0,1)$ est relativement compact, d'où V est compact.

Théorème 3.4.2 *Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.*

Preuve. En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in E,\ \|x\| \leq 1\}.$$

Alors, $T(B(0,1))$ est relativement compact d'où

$$\|Tx\| \leq C, \forall x \in B(0,1).$$

Alors, T est borné.

Réciproquement, l'opérateur indentique I de E dans E est borné, mais il n'est pas compact car $I(B(0,1)) = B(0,1)$, n'est pas relativement compacte sauf si E est de dimension finie. ■

Proposition 3.4.2 ([3]) *Une combinaison linéaire $T = \alpha T_1 + \beta T_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact, pour tous α, $\beta \in \Bbbk$.*

Proposition 3.4.3 *Soient $A \in \mathcal{L}(E,F)$ et $B \in \mathcal{L}(F,G)$. Si A ou B est compact , alors BA est compact.*

Preuve. Si A est compact, alors, pour tout borné $M \subset E$, $A(M)$ est compact. Or, l'image d'un compact par une application continue est compacte, donc, $B(A(M))$ est compact. Il résulte que $BA(M) \subset B\left(\overline{A(M)}\right)$ est relativement compacte.

Si B est compact, alors, pour tout borné $M \subset E$, $A(M)$ est aussi borné et donc $BA(M)$ est relativement compacte. ■

Théorème 3.4.3 ([7]) *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $(T_n)_n$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Alors, T est compact.

Théorème 3.4.4 *Soit T un opérateur borné de E dans F, à image $T(E)$ de dimension finie. Alors, T est compact.*

Preuve. En effet, car l'opérateur T transforme tout ensemble borné G de E à un ensemble borné $T(G)$ dans un espace de dimension finie. Ce qui implique que$T(G)$ est un ensemble relativement compact. ■

Théorème 3.4.5 ([3]) *Soit $T \in K(E)$, alors l'image par T de toute suite de E **faiblement** convergente est une suite **fortement** convergente.*

Corollaire 3.4.1 *Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans H. Si $T \in K(H)$, alors*

$$\lim_{k\to\infty} \|Te_k\| = 0.$$

Preuve. Pour tout $x \in H$ la série $\sum_k |\langle x, e_k\rangle|^2$ est convergente et son terme général $\langle x, e_k\rangle$ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. Cela traduit le fait que la suite$(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est faiblement convergente vers 0, le théorème précédent permet de conclure. ■

Un exemple important d'opérateurs compacts est donée par le théorème qui suit.

Théorème 3.4.6 ([8]) *Soient H un espace de Hilbert séparable et (e_n) une base hilbertienne de H. Soit $\lambda = (\lambda_n)$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$. Alors, l'opérateur de multiplication par λ défini par:*

$$T_\lambda e_n = \lambda_n e_n,$$

est compact si, et seulement si,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

3.4.2 L'opérateur de rang fini

Définition 3.4.6 *On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini si*

$$\dim \operatorname{Im}(T) < \infty.$$

Exemple 3.4.3 *Sur l'espace de Hilbert $L^2([0,\pi], dx)$ l'opérateur T défini par:*

$$Tf(x) = \int_0^\pi \cos(x-t) f(t)\, dt, \quad \text{pour } f \in L^2([0,\pi], dx),$$

est manifestement un opérateur linéaire continu et l'expression

$$Tf(x) = \left(\int_0^\pi \cos(s) f(s)\, ds\right) \cos x + \left(\int_0^\pi \sin(s) f(s)\, ds\right) \sin x,$$

montre que l'image de T est un sous-espace de dimension deux. L'opérateur T est donc de rang fini égal à 2.

Remarque 3.4.2 *Il est clair qu'un opérateur borné de rang fini est compact.*

Corollaire 3.4.2 *Soit (T_n) une suite d'opérateurs bornés de rang finis de E dans F et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tels que*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0.$$

Alors, T est compact.

Proposition 3.4.4 *Soient $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$ deux opérateurs de rang fini et $\lambda \in \mathbb{k}$. Alors, $A + B$, λA sont des opérateurs de rang fini.*

Preuve. Posons $\dim A(E) = n_1$ et $\dim B(E) = n_2$, alors

$$\dim (A+B)(E) \leq n_1 + n_2,$$

et

$$\dim (\lambda A)(E) \leq n_1.$$

Ce qui implique $A+B$ et λA sont des opérateurs de rang fini. ■

Proposition 3.4.5 *Si A est un opérateur de rang fini dans un espace de Hilbert, il en est de même de A^*.*

Preuve. Soit H un espace de Hilbert, alors $A(H)$ est dimension finie dans H.
D'où

$$H = A(H) \oplus A(H)^{\perp}.$$

Soit $x \in A(H)^{\perp}$, ce qui implique que

$$\begin{aligned}
(\langle x, Ay \rangle = 0, \forall y \in H) &\Rightarrow (\langle y, A^* x \rangle = 0, \forall y \in H) \\
&\Rightarrow A^* x = 0 \\
&\Rightarrow A^* \left(A(H)^{\perp} \right) = \{0\} \\
&\Rightarrow A^*(H) \subset A^*(A(H)) \text{ ou } \dim A^*(A(H)) < \infty.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que A^* est un opérateur de rang fini. ■

Théorème 3.4.7 ([3]) *Soit $T \in \mathcal{L}(E,F)$, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. L'opérateur T est compact;

2. L'opérateur $T^* \in \mathcal{L}(F', E')$ est compact;

3. L'opérateur T est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.

3.4.3 Spectre d'un opérateur compact

Théorème 3.4.8 *Soit $A \in K(E,F)$, si $\lambda \in \sigma(A)$ et $\lambda \neq 0$. Alors, λ est une valeur propre de A et $\sigma(A)$ est un ensemble borné de $\mathbb{C}$.*

Preuve. Nous avons, si $\ker(I - A) = \{0\}$ alors, $I - A$ est inversible.

Soit $\lambda \in \sigma(A)$ et $\lambda \neq 0$, d'où $A - \lambda I = -\lambda\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)$ est un opérateur compact, ce qui implique que $I - \frac{A}{\lambda}$ non injectif, donc λ est une valeur propre de A.

Il s'en suit que

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \lambda \neq 0, \exists x \neq 0, Ax = \lambda x.$$

D'où

$$|\lambda| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|,$$

ce qui implique que $\sigma(A)$ est une partie bornée de $\mathbb{C}$. ∎

Théorème 3.4.9 *Soit $A \in K(E,F)$ tel que* $\dim E = \infty$. *Alors, $\lambda = 0$ est une valeur spectrale de A. (i.e., $0 \in \sigma(A)$).*

Preuve. Montrons que $\lambda = 0$ est valeur spectrale de A.

Supposons le contraire ($0 \notin \sigma(A)$). Alors, A est bijectif et $I = AA^{-1}$ est compact. D'où B_E est compacte et $\dim E = \infty$ donc contradiction. ∎

Proposition 3.4.6 *Soit $T \in K(H)$. Si $T - \lambda I$ est surjectif, alors il est injectif.*

Pour la réciproque de cette proposition, on a besion du lemme suivant

Proposition 3.4.7 *Soit $T \in K(H)$, si $T - \lambda I$ est injectif. Alors, son image est fermée dans H.*

Preuve. Soient $y \in \overline{\operatorname{Im}(T - \lambda I)}$ et (y_n) une suite de $\operatorname{Im}(T - \lambda I)$ qui converge vers y.

On pose

$$y_n = Tx_n - \lambda x_n.$$

Si (x_n) contient une sous-suite bornée, alors T étant compact, (x_n) contient aussi une sous-suite (x_{n_k}) telle que (Tx_{n_k}) converge. Comme

$$x_{n_k} = \frac{Tx_{n_k} - y_{n_k}}{\lambda}$$

la suite (x_{n_k}) converge vers un élément x qui vérifie $Tx - \lambda x = y$.

Si (x_n) ne contient aucune sous-suite bornée, la suite $\|x_n\|$ tend vers l'infini avec n.

Posons $z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$, il vient

$$\|z_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n\to\infty} (T - \lambda I)\, z_n = 0.$$

Comme T est compact, (z_n) contient une sous-suite (z_{n_k}) telle que (Tz_{n_k}) converge. On en déduit que la suite (z_{n_k}) est convergente et si z est sa limite, on aura $\|z\| = 1$ et $Tz - \lambda z = 0$. Ce qui contredit l'hypothèse $T - \lambda I$ est injectif. ■

Théorème 3.4.10 (Alternative de Fredholm [14]) *Soit $T \in K(H)$. Alors,*

a) $\ker(I - T)$ de dimension finie

b) $\operatorname{Im}(I - T)$ est fermé, et plus précisément

$$\operatorname{Im}(I - T) = \ker(I - T^*)^{\perp}.$$

c) $\ker(I - T) = \{0\} \iff \operatorname{Im}(I - T) = H$

d) $\dim\ker(I - T) = \dim\ker(I - T^*)$

Les résultats précédents se résument comme suite:

Théorème 3.4.11 ([14]) *Soit $T \in K(H)$. Alors, on a*

1. $0 \in \sigma(T)$.
2. $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$.

Théorème 3.4.12 ([20]) *Soit $T \in K(H)$, si (λ_n) est suite de valeurs propres de T. Alors,*

i) **Ou bien** cette suite est finie,

ii) **Ou bien** elle tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Corollaire 3.4.3 *Soit $T \in K(H)$, l'ensemble $\sigma(T)$ est dénombrable et s'il est infini on peut indexer les élements de $\sigma(T) / \{0\}$ est une suite (λ_n) tends vers 0.*

Théorème 3.4.13 ([7]) *Soit $T \in K(H)$. Alors, on a*

$$\sigma_{ap}(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

On sait que, si T est normal on a $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$, par conséquent nous avons le résultat suivant.

