Université Chahid HAMMA Lakhdar – El Oued-

Faculté des Sciences de la Nature et de la Vie

Département d'Agronomie

Polycopie

Biostatistiques descriptives

Cours & Exercices

Dr. HADDAD Azzeddine

Date de production - Mai 2024

Contenu de la matière

1. **Statistiques et probabilités**
2. **Rappels mathématiques**
3. **Eléments de calcul des probabilités**
4. **Probabilité conditionnelle ; Indépendance et théorème de Bayes.**
5. **Variables aléatoires**
6. **Exemples de distributions**
7. **Statistiques descriptives**
8. **Etude de la variable aléatoire moyenne expérimentale**
9. **Estimation – intervalle de confiance.**
10. **Les tests d'hypothèses. Principes**
11. **Quelques tests usuels**
12. **Tests concernant des variables qualitatives**
13. **Liaison entre deux variables continues : notion de corrélation**
14. **A propos des tests d'hypothèses**
15. **Analyse des durées de survie ou Analyse des délais de survenue d'un évènement.**

Mode d'évaluation : (continu et examen).

7/ Statistiques descriptives

Séries statistiques

1°) Définition

La statistique étudie certaines caractéristiques : **caractères** ou **variables** d'un ensemble fini appelé **population**. Les éléments de cette population étudiée sont appelés **individus**.

2°) Type de variables

2.1°) Définition

Une variable peut être :

- **Quantitative** : numérique et fait l'objet de calcul (âge, taille, poids, notes, nombres d'heures etc ...)
- **Qualitative** : c'est le contraire de quantitative, mais la variable peut très bien être numérique.
- **Discrète** : si la variable ne prend qu'un nombre fini de valeurs (ces valeurs sont appelées modalités et notées x_i).
- **Continue** : si la variable prend ses valeurs dans un intervalle (classe)

2.2°) Exemple

Supposons que l'on veut faire une étude statistique sur les 50 notes attribuées par un jury à un examen. On dispose pour cette étude de la liste des notes obtenues :

2	14	10	16	20	19	7	5	13	14
6	9	16	13	12	3	7	8	18	12
4	8	15	10	8	11	13	9	9	13
5	8	14	5	11	12	2	1	7	1
6	12	3	11	19	17	18	3	0	4

On peut regrouper ces notes par ordre croissant :

0,1,1,2,2,3,3,3 ..., et construire le tableau suivant : (dans ce cas la distribution est discrète)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2	2	3	2	3	2	3	4	3	2	3	4	4	3	1	2	1	2	2	1

Ou bien regrouper ces notes par intervalle (classe) :

(Dans ce cas la distribution est continue)

Exemple de regroupement par classe

[0 ; 5[	10
[5 ; 8[	8
[8 ; 12[	12

[12 ; 15[	11
[15 ; 20[	9
	50

3°) Effectif

L'**effectif** d'une **classe** ou d'une modalité est le nombre d'individu de cette classe ou de cette modalité. Généralement on note n_i est l'effectif de la classe n° i (ou de la modalité x_i).

L'**effectif total** est la somme des effectifs de toutes les classes.

On le note souvent N, on a alors : N = $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 50$. En utilisant la notation sigma :

$$N = \sum_{i=1}^{5} n_i$$

4°)Fréquence

4.1°) Définition

La **fréquence** f_i de la classes i ou de la modalité x_i est le rapport $\frac{f_i}{N}$, la fréquence d'une classe est un nombre de l'intervalle [0 ;1]

L'**effectif cumulé** d'une modalité est la somme des effectifs des modalités qui lui sont inférieures ou égales

La **fréquence cumulée** d'une modalité est la somme des fréquences des modalités qui lui sont inférieures ou égales

4.2°) Exemples

Dans le cas "variable discrète" on obtient :

Notes	Effectifs	Effectif cumulé
0	1	1
1	2	3
2	2	5
3	3	8
4	2	10
5	3	13
6	2	15
7	3	18
8	4	22
9	3	25
10	2	27
11	3	30
12	4	34
13	4	38

14	3	41
15	1	42
16	2	44
17	1	45
18	2	47
19	2	49
20	1	50

- 3 personnes ont une note inférieure ou égale à 1 .
- 15 personnes ont une note inférieure ou égale à 6 .
- 47 personnes ont une note inférieure ou égale à 18 .

etc...

Dans le cas "variable continue" on obtient :

Notes	Effectifs	Effectifs
[0 ; 5[	10	10
[5 ; 8[	8	18
[8 ; 12[	12	30
[12 ; 15[	11	41
[15 ; 20[	9	50
	50	

5°) Etendue d'une série statistique

5.1°) Définition

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande modalité du caractère et la plus petite modalité.

5.2°) Exemple

Notes	Effectifs	Effectif cumulé
0	1	1
1	2	3
2	2	5
3	3	8
4	2	10
5	3	13
6	2	15
7	3	18
8	4	22
9	3	25
10	2	27
11	3	30
12	4	34
13	4	38
14	3	41
15	1	42
16	2	44
17	1	45
18	2	47
19	2	49

20	1	50

Notes	Effectifs	Effectifs cumulés
[0 ; 5[	10	10
[5 ; 8[	8	18
[8 ; 12[	12	30
[12 ; 15[	11	41
[15 ; 20[	9	50
	50	

20 - 0 = 20,

20 est l'étendue de ces deux séries (continue et discrète)

6°) Mode d'une série statistique

6.1°) Définition

Dans le cas d'une série statistique continue, la classe modale est la classe du plus grand effectif :

6.2°) Exemple

Notes	Effectifs	Effectifs cumulés
[0 ; 5[	10	10
[5 ; 8[	8	18
[8 ; 12[	12	30
[12 ; 15[	11	41
[15 ; 20[	9	50
	50	

Sur cet exemple, la classe modale est donc

Dans le cas d'une série statistique discrète, le mode est la valeur de plus grand effectif :

Notes	Effectifs	Effectif cumulé
0	1	1
1	2	3
2	2	5
3	3	8
4	2	10
5	3	13
6	2	15
7	3	18
8	4	22
9	3	25
10	2	27
11	3	30
12	4	34
13	4	38
14	3	41
15	1	42
16	2	44
17	1	45
18	2	47
19	2	49
20	1	50

7°) Moyenne

7.1°) Définition

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \cdots + n_N x_N}{n_1 n_2 \ldots \ldots + n_N}$$

- n_1, n_2, n_3, ...,n_N sont les **effectifs** correspondants aux modalités x_1, x_2, x_3, ...,x_N., si la série est **discrète** ,

ou les **centres** de chaque classe, si la série est **continue**.

7.2°) Exemple

Série discrète

Modalité	Effectifs	Produit
10	2	
14	1	
15	4	
12	3	
11	1	
12	0	
Total		
	Moyenne	

Série continue

Notes	Effectifs	Centre	Produit
[0 ; 5[	10		
[5 ; 8[	8		
[8 ; 12[	12		
[12 ; 15[	11		
[15 ; 20[	9		
	50	Total	
		Moyenne	

7.3°) Propriétés de la moyenne

- Considérons une série statistique **S** de modalités x_1, x_2, x_3, ...,x_N affectées des effectifs n_1, n_2, n_3, ... ,n_N de moyenne $\bar{x}$,
  et la série statistique **S'** de modalités y_1, y_2, y_3, ... ,y_N affectées des même effectifs n_1, ... ,n_N telle que pour tout i appartenant à {1 ; 2 ; ... ; N } :
  - $y_i = ax_i + b$.

Alors: **la moyenne de la série statistique S'** est telle que :

$\bar{y} = a\,\bar{x} + b$.

Soient **S_1** et **S_2** deux séries statistiques d'effectifs totaux respectifs N_1 et N_2 et de moyennes respectives $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$.
Alors la moyenne de la série S regroupant les deux séries **S_1** et **S_2** est :
$\bar{x} = [N_1 \bar{x}_1 + N_2\, \bar{x}_2]/(N_1 + N_2)$. (Cette propriété se généralise).

8°) Variance et écart type

8.1°) Définition

8.1.a°)

Pour calculer la variance d'une série statistique on utilise la formule

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{N} n_i} = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + n_N(x_N - \bar{x})^2}{n_{1+}n_2 + \cdots + n_N}$$

Pour calculer la variance, il faut calculer d'abord la moyenne.

8.1.b°) La variance peut être calculée aussi en utilisant la formule

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i {x_i}^2}{\sum_{i=1}^{N} n_i} - \bar{x}^2$$

8.2°) Ecart-type

Ecart type d'un échantillon

$$\boldsymbol{\sigma_{\text{échantillon}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|^2}{n-1}}$$

Ecart-type : est une mesure de la dispersion des valeurs d'un échantillon statistique ou d'une distribution de probabilité.

Il est défini comme la racine carrée de la variance ou comme la moyenne quadratique des écarts par rapport à la moyenne. Il se note avec la lettre σ "sigma".

Ecart type d'une population

$$\boldsymbol{\sigma_{\text{population}}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \mu|^2}{n}}$$

1- On calcule la moyenne arithmétique de la série
2- On calcule le carré de l'écart à la moyenne de chacune des valeurs de la série.
3- On calcule la somme des valeurs obtenues
4- On divise par l'effectif de la série.
5- On calcule la racine carrée du résultat.

L'écart-type est le nombre noté σ tel que : $\sigma = \sqrt{V}$.

Le coefficient de dispersion est le rapport écart-type moyenne

$$Coef.dispersion = \frac{\sigma}{X}$$

Notes	Effectifs	Centre
[0 ; 5[	10	2.5
[5 ; 8[	8	6.5
[8 ; 12[	12	10
[12 ; 15[	11	13.5
[15 ; 20[	9	17.5
	50	Total
Moyenne	10.06	Variance
		Ecart-type

8.3°) Propriété de l'écart type

Considérons une série statistique **S** de modalités x_1, x_2, x_3,...,x_N affectées des effectifs n_1, n_2, n_3, ...,n_N d'écart type σ_x,
et la série statistique **S'** de modalités y_1, y_2, y_3, ...,y_N affectées des mêmes effectifs n_1,n_2,n_3, ...,n_N telle que, pour tout i appartenant à {1 ; 2 ; ...; N } : $y_i = ax_i + b$

Alors l'écart type : σ_y de la série statistique **S'** est tel que : $\sigma_y = |a| \sigma_y$

9°) Médiane

9.1°) Définition

La médiane est un paramètre de position, qui permet de couper la population étudiée en deux groupes contenant le même nombre d'individus.
Ce paramètre est utile pour donner la répartition du caractère étudié,
car 50 % environ de la population étudiée a une modalité inférieure à la médiane et 50 % une modalité supérieure à la médiane.

9.2°) Exemple

On fait une étude statistique sur les 50 notes attribuées par un jury à un examen, voici les résultats obtenus en classant ces notes par ordre croissant.

Variable discrète

Notes	Effectifs	Effectif cumulé
0	1	1
1	2	3
2	2	5
3	3	8
4	2	10
5	3	13
6	2	15
7	3	18
8	4	22
9	3	25
10	2	27
11	3	30
12	4	34
13	4	38
14	3	41
15	1	42
16	2	44
17	1	45
18	2	47
19	2	49
20	1	50

Utilisons la colonne des **effectifs cumulés** pour déterminer la médiane : il y a 50 notes, la 25ème note est 9 et la 26ème : 10.