Corollaire 3.4.4 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal et compact. Alors,*

$$\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

3.4.4 Opérateur de Hilbert-Schmidt

Il s'agit de la classe la plus fréquente d'opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert.

Définition 3.4.7 *Soit H un espace de Hilbert séparable. On dit $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur de Hilbert-Schmidt s'il existe une base hilbertienne $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|Te_k\|^2 < \infty.$$

Le nombre

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|Te_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

S'appelle la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur T.

Exemple 3.4.4 *Pour un opérateur en dimension finie $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ (de façon équivalente, pour les matrices $n \times n$),*

$$\|T\|_{HS} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} tr\,(T^*T)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 3.4.8 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur de Hilbert-Schmidt. On a*

1) La norme $\|.\|_{HS}$ ne dépendent pas du choix de la base hilbertienne de H.
2) $\|T^*\|_{HS} = \|T\|_{HS}$.
3) On a toujours, $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$.

Théorème 3.4.14 *Tout opérateur de Hilbert-Schmidt est compact.*

Exemple 3.4.5 *Considérons l'opérateur integral $T : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ défini par:*

$$(Tf)(t) = \int_0^1 K(t,s)\, f(s)\, ds,$$

avec un noyau $K(.,.) \in L^2([0,1] \times [0,1])$. Alors, T est un opérateur de Hilbert-Schmidt, et

$$\|T\|_{HS} = \|K\|_{L^2[0,1]}.$$

3.4.5 Etude spectrale d'un opérateur compact auto-adjoint

Proposition 3.4.9 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose*

$$m = \inf_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x \rangle \quad et \quad M = \sup_{\substack{x \in H \\ \|x\|=1}} \langle Tx, x \rangle .$$

Alors, $\sigma(T) \subset [m, M]$, $m \in \sigma(T)$ et $M \in \sigma(T)$.

Corollaire 3.4.5 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(T) = \{0\}$. Alors, $T = 0$.*

Théorème 3.4.15 *On suppose que H est séparable. Soit T un opérateur auto-adjoint compact. Alors, H admet une base Hilbertienne formée de vecteurs propres de T.*

Théorème 3.4.16 *Si $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, il admet une valeur propre λ telle que*

$$|\lambda| = \|T\| .$$

Maintenant, nous pouvons énoncer ce qu'on appelle le théorème spectrale pour opérateurs auto-adjoints compacts sur un espace Hilbert séparable.

Théorème 3.4.17 *Soient H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint compact. Alors, il existe une base orthonormée $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de H et une suite de réells $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$Te_n = \lambda_n e_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0,$$

et pour tout $x \in H$,

$$Tx = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

3.5 Les classes de Schatten S_p

3.5.1 Les valeurs singulières des opérateurs compacts

Dans ce paragraphe nous définissons les valeurs singulières d'un opérateur compact, agissant sur un espace de Hilbert séparable H.

Définition 3.5.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, on définit les valeurs singulières de T par*

$$s_n(T) := \lambda_n(|T|) = \sqrt{\lambda_n(T^*T)}\ , n \in \mathbb{N}^*,$$

i.e.; les valeurs singulières de T sont les valeurs propres de l'opérateur $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$.

En particulier, $s_1(T) = \|T\|$.

Proposition 3.5.1 ([14]) *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur compact. Alors, il existe dans H deux systémes $(\phi_n)_n$ et $(\psi_n)_n$ orthonormaux tels que*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle ., \phi_n \rangle \psi_n,$$

où $(s_n)_n$ est la suite des valeurs singulières de T.

Corollaire 3.5.1 ***(Expression de l'adjoint)*** *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, on a*

$$T^* = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle ., \psi_n \rangle \phi_n.$$

Preuve. En effet, on a $\forall f, g \in H$,

$$\langle Tf, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle f, \phi_n \rangle \langle \psi_n, g \rangle$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle f, \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle g, \psi_n \rangle \phi_n \right\rangle \\ &= \langle f, T^*g \rangle . \end{aligned}$$

Donc, $T^*g = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle g, \psi_n \rangle \phi_n$. ■

On donne ci-dessous quelques propriétés des valeurs singulières.

Proposition 3.5.2 *Les valeurs singulières d'un opérateur compact $T \in \mathcal{L}(H)$ sont également données par les deux formules suivantes*

1) $s_{n+1} = \min_{g_1,\ldots,g_n} \max \{\|Tf\|, \|f\| = 1 \text{ et } \langle f, g_k \rangle = 0, k = 1, \ldots\ldots, n\}$.
2) $s_n = \inf \{\|T - F\|, F \in \mathcal{F}_n\}$.

où $\mathcal{F}_n$ est la classe des opérateurs de rang stictement plus petit que n, définis de l'espace H dans lui même.

Proposition 3.5.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact, et soit $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors*

$$s_n(AT) \leq \|A\| \, s_n(T).$$

Preuve. On a

$$s_n(AT) = \min_{g_1,\ldots,g_{n-1}} \max \{\|ATf\|, \|f\| = 1 \text{ et } \langle f, g_k\rangle = 0, k = 1, \ldots\ldots, n-1\}$$

$$\leq \|A\| \min_{g_1,\ldots,g_{n-1}} \max \{\|Tf\|, \|f\| = 1 \text{ et } \langle f, g_k\rangle = 0, k = 1, \ldots\ldots, n-1\}$$

$$= \|A\| \, s_n(T).$$

■

Proposition 3.5.4 *Soit (A_k) une suite d'opérateurs compacts convergent vers un opérateur A pour la norme d'opérateurs. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\lim_{k\to\infty} s_n(A_k) = s_n(A).$$

Preuve. On a pour touts $n, k \in \mathbb{N}$

$$|s_n(A_k) - s_n(A)| \leq \|A_k - A\|.$$

Ainsi, $\lim_{k\to\infty} s_n(A_k) = s_n(A)$. ■

3.5.2 Propriétés des classes de Schatten S_p

Dans ce paragraphe nous introduisons les classes de Schatten S_p, pour $P > 0$. Nous nous référons essentiellement au livre de Zhu (voir [30]).

Définition 3.5.2 *On dit qu'un opérateur compact T défini sur un espace de Hilbert H est de Schatten de classe p, $0 < p < \infty$, autrement dit $T \in S_p$, si la suite des valeurs singulières qui lui associée $(s_n)_n$ est dans l_p (i.e.; $\sum_n s_n^p < \infty$).*

Pour tout opérateur T de S_p, on pose

$$\|T\|_{S_p} = \left(\sum_{n\geq 1} s_n^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(s_n)_n\|_{l_p}.$$

Remarque 3.5.1 *Cette expression définit une norme sur S_p, pour $1 \leq p < \infty$ et une quasi-norme pour $0 < p < 1$.*

On donne ci dessous quelques propriétés sur les classes S_p.

Proposition 3.5.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact.*

a) Si $p \geq 1$, l'opérateur T appartient à la classe S_p si seulement si,

$$\sum |\langle T\varphi_i, \psi_i\rangle|^p < \infty,$$

pour tout choix $(\varphi_i)_i$, $(\psi_i)_i$ des systémes orthonormaux de H.

De plus, on a

$$\|T\|_{S_p} = \sup\left\{\left(\sum_i |\langle T\varphi_i, \psi_i\rangle|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\},$$

où le sup est pris sur tous les systémes orthonormaux $(\varphi_i)_i$, $(\psi_i)_i$ de H.

b) Si $p = 1$ et si T est positif alors, pour toute basse orthonormale $(\varphi_i)_i$ de H, on a

$$\|T\|_{S1} = \sum_i |\langle T\varphi_i, \varphi_i\rangle|^p.$$

Cette somme est en particulier convergente indépendamment du choix de la basse $(\varphi_i)_i$.

c) Si $0 < p \leq 1$ et si, de plus, T est un opérateur positif tel que, pour une certaine base orthonormale $(\varphi_i)_i$ de H , on a

$$\sum_i |\langle T\varphi_i, \varphi_i\rangle|^p < \infty,$$

alors, $T \in S_p$ et $\|T\|_{S_p}^p \leq \sum_i |\langle T\varphi_i, \varphi_i\rangle|^p$.

Proposition 3.5.6 *(voir [30]) Soient T un opérateur compact sur un espace de Hilbert H et $p \geq 1$. Alors, $T \in S_p$ si seulement si,*

$$(T^*T)^{\frac{p}{2}} \in S_{\frac{p}{2}}.$$

De plus,

$$\|T\|_{S_p}^{p} = \|T^*T\|_{S_{\frac{p}{2}}}^{\frac{p}{2}}.$$

Proposition 3.5.7 *La classe S_p est un idéal dans l'algèbre des opérateurs bornés. De plus, si A et B sont deux opérateurs bornés et $T \in S_p$. Alors,*

$$\|ATB\|_{S_p} \leq \|A\| \|T\|_{S_p} \|B\|.$$

3.6 Exercices

Exercice 3.6.1 *On définit l'opérateur T sur l'espace $L^2[0,1]$ comme suit:*

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt,$$

où $K(.,.) \in C([0,1] \times [0,1])$ à valeurs réels.

Montrer que T est auto- adjoint si et seulement si $K(x,t) = K(t,x)$.

Exercice 3.6.2 *Soit H un espace de Hilbert avec $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ une base orthornormale et*

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ une fonction bornée. On considère l'opérateur T définit par:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \langle x, e_n \rangle e_n, x \in H.$$

1. Déterminer l'adjoint de$T$.
2. Montrer que:

a) T auto- adjoint si g est réelle.

b) T positif si g est positive.

c) T unitaire si $|g(n)| = 1$.

Exercice 3.6.3 *Soit H est un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ satisfait:*

1. $(A - iI)$ est inversible.
2. $(A + iI)(A - iI)^{-1}$ isométrie.

Montrer que l'opérateur A est auto-adjoint.

Exercice 3.6.4 *Soit H est un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$ satisfait:*

1. $(A - I)$ est inversible.

2. A est unitaire.

Montrer que l'opérateur $i\,(A + I)\,(A - I)^{-1}$ est auto-adjoint.

Exercice 3.6.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur positif tel que $\|A\| \leq 1$.*

1. Montrer que l'opérateur $B = I - A$ est positif.
2. Montrer que $\|B\| \leq 1$.

Exercice 3.6.6 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\|T\| \leq 1$.*

1. Démontrer que si $x \in H$, alors $Tx = x$ si et seulement si $\langle Tx, x\rangle = \|x\|^2$.
En déduire que $\ker(I - T) = \ker(I - T^*)$.
2. Démontrer que $(\mathrm{Im}\,(I - T))^{\perp} = \ker(I - T)$ et en déduire $H = \ker(I - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}\,(I - T)}$.
3. On pose, pour $n \geq 1$,
$$T_n = \frac{I + T + ... + T^n}{1 + n}.$$
Montrer que pour tout $x \in H$, $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n x = Px$ où P est la projection orthogonale sur $\ker(I - T)$.

Indication. On considérera successivement les cas $x \in \ker(I - T)$, $x \in \mathrm{Im}\,(I - T)$ et $x \in \overline{\mathrm{Im}\,(I - T)}$.

Exercice 3.6.7 *1. Montrer que si T est un opérateur auto- adjoint, alors $\|T^n\| = \|T\|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

2. En déduire que $r\,(T) = \|T\|$.
3. Montrer que si T est un opérateur normal, on a $r\,(T) = \|T\|$.

Exercice 3.6.8 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, on pose $T = A + iB$.*

1. Montrer que T est inversible si et seulement si, $A^2 + B^2$ est inversible.
2. Justifier que $T^{-1} = T^*\,(A^2 + B^2)^{-1}$.

Exercice 3.6.9 *Montrer qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est compact si et seulement si, l'application $S \mapsto SAS$ de $\mathcal{L}(H)$ dans lui-même est compacte.*

Exercice 3.6.10 *Montrer que dans un espace normé de dimension infinie, si un opérateur compact est inversible, alors son inverse n'est pas borné.*

Exercice 3.6.11 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$.*

1. Montrer que si A^*A est un opérateur compact alors A est un opérateur compact.
2. En déduire que A est compact si et seulement si A^* est compact.

Exercice 3.6.12 *Soit A l'opérateur linéaire défini dans l_2 par:*

$$Ax_1 = 0 \text{ et } Ax_n = \frac{x_{n-1}}{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_2$.

montrer que cet opérateur est compact et que son spectre discret est vide.

Exercice 3.6.13 *Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$. On dira que T est une isométrie partielle si,*

$$\forall x \in \ker(T)^{\perp}, \|Tx\| = \|x\|.$$

(1) Montrer que si T est une isométrie partielle, alors l'image de T est fermée.

(2) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) T est une isométrie partielle;

(b) $TT^*T = T$;

(c) TT^* est une projection orthogonale;

(d) T^*T est une projection orthogonale.

Chapitre 4

Image numérique d'un opérateur

4.1 Définitions et propriétés principales

Définition 4.1.1 *L'image numérique de $T \in \mathcal{L}(H)$ est l'ensemble $W(T)$ des nombres complexes défini par*

$$W(T) = \{\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{C} : x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Les propriétés suivantes de $W(T)$ sont immédiates:

Proposition 4.1.1 *Soient $T, S \in \mathcal{L}(H)$, on a*

1. $W(\alpha I + \beta T) = \alpha + \beta W(T)$.

2. $W(T + S) \subset W(T) + W(S)$.

3. $W(T^*) = \left\{\overline{\lambda}, \lambda \in W(T)\right\}$.

Proposition 4.1.2 *Pour tout opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$, on a*

$$W(U^*TU) = W(T).$$

En particulier, l'image numérique est invariante par équivalence unitaire.

Preuve. On a

$$\begin{aligned} W(U^*TU) &= \{\langle (U^*TU)x, x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} \\ &= \{\langle TUx, Ux\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

On pose $y = Ux$, d'où $\|y\| = \|Ux\| = \|x\| = 1$. Alors,

$$\begin{aligned} W(U^*TU) &= \{\langle Ty, y\rangle : y \in H, \|y\| = 1\} \\ &= W(T). \end{aligned}$$

■

Maintenant voici quelques exemples d'image numérique.

Exemple 4.1.1 *Dans $\mathbb{C}^2$ définissons l'opérateur T par la matrice*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} W(T) &= \left\{|x_1|^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1\right\} \\ &= [0,1]. \end{aligned}$$

Exemple 4.1.2 *On définit l'opérateur S sur l_2 par*

$$S(x_1, x_2, ...) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, ...\right).$$

On a

$$W(S) =]0,1].$$

La plus importante propriété de l'image numérique est donnée dans le théorème suivant, démontré pour la première fois par Toeplitz-Hausdorff.

Théorème 4.1.1 (Toeplitz-Hausdorff) *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, l'image numérique de T est un sous-ensemble convexe de $\mathbb{C}$.*

Preuve. Soit λ et μ deux points distincts de $W(T)$. Alors, il existe $x, y \in H \setminus \{0\}$ tels que

$$\lambda = \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2} \text{ et } \mu = \frac{\langle Ty, y\rangle}{\|y\|^2}.$$

On remplace y par $e^{i\theta}y$ et on aura

$$\frac{\langle (T - \lambda I)x, y\rangle}{\mu - \lambda} - \frac{\left\langle \left(T^* - \overline{\lambda} I\right)x, y\right\rangle}{\overline{\mu} - \overline{\lambda}} \in \mathbb{R}.$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\frac{\langle (T-\lambda I)\,x,y\rangle+\langle (T-\lambda I)\,y,x\rangle}{\mu-\lambda} &= \frac{\langle (T-\lambda I)\,x,y\rangle}{\mu-\lambda}-\frac{\left\langle \left(T^{*}-\overline{\lambda}I\right)x,y\right\rangle}{\overline{\mu}-\overline{\lambda}}\\ +2\operatorname{Re}\left(\frac{\langle (T-\lambda I)\,y,x\rangle}{\mu-\lambda}\right) &\in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

On pose pout tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \frac{\langle T(x+ty),x+ty\rangle-\lambda\langle x+ty,x+ty\rangle}{(\mu-\lambda)\langle x+ty,x+ty\rangle}\\ &= t\frac{\langle (T-\lambda I)\,x,y\rangle+\langle (T-\lambda I)\,y,x\rangle}{(\mu-\lambda)\langle x+ty,x+ty\rangle}+t^{2}\frac{\langle y,y\rangle}{\langle x+ty,x+ty\rangle}.\end{aligned}$$

La fraction rationnelle φ est donc continue sur $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Comme $\varphi(0)=0$ et $\varphi(\infty)=1$, alors le théorème des valeurs intermédiaires entraîne que, pour tout $\tau\in\left]0,1\right[$, il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $\varphi(t)=\tau$. On a donc

$$\begin{aligned}(1-\tau)\,\lambda+\tau\mu &= (\mu-\lambda)\,\varphi(t)+\lambda\\ &= \frac{\langle T(x+ty),x+ty\rangle}{\langle x+ty,x+ty\rangle}\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

On en déduit que le segment joignant λ à μ est contenu dans $W(T)$. ■

Notre but principal dans ce théorème est de présenter la relation entre $W(T)$ et $\sigma(T)$.

Théorème 4.1.2 *Soit $T\in\mathcal{L}(H)$, alors $\sigma(T)\subseteq\overline{W(T)}$, où $\overline{W(T)}$ dénote la fermeture de $W(T)$.*

Preuve. Soit $\lambda\in\sigma_{ap}(T)$ donc $\exists\,(x_n)\subset H,\|x_n\|=1$ et $\|(T-\lambda I)\,x_n\|\to 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|\langle (T-\lambda I)\,x_n,x_n\rangle|\leq\|(T-\lambda I)\,x_n\|\to 0.$$

Donc $\langle Tx_n,x_n\rangle\to\lambda$, et par suite $\lambda\in\overline{W(T)}$.

On a alors

$$\sigma_{ap}(T)\subseteq\overline{W(T)}.$$

Ainsi, on a $\partial\sigma(T)\subset\sigma_{ap}(T)\subseteq\overline{W(T)}$ et de la convexité $W(T)$, il s'en suit que

$$\sigma(T)\subseteq\overline{W(T)}.$$

■

Proposition 4.1.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On a*

$$\sigma_p(T) \subset W(T).$$

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma_p(T)$ donc il existe $x \in H \backslash \{0\}$ tel que $Tx = \lambda x$. Alors,

$$\begin{aligned} T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) &= \lambda\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \\ &\Rightarrow \left\langle (T - \lambda I)\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle = 0 \\ &\Longrightarrow \left\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle = \lambda\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \\ &\Longrightarrow \lambda = \left\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle. \end{aligned}$$

Donc $\lambda \in W(T)$. ■

Théorème 4.1.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, si $\lambda \in W(T), |\lambda| = \|T\|$. Alors, $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

Preuve. Soit $\lambda = \langle Tx, x\rangle, \|x\| = 1$. Alors,

$$\|Tx\|\,\|x\| \leq \|T\| = |\lambda| = |\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\|\,\|x\|.$$

D'où

$$|\langle Tx, x\rangle| = \|Tx\|\,\|x\|.$$

Ce que implique que, il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $Tx = \mu x$. Mais, on a

$$\lambda = \langle Tx, x\rangle = \langle \mu x, x\rangle = \mu.$$

Donc $Tx = \lambda x$ i.e., $\lambda \in \sigma_p(T)$. ■

L'ensemble $W(T)$ n'est pas toujours fermé (voir l'exemple 4.1.2). En fait, on peut voir des opérateurs dont les images numériques sont toujours fermées.