Voici la répartition des notes :

$$\underbrace{0;1;1;...;9;9;9}_{25\ NOTES};\underbrace{10;10;....19;19;20}_{25\ NOTES}$$

Dans le tableau il n'y a pas de valeur partageant la série statistique en deux groupes de même effectif, (l'effectif total est pair) dans ce cas **l'intervalle médian** est **[9 ;10]** et on prendre pour médiane le **centre** de cet intervalle : 9,5

Variable continue

Si la variable est continue (regroupement par intervalle des résultats) le calcul de la médiane se fait autrement :

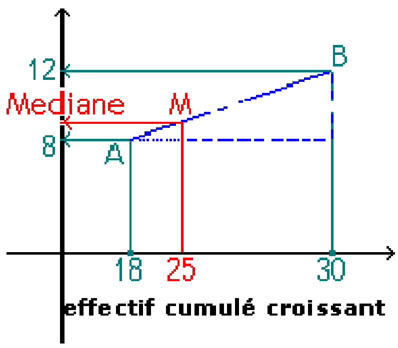
Notes	Effectifs	Effectifs cumulés
[0 ; 5[	10	10
[5 ; 8[	8	18
[8 ; 12[	12	30
[12 ; 15[	11	41
[15 ; 20[	9	50
	50	

Utilisons la colonne des **effectifs cumulés** pour déterminer la médiane : Il y a 50 notes, 50 % de l'effectif total c'est 25, la médiane est ici la note correspondant à l'effectif cumulé **25**.

D'après la colonne "effectif cumulé" :

- 18 personnes ont moins de 8
- 30 personnes ont moins de 12

La médiane se trouve donc dans l'intervalle **[8;12[** (appelé classe médiane). On le détermine par interpolation linéaire.



Les points **A, M, B** sont alignés ce qui se traduit par les droites (AM) et (AB) ont **même coefficient directeur** (ou on utilise le théorème de Thalès dans le triangle bleu) : $\frac{Me-8}{25-18}=\frac{12-8}{30-18}$

$$\frac{Me-8}{7}=\frac{4}{12}$$
$$Me-8=\frac{4}{12}\times 7$$
$$Me=8+\frac{4}{12}\times 7\approx 10{,}33$$

La médiane est environ **10,33**

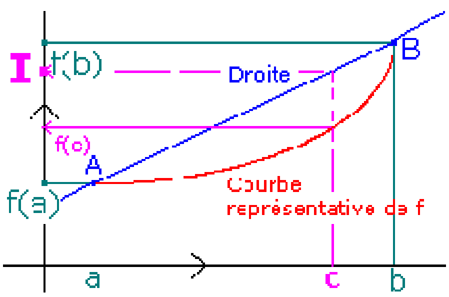
50 % environ des personnes ont eu moins de 10,33 et 50 % plus de 10,33 .

10°) Interpolation linéaire

11.1°) Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, [a; b] un intervalle de $\mathbb{R}$et c un nombre réel . Quand il n'est pas possible de calculer l'image de c par f , on utilise une interpolation linéaire, cela consiste à remplacer f(c) par g(c) ou g est la **fonction affine** telle que : **g(a) = f(a)** et **g(b) = f(b)**

Cela consiste à remplacer la courbe représentative de f sur [a; b] par la **droite** (AB) (On dit que l'on a déterminé f(c) par interpolation linéaire.



$$f(c)\approx f(a)+(c-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

11.2°) Exemple

L'interpolation linéaire est utilisée surtout en statistique

Le mieux est de comprendre sur un exemple :

Tranche d'âge	Effectif	Effectifs cumulés croissant
[0 ; 10[	14	14
[10 ; 20[	32	46
[20 ; 30[	55	101
[30 ; 40[	45	146
[40 ; 50[	16	162
[50 ; 60[	14	176
[60 ; 70[	20	196
[70 ; 80[	4	200
	200	

Supposons que l'on étudie la répartition des âges dans une association par exemple.

D'après le tableau ci-dessus on a :

- 14 personnes qui ont un âge compris entre 0 et 10 ans
- 32 personnes qui ont un âge compris entre 10 et 20 ans

etc...

La colonne des **effectifs cumulés croissants** nous permet de savoir que :

- 14 personnes ont un âge inférieur à 10 ans
- 46 personnes ont un âge inférieur à 20 ans

etc...

Supposons maintenant que l'on a ordonné ces personnes par ordre croissant de leur âge (du plus jeunes au plus vieux) et que l'on veuille trouver par interpolation l'âge de la $72^{\text{ème}}$ personne.

On repère à l'aide de la colonne des effectifs cumulés croissants dans quelles tranches d'âge se trouve cette personne.

Tranche d'âge	Effectif	Effectifs cumulés croissant
[0 ; 10[	14	14
[10 ; 20[	32	46
[20 ; 30[	55	$72^{\text{ème}}$ personne 101
[30 ; 40[	45	146
[40 ; 50[	16	162
[50 ; 60[	14	176
[60 ; 70[	20	196
[70 ; 80[	4	200
	200	

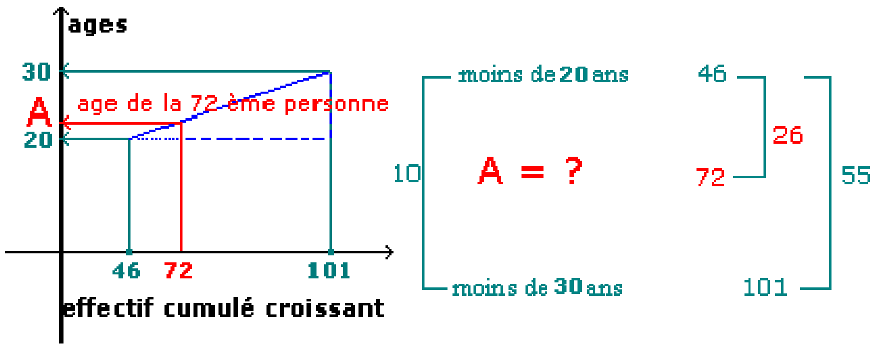
La $72^{\text{ème}}$ personne a entre 20 et 30 ans c'est sûr, mais cela ne suffit pas ...

On considérant que les 55 personnes de la tranche [20 ; 30[sont réparties de **manière proportionnelle** :

- La $46^{\text{ème}}$ personne a moins de 20 ans, faisons comme si elle en avait 20

La 101ème personne a moins de 30 ans faisons comme si elle en avait 30

Ces deux schémas ci-dessous devraient vous aider à comprendre :



Utilisons Le théorème de Thalès dans le triangle bleu.

$$\frac{A-20}{30-20}=\frac{72-46}{101-46}$$

$$\frac{A-20}{10}=\frac{26}{55}$$

$$A-20=\frac{10\times 26}{55}$$

$$A=20+\frac{10\times 26}{55}\approx 24,73$$

****

Statistiques descriptives

Calcule de la variance et l'écart-type

Yvan Monka

Exercice 1

Le tableau suivant montre le nombre de buts par match marqués durant la coupe du monde 2010

Nombre de buts x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de matchs n_i	7	17	13	14	8	6	0	1
E.C.C.	7	24	37	51	59	65	65	66

$\mathbf{x_1}$ = 0 c'est la valeur des nombres de buts égale zéro qui correspond à l'effectif des matchs joués qui est $\mathbf{n_1}$**=** 7.

Donc n_1c'est l'effectif des matches joués qui correspond à la valeur zero but c'est-à-dire : $\mathbf{x_{1=0}}$.

Comment calculer la variance, car tu obtiendras l'écart-type une fois que tu as calculé la variance. C'est pour ça on est amené à calculer la variance pour calculer l'écart-type qui est sa racine.

$$\mathbf{V} = \frac{\boldsymbol{n_1}\,.\,(\boldsymbol{x_i} - \overline{\boldsymbol{x}}\,)^2 + \boldsymbol{n_2}.\,(\boldsymbol{x_2} - \overline{\boldsymbol{x}}\,)^2 + \cdots + \boldsymbol{n_k}.\,(\boldsymbol{x_k} - \overline{\boldsymbol{x}})^2}{\boldsymbol{n_1} + \boldsymbol{n_2} + \cdots + \boldsymbol{n_k}}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}} = \mathbf{2,3}$$

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{7}\,.\left(\mathbf{0} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}} + \mathbf{17}.\left(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}} + \cdots + \mathbf{13}.\left(\mathbf{2} - \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}}}{\mathbf{7} + \mathbf{17} + \mathbf{13} + \cdots + \mathbf{1}} = \mathbf{2,4646}$$

$$\sigma = \sqrt{\mathbf{V}} = \sqrt{\mathbf{2,4646}} = \mathbf{1,57\ buts}$$

Ça veut dire que l'écart entre les matchs autour de sa moyenne est de 1.57 but.

Remarque

On peut calculer l'écart-type d'une classe et on peut l'imaginer très très grand, cela signifie que l'écart au tour de la moyenne est très très grand, donc on aura une classe avec beaucoup d'élèves qui ont de très bonnes notes et beaucoup d'élèves qui ont aussi de très mauvaises notes.

A l'inverse quand l'écart-type est petit, cela veut dire que toutes les notes sont resserrées autour de la moyenne donc on aurait une classe très homogène avec beaucoup de moyens très peu de bon très peu de faibles.

****

Exercice 2

La série statistique suivante donne la taille en cm de **20** nouveaux nés dans une maternité, un jour donné. Calculer : la moyenne. La variance. L'écart-type de cette série.

Valeurs x_i	**48,5**	**48,7**	**49**	**49,2**	**49,5**	**50**	**50,5**	**51,3**	**52**
Effectifs n_i	**2**	**4**	**3**	**1**	**2**	**2**	**3**	**1**	**2**
E.C.C.	**2**	**6**	**9**	**10**	**12**	**14**	**17**	**18**	**20**

Moyenne : $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_i n_i\, x_i$ où $N = \sum_i n_i = 20$

$$\bar{x} = \frac{1}{20} = (2 \text{ x } 48,5 + 4 \text{ x } 48,7 + \cdots + 1 \text{ x } 51,3 + 2 \text{ x } 52) = 49,69$$

La taille moyenne d'un nouveau-né est : $\bar{x} = 49,69$ cm

Variance : $V = \frac{1}{N}\sum_i n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_i n_i x_i^2 - \bar{x}^2$

V= $\frac{1}{20}\ (2\ x\ 48,5^2 + 4\ x\ 48,7^2 + \cdots + 1\ x\ 51,3^2 + 2\ x\ 52^2) - 49,69^2 = 1,1959$

Ecart-type : $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\mathbf{V}} = \sqrt{\mathbf{1,1959}} \approx \mathbf{1,09}$

L'écart-type mesure l'écart moyen par rapport à la moyenne générale.

****

Effectifs et fréquences cumulées. Caractère discret

Kiffelesmaths.com

Exercice

On a une série statistique

Valeur de la série de x_i = 1 ;2 ;2 ;1 ;5 ;5 ;3 ;3 ;2 ;1

$\mathbf{x_i}$	1	2	3	5	$\sum$
Effectif $\mathbf{n_i}$	3	3	2	2	**N = 10**
Effectif cumulés croissants	3	6	8	10	**Effectif total**
Effectifs cumulés décroissants	10	7	4	2	
Fréquences $\mathbf{f_i = \frac{n_i}{N}}$	$\frac{3}{10} = 0.3$	$\frac{3}{10} = 0.3$	$\frac{2}{10} = 0,2$	$\frac{2}{10} = 0,2$	**1**
F.C.C.	0.3	0.6	0.8	1	
F.C.D.	1	0.7	0.4	0.2	

N : nombre de valeurs de la série

N.B. : 6 valeurs (voir tableau) dans la série statistique qui égales ou inférieur à 2.

Il y a 8 valeurs qui sont inférieures ou égales à 3 et 10 valeurs ≤ 5

C'est-à-dire :

1,1,1,2,2,2,3,3,5,5

Donc y a 6 valeurs ≤ 2

8 valeurs ≤ 3

10 valeurs ≤ 5

****

Effectifs et fréquences cumulées croissantes avec des classes

Kiffelesmaths.com

Dans cet exercice les valeurs x_i ne sont pas représentées par des valeurs discrètes, mais par des intervalles

Exemple

On est dans une maternité et pendant 1 mois y a eu 100 naissances. On s'intéresse à la masse de chaque bébé en kg.