Théorème 4.1.4 *Soit A une matrice carrée. Alors, $W(A)$ est un fermé de $\mathbb{C}$.*

Preuve. Définissons la fonction suivante

$$f : S \to \mathbb{C}, f(x) = \langle Ax, x\rangle,$$

où $S = \{x : \|x\| = 1\}$. Il est facile de vérifier que f est continue sur le compact S et que $f(S) = W(A)$. Il suit que $W(A)$ est un compact. ■

On peut aussi voir le théorème précédent comme un cas particulier du théorème suivant.

Théorème 4.1.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact. Si $0 \in W(T)$, alors $W(A)$ est fermé.*

Preuve. Si $\lambda \in \overline{W(A)}$, alors il existe une suite $(x_n) \subset H$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $\langle Ax_n, x_n \rangle \to \lambda$. Puisque $B(0,1)$ est faiblement compact dans H (puisque l'espace de Hilbert est un espace réflexif), il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge faiblement vers x tel que $\|x_n\| \leq 1$. Comme A est compact, alors la suite (Ax_{n_k}) converge fortement vers Ax. Ainsi, nous pouvons voir

$$\begin{aligned} |\langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle - \langle Ax, x \rangle| &\leq |\langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle - \langle Ax, x_{n_k} \rangle| + |\langle Ax, x_{n_k} \rangle - \langle Ax, x \rangle| \\ &\leq \|x_{n_k}\| \|Ax_{n_k} - Ax\| + |\langle Ax, x_{n_k} \rangle - \langle Ax, x \rangle| . \end{aligned}$$

Par conséquent la suite $(\langle Ax_{n_k}, x_{n_k} \rangle)$ converge vers $\langle Ax, x \rangle$.i.e., $\lambda = \langle Ax, x \rangle$.

Si $\lambda = 0$ l'assertion est clair.

Si $\lambda \neq 0$ il est clair que $x \neq 0$ alors

$$\frac{\lambda}{\|x\|^2} = \left\langle A\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{x}{\|x\|} \right\rangle \in W(A),$$

car $\|x\| \leq 1$ alors $\lambda \in \left]0, \frac{1}{\|x\|^2}\right]$.

Si $0 \in W(A)$ donc par convexité de $W(A)$, $\lambda \in W(A)$.i.e., $W(A)$ est fermé. ■

4.2 Image numérique d'opérateurs auto-adjoints et normaux

Dans cette section, on s'intéresse à quelques propriétés importantes de l'image numérique d'un opérateur normal ou auto-adjoint.

Théorème 4.2.1 ([17]) *L'opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est un auto-adjoint si et seulement si $W(T) \subset \mathbb{R}$.*

Preuve. Si T est auto-adjoint, alors pour tout $x \in H$,

$$\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}.$$

D'où $W(T) \subset \mathbb{R}$.

Inversement, si $W(T) \subset \mathbb{R}$, alors $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$. Donc T est auto-adjoint. ■

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'un T opérateur normal.

Théorème 4.2.2 ([17]) *Si $W(T)$ est un segment de droite, alors T est un opérateur normal.*

Preuve. Soit α un point sur le segment de droite ayant une inclinaison θ, d'où $W\left(e^{-i\theta}[T-\alpha I]\right)$ est inclu dans l'axe des réels. Ainsi, le théorème précédent implique que $e^{-i\theta}[T-\alpha I]$ est un opérateur auto-adjoint. On déduit donc, par un calcul simple que T est un opérateur normal. ■

Rappelons aussi que l'envoloppe convexe de $\sigma(T)$, noté $Conv\{\sigma(T)\}$ est le plus petit convexe contenant $\sigma(T)$.

Le théorème suivant montre que l'image numérique d'un opérateur normal est une bonne approximation de son spectre.

Théorème 4.2.3 ([13]) *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, on a que*

$$\overline{W(T)} = \overline{Conv\{\sigma(T)\}}.$$

Corollaire 4.2.1 *Soit m et M deux nombres complexes. Si,*

$$\overline{W(T)} = [m, M].$$

Alors,

$$\{m, M\} \subseteq \sigma(T).$$

Preuve. Si $\overline{W(T)} = [m, M]$, alors le théorème 4.2.2 implique que T est un opérateur normal. Ainsi, d'aprés le théorème 4.2.3 $\overline{W(T)}$ est l'enveloppe convexe de $\sigma(T)$, ou encore

$$[m, M] = \overline{W(T)} = \overline{Conv\{\sigma(T)\}}.$$

Il suit donc que $\{m, M\} \subseteq \sigma(T)$. ■

4.3 Rayon numérique d'un opérateur

Définition 4.3.1 *Le rayon numérique de $T \in \mathcal{L}(H)$ est défini par:*

$$\omega(T) = \sup_{\lambda \in W(T)} |\lambda| .$$

i.e.,

$$\omega(T) = \{ |\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| = 1 \} .$$

Remarque 4.3.1 *On remarque que pour tout $x \in H$, on a*

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \omega(T) \|x\|^2 .$$

Voici quelques propriétés de base souvent utilisées dans le calcul de rayon numérique et facile à démontrer.

Proposition 4.3.1 *Soient $T, S \in \mathcal{L}(H)$. On a*

1. $\omega(T+S) \leq \omega(T) + \omega(S)$.
2. $\omega(\alpha T) = |\alpha| \omega(T)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
3. $\omega(T^*) = \omega(T)$.
4. $\omega(U^* T U) = \omega(T)$ pour tout un opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$.

Remarque 4.3.2 *Le rayon numérique définit une norme sur $\mathcal{L}(H)$.*

Exemple 4.3.1 *Définissons l'opérateur T par la matrice*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{C}.$$

Alors,

$$W(T) = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{|a|}{2} \right\} .$$

Et

$$\omega(T) = \frac{|a|}{2}.$$

Le théorème suivant montre que $\omega(T)$ et $\|T\|$ sont deux normes équivalentes.

Théorème 4.3.1 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On a*

$$\omega(T) \leq \|T\| \leq 2\omega(T).$$

Preuve. Soit $x \in H$ tel que $\|x\| = 1$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |\langle Tx, x\rangle| &\leq \|Tx\| \|x\| \\ &\leq \|T\| \|x\|^2 \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

D'où $\omega(T) \leq \|T\|$.

D'autre part, par l'identité de polarisation, on obtient

$$\begin{gathered} 4|\langle Tx, y\rangle| = |\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\ +i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle| \\ \leq \omega(T)\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 + \|x+iy\|^2 + \|x-iy\|^2\right) \\ = 4\omega(T)\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \end{gathered}$$

En prenant $\|x\| = \|y\| = 1$, on trouve

$$4|\langle Tx, y\rangle| \leq 8\omega(T).$$

Ce qui implique que

$$\|T\| \leq 2\omega(T).$$

■

Théorème 4.3.2 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, si $\omega(T) = \|T\|$. Alors,*

$$r(T) = \|T\|.$$

Preuve. Soit $\omega(T) = \|T\| = 1$. Alors, il existe une suite $(x_n) \subset H$ tel que $\|x_n\| = 1$ et $\langle Tx_n, x_n\rangle \to \lambda \in W(T), |\lambda| = 1$.

Par l'inégalité

$$|\langle Tx_n, x_n\rangle| \leq \|Tx_n\| \leq 1,$$

on a $\|Tx_n\| \to 1$.

D'où

$$\|(T-\lambda I)\,x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - \langle Tx_n, \lambda x_n\rangle - \langle \lambda x_n, Tx_n\rangle + \|x_n\|^2 \to 0.$$

Donc $\lambda \in \sigma_{ap}(T)$ et $r(T) = 1$. ■

Théorème 4.3.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, si $\operatorname{Im}(T) \perp \operatorname{Im}(T^*)$. Alors,*

$$\omega(T) = \frac{1}{2}\|T\|.$$

Preuve. Soit $x \in H, \|x\| = 1$. On peut écrire $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in \ker(T)$ et $x_2 \in \overline{\operatorname{Im}(T^*)}$. On sait que $\overline{\operatorname{Im}(T^*)}^{\perp} = \ker(T)$.

D'où on a

$$\begin{aligned}\langle Tx, x\rangle &= \langle T(x_1 + x_2), x_1 + x_2\rangle \\ &= \langle Tx_2, x_1\rangle,\end{aligned}$$

puisque $Tx_1 = 0$ et $\langle Tx_2, x_2\rangle = \langle x_2, T^*x_2\rangle = 0$.

Donc

$$\begin{aligned}|\langle Tx, x\rangle| &\leq \|T\|\,\|x_1\|\,\|x_2\| \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\|T\|.\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\omega(T) \leq \frac{1}{2}\|T\| \leq \omega(T).$$

D'où

$$\omega(T) = \frac{1}{2}\|T\|.$$

■

4.4 Exercices

Exercice 4.4.1 *Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$. Soit*

$$W(T) = \left\{\frac{|\langle Tx, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|} : 0 \neq \|x\| \leq 1, 0 \neq \|y\| \leq 1\right\}.$$

1. Montrer que
$$\|T\| = \sup W(T).$$

2. Montrer que $\frac{1}{2}\|T\| \leq \omega(T) \leq \|T\|$.

3. Montrer que $\omega(T^2) \leq \omega^2(T)$.

4. Supposons que T est normal. Montrer que $\|T\| = \omega(T)$.

Exercice 4.4.2 *Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ tel que A est un opérateur positif.*

Montrer que si $AB = BA$ $(A \neq 0)$. Alors,
$$W(AB) \subset W(A)W(B).$$

Exercice 4.4.3 *On définit les opérateurs A, B par les matrices suivantes*
$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\omega(A)$ et $\omega(B)$.

Exercice 4.4.4 *Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$.*

1. Montrer que
$$\omega(AB) \leq 4\omega(A)\omega(B).$$

2. Si $AB = BA$. Montrer que
$$\omega(AB) \leq 2\omega(A)\omega(B).$$

Exercice 4.4.5 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur isométrie et $AB = BA$ $(B \in \mathcal{L}(H))$.*

Montrer que
$$\omega(AB) \leq \omega(B).$$

Exercice 4.4.6 *Sur l'espace* $H = L^2([0,1])$ *on considère l'opérateur de multiplication par* x *suivant:*

$$Af(x) = xf(x).$$

Déterminer l'image numérique de A.

Exercice 4.4.7 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur unitairement diagonalisable.*

Montrer que $W(A) = co\sigma_p(A)$.

Chapitre 5

Eléments de correction des exercices

5.1 Exercices du Chapitre 1

Correction de l'exercice 1.3.1

1. Soient $P, Q, R \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\varphi(P + \lambda Q, R) &= \int_0^1 (P + \lambda Q)(t) R'(t) \, dt \\
&= \int_0^1 P(t) R'(t) \, dt + \lambda \int_0^1 Q(t) R'(t) \, dt \\
&= \varphi(P, R) + \lambda \varphi(Q, R),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi(P, Q + \lambda R) &= \int_0^1 P(t) (Q + \lambda R)' \, dt \\
&= \int_0^1 P(t) Q'(t) \, dt + \lambda \int_0^1 P(t) R'(t) \, dt \\
&= \varphi(P, Q) + \lambda \varphi(P, R).
\end{aligned}$$

L'application φ est donc bien une forme bilinéaire sur E.

2. On calcule successivement

$$\begin{aligned}
\varphi(1,1) &= 0 \\
\varphi(1,x) &= \int_0^1 dt = 1 \\
\varphi\left(1,x^2\right) &= \int_0^1 2t dt = 1 \\
\varphi(x,1) &= \int_0^1 0 dt = 0 \\
\varphi(x,x) &= \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \\
\varphi\left(x,x^2\right) &= \int_0^1 2t^2 dt = \frac{2}{3} \\
\varphi\left(x^2,1\right) &= \int_0^1 t^2 0 dt = 0 \\
\varphi\left(x^2,x\right) &= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \\
\varphi\left(x^2,x^2\right) &= \int_0^1 2t^3 dt = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. La forme bilinéaire φ n'est ni symétrique, ni anti-symétrique puisque sa matrice représentative n'est ni symétrique, ni anti-symétrique.

Correction de l'exercice 1.3.2

L'application définit une forme bilinéaire symétrique sur E (clair). Pour $P \in E$ la quantité

$$\varphi(P,P) = 2P(1)P'(0),$$

n'est pas nécessairement positive (prendre par exemple $P(x) = 2 - x$) donc φ n'est pas un produit scalaire.

Correction de l'exercice 1.3.4

L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que,

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \|y\|, \forall x,y \in \mathbb{R}^n.$$

En particulier, pour $x = (1, 1, ..., 1)$ et $y = (|a_1|, |a_2|, ..., |a_n|)$, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (1)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'inégalité voulue s'en déduit.

Correction de l'exercice 1.3.5

Soient $x, y \in E$, par hypothèse $\varphi(x+y, x+y)$ et $\varphi(x+iy, x+iy)$ sont des réels. Comme φ est sesquilinéaire, on en déduit que $\varphi(x, y) + \varphi(y, x)$ est réel et $\varphi(y, x) - \varphi(x, y)$ est imaginaire pure.

Il en résulte facilement que

$$\overline{\varphi(x, y)} = \varphi(y, x).$$

Correction de l'exercice 1.3.6

1. La formule s'obtient par un calcul direct utilisant la bilinéarité de φ.

En effet pour tous $u, v \in E$, on a

$$\begin{aligned}
q(q(u)v - \varphi(u,v)u) &= \varphi(q(u)v - \varphi(u,v)u, q(u)v - \varphi(u,v)u) \\
&= q^2(u)\varphi(v,v) - q(u)\varphi(u,v)\varphi(v,u) \\
&\quad -\varphi(u,v)q(u)\varphi(u,v) + \varphi^2(u,v)\varphi(u,u) \\
&= q^2(u)q(v) - q(u)\varphi(u,v)\varphi(v,u) \\
&\quad -\varphi^2(u,v)q(u) + \varphi^2(u,v)q(u) \\
&= q^2(u)q(v) - q(u)\varphi(u,v)\varphi(v,u) \\
&= q(u)[q(u)q(v) - \varphi(u,v)\varphi(v,u)].
\end{aligned}$$

2. Si q est définie positive alors le membre de gauche de l'identité de Cauchy est positif ou nul et donc, pour tous $u, v \in E$,

$$q(u)[q(u)q(v) - \varphi(u,v)\varphi(v,u)] \geq 0.$$

Si u est nul, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est trivialement vérifiée.

Supposons u non nul. Alors, $q(u) > 0$ et l'on déduit encore que pour tout vecteur $v \in E$,

$$q(u)q(v) - \varphi(u,v)\varphi(v,u) \geq 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz est donc également vérifiée.

5.2 Exercices du Chapitre 2

Correction de l'exercice 2.6.3

Il est clair que l'opérateur T est linéaire.

D'autre part, pour tout $f \in L^2[0,1]$, on a

$$\begin{aligned} \|Tf\|^2 &= \int_0^1 x^2 |f(x)|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \|f\|^2 . \end{aligned}$$

Cela montre que l'opérateur T est continu sur $L^2[0,1]$ et que $\|T\| \leq 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par f_n la fonction caractéristique de l'intervalle $\left[1 - \frac{1}{n}, 1\right]$.

On a

$$\begin{aligned} \|Tf_n\|^2 &= \int_{1-\frac{1}{n}}^1 x^2 dx \\ &\geq \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 dx \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \|f_n\|^2 . \end{aligned}$$

Il en résulte que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\|Tf_n\|}{\|f_n\|} \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

On en déduit que $\|T\| = 1$.

Correction de l'exercice 2.6.4

L'inégalité triangulaire montre que, pour deux éléments $A, B \in \mathcal{L}(H)$, on a

$$\|A\| \leq \|A - B\| + \|B\| .$$

On en déduit alors l'inégalité

$$|\|A_n - B_m\|| \leq \|A_n - B_m\| .$$

Par conséquent, si (A_n) est une suite de Cauchy, il en sera de même de la suite $(\|A_n\|)$.

Correction de l'exercice 2.6.5

L'inégalité triangulaire permet d'écrire

$$\|Ax - A_n x_n\| \leq \|A\| \|x - x_n\| + \|x_n\| \|A - A_n\| .$$

Lorsque $n \to +\infty$, on trouve $\|x - x_n\| \to 0$ et $\|A - A_n\| \to 0$ car la suite (x_n), étant convergente, est bornée et par hypothèse $\|A - A_n\| \to 0$ $(n \to +\infty)$.

On en déduit alors

$$\|Ax - A_n x_n\| \to 0.$$

Correction de l'exercice 2.6.9

1. (i) La linéarité de T est évidente.

Soit $M = \sup\limits_{n\geq 1} |\lambda_n|$. Si $x = (x_n)_n \in l_2$, alors

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \sum_{n\geq 1} |\lambda_n x_n|^2 \\ &\leq M^2 \sum_{n\geq 1} |x_n|^2 \\ &= M^2 \|x\|^2 . \end{aligned}$$

D'où $Tx \in l_2$ et $\|Tx\| \leq M \|x\|$, ce qui montre que$T$ est continu et que $\|T\| \leq M$.

Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ la base hilbertienne canonique de l_2. Alors, pour tout $n \geq 1$,

$$\|Te_n\| = |\lambda_n| \leq \|T\| .$$

D'où $M \leq \|T\|$, puis $\|T\| = M$.

2. Soit $a = \inf\limits_{n\geq 1} |\lambda_n|$. On suppose $a > 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \sum_{n\geq 1} |\lambda_n x_n|^2 \\ &\geq a^2 \|x\|^2 . \end{aligned}$$

Donc $Tx = 0$ implique $x = 0$; T est injective.

Remarquons d'abord que pour tout n, $\lambda_n \neq 0$. Soit $y = (y_n)_n \in l_2$ et $x = \left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)_n$. Alors, pour tout n, on a

$$\left|\frac{y_n}{\lambda_n}\right|^2 \leq \frac{1}{a^2} |y_n|^2 ,$$

d'où $x \in l_2$ et $Tx = y$. Ceci montre que T est surjective et donc inversible et $T^{-1}y = x$ avec $y = (y_n)_n \in l_2$ et $x = \left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)_n$.

3. Supposons $\lambda_p = 0$ pour un entier p. On note e_p la suite dont le seul élément non nul est de rang p et vaut 1. Alors, $Te_p = 0$ et T n'est pas injective. Elle n'est pas non plus surjective, car il facile de voir que si $(x_n)_n \in \mathrm{Im}\,(T)$ alors $x_p = 0$, si bien que $e_p \notin \mathrm{Im}\,(T)$.

On a

$$\mathrm{Im}\,(T) \subseteq \{\ (x_n)_n \in l_2, x_p = 0\} \neq l_2.$$

Pour montrer que $\mathrm{Im}\,(T)$ n'est pas dense dans l_2, il suffit de montrer que $\{\ (x_n)_n \in l_2, x_p = 0\}$ est fermé dans l_2. Soit pour cela $f : l_2 \to \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par $f\ ((x_n)_n) = x_p$. Elle est continue, car

$$|f\ ((x_n)_n)| = |x_p| \leq \|(x_n)_n\|\,.$$

Donc

$$\{\ (x_n)_n \in l_2, x_p = 0\} = \ker(f)\,,$$

est fermé dans l_2.