Donc :

Pour regrouper des bébés semblables en masse dans des effectifs semblables, c'est compliqué, ce qu'il faut faire c'est de les regrouper dans des intervalles. On va considérer que tous les bébés qui ont une masse entre 2,5 et 3 kg (le 3 exclu) « la masse doit être comprise entre 2,5 et 3 exclu ; 2,5 ≤ masse ≤ 3 ; on a 15 etc… selon le tableau suivant :

Masse en kg x_i	[2,5 ; 3[	[3 ; 3,5[	[3,5 ; 4[	[4 ; 4,5[
Effectifs n_i	**15**	**32**	**40**	**13**

⇒ la notion de classe ici, en fait, on regroupe les différentes masses dans des intervalles comme 3 kg se trouve dans la 2ème classe.

Masse en kg x_i	[2,5 ; 3[	[3 ; 3,5[	[3,5 ; 4[	[4 ; 4,5[	**Total**
Effectifs n_i	15	32	40	13	N = 100
Fréquences $f_i = \frac{n_i}{N}$	0,15	0,32	0,40	0,13	1
Fréquences en % age $f_i en \% = \frac{n_i}{N} \times 100$	15%	32%	40%	13%	100%
ECC Effectif cumulé croissant	15	**47**	87	100	
FCD Fréquences cumulés décroissants en % age	100	85	**53**	13	

N.B. : si je dois interpréter ce **53** (en jaune dans tableau); ça veut dire qu'il y a 53 % des bébés qui ont une masse supérieure ou égale à 3,5 kg.

Si je dois interpréter ce **47** (en jaune dans tableau), ça veut dire qu'il y a 47 bébés qui ont une masse strictement inférieure à 3,5 kg.

****

Moyenne d'une série statistique. Le cas des classes ou intervalles

Kiffelesmaths.com

Masse en Kg x_i	$[2.5; 3[$ $x_1 = 2.75$	$[3; 3.5[$ $x_2 = 3.25$	$[3.5; 4[$ $x_3 = 3.75$	$[4; 4.5[$ $x_4 = 4.25$	**Total**
Effectif n_i	**25**	**35**	**30**	**10**	**N = 100**
Fréquence $f_i = \frac{n_i}{N}$	$f_1 = 0.25$	$f_2 = 0.35$	$f_3 = 0.30$	$f_4 = 0.10$	**1 Somme des fréquences**

Moyenne = m = $\bar{x} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3+n_4x_4}{N} = \frac{25\times2.75+35\times3.25+30\times3.75+10\times4.25}{100} = 3.375$

$$m = \bar{x} = f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + f_3 \times x_3 + f_4 \times x_4$$

$$= 0.25 \times 2.75 + 0.35 \times 3.25 + 0.30 \times 3.75 + 0.10 \times 4.25 = 3.375$$

****

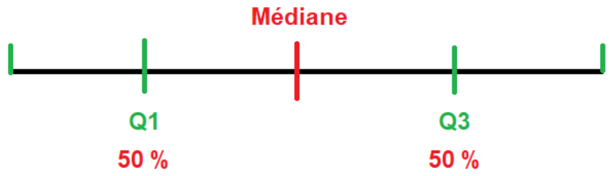
Calculer les quartiles (Q_1 et Q_3)

Ivan monka

On va apprendre à calculer les quartiles d'une série.

Le tableau suivant montre le nombre de buts par match marqués durant la coupe du monde 2010

Nombre de buts x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de matchs n_i	7	17	13	14	8	6	0	1
ECC	7	24	37	51	59	65	65	66



Q_1 : c'est le **1er** quartile qui est une valeur de la série statistique qui sépare les **25 %** des valeurs de la série et qui sont inférieur à cette valeur.

Si la valeur que je cherche, existe au niveau de **25 %**, alors elle représente la valeur di **1er** quartile, si elle n'existe pas, et bien je vais prendre la valeur juste après la dernière valeur représentative des **25 %** des valeurs de la série.

Et cette valeur représente la première valeur tel que j'ai au moins **25 %** des valeurs qui soient inférieur à **Q_1**.

Q_3 : c'est la valeur qui représente à moins **75 %** des valeurs moins d'elle de la série statistique.

Effectif total = 7 + 17 + 13 + ……… + 1 = 66

Pour Q_1 : 25% de 66 = 0.25 x 66 = 16.5

Q_1 est la 17^e valeur, donc Q_1 = 1.

Pour Q_3 : 75% de 66 = 0.75 x 66 = 49.5

Q_3 est la 50^e valeur, donc : Q_3 = 3.

L'écart interquartile est égal à :

$Q_3 - Q_1 = 3 - 1 = 2$ buts.

On peut conclure :

Conclusion

- Il y a au moins **25 %** des matches qui ont eu moins d'un but.
- Il y a eu moins de **75 %** des matches qui ont eu moins de **3** buts.

On peut aussi calculer l'écart inter quartile :

Q_3 – Q_1 = 3 – 1 = 2 buts

C'est-à-dire, il y a au moins **50 %** des valeurs de la série qui se trouvent entre le **Q_1** et **Q_3** et séparées de **2** buts.

****

Statistiques descriptives
1er quartile, 3ème quartile, écart interquartile
Travaux dirigés
Kiffelesmaths

Pour l'effectif total pair

Les x_i doivent être classés en ordre croissant c'est-à-dire 3-7-9-10-12

x_i	3	7	9	10	12	**Total**
n_i	2	10	7	3	2	**N=24**
E.C.C. **Effectif cumulé croissant**	2	12	19	22	24	

Pour l'effectif total pair (N = 24)

- **Q_1**$= \frac{N}{4} = \frac{24}{4} = 6 \Rightarrow$ Q_1= 6ème valeur = 7
- **Q_3**$= \frac{3}{4}N = \frac{3}{4} \text{ x } 24 = 18 \Rightarrow$ Q_3 = 18ème valeur = 9.

Pour l'effectif total impair : on change les données de cet énoncé et on calcule comme suit :

Les x_i doivent être classés en ordre croissant c'est-à-dire 3-7-9-10-12

x_i	3	7	9	10	12	**Total**
n_i	2	10	8	3	2	**N=25**
E.C.C. **Effectif cumulé croissant**	2	12	20	23	25	

N = Effectif total = 25

Q_1 = 1er Quartile

Q_3 = 3ème Quartile

Me = 2ème Quartile = Médiane.

- **Q₁** = $\frac{N}{4} = \frac{25}{4} = 6{,}25 \Rightarrow$ **Q_1= 7ème valeur** = **7**
- **Q_3** = $\frac{3}{4}N = \frac{3}{4}\ x\ 25 = 3\ x\ 6{,}25 = 18{,}75 \Rightarrow$ **Q_3 = 19ème valeur** = **9**.

L'écart interquartile :

Q_3 – Q_1 = 9 – 7 = 2

L'étendue :

12 – 3 = 9

Remarque : l'écart inter quartile nous donne plus d'information sur la population que l'étendue qui peut être très grande dans une population mais ne veut rien dire.

****

Les indicateurs de dispersion :

La médiane

Exemple

Modalité	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Effectif	2	3	0	6	1	4	7	5	3	1
ECC	2	5	5	11	12	**16**	23	28	31	32

N = 2+3+6+1+4+7+5+3+1= 32

N est pair, donc, la médiane de cette série se trouve entre le $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{2}}$ ème valeur et $\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{2}} + \mathbf{1}$ ème valeur. C'est-à-dire entre **16ème** valeur et la **17ème** valeur.

La note médiane de ce devoir est de 6 qui se situe entre la **16ème** et la **17ème** valeur.

C'est-à-dire : je peux affirmer qu'il y a autant de notes inférieures à **6** que de notes supérieures à **6**.

****

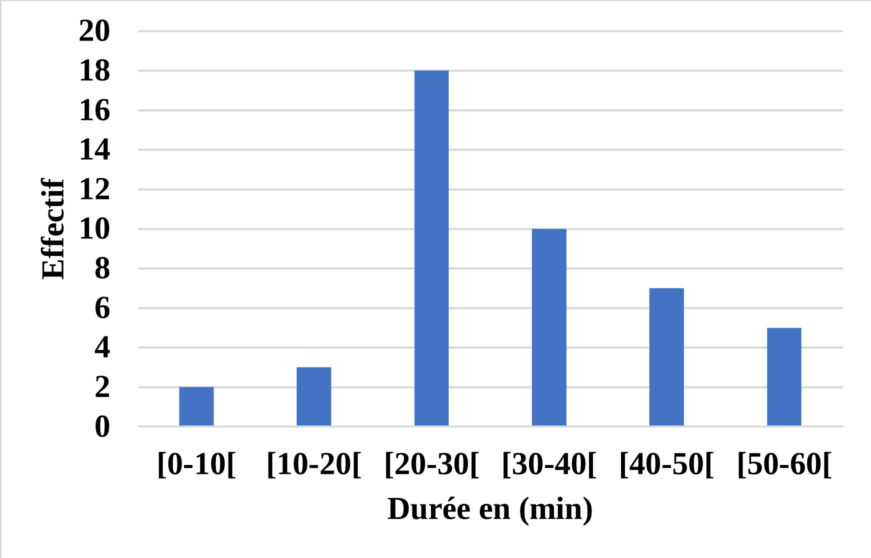
Calculer une moyenne, une médiane, des quartiles
Td – Statistiques Descriptives

Exercice

On a mené une étude statistique sur la durée de stationnement de véhicules sur un parking.

a) Donner la médiane et les quartiles.
b) Peut-on affirmer que la médiane est égale à la moyenne ? Expliquer.

Extrait du manuel Odyssée 2de avec l'aimable autorisation des éditions Hatier



Consister = ارتكز على , تكون من

****

Calculer l'étendue, la médiane et les quartiles

Exercice

Le professeur a relevé les notes du dernier devoir de mathématiques en 3ème A. Voici les résultats :

Notes x_i	08	09	10	12	15	16	17	Total
Effectif n_i	2	4	5	3	7	3	2	N=26
E.C.C.	2	6	11	14	21	24	26	

1. Quel est le nombre d'élèves dans la classe de 3e A ?
2. Quelle est l'étendue des notes de ce devoir ?
3. Déterminer la médiane de la série de notes.
4. Déterminer les valeurs du premier quartile et du troisième quartile de la série.

Solution

1. **Le nombre d'élève :** $\boldsymbol{\sum f_i = 2+4+5+3+7+3+2 = 26}$
2. **L'étendue des notes :** 17 – 8 = 9
3. **La médiane :** entre 13 et 14ème place = 12
4. **Les valeurs des quartiles**

$Q_1 = \frac{N}{4} = \frac{26}{4} = 6{,}5\ donc\ Q_1 = la\ 7^{ème} valeur\ qui\ est\ dans\ la\ 3ème\ colonne = 10$

Donc : 25% des notes sont inférieures à 10.

$Q_3 = \frac{3}{4}N = \frac{3}{4} \times 26 = 19{,}5\ donc\ Q_3 = la\ 20^{ème} valeur\ qui\ est\ dans\ 5^{ème} colonne = 15$

Donc 75% des notes sont inférieures à 15

****

Statistiques descriptives
Travaux dirigés
Calculer une moyenne, une médiane, une étendue

Exercice₁ : Huit athlètes ont participé à un concours de lancer de javelot. Voici leurs performances :

62 m – 73 m – 58 m – 64 m – 71 m – 62 m – 65 m – 59 m.

Déterminer la moyenne, la médiane et l'étendue de cette série de lancers.