Correction de l'exercice 2.6.10

Par l'absurde. S'il existe deux opérateurs linéaires bornés A et B tels que $[A, B] = I$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, [A^n, B] = nA^{n-1}.$$

En effet si, pour $n > 2$, on a

$$A^{n-1}B - BA^{n-1} = (n-1)\, A^{n-2}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} A^nB - BA^n &= A^{n-1}(AB - BA) + \left(A^{n-1}B - BA^{n-1}\right) \\ &= A^{n-1} + (n-1)\, A^{n-1} \\ &= nA^{n-1}. \end{aligned}$$

Or, ce résultat implique que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} n\left\|A^{n-1}\right\| &= \left\|A^{n-1}B - BA^{n-1}\right\| \\ &\leq 2\,\|A^n\|\,\|B\| \\ &\leq 2\left\|A^{n-1}\right\|\|A\|\,\|B\|\,, \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$n \leq 2 \|A\| \|B\| .$$

Ce qui est impossible.

Correction de l'exercice 2.6.11

Soit $x \in E$ et soit $y = (\lambda I - T)^{-1} x$. Puisque $\lambda y = x + Ty$, on a

$$|\lambda| \|y\| \leq \|x\| + \|T\| \|y\| .$$

Donc, si $|\lambda| > \|T\|$, il vient

$$\|y\| \leq \frac{\|x\|}{|\lambda| - \|T\|},$$

ce qui montre le résultat désiré.

Correction de l'exercice 2.6.12

(1) Soit $(f_n, Tf_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G(T)$ une suite convergente vers (f, g) dans $E \times F$. Alors, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n' = g$. Comme les deux convergences sont uniformes, $g = f'$ et donc $(f, g) = (f, Tf) \in G(T)$. Ce qui montre que $G(T)$ est fermé.

(2) Pour la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proposée, on a $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\left\|f_n'\right\|_\infty = n$. Si T est continu, on a

$$\|T\| \geq \frac{\left\|f_n'\right\|_\infty}{\|f_n\|_\infty} = n.$$

Ceci montre que T ne peut pas avoir une valeur finie donc que l'opérateur T n'est pas continu.

(3) Le graphe de T est fermé et T n'est pas continu. Le théorème du graphe fermé est donc en défaut. Puisque on sait que F est complet pour la norme $\|.\|_\infty$, on conclut que E n'est pas complet pour cette norme.

Correction de l'exercice 2.6.13

(1) La linéarité de T est évidente. Pour $x, x_0 \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |Tf(x) - Tf(x_0)| &= \left| \int_0^{x_0} [K(x,t) - K(x_0,t)] f(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} K(x,t) f(t)\,dt \right| \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^{x_0} |K(x,t) - K(x_0,t)|\,dt + M \|f\|_\infty |x - x_0| . \end{aligned}$$

D'où $|Tf(x) - Tf(x_0)| \to 0$ quand $x \to x_0$ et donc $Tf \in E$.

D'autre part, on a

$$|Tf(x)| \leq Mx \|f\|_{\infty} \tag{5.2.1}$$

D'où $\|Tf\| \leq M \|f\|_{\infty}$, et $T \in \mathcal{L}(E)$ avec $\|T\| \leq M$.

(2) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

$$|T^n f(x)| \leq \frac{M^n}{n!} x^n \|f\|_{\infty}.$$

C'est vrai pour $n = 1$, par (5.2.1). Supposons la formule vraie pour n.

On a

$$\begin{aligned}
\left|T^{n+1} f(x)\right| &\leq \left|\int_0^x K(x,t) T^n f(t)\, dt\right| \\
&\leq M \int_0^x |T^n f(t)|\, dt \\
&\leq \frac{M^{n+1}}{n!} \|f\|_{\infty} \int_0^x t^n dt.
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
\left|T^{n+1} f(x)\right| &\leq \frac{M^{n+1}}{n!} \frac{x^{n+1}}{n+1} \|f\|_{\infty} \\
&= \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} \|f\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Donc pour tout $n \geq 1$, on a $|T^n f(x)| \leq \frac{M^n}{n!} x^n \|f\|_{\infty}$, et ainsi $\|T^n\| \leq \frac{M^n}{n!}$.

(3) D'après (2), on a $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{M}{(n!)^{\frac{1}{n}}}$. Montrons alors que nous avons $u_n = (n!)^{\frac{1}{n}} \to +\infty$. En effet,

$$e^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} \geq \frac{n^n}{n!},$$

d'où $n! \geq \frac{n^n}{e^n}$ et $u_n \geq \frac{n}{e}$. Par conséquent, le rayon spectral $r(T)$ de T, dont la valeur est donnée par

$$\lim_{n \to +\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M \lim_{n \to +\infty} u_n^{-1},$$

est nul et $\sigma(T) = \{0\}$.

5.3 Exercices du Chapitre 3

Correction de l'exercice 3.5.3

Pour φ et ψ deux fonctions de $L^2([0,1])$, on a

$$\langle T\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, T^*\psi\rangle ,$$

donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(t)\, T^*(\psi(t))\, dt &= \int_0^1 T\varphi(x)\, \psi(x)\, dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 K(x,t)\, \varphi(t)\, dt \right\} \psi(x)\, dx.\end{aligned}$$

En vertu du théorème de Fubini relatif aux intégrales doubles, on établit que

$$\begin{aligned}\langle T\varphi, \psi\rangle &= \int_0^1 \int_0^1 [K(x,t)\, \psi(x)\, dx]\, \varphi(t)\, dt \\ &= \int_0^1 \varphi(t) \left[\int_0^1 K(x,t)\, \psi(x)\, dx \right] dt \\ &= \int_0^1 \varphi(t)\, T^*\psi(t)\, dt.\end{aligned}$$

Il en résulte que l'adjoint T^* est défini pour tout x dans $[0,1]$ par:

$$T^*\psi(x) = \int_0^1 K(t,x)\, \psi(t)\, dt.$$

Alors, L'opérateur T est auto- adjoint si et seulement si

$$K(x,t) = K(t,x), \quad \forall x, t \in [0,1].$$

Correction de l'exercice 3.5.3

On pose $S = (A + iI)(A - iI)^{-1}$, on a

$$\begin{aligned} S^* &= \left[(A + iI)(A - iI)^{-1}\right]^* \\ &= \left[(A - iI)^{-1}\right]^* (A + iI)^* \\ &= (A^* + iI)^{-1}(A^* - iI). \end{aligned}$$

Comme S est isométrie, alors

$$\begin{aligned} S^*S &= I \\ &\Rightarrow (A^* + iI)^{-1}(A^* - iI)(A + iI)(A - iI)^{-1} = I \\ &\Rightarrow (A^* - iI)(A + iI) = (A^* + iI)(A - iI) \\ &\Rightarrow A^*A + iA^* - iA + I = A^*A - iA^* + iA + I \\ &\Rightarrow iA^* - iA = -iA^* + iA \\ &\Rightarrow A^* = A. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.5.5

1. Pour tous $\varphi, \psi \in H$, on a

$$\begin{aligned} \langle B\varphi, \varphi \rangle &= \langle (I - A)\varphi, \varphi \rangle \\ &= \langle \varphi, \varphi \rangle - \langle A\varphi, \varphi \rangle \\ &\geq \|\varphi\|^2 - \|A\varphi\| \|\varphi\| \\ &\geq \|\varphi\|^2 - \|A\| \|\varphi\|^2 \\ &= (1 - \|A\|) \|\varphi\|^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

2. D'après le théorème de Cauchy-Schawrz généralisé, on écrit

$$\begin{aligned} |\langle B\varphi, \psi \rangle|^2 &\leq \langle B\varphi, \varphi \rangle \langle B\psi, \psi \rangle \\ &= (\langle \varphi, \varphi \rangle - \langle A\varphi, \varphi \rangle)(\langle \psi, \psi \rangle - \langle A\psi, \psi \rangle) \\ &\leq \langle \varphi, \varphi \rangle \langle \psi, \psi \rangle \\ &= \|\varphi\|^2 \|\psi\|^2 . \end{aligned}$$

Prenons le cas particulier où $\psi = B\varphi$, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle B\varphi, \psi\rangle|^2 &= |\langle B\varphi, B\varphi\rangle|^2 \\ &= \|B\varphi\|^4 \\ &\leq \|\varphi\|^2 \|B\varphi\|^2, \end{aligned}$$

ce qui donne après simplification

$$\|B\varphi\| \leq \|\varphi\|,$$

ou encore

$$\|B\| \leq 1.$$

Correction de l'exercice 3.5.6

1. Soit $x \in H$. On a

$$|\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|x\|^2,$$

l'égalité entre ces trois termes ayant lieu si et seulement si, d'une part Tx et x sont colinéaires et d'autre part, $\|Tx\| \|x\|$ c'est-à-dire si et seulement si $Tx = \lambda x$ avec $|\lambda| = 1$. De plus,

$$\langle Tx, x\rangle = \|x\|^2 \Rightarrow \langle Tx, x\rangle \geq 0,$$

et donc $\lambda = 1$, c'est-à-dire finalement $Tx = x$. Or $\|T^*\| = \|T\| \leq 1$ et donc, pour tout $x \in H$

$$\begin{aligned} Tx &= x \\ &\Leftrightarrow \langle Tx, x\rangle = \|x\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x, T^*x\rangle = \|x\|^2 \\ &\Leftrightarrow T^*x = x. \end{aligned}$$

2. Vérifions tout d'abord que

$$(\mathrm{Im}\,(I-T))^{\perp} = \ker\,(I-T).$$

Soit $S = I - T$. Pour tout $x \in H$,

$$\begin{array}{rcl} x & \in & (\operatorname{Im} S)^{\perp} \\ & \Leftrightarrow & \forall y \in H, \langle x, Sy \rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall y \in H, \langle S^{*}x, y \rangle = 0 \\ & \Leftrightarrow & S^{*}x = 0. \end{array}$$

On a donc

$$(\operatorname{Im}(I-T))^{\perp} = \ker(I-T)^{*} = \ker(I-T^{*}) = \ker(I-T),$$

et donc

$$(\operatorname{Im}(I-T))^{\perp} = \ker(I-T).$$

3. Si $x = Tx$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_n x = x = Px.$$

Si $x \in \operatorname{Im}(I-T)$ alors $x = y - Ty$ avec $y \in H$ et

$$T_n x = \frac{y - T^{n+1}y}{n+1}.$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T^n y\| \leq \|T\|^n \|y\| \leq \|y\|,$$

et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n x = 0 = Px$ puisque $\operatorname{Im}(I-T) \subset (\ker(I-T))^{\perp}$. Enfin, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|T_n\| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \|T\|^k.$$

La suite $(T_n)_n$ est donc une suite d'opérateurs linéaires bornée qui converge simplement vers 0 sur $\operatorname{Im}(I-T)$. D'où, elle converge aussi simplement vers 0 sur l'adhérence de $\operatorname{Im}(I-T)$. Donc finalement, $(T_n)_n$ converge simplement vers P sur H.

Correction de l'exercice 3.5.7

1. On suppose que T est auto-adjoint. On a $\|T^2\| = \|T\|^2$ et par récurrence sur n l'on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation $\|T^n\| = \|T\|^n$.

2. On a

$$\begin{array}{rcl} r(T) & = & \lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \\ & = & \lim\limits_{n \to \infty} \|T\|^{n\frac{1}{n}} \\ & = & \|T\|. \end{array}$$

3. On revient au cas normal, l'élément TT^* est auto-adjoint et il s'ensuit que l'on a,

$$\begin{aligned} r(T) &= \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\|T^n (T^n)^*\|^{\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\|(TT^*)^n\|^{\frac{1}{n}}} \\ &= \sqrt{r(TT^*)} \\ &= \sqrt{\|TT^*\|} \\ &= \|T\| . \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 3.5.8

1. On a

$$TT^* = T^*T = A^2 + B^2.$$

Si T est inversible d'où T^* est aussi inversible, donc T^*T est inversible c-à-d $A^2 + B^2$ est inversible.

2. Si $A^2 + B^2$ est inversible, ce qui implique que

$$\left[\left(A^2 + B^2\right)^{-1} T^*\right] T = I \quad \text{et } T \left[T^* \left(A^2 + B^2\right)^{-1}\right] = I.$$

D'où

$$T^{-1} = T^* \left(A^2 + B^2\right)^{-1}.$$

Correction de l'exercice 3.5.9

Si A est compact et inversible, A^{-1} ne peut pas être borné sinon, AA^{-1} serait compact, ce qui exige que E soit de dimension finie.

Correction de l'exercice 3.5.10

1. Soit (x_n) une suite bornée de H. Puisque A^*A est compact, on peut extraire de (x_n) une sous-suite $\left(x_n'\right)$ telle que $\left(A^*Ax_n'\right)$ est convergente, on désigne par y sa limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \left\|A^*Ax_n' - y\right\| = 0.$$

On peut extraire de $\left(x_n^{'}\right)$ une sous-suite $\left(x_n^{''}\right)$ faiblement convergente, on désigne par x la limite faible de $\left(x_n^{''}\right)$. On a

$$\begin{aligned}\left\|Ax_n^{''}\right\|^2 &= \left\langle Ax_n^{''}, Ax_n^{''}\right\rangle \\ &= \left\langle A^*Ax_n^{''}, x_n^{''}\right\rangle.\end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned}\left|\left\|Ax_n^{''}\right\|^2 - \langle y, x\rangle\right| &\leq \left|\left\langle A^*Ax_n^{''}, x_n^{''}\right\rangle - \left\langle y, x_n^{''}\right\rangle\right| + \left|\left\langle y, x_n^{''}\right\rangle - \langle y, x\rangle\right| \\ &\leq \left\|A^*Ax_n^{''} - y\right\| \left\|x_n^{''}\right\| + \left|\left\langle y, x_n^{''}\right\rangle - \langle y, x\rangle\right|.\end{aligned}$$

Comme $\left(x_n^{''}\right)$ est bornée et $A^*Ax_n^{''}$ converge vers y, le premier terme du second membre tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Il en est de même du second terme car $\left(x_n^{''}\right)$ converge faiblement vers x. On a donc montré que la suite $\left(Ax_n^{''}\right)$ est convergente et par suite A est un opérateur compact.

2. Si maintenant A est compact, il en sera de même de AA^*, car le produit d'un opérateur compact par un opérateur borné est compact; (l'étape 1) montre alors que A^* est compact. On montre de même que si A^* est compact, A l'est aussi.

Correction de l'exercice 3.5.11

Soient S et T les opérateurs définis sur l_2 , respectivement, par:

$$Sx_n = x_{n-1} \text{ et } Tx_n = \frac{x_n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

On a $A = TS$, l'opérateur T étant un opérateur compact et S un opérateur borné (c'est une isométrie), l'opérateur A est nécessairement compact.

Si λ est une valeur propre de A, l'équation $Ax = \lambda x$ où $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_2$ doit avoir une solution non nulle; or cette équation s'écrit:

$$\begin{aligned}Ax_1 &= \lambda x_1 = 0, \\ Ax_n &= \lambda x_n = \frac{x_{n-1}}{n-1}, n \in \mathbb{N}^*,\end{aligned}$$

ce qui implique, en distinguant les cas $\lambda = 0$ et $\lambda \neq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 0$.

Ce résultat montre que, contrairement à ce qui se passe dans les espaces de Hilbert de dimension finie, un opérateur compact défini dans un espace de Hilbert de dimension infinie n'a pas nécessairement de valeurs propres.

Correction de l'exercice 3.5.12

(1) Soit $T_0 : \ker(T)^{\perp} \to H$ défini par $T_0 x = Tx$ si $x \in \ker(T)^{\perp}$. Puisque $\|T_0 x\| = \|x\|$, T_0 est injectif à image fermée. Or, $\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Im}(T_0)$, l'image de T est donc fermée.

(2) $(a) \Leftrightarrow (b)$. Soit P la projection orthogonale sur $\ker(T)^{\perp}$ suivant la décomposition $H = \ker(T) \oplus \ker(T)^{\perp}$. Si $x \in \ker(T)^{\perp}$, alors $Px = x$ et on a

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle Px, x\rangle .$$

Si $x \in \ker(T)$, alors $Px = 0$ et on a

$$\langle T^*Tx, x\rangle = 0 = \langle Px, x\rangle .$$

Donc pour tout $x \in H$,

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Px, x\rangle ,$$

soit encore

$$\langle (T^*T - P)\, x, x\rangle = 0.$$

Ce qui entraîne que $T^*T = P$ et que T^*T est une projection.

Pour la réciproque, on remarque d'abord que

$$\ker(A^*A) = \ker(A) \text{ pour tout } A \in \mathcal{L}(H).$$

Supposons que T^*T est une projection orthogonale. Alors, $\mathrm{Im}(T^*T)$ est fermée et de plus

$$Im\,(T^*T) = \ker(T^*T)^{\perp} = \ker(T)^{\perp} .$$

Si donc $x \in \ker(T)^{\perp} = Im\,(T^*T)$, on a $T^*Tx = x$ et $\langle T^*Tx, x\rangle = \langle x, x\rangle$ ou encore $\|Tx\| = \|x\|$, ce qui montre que T est une isométrie partielle.

$(b) \Leftrightarrow (d)$. Si $TT^*T = T$, en multipliant par T^* à gauche, on obtient (d).

Réciproquement, supposons que $(T^*T)^2 = T^*T$ et montrons alors que

$$S = TT^*T - T = 0.$$

En effet, on vérifie facilement que $S^*S = 0$ et donc

$$\|S\|^2 = \|S^*S\| = 0.$$

Ceci implique $S = 0$ et $TT^*T = T$.

$(c) \Leftrightarrow (b)$. Si on remplace T par T^*, dans $(b) \Leftrightarrow (d)$, on obtient que

$$\begin{aligned} (TT^*)^2 &= TT^* \\ &\Leftrightarrow T^*TT^* = T^* \\ &\Leftrightarrow TT^*T = T. \end{aligned}$$

5.4 Exercices du Chapitre 4

Correction de l'exercice 4.4.1

1. Pour tous $x, y \in H \backslash \{0\}$, on a

$$\frac{|\langle Tx, y\rangle|}{\|x\| \, \|y\|} \leq \frac{\|Tx\| \, \|y\|}{\|x\| \, \|y\|} \leq \|T\| .$$

D'où

$$\sup W(T) \leq \|T\| .$$

D'autre part, en faisant $y = Tx$, $x \neq 0$, on voit que

$$\frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{\|x\| \, \|Tx\|} = \frac{\|Tx\|^2}{\|x\| \, \|Tx\|} = \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Cela donne

$$\|T\| \leq \sup W(T) .$$

Et finalement

$$\|T\| \leq \sup W(T) .$$

2. Nous avons évidemment $\omega(T) \leq \|T\|$. Montrons l'autre inégalité. Soit $x, y \in H$ avec $\|x\| = \|y\| = 1$. Alors,

$$2\left[\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle\right] = \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle ,$$

et

$$\begin{aligned} 2\left|\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle\right| &\leq \omega(T)\left(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2\right) \\ &= 2\omega(T)\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \\ &= 4\omega(T) . \end{aligned}$$

En prenant $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$ et en remplacant T par λT avec $|\lambda| = 1$, on obtient

$$\left| \|Tx\| + \|Tx\|^{-1} \lambda^2 \left\langle T^2 x, x \right\rangle \right| \leq 2\omega(T).$$

Si $\langle T^2 x, x\rangle = |\langle T^2 x, x\rangle| e^{i\theta}$, on choisit alors $\lambda = e^{-i\frac{\theta}{2}}$ ce qui donne après multiplication par $\|Tx\|$,

$$\|x\| = 1 \Rightarrow \|Tx\|^2 + \left|\left\langle T^2 x, x \right\rangle\right| \leq 2\omega(T) \|Tx\|. \tag{5.4.1}$$

Ceci implique en particulier que

$$\|x\| = 1 \Rightarrow \|Tx\| \leq 2\omega(T).$$

D'où l'inégalité $\|T\| \leq 2\omega(T)$, comme demandé.