Solution

Moyenne = $\frac{\mathbf{62+73+58+64+71+62+65+59}}{\mathbf{8}} = \mathbf{64,25}$

Médiane = 58 – 59 – 62 - [62 - 64] – 65 – 71 – 73 y a 8 valeurs

$donc\ la\ médiane\ Me = \frac{62+64}{2} = 63$

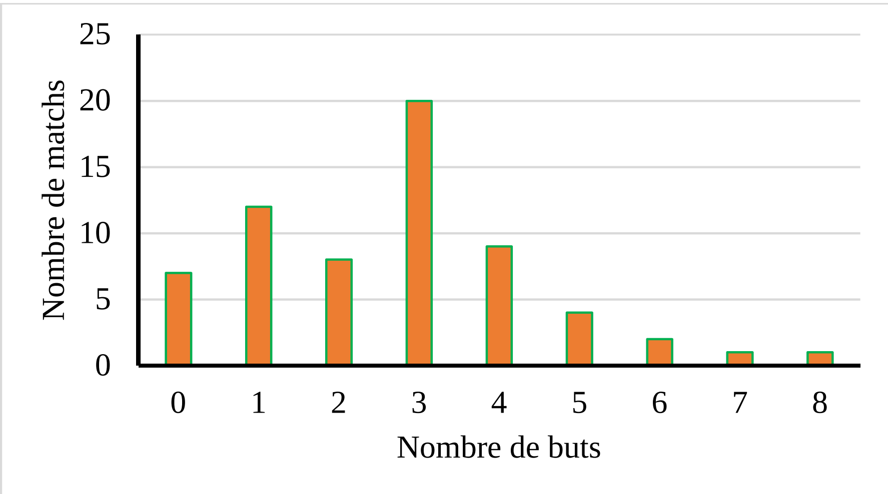
Etendue = 73 – 58 = 15.

****

Calculer une moyenne, une médiane, une étendue

Exercice₂

Le graphique ci-dessous donne le nombre de buts marqués par match lors de la coupe du monde de football 2014 au Brésil.



1) Calculer l'étendue de la série
2) Calculer le nombre moyen de buts marqués par match.
3) Calculer le nombre de buts médians de la série.

Solution

1) **Etendue =** 8 – 0 = 8
2) **Moyenne =** $\frac{0\times7+1\times12+2\times8+\cdots+8\times1}{64} = \frac{171}{64} \approx 2.67$

   La moyenne des nombres de buts marqués est environ égale à 2.67
3) **Médiane**

Médiane

$\underbrace{\qquad 32 \qquad}_{3} \downarrow \underbrace{\qquad 32 \qquad}_{3}$

$7 + 12 + 8 + \boxed{20}$

Le nombre de buts médians est égal à 3 buts.

****

Calcule des fréquences

$$Fréquence = \frac{Effectif}{Effectif\ total}$$

$$Fréquence\ (en\ \%) = \frac{Effectif}{Effectif\ total} \times 100$$

Taille en cm	$150 \le t \le 160$	$160 \le t \le 170$	$170 \le t \le 180$	Effectif total N
Effectif	8	10	7	25
Fréquence	32%	40%	28%	100%

$\frac{8}{25} \times 100 = 32\%$; $\frac{10}{25} \times 100 = 40\%$; $\frac{7}{25} \times 100 = 28\%$

****

Calculer les effectifs cumulés et les fréquences cumulées

Taille en cm	$150 \le t \le 160$	$160 \le t \le 170$	$170 \le t \le 180$
Effectif	8	10	7
Fréquence en %	32%	40%	28%

Taille en cm	$150 \le t \le 160$	$160 \le t \le 170$	$170 \le t \le 180$
Effectif	8	10	7
Fréquence Cumulée	32%	72%	100%

****

3- Eléments de calcul des probabilités

L'analyse combinatoire

1. Permutation avec répétition (P.A.R.)

Ex : quel est le nombre de mots possibles qu'on peut écrire en permutant les 7 lettres du mot **CELLULE**

Solution

$$P_7 = \frac{7!}{2!.3!}$$

$$P_n = \frac{n!}{k!}$$

2. Permutation sans répétition (P.S.R.)

Le nombre de permutation de n objets est noté :

$$\mathbf{P_n = n!}$$

Ex : quel est le nombre de manière de placer 8 personnes autour d'une table ?

Solution :

$$\mathbf{P_8 = 8! = 8x7x6x5x4x3x2x1 = 40320}$$

3. Arrangement avec répétition (A.A.R.) : la notion d'ordre des objets est prise en compte, c'est-à-dire on tient compte de l'ordre.

Lorsqu'un objet peut être observer plusieurs fois dans un arrangement ; le nombre d'arrangements avec répétition de **p** objets pris parmi **n** est alors :

$$\boxed{\mathbf{A_n^p = n^p}}$$

Avec $1 \leq p \leq n$

Ex1 : Combien de nombres à 5 chiffres peut-on écrire avec les chiffres 1, 2 et 3 seulement ?

Pour chaque position des 5 positions, on a 3 possibilités

$$\begin{array}{ccccc} \underline{3} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{3} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

> Le nombre d'arrangements avec répétition de k objets parmi n objets est : n^k

Si on applique à nouveau le principe multiplicatif qu'on a vu au départ :

On peut en déduire qu'il existe : **3 x 3 x 3 x 3 x 3 = 3^5 = 243** possibilités différentes pour écrire un nombre à 5 chiffres

Ex2 : dans la séquence d'ADN, le nombre de dinucléotides attendus si l'on fait l'hypothèse qu'une base peut être observée plusieurs fois dans la séquence (ce qui correspond effectivement à la réalité) est donc :

$$\mathbf{A_4^2 = 4^2 = 16\ dinucl\acute{e}otides\ possibles}$$

Les 16 dinucléotides identifiables dans une séquence d'ADN sont :

AA – AC – AG – AT

CC – CA – CG – CT

GG – GC – GA – GT

TT – TC – TG – TA

Tirages successifs avec remise & dénombrement
(Dénombrement avec remise)
Types de tirages et dénombrement
3 tirages successifs avec remise
Auteur : bac maths

Tirage de **k** boules parmi **n** boule dans une urne ; Y a la **répétition** et y a aussi l'**ordre** qui comptent : le nombre de possibilités est de la formule suivante : $\mathbf{n^k}$

Exercice (1)

Donc, pour tirer **4** boules de **6** boules dans une urne avec remise, combien de possibilités ?

Lorsqu'on effectue des tirages, successifs avec remise de boules dans une urne. Le nombre de résultats possibles est donné par « puissance », dans ce cas les résultats obtenus dépendent de l'ordre des boules, mais il peut y avoir des répétitions.

n = nombre d'objets

k = nombre de tirages

Si on tire **4** boules successivement (séquentiellement) avec remise dans une urne contenant **6** boules.

Nbr de possibilités = $\mathbf{n^k}$ = $\mathbf{6^4 = 1296}$

Exemple (2)

Le nombre de mots de **2** lettres formés à partir de **A, B, C**, et avec possibilité de répéter les lettres est de : $\mathbf{3^2 = 9}$

Les mots sont :

AA – AB – AC

BA – BB – BC

CA – CB – CC.

****

Tirage successif avec remise

Cas général

On tire **k** (nombre de tirage) parmi **n** nombre d'objets est égale à :

$$n^k$$

Exemple 1

Tirage successif de 3 lettres avec remise parmi 5 objets (5 lettres)

$$\mathbf{5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125\ cas\ (nombre\ de\ cas\ possibles)}$$

Exemple 2

On a un mot de passe : constitué de **4** caractères (lettre en minuscules)

Pour constituer un mot de **4** lettre tirée parmi les **26** lettre d'alphabet (avec remise) car la lettre peut se répéter : on a :

$$\mathbf{26^4 = 456976\ mots\ de\ passe}$$

Le nombre de mots de passes constitués de 8 lettres tirées parmi l'alphabet minuscule, majuscule et tous les chiffres (total = 62 choix) est de :

$$62^8 = 218\ 340\ 105\ 584\ 896\ \mathit{mots\ de\ passes}$$

****

4. Arrangement sans répétition (A.S.R.)

Ici l'objet ne peut être observé qu'une seule fois dans un arrangement. Le nombre d'arrangement de p objets pris parmi n et sans répétition est :

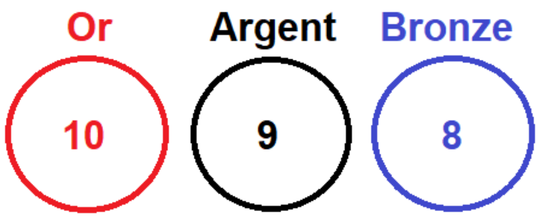
$$\mathbf{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}} \text{ Avec } \mathbf{1 \leq p \leq n}$$

Exp1 : on organise une course comprenant **10** personnes et on s'intéresse au podium formé des **3** premiers dans l'ordre. Ici l'ordre est important car le 1er médaille d'or, 2ème d'argent et 3ème de bronze.

Combien de podiums différents existe-t-il ?

Donc ; on a **10** choix possible pour la première place (**médaille d'or**) ; la première place est fixée donc, il nous reste **9** places pour la 2ème place, donc 9 choix possibles ;

maintenant la 1ère et la 2ème place étant fixées donc il nous reste que 8 concurrents pour la 3ème place. Si on applique ici le principe multiplicatif donc 10 x9 x8 = 720 podiums différents



Et bien il s'agit là d'un arrangement de **3** objets parmi **10** objets.donc, **3** positions à choisir pour **10** objets différents. On dit ici qu'il n'y a pas de répétition, il s'agit d'un arrangement sans répétition, car les objets de l'arrangement sont tous distinctes. On est d'accord qu'on peut pas être à la fois premier et **2ème**. La formule est :

Le nombre d'arrangements sans répétition de k objets parmi n objets est : $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Exp2 : dans la séquence d'**ADN** précédente, le nombre de dinucléotides attendu dans une séquence si l'on fait l'hypothèse qu'une base n'est observée qu'une seule fois est donc :

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12 \ dinucléotides\ possibles$$

Les **12** dinucléotides possibles sont :

AC – AG – AT
CA – CG – CT
GC – GA – GT
TC – TG – TA

Exp3 : On tire **2** boules successivement sans faire retourner la boule dans le sac (sans remise) dans lequel y a **5** boules bleues et **4** boules rouges.

Solution

$$A_9^2 = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{9!}{(9-2)!} = 72 \text{ cas}$$

5. Combinaisons : la notion d'ordre des objets n'est plus prise en compte. On parle de tirage avec et sans remise. Elle ne tient pas compte de l'ordre.

5.1- Combinaison sans remise (C.S.R.)

Le nombre de combinaisons de **p** objets parmi **n** sans remise est noté :

$$C_n^p \; ou \; \binom{n}{p} \text{ et } 1 \leq p \leq n \, ; n, p \in \check{N} \; si \; n < p \; alors \; C_n^p = 0$$

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Exp1 : on organise une course comprenant **10** personnes et on s'intéresse au podium formé des **3** premiers sans tenir compte de l'ordre.

Combien de podiums différents existe-t-il ?

Le nombre de combinaisons sans répétition de k objets parmi n objets est : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

n = 10 ; k = 3

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\,x\,7!} = \frac{720}{3!} = \frac{720}{6} = 120$$

Dans ce contexte là, il y a **120 podiums** possible pour notre cours.

Exp2 : le nombre de dinucléotides attendus dans la séquence d'ADN sans tenir compte de l'ordre des bases dans la séquence est donc :

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 6 \text{ dinucléotides possibles qui sont:}$$

AC CA	AG GA	AT TA	CG GC	CT TC	GT TG

Exp3 : dans un sac on a **9** boules numérotées de **1** à **9**. On tire deux boules en même temps.

- combien de cas possibles ?

- combien d'issus pour avoir :

a) deux boules portant un numéro pair ?

b) deux boules la somme de leur numéro est un numéro pair ?

c) deux boules le produit de leurs numéros donne un numéro pair ?

Solution

1) C'est une combinaison

$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = C_9^2 = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = 36$$

2) $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6 \text{ cas}$

3) Pour avoir le numéro paire (impaire +impaire ou paire + paire) le ou se remplace par le signe + :

Donc :

$$C_5^2 + C_4^2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} + \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = 16 \text{ cas.}$$

c) les chiffres qui donnent un chiffre pair si on multiplie paire x paire ou impaire x paire.

$$C_4^2 + C_4^1 \text{ x } C_5^1 = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} + (\frac{4!}{1!\,(4-1)!} \text{ x } \frac{5!}{1!\,(5-1)!} = 26 \text{ cas}$$

5.2- Combinaison avec remise (C.A.R.)