3. Les inégalités (5.4.1) et $2ab \leq a^2 + b^2$ si $a, b \geq 0$ nous donnent, si$\|x\| = 1$:

$$\begin{aligned} \left|\left\langle T^2 x, x\right\rangle\right| &\leq 2\omega(T) \|Tx\| - \|Tx\|^2 \\ &\leq \omega^2(T). \end{aligned}$$

D'où en passant au sup sur $\|x\| = 1$:

$$\omega\left(T^2\right) \leq \omega^2(T).$$

4. Puisque T est normal, on a pour $n \geq 1$, en itérant (2)

$$\begin{aligned} \|T\|^{2^n} &= \left(\|T^* T\|^{2^n}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\|(T^* T)^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\|(T^*)^{2^n} T^{2^n}\right\|^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\|T^{2^n}\right\| \\ &\leq 2\omega\left(T^{2^n}\right) \\ &\leq \omega^{2^n}(T). \end{aligned}$$

D'où,

$$\|T\| \leq 2^{\frac{1}{2^n}} \omega(T).$$

En faisant tendre n vers l'infini,, on obtient

$$\|T\| \leq \omega(T).$$

Correction de l'exercice 4.4.2

Soit $\lambda \in W(AB)$. Alors, il exsite $x \in H$, $\|x\| = 1$, tel que $\lambda = \langle ABx, x\rangle$.

On a

$$\begin{aligned} \langle ABx, x\rangle &= \langle BAx, x\rangle \\ &= \langle ABx, x\rangle \\ &= \left\langle A^{\frac{1}{2}}Bx, A^{\frac{1}{2}}x\right\rangle \\ &= \left\langle BA^{\frac{1}{2}}x, A^{\frac{1}{2}}x\right\rangle. \end{aligned}$$

D'ou

$$\langle ABx, x\rangle = \langle By, y\rangle \langle Ax, x\rangle,$$

tel que

$$y = \frac{A^{\frac{1}{2}}x}{\left\|A^{\frac{1}{2}}x\right\|},\ A^{\frac{1}{2}}x \neq 0.$$

Ceci implique que $\lambda \in W(A)W(B)$.

Correction de l'exercice 4.4.3

Après les calculs, on trouve

$$\omega(A) = \sqrt{3} \text{ et } \omega(B) = 7.$$

Correction de l'exercice 4.4.4

1. On a pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$,

$$\omega(T) \leq \|T\| \leq 2\omega(T).$$

D'où

$$\begin{aligned} \omega(AB) &\leq \|AB\| \\ &\leq \|A\|\,\|B\| \\ &\leq 4\omega(A)\,\omega(B). \end{aligned}$$

2. On pose que $\omega(A) = \omega(B) = 1$ et nous montrons $\omega(AB) \leq 2$.

On a

$$\begin{aligned}
\omega(AB) &= \omega\left(\frac{1}{4}\left[(A+B)^2-(A-B)^2\right]\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\omega\left(\left[(A+B)^2+\omega(A-B)^2\right]\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\omega^2\left(\left[(A+B)+\omega^2(A-B)\right]\right) \\
&\leq \frac{1}{4}\left[(\omega(A)+\omega(B))^2+(\omega(A)+\omega(B))^2\right] \\
&= 2.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4.4.5

Il est clair que A est normal puisque il est auto-adjoint, et comme $\sigma(A)=[0,1]$, alors

$$m=\inf_{\|f\|=1}|\langle Af,f\rangle|=0\in W(A),$$

et

$$M=\sup_{\|f\|=1}|\langle Af,f\rangle|=1\in W(A).$$

D'où $W(A)=[0,1]$.

Correction de l'exercice 4.4.6

Si A est un opérateur unitairement diagonalisable, alors il existe une base orthonormale $\{e_n\}$ de H et une suite (λ_n) des nombres complexes tels que

$$Ae_n=\lambda e_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Soit $x\in H$ tel que $\|x\|=1$, on a

$$\begin{aligned}
\langle Ax,x\rangle &= \left\langle A\sum_{i\geq 0}\langle x,e_i\rangle e_i,\sum_{j\geq 0}\langle x,e_j\rangle e_j\right\rangle \\
&= \sum_{n\geq 0}\lambda_n|\langle x,e_n\rangle|^2.
\end{aligned}$$

On pose $|\langle x,e_n\rangle|^2=a_n$, d'où

$$W(A)=\left\{\sum_{n\geq 0}\lambda_n a_n, a_n\geq 0, \sum_{n\geq 0}a_n=1\right\}.$$

Donc $W(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des valeurs propres de A, i.e.

$$W(A)=co\sigma_p(A).$$

Bibliographie

[1] M. Akkouchi, Remarks on the spectrum of bounded and normal operators on Hilbert space, An. St. Univ. Ovidius Constanta. Vol. 16(2), 2008, 7-14.

[2] R. Bhatia, Matrix Analysis, GTM169, Springer-Verlag, New York, 1997. .

[3] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.

[4] S.K. Berberian, Note on a theorem of Fuglede and Putnam. Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 175-182.

[5] S.K. Berberian, Extensions of a theorem of Fuglede and Putnam. Proc. Amer. Math. Soc.71/1 (1978), 113-114.

[6] H. Chebli. Analyse Hilbertienne, Centre publication universitaire, Tunis, 2001.

[7] J.B. Conway, A Course in Functional Analysis, (1985) New York, Spring-Verlag.

[8] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, Part II, Wiley, New York, 1971.

[9] N. Dunford and J. Schwartz, Linear Operators, Part III, Wiley, New York, 1971.

[10] C.K. Fong, S.K. Tsui, A note on positive operators, J. Operator Theory, 5/1, (1981), 73-76.

[11] B. Fuglede, A commutativity theorem for normal operators. Proc. Nati. Acad. Sci., 36 (1950) 35-40.

[12] T. Furuta, M. Horie, A Remark on a Class of Operators, Proc. Japan., 43(1967), 607-609.

[13] M. Guesba. Traitement sur les opérateurs normaux et les opérateurs compacts, Thése de doctorat, université Mouhammed Boudiaf M'sila 2017.

[14] I. Gohberg, S. Goldberg, M.A. Kaashoek, Basic of Classes of Linear Operators, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[15] I. Gohberg, M. G.Krein, Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, American Mathematical Society, providence, 1969.

[16] S. Goldberg, Unbounded linear operators, McGraw-Hill, 1966.

[17] K.E. Gustafson, D.K.M. Rao, Numerical Range, Springer, New York, 1997.

[18] P.R. Halmos, A Hilbert space problem book. Second edition, Springer-verlag, New York, 1982.

[19] T. Kato, Perturbation theory for linear operator, Springer, 1980 (2nd edition).

[20] A. Kolmogrov, Fomine S. Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir.1977.

[21] S. Mecheri, On the Normality of Operators, Revista Colombiana de Matemàticas, Volume 39 (2005), 1-9.

[22] M.H. Mortad, On the Normality of the Sum and Two Normal Operators, Complex Anal. Oper. Theory (2012) 6:105-112.

[23] C.R. Putnam, On normal operators in Hilbert space, Amer. J. Math., 73 (1951), 357-362.

[24] M. Rajabalipour, On normality of operators, Indiana Univ. Math. J. 23 (1974), 623-630.

[25] V. Rakocevic, On class of operators, Mat. Vesnik. 37 (1989), 423-426.

[26] W. Rudin, Real and Complex analysis. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987.

[27] W. Rudin, Functional Analysis, Tata McGraw-Hill Publishing Company Ltd, New Delhi, 1974.

[28] M. Sdkane, A note on normal matrices., J. Comput. Appl. Math. 136 (2001), 185-187..

[29] J. Yang, H. Hong-Ke Du, A note on compact normal operators, J. Comput. Appl. Math. 151 (2003), 229-233.

[30] K. Zhu, Operator theory in functionspaces. Mongraphs and Text-books in Pure and Applied Mathematics, 139. Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

[31] X. Zhan, Matrix Inequalitis, LMN 1790, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

Abstract

This work contains the official program for the subject " Theory of operators and spectral " intended mainly for first year master's mathematics students. Additionally, it is useful for mathematics doctoral students. To this end, we have illustrated the text with various examples each time we have introduced a new notion or shown a theorem.

Key words: Linear operator, bounded operator, Hilbert space, spectrum, numerical radius

ملخص

تحتوي هذه المطبوعة على البرنامج الرسمي لموضوع "نظرية المؤثرات والأطياف"

مخصص بشكل أساسي لطلاب السنة الأولى ماستر رياضيات.

زيادة على ذلك، هي مفيدة لطلاب الدكتوراه في الرياضيات ولهذا الغرض، قمنا بإعطاء أمثلة متنوعة في كل مرة نقدم فيها فكرة جديدة.

الكلمات المفتاحية: مؤثر خطي، مؤثر محدود، فضاء هيلبرت، طيف، نصف القطرالعددي