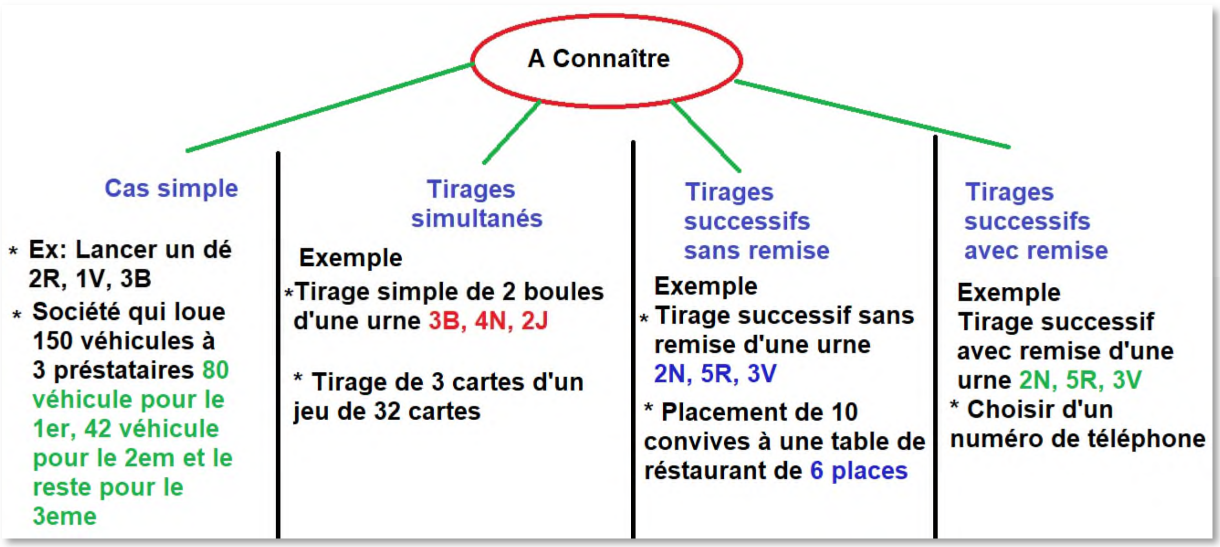
Le nombre de combinaisons de p objets parmi n avec remise est :

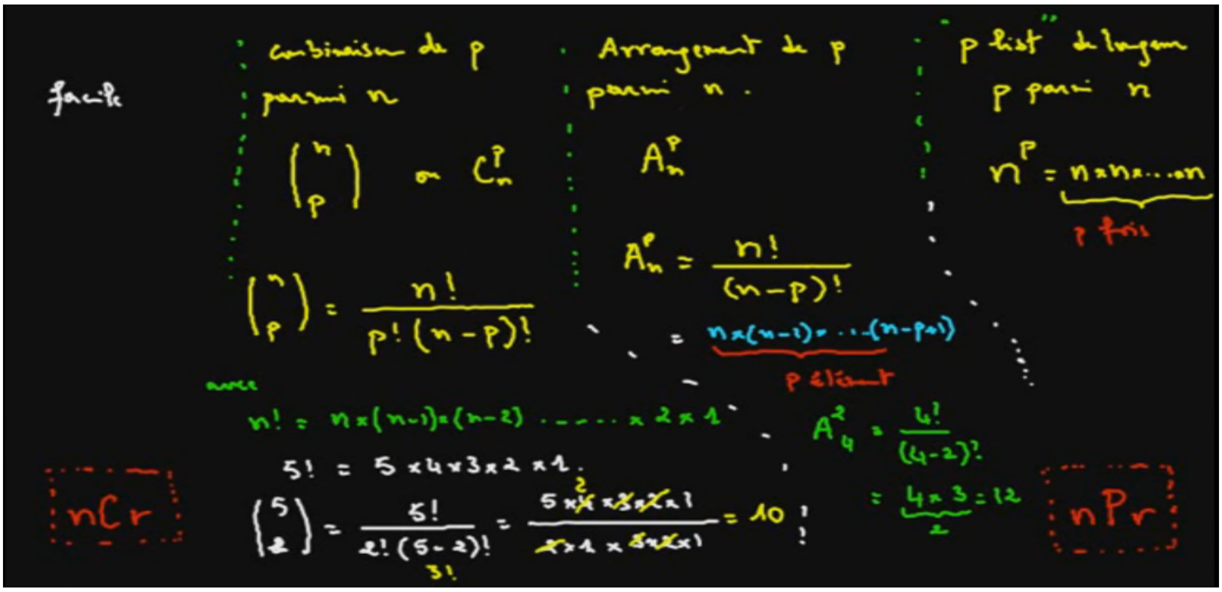
$$C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}$$

****

Probabilités combinatoires
Travaux dirigés n° 01

Comment calculer le nombre de cas ?





****

III- Les Arrangements

Exemple des placements des convives

On dispose d'une table de **6** places, et **k** nombre de convives est de **10** (dont Mehdi et Céline).

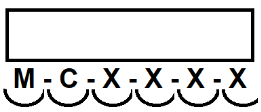
- Calculer la probabilité que Mehdi et Céline soient dans la même table. C'est l'évènement "**A**"
- Calculer la probabilité que Mehdi et Céline soient dans **2** tables différentes. C'est l'évènement "**B**"

Solution

(Tirage successif car on place les convives les uns après les autres) et c'est un (tirage sans remise) car on ne peut pas avoir Céline assise à la seconde place et à la quatrième place en même temps.

Donc, la formule appliquée est : A_n^p

On dessine un schéma qui va nous aider à bien visualiser la situation.



On a plusieurs possibilités qui corresponds aux permutations de cette forme (**MCXXXX. MXXCXX ; MXXXC** ; etc)

Donc, il faut multiplier le numérateur par un coefficient qui va nous donner le nombre de permutations possible de cette formule.

Alors ; comment calculer ce nombre de permutations ?

$\mathbf{A_1^1}$ Pour Mehdi on a 1 seul choix de Mehdi parmi les personnes qui s'appelles Mehdi présent

$\mathbf{A_1^1}$ Pour Céline on a 1 seul choix de Céline parmi les personnes qui s'appelles Céline présentes

$\mathbf{A_8^4}$ Arrangement de 4 personnes quelconques parmi 8.

$$le\ coefficient\ de\ permutation\ pour\ 6\ places = \frac{\mathbf{6!}}{\mathbf{1!.1!.4!}} = \mathbf{30}$$

C'est-à-dire :

1! Un seul Mehdi pour une place

1! Une seule Céline pour une place

4! Quatre autres places pour les autres convives quelque soient leurs noms.

Donc le nombre total de cette permutation, y en a 30 permutations.

Pour le dénominateur au nombre de possibilités Total, c'est de choisir **6** parmi **10** ; donc, c'est l'arrangement de **6** parmi **10**. $\mathbf{A_{10}^6}$

La probabilité sera calculée ainsi :

Donc ;

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\mathbf{A_1^1.A_1^1.A_8^4.30}}{\mathbf{A_{10}^6}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Qui est la probabilité que Mehdi et Céline soient dans la même table

- Calcule de la possibilité que Mehdi et Céline soient dans des tables différentes :

  M - X - X - X - X - X Ou **C - X - X - X - X - X**

  C'est-à-dire Mehdi sans Céline sur table ou le contraire

  Donc, le but ca va être de choisir le 1er convive parmi notre groupe,

  Donc, on va choisir 1 parmi 2 (Mehdi et Céline) c'est un arrangement $\mathbf{A_2^1}$ et **5** autres convives parmi les **8** convives c'est-à-dire $\mathbf{A_8^5}$ et le multiplier par le coefficient de permutation qui est :

Qui peut être

Comme ça

ou comme ça

Donc ; il faut calculer ce nombre de permutations et pour cela on va multiplier par le nombre de permutations possible de cette combinaison. Ça va être

$\frac{6!}{1!.5!} = 6$ c'est le coefficient de permutations.

Alors : du coup la probabilité P(B)

$$P(B) = \frac{6.A_2^1.A_8^5}{A_{10}^6(\text{nombre de possibilités total})} = \frac{8}{15}$$

qui est la probabilité que Mehdi et Céline soient dans deux tables différentes

IV- Tirage successif avec remise

Exp.

On dispose d'un **QCM** à **3** choix et on à **5** questions à résoudre

On a une réponse juste par question.

- Quelle est la probabilité d'avoir tous faut si on répond au hasard. ''**A**''
- Quelle est la probabilité d'avoir **2** réponses juste ''**B**''

Solution

Pour modéliser l'exercice

On a **5** questions et sur chaque question on a **3** choix.

C'est un tirage avec remise car on peut avoir la répétition des réponses

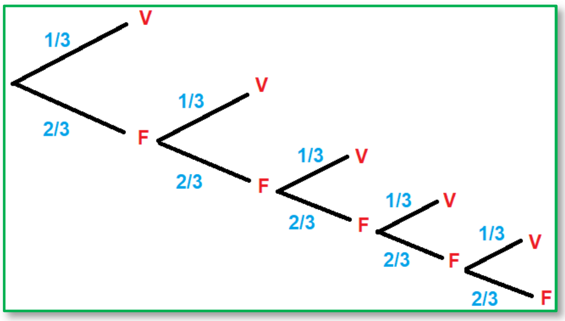
Les questions	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
Les réponses	A	A	A	A	A
	B	B	B	B	B
	C	C	C	C	C

Donc ; on peut avoir une réponse (**BAACB**) ou (**ABACB**) ou (**CCBBA**) qui se sont des permutations

Donc ; y a les répétitions

Donc ; on va utiliser la formule des tirages successifs avec remise n^p

Pour répondre à la 1ère question c'est-à-dire avoir cinq réponses faut ; si on utilise un arbre de probabilité on aura : **FFFFF**



$$\text{P(A)}=\frac{2}{3}\text{x}\frac{2}{3}\text{x}\frac{2}{3}\text{x}\frac{2}{3}\text{x}\frac{2}{3}=\frac{32}{729}$$

Ou raisonner en termes de nombre de cas pour le 1er faut pour le 2ème faut pour le 3ème faut etc.

Donc : pour **FFFFF**, pour le 1er F on a 2 possibilités de F et 1 possibilité de V. même chose pour le 2ème F etc. pour le 3ème F et 4 et 5ème

Donc : 2x2x2x2x2=2^5 = 32

Au dénominateur le nombre de possibilités totales c'est pour la 1er question on a **3** choix possible même chose pour la **2ème , 3ème, 4ème** et **5ème** **donc** : on a **3^5 = 243**

$$\Rightarrow \text{P(A)} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{729} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

Essayons de voir ce facteur de permutation dans ce cas-là : **FFFFF** ici on a **5** choix.

Donc : **5!** Au numérateur et les choix sont tous de la même nature, c'est-à-dire ils appartiennent au même ensemble, c'est-à-dire, les choix faut. Combien y en a ? y a **5** qui va nous donner **5!** Qui, va nous donner $\frac{5!}{5!} = \mathbf{1}$ car on ne peut pas trouver une autre combinaison avec des **FFFFF** différente. Donc, y a une seul **FFFFF**. On verra dans la **2ème** question où ce coefficient est différent de **1**.

- La probabilité d'avoir **2** réponses justes ou vrais

  Les réponses seront **VVFFF** pour calculer la probabilité de ce choix. Pour le 1er V y a **1** seul choix donc = **1** ; pour le **2ème V** y a 1 seul choix, pour le faut on a 2 choix possibles donc **2** pour le **2ème Faut** y a **2** pour le **3ème Faut** y a **2**. Et il faut prendre les permutations possibles en coefficient car on peut avoir (**VFVFF**) ou (**FFVVF**) ou (**FVFVF**) etc. qui se calcule comme suite $\frac{5!}{2!.3!} = 10$ qu'on calcule sous forme d'un coefficient et **Donc,** on aura :

$$\boldsymbol{P(B) = \frac{1.1.2.2.2.(10)\ coefficient\ de\ permutation}{3^5\ c'estle\ choix\ total} = \frac{80}{243} = 32,92\%}$$

Donc : la probabilité d'avoir **2** réponse vraie parmi les **5** est de 32,92 % sachant que le choix est fait de façon complètement aléatoire.

Remarque : il faut toujours ajouter le nombre de permutations.

****

Probabilité 2018

Chermak

1/ Vocabulaire

Epreuve aléatoire : c'est une épreuve dont l'issu n'est pas connu par avance. Devant une épreuve on ne sait pas quel va être le résultat.

Exp. : "lancer d'un dé" on ne sait pas quel sera le résultat : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ou le 6. D'où le mot d'appellation (épreuve aléatoire). C'est une épreuve dont on ne connut pas l'issu par avance.

Lorsqu'on a une épreuve aléatoire, à chaque épreuve aléatoire on a un certain nombre de résultats possibles ; et l'ensemble des résultats possibles d'une épreuve aléatoire s'appel (**l'univers Ω**)

L'univers Ω : c'est l'ensemble des résultats possibles.

Exp. : je lance le dé ⇒ Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} car les faces du dé sont numérotées de 1 à 6. ⇒ l'univers est **Ω**.

Donc : devant chaque épreuve aléatoire on a un ensemble des résultats (appelé univers) attachés à cette épreuve.

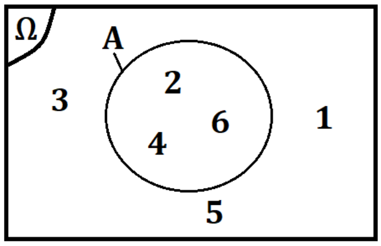
Au cours d'un lancer d'un dé, on peut s'intéresser à quelque chose de spécifique qu'on appel (**évènement**)

On appel l'évènement **A** qui est une partie de **Ω**.

Exp. : je vais définir l'évènement **A** comme étant : "obtenir un résultat pair"

⇒ **A** = {2, 4, 6} et **A** est une partie de **Ω**. ça veut dire concrètement que tous les éléments de **A** sont dans **Ω**.

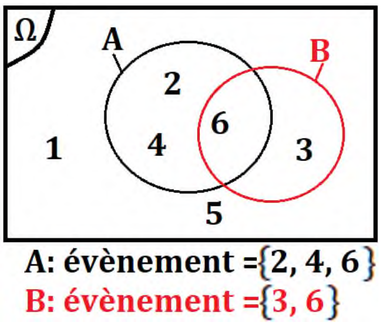
Donc, en fait si je fais un petit diagramme qu'on appelle **diagramme de veine**



Ici on a l'évènement **A**, et tous ce qui n'est pas **A** est appelé le contraire de **A**. car tous ce qui pas pair, est impair. Donc : à chaque évènement **A** on peut associer l'évènement contraire $\overline{\mathbf{A}}$. On le lira (**A** barre). Donc : l'événement contraire de **A** est l'évènement $\overline{\mathbf{A}}$. Si l'évènement **A** = {2, 4, 6} ⇒ $\overline{\mathbf{A}} = \{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{5}\}$**.** Evènement **A** et évènement contraire de **A**.

Je vais définir l'évènement **B** comme étant le multiple de trois.

B : « un multiple de 3 » ⇒ **B** = {3, 6} on s'arrête à 6 car **Ω** = {1, 2, 3, 4, 5, 6}



Forcement l'évènement $\overline{\mathbf{B}}$ se sont tous les nombres qui ne sont pas dans **B**.

⇒ $\overline{\mathbf{B}} = \{1, 2, 4, 5\}$

Maintenant il existe deux évènements spécifiques :

L'évènement certain et à son opposé y a l'évènement impossible

Evènement certain : Je lance un dé et j'appelle l'évènement **C** : « obtenir un résultat inférieur à 8 » donc : **C** ça serait : $\mathbf{C} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ = **Ω** qui est un évènement certain. Donc : l'évènement certain c'est toujours l'univers **Ω**. Chaque fois que vous réalisez **Ω** vous réalisez l'**univers certain**.

Evènement certain = univers Ω

Evènement impossible : on va appeler évènement I : « obtenir un résultat supérieur à 7 » donc I = ensemble vide. $\mathbf{I} = \{\,\} = \emptyset$

Evènement impossible = ensemble vide = ∅

Maintenant, on va définir **2** opérations sur l'univers **Ω**

Opérations

∪ = Union = **OU**

∩ = intersection = **ET**

J'ai l'évènement

A : « obtenir un résultat pair »

B : « obtenir un multiple de 3 »

C : « obtenir les diviseurs de 3 »

Donc :

$\mathbf{A} = \{2, 4, 6\}$

$\mathbf{B} = \{3, 6\}$

$\mathbf{C} = \{1, 3\}$

1ère opération : si on vous demande de calculer

- **A U B** ça veut dire « obtenir un résultat pair ou multiple de 3 » concrètement le (**ou**) est un ou **inclusif**, c'est-à-dire : si le nombre est pair, je le prends, s'il est multiple de 3 je le prends ; s'il est à la fois multiple de 3 et pair je le prends aussi. Si comme je vous dis (cherche secrétaire parlant anglais ou Allemand) ; si elle parle Anglais on la prend, si elle parle Allemand on la prend et si elle parle les **2** langue on la prend aussi. C'est ça le (ou) inclusif. Ne pas confondre ce ou avec le ou de fromage ou dissert qui veut dire fromage tout seul ou dissert tout seul.

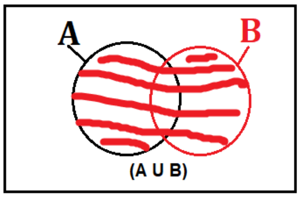
Donc :

(A U B) ça veut dire **A ou B**. donc : **(A U B)** il sera composé de quels éléments ? je prends tous les éléments pair ou multiples de 3.

$(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \{2, 3, 4, 6\}$

$(\mathbf{A} \cup \mathbf{C}) = \{1,2, 3, 4, 6\}$

Ça veut dire la réunion de tous les éléments qui sont (là-dedans), dans **A** et dans **B**, (Schéma)



Maintenant, je vais définir l'opération intersection :

(A ∩ B) ça veut dire **A ET B**.

(A ∩ B) = « obtenir un résultat pair **ET** multiple de 3 (**en même temps**) »

Donc : qu'est ce qui est à la fois pair et multiple de 3. C'est le 6.

(A∩B)$= \{6\}$

$(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = "pair\ et\ un\ diviseur\ de\ 3"$

$(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) = \{\phi\}$ Donc l'évènement **A** et **C** sont **impossible** donc : **incompatibles.**

Deux évènements sont incompatibles s'ils n'ont aucun élément commun. Si la réalisation simultanée est impossible. Si leur intersection est vide.

Si je réuni un évènement et son contraire j'obtiens l'univers **Ω**.

Donc :

$(\mathbf{A} \cup \bar{\mathbf{A}}) = \Omega$ Ça me donne l'univers

$(\mathbf{A} \cup \bar{\mathbf{A}}) = \Phi$ Ça me donne l'évènement impossible. (**Donc** : sont des évènements incompatibles).

Remarque

Lorsque on évoque un évènement **A** qui est composé de certains éléments qui sont le 2, 4, et 6. Ou **B** qui est composé de **2** éléments ; **Ω** est un univers qui est composé de 6 éléments.

Donc : dans ces ensembles y a un certain nombre d'éléments.

Par exemple l'ensemble **A** possède 3 éléments ; l'ensemble **B** ou l'événement **B** constitué d'un ensemble des éléments qui sont **2** éléments ; **C** composé de **2** éléments. L'évènement **(AUB)** « **A** ou **B** » constitué de **4** éléments. L'évènement **(AUC)** constitué de **5** éléments.

Donc : au lieu de dire le nombre d'élément de **A** de **B** de **C**, on va utiliser l'appellation **CARDINAL de A.**

Cardinal de A : c'est le nombre d'élément de cet ensemble.

Donc : ici à **A** on peut associer **Cardinal de A**. et on écrit

Card A = 3

Card C = 2

Card Ω = 6. (C'est le nombre d'éléments total de l'univers **Ω**)

Card (A∩C) = 0.

Card $(\mathbf{A} \cup \bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{card}\ \Omega = 6$

On a l'ensemble **AUB** = $\{2, 3, 4, 6\}$ et A∩B = $\{6\}$

⇒ Card $Card\ (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = 4 = card\ A + Card\ B$

Mais si je regarde bien le **card A** = 3 ; et le **Card B** = 2 ; si on fait 3 + 2 = 5 et pas 4.

Qu'est ce qui s'est passé :

Quand je dis le card **A** je compte les 3 éléments ; et le card **B** je compte les 2 éléments : mais leur intersection est comptée **2** fois : c'est pour cette raison il faut soustraire le card (A∩B) ⇒

$$\mathbf{Card}\ (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{card}\ (\mathbf{A}) + \mathbf{card}\ (\mathbf{B}) - \mathbf{card}\ (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

$\mathbf{Card}\ (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = 3 + 2 - 1 = 4$

Maintenant : si je calcule **AUC** = {1, 2, 3, 4, 6} ; **AՈC** = **Φ** (évènement impossible, car il n'y a aucun élément commun à **A** et **C**).

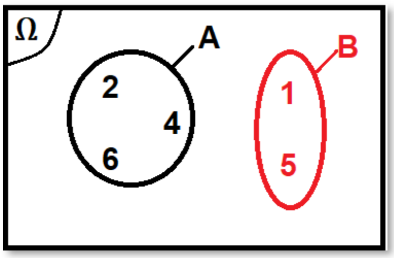
⇒ **card (AUC) = card (A) + card (C) – card (AՈC)** = 3 + 2 – 0 = 5

Donc : **card (AUC) = card (A) + card (C)** et on enlève card (AՈC) car = 0.

En fait je vais résumer d'une façon générale

Si **AՈB = Φ**. (Si **A** et **B** sont incompatible), alors
Card (AUB) = card (A) + card (B)

Ex : deux évènement incompatible **A** et **B** (selon diagramme suivant) il n'y a pas de partie commune entre l'évènement **A** et l'évènement **B**.



Dans tous les autres cas, quelque soit **A** et **B**
Card (AUB) = card (A) + card (B) – card (AՈB)

N.B. : Et si **A** et **B** sont incompatible on enlève le **card (AՈB) car = 0**

Exemple

Admettant qu'on a une classe de **30** élèves. On va dire :

Nous avons 20 élèves étudient l'Anglais,

Nous avons 7 élèves étudient l'Espagnol

Nous avons 3 élèves étudient les 2 langues

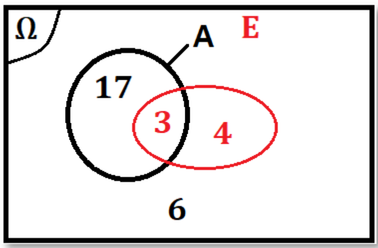
Question

Combien d'élèves n'étudient aucune langue ?

Alors :

Ce genre d'exercice qui apriori peut poser certaines difficultés de lecture, peut être résolu très simplement, grâce à un **diagramme de Venn**.

Vous allez prendre votre univers **Ω** qui est (la classe), dans cette classe il y a des anglophones (**A**), ceux qui étudient l'Anglais ; et il y a **E** ceux qui étudient l'Espagnol, je reprends les éléments qui sont dans l'exercice : on vous dit la seule valeur que je peux poser directement c'est le nombre des élèves qui étudient les **2** langues = **3**. Comme votre camarade dit je commence à mettre entre les deux évènement le nombre **3**, (vous me suivez ou pas ?) maintenant je vais déduire le reste : pour l'anglais tous l'évènement **A = 20** et comme y a **3** entre le **A** et le **E**, il nous reste 17 qui n'étudient que l'anglais tout seul. Entre le A et le E y a **3** qui étudient l'espagnol mais au total combien y en a des espagnolisons ? y a **7** donc il reste **4**. Alors : tous ce qui reste c'est ceux qui n'étudient aucune langue. Donc : il reste **6** qui n'étudient ni l'espagnol ni l'anglais. Là j'ai présenté le tableau comme ça (**diagramme de Venn**)



J'aurais pu le présenter différemment sous forme d'un tableau comme ceci :

	E	$\bar{E}$	$\sum$
A	3	17	20
$\bar{A}$	4	6	10
$\sum$	7	23	30

A : qui étudie l'anglais

$\bar{\mathbf{A}}$: *qui n'étudiepas l'anglais*

E : qui étudie l'Espagnol

$\bar{\mathbf{E}}$: *qui n'étudiepas l'Espagnol*

(**A∩E**) = l'élève étudie les **2 langues**

$(\mathbf{A} \cap \bar{\mathbf{E}}) =$ *ça disigne que l'élève qui étudie uniquement l'anglaiset pas l'espagnol*

$(\bar{A} \cap E) =$ *se sont les élèves qui étudient uniquement l'espagnolet pas d'anglais*

$(\bar{A} \cap \bar{E}) =$ *c'est les élèves qui étudient aucune langue* (**Ni anglais ni espagnol**).

	E	$\bar{E}$
A	$A \cap E$	$A \cap \bar{E}$
$\bar{A}$	$\bar{A} \cap E$	$\bar{A} \cap \bar{E}$

Questions

1) Combien d'élèves étudient au moins une langue ? (Ça veut dire étudie l'anglais tout seul ou l'espagnol tout seul ou les deux). C'est bien 17 + 3 + 4 =

24. Au moins une langue ça se traduit par : **card** (**AUE**) c'est-à-dire anglais ou espagnol.

⇒ $\mathbf{Card}\ (\mathbf{A} \cup \mathbf{E}) = \mathbf{Card\ A} + \mathbf{Card\ E} - \mathbf{Card}\ (\mathbf{A} \cap \mathbf{E})$ = 20 + 7 – 3 = 24.

On va définir ce qui est une probabilité :

La probabilité d'un évènement **A** notée $\mathbf{P}(\mathbf{A})$ est un nombre compris entre :

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

La probabilité est un nombre qui ne sera jamais négatif et qui ne dépassera jamais 1

Et tel que :

1) $\mathbf{P}(\boldsymbol{\Omega}) = 1$
2) Si $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) = \emptyset$ **alors** $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B})$

Conséquences

$\mathbf{A} \cup \overline{\mathbf{A}} = \boldsymbol{\Omega}$

$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \overline{\mathbf{A}}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\Omega})$

$\mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}) = \mathbf{1}$

$\mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}) = \mathbf{1} - \mathbf{P}(\mathbf{A})$

Exemple

J'ai une urne qui contient des boules rouges, et des boules blanches, je prélève une boule au hasard, et si je vous dis que la probabilité que la boule soit rouge est de **0,7** ⇒ P(R) = 0,7 qu'est-ce que vous allez déduire ? ⇒ P(B) = 1 – P(R) = 1 – 0,7 = 0,3. la probabilité que la boule soit blanche est de 0,3. ⇒ P(B) = 0,3. Voilà l'intérêt d'un évènement et son contraire car la boule si elle n'est pas rouge donc elle est blanche.

Exemple 02

Si je vous dis je lance une pièce de monnaie qui n'est pas équilibrée, et si je vous dis que la probabilité d'avoir face est de 0,4 ⇒ P(F) = 0,4. Vous déduisez que la probabilité d'avoir pile c'est 1 – P(F) ⇒ P(P) = 1 – P(F) = 1 – 0,4 = 0,6. Parce que pile et face sont des évènements contraires.

Maintenant on va expliquer comment faire pour calculer une probabilité :

Je prends l'exemple du dé, et après on va généraliser le résultat.

Admettant que je lance un dé, et je veux calculer la probabilité d'obtenir un résultat pair, si vous raisonner intuitivement vous dites que si le dé est équilibré j'aurais autant de chances de résultats pair que de résultat impair, donc, forcément la probabilité d'avoir un résultat pair c'est 0,5 ; puis que c'est 50 ; 50.

Je lance un dé ; l'univers Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Et tous les éléments élémentaires sont tous incompatibles 2 à 2. C'est-à-dire l'élément 1 et l'élément 2 sont incompatible entre eux et même chose entre 2 et 3 etc.

La situation d'**équiprobabilité** c'est-à-dire on a autant de chance d'avoir le 1 ou le 2 ou le 3 etc.

Donc :

$\{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$

$\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \ldots .. \cup \{6\} = \Omega$

$P(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \ldots .. \cup \{6\}) = P(\Omega)$

$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + \cdots .. + P(\{6\}) = 1$

Si le dé est équilibré, c'est-à-dire on se place en situation d'équiprobabilité, on a donc : $P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = \cdots .. = P(\{6\}) = p$

C'est-à-dire : p + p + p + p + p + p = 1 ⇒ 6p = 1 ⇒ p = $\frac{1}{6}$

Donc la probabilité d'avoir le 1 = à la probabilité d'avoir le 2 = …… = la probabilité d'avoir le 6 = 1

Maintenant, on va répondre à la question ; quelle est la probabilité lors que on lance un dé équilibré d'obtenir un résultat pair ?

$\{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$

$\mathbf{A} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}, \mathbf{6}\}$

$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}(\{\mathbf{2}\}) + \mathbf{P}(\{\mathbf{4}\}) + \mathbf{P}(\{\mathbf{6}\})$

$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$

$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{Card\ A}}{\mathbf{Card\ \Omega}}$

$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{Card\ A}}{\mathbf{Card\ \Omega}}$

Card A = le nombre d'élément contenus dans l'évènement **A**

Card Ω = le nombre de résultats possibles

Donc : on va écrire une formule plus littérale,

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{Nombre\ de\ cas\ favorables}}{\mathbf{Nombre\ de\ cas\ possibles}}}$$

Exemple

Si on reprend l'exemple de toute à l'heur de la classe de **30** élèves, nous avons la répartition suivante :

	E	$\bar{E}$	$\sum$
A	3	17	20
$\bar{A}$	4	6	10
$\sum$	7	23	30

Et on va répondre aux questions suivantes :

On désigne une personne au hasard, quelle est la probabilité pour que cette personne étudie l'Anglais ? et ça s'écrit **P(A)**.

$\mathbf{P(A)} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{30}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$

Et forcement la probabilité qu'il n'étudie pas l'anglais est $\mathbf{P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}}$

$\mathbf{P(E)} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{30}}$, Et cette fraction est **irréductible**.

Et forcement l'évènement contraire

$$\mathbf{P(\bar{E}) = 1 - \frac{7}{30}\ \text{ou bien je fais}\ \frac{23}{30}\ \text{et}\ \frac{7}{30} + \frac{23}{30} = 1}$$

Comment je traduis la probabilité que l'élève étudie les 2 langues ?

$$\mathbf{P(A \cap E) = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}}$$

Quelle est la probabilité que l'élève étudie au moins une langue ?

C'est-à-dire : $\mathbf{P(A \cup E)} = c'esta\ dire\ l'élève\ étudie\ l'anglais\ ou\ l'espagnol$

On a dit tout à l'heure que

$$\mathbf{\frac{Card(A \cup b)}{Card\Omega} = \frac{CardA}{Card\Omega} + \frac{CardB}{Card\Omega} - \frac{Card(A \cap B)}{Card\Omega}}$$

$$\mathbf{P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = \frac{20}{30} + \frac{7}{30} - \frac{3}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}}$$

Et c'est le résultat dans le tableau

	E	$\bar{E}$	$\sum$
A	3	17	20
$\bar{A}$	4	6	10
$\sum$	7	23	30

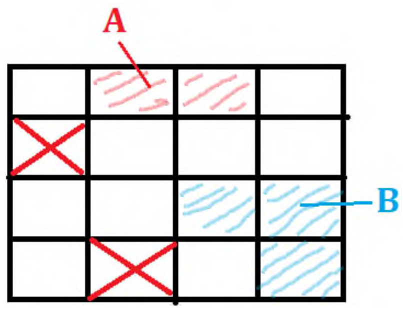
Donc : 3 + 17 + 4 = 24/30

Et je retiendrais la formule suivante :

$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}}$$

Exemple

Admettant que j'ai une cible sur laquelle je tire, et la cible est schématisée comme suite : on a l'évènement **A** hachuré en rouge et l'évènement **B** hachuré en bleu, et la personne qui va tirer sur la cible (son projectile va forcement atterrir dans le cadre), il n'attirera jamais à l'extérieur du carré, il sera forcément attiré dans le carré, donc, la probabilité est proportionnelle à l'aire de chaque carré, autrement dit j'ai autant de chance que le projectile atterrisse sur le carré en croix ou sur un autre carré en croix aussi, c'est la même probabilité, puis que c'est le même carré,



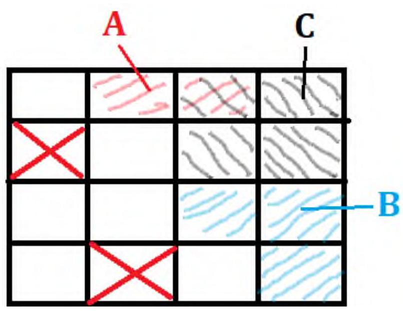
La probabilité de **A** est proportionnelle à l'aire, on a **16** carrés, pour le rouge on **2** carrés, donc :

$$P(A) = \frac{2}{16}; P(B) = \frac{3}{16};$$

Maintenant : quel est la probabilité que le projectile atterrisse au moins dans la partie coloriée ? et ça s'écrit comme ça : **P(AUB)** et ces **2** évènement sont incompatibles.

$$\mathbf{P(A \cup B)} = \frac{2}{16} + \frac{3}{16} = \frac{5}{16}$$

Maintenant admettant que j'introduise un évènement noir, et que l'évènement noir soit comme dans le schéma, et cet évènement je l'appel C, (schéma suivant)



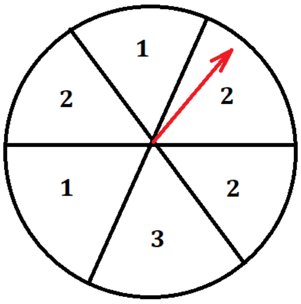
1La probabilité de **A** ne change pas.

$\mathbf{P6(C)} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{16}}$ Maintenant je dis : quelle est la probabilité que le projectile atteint la partie rouge ou noir ? ⇒ P(AUC). Donc :

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{2}{16} + \frac{4}{16} - \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

Exemple

Admettant qu'on ait une roue de loterie (selon Schéma), et qu'on fasse tourner la flèche qui s'arrête sur n'importe quel secteur angulaire qui sont égaux en surfaces.



Quelle est la probabilité d'obtenir le **1** ? je vais appeler ça $\mathbf{P_1}$

Y a **6** positions possibles. La flèche peut atterrir sur n'importe quel secteur.

Comme ils ont tous la même aire, donc la probabilité est $\mathbf{\frac{1}{6}}$ d'atterrir dans l'un de ces secteurs,

Par conséquent la probabilité d'avoir le **1** c'est :

$$P_1 = \frac{2}{6};\ P_2 = \frac{3}{6};\ P_3 = \frac{1}{6}.$$

Et en toute logique

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6}$$

Alors : une autre situation :

Je vous dis par exemple on lance **2** dés, numérotés de **1 à 4**, des dés à **4** faces, et on les lance tous les **2** et on fait la somme obtenue, des résultats affichés, donc, d'abord on va déterminer le nombre de résultats possibles le **1er** dé peut donner le 1, 2, 3 ou le 4 et même chose pour le **2ème** dé, si je fais un inventaire des résultats, je peux obtenir un tableau à double entrées, (Schéma)

	1	2	3	4
1	**2**	**3**	**4**	**5**
2	**3**	**4**	**5**	**6**
3	**4**	**5**	**6**	**7**
4	**5**	**6**	**7**	**8**

Y a **16** résultats possibles

On a **4** choix pour le **1er** dé et **4** pour le **2ème** dé ⇒ **4** x **4** = **16**.

On me demande la probabilité que le résultat soit multiple de 3,

$$\mathbf{P(multiple\ de\ 3)} = \frac{5}{16}$$

Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat pair ? j'ai autant de résultat pair que de résultats impairs, donc, la logique : c'est **0,5** y a autant de résultats pairs que des résultats pairs par conséquent la probabilité que la somme soit paire c'est $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{16}}$

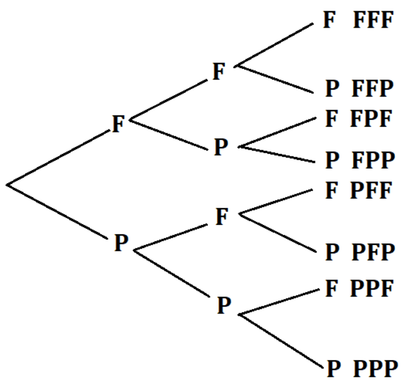
$$\mathbf{P(pair)} = 0{,}5 = \frac{8}{16}$$

Exemple

Admettant que je lance **3** fois de suite une pièce de monnaie équilibrée, c'est-à-dire j'ai autant de chance d'avoir pile que d'avoir face, calculer la probabilité d'avoir **3** fois face. Quelle est la probabilité d'avoir **2** fois pile.

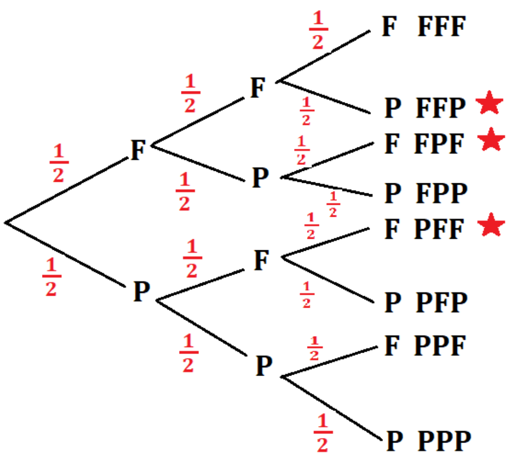
Je vais d'abord introduire la notion d'**arbre pondéré**

Je lance ma pièce de monnaie 1 fois, soit j'obtiens Face soit j'obtiens Pile, je la lance une **2ème** fois, soit j'obtiens Face soit j'obtiens Pile, etc., mon **3ème** lancer peut générer soit un Face soit un Pile, **(Schéma)**



1ère question :

Quelle est la probabilité d'obtenir **3** fois face, alors **1ère** chose (**1ère**) démarche, je dis j'ai combien de choix pour le **1er** lancer (**2** choix) pour le **2ème** lancer j'ai 2 choix et 2 choix pour le **3ème** lancer. Ce qui fait **2** x **2** x **2** = **8**. Donc y a 8 résultats possibles.je veux calculer la probabilité d'avoir 3 faces, $\mathbf{P(FFF)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$, $\mathbf{P(PPP)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$;
Quelle est la probabilité d'obtenir 2 faces ? y a combien de résultats qui débouchent sur **2** faces. Y a **3** résultats. $\mathbf{P(\{F, F, P\})} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$
Ma pièce de monnaie est équilibrée ce veut dire la probabilité d'avoir face est $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, la probabilité d'avoir pile est $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$, (comme indiqué sur schéma).



Voilà ce qu'il faut retenir

Lorsque on a un arbre pondéré, sur chaque branche y a une probabilité, pour trouver la probabilité au bout de l'arbre on fait le produit de toutes les probabilités sur le chemin de cette issue, donc :

$$\mathbf{P(FFF)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Maintenant pour calculer la probabilité d'avoir 2 faces, je vais d'abord calculer toutes les issues à 2 face en multipliant les probabilités sur chaque branche ensuite on fait le total de touts les résultats obtenus ce qu'on appelle les probabilités totales.

Donc :

$$\mathbf{P(\{F,F,P\})} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Exemple

On prend des articles d'un échantillon, et l'article peut présenter **2** types de défauts

Défaut **A** ou le défaut **B**. cette situation je la matérialise par un arbre sur le tableau :

Je tire un article soit il a le défaut (on le note **A**) soit il n'a pas de défaut on le note $\overline{\mathbf{A}}$.

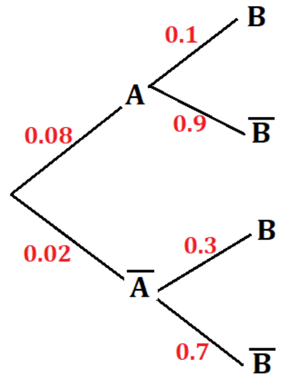
A : l'article a le défaut A

$\overline{\mathbf{A}}$: l'article n'a pas le défaut A

B : l'article a le défaut B

$\overline{\mathbf{B}}$: l'article n'a pas le défaut B

Je pose des probabilités sur chaque branche comme suit :



Quelle est la probabilité que l'article ait le défaut **A** et le défaut **B**.

$\mathbf{P(A \cap B)} = 0{,}08\ \times 0{,}1 = 0{,}008$

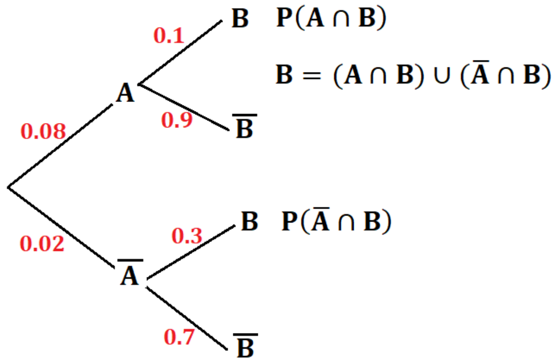
Quelle est la probabilité que l'article n'ait aucun défaut ?

$\mathbf{P(\overline{A} \cap \overline{B})} = 0{,}92 \times 0{,}7 = 644$

Quelle est la probabilité que l'article ait le défaut **B** ? (C'est les probabilités totales)

On a 2 issus on fait l'addition de leurs résultats :

$\mathbf{P(B)} = \mathbf{P(A \cap B)} + \mathbf{P(\overline{A} \cap B)} = (0{,}08 \times 0{,}1) + (0{,}92 \times 0{,}3) = 0{,}284$



Remarque

Si j'ai la probabilité qui est devant le **1er B = 0,1** et celle devant le **2ème B = 0,3**, (n'est pas la même) donc sont **2** évènements qui ne sont pas indépendants.

****

Probabilités

- **Comment étudier une expérience aléatoire ?**
- **Comment déterminer la probabilité d'un évènement ?**
- **Comment utiliser efficacement un arbre de probabilité ?**
- **Voir les propriétés concernant les évènements indépendants et les évènements incompatibles.**
- **L'étude des variables aléatoires**

But : c'est l'étude des expériences aléatoires (Un lancer de dé, un tirage dans une urne, un jeux se basant sur le hasard ….), en calculant « la chance » ou « la possibilité » de certains évènements aléatoires.

Définition d'une probabilité

Dans un univers **S**, qui regroupe les évènements aléatoires possibles d'une expérience aléatoire. Si, on définit ''**A**'' comme étant un évènement aléatoire (ça peut être ''**A**'' correspond à l'obtention du chiffre **6** lors qu'on lance un dé.

A = ''l'obtention d'un chiffre 6''

Alors, pour la probabilité de **A**, on écrit :

$$\mathbf{P(A)=} \frac{\textbf{nombre de cas favorables correspondant à la possibilité A}}{\textbf{le nombre total des cas}}$$

Exemple

On lance un dé possédant **2** faces vertes et **4** faces rouges

L'évènement **A** : ''Obtenir une face rouge''

B : ''Obtenir une face verte''

On lance le dé une fois :

Donc, y a **6** possibilités, or on sait que ce dé présente **2** faces vertes et **4** faces rouges.

Donc :

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textbf{4 faces rouges}}{\textbf{6 faces possibles}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

$$\mathbf{P(B)} = \frac{\textbf{nombre de possibilité de l'évènement B}}{\textbf{le nombre de possibilité totales}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{6}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

Propriétés directes : il faut toujours comprendre que la probabilité d'un évènement est toujours comprise entre **0 et 1 ⇒ 0 ≤ P(A) ≤1.**

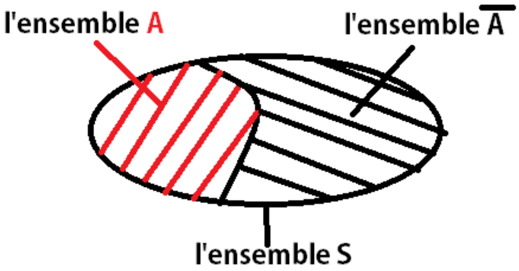
Lorsque la probabilité = 0 ⇒ ça veut dire que cet **évènement est impossible** et lorsqu'elle égale à **1** ça veut dire que cet évènement est **inéluctable** (**évènement sûr**).

Inéluctable = impossible d'empêcher ou d'éviter

⇒ **P(A)** ∈ [**0** ; **1**]. (**Appartient à un intervalle fermé).**

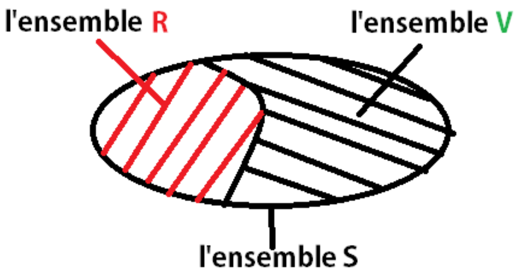
- Si $\overline{\mathbf{A}}$ est l'évènement complémentaire de **A**.

Exemple : dans l'ensemble **S** on a :



L'ensemble $\overline{\mathbf{A}}$ correspond à tous les évènements qui n'appartient pas à **A**.

Dans notre exemple, lorsque on lance le dé, on peut avoir soit une face rouge soit une face verte. Donc, ces deux évènements sont complémentaires, c'est-à-dire on peut avoir soit **R** soit **V** et on ne peut pas les avoir tous les deux donc (ils sont **complémentaires**).



$\Rightarrow \mathbf{P(A) = \frac{2}{3}}$ **et** $\mathbf{P(B) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1}$

$\Rightarrow \mathbf{P(\overline{A}) = 1 - P(A).}$

Exemple : on lance un dé qui a **2** faces rouges, **1** face verte et **3** faces blanches.

2R, **1V** et **3B**.

- Calculer la probabilité d'avoir une face rouge "**R**"
- Calculer la probabilité d'avoir une face verte "**V**"

P(R)= $\mathbf{\frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$ **;** $\mathbf{P(V) = \frac{1}{6}}$ **;** $\mathbf{P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$.

****

Cours expérience aléatoire

Maitre : Marc HAMEAU

Expérience aléatoire

Définition

On dit qu'une expérience est aléatoire lorsqu'elle a plusieurs issues possibles et que l'on ne peut ni prévoir, ni calculer laquelle de ces issues sera réalisée.

Univers

Définition

L'ensemble des issues possibles est appelé univers. Il est noté **Ω**

Loi de probabilité

Définition

Définir une loi de probabilité sur **Ω**, c'est associer à chaque issue un nombre compris entre **0** et **1** de sorte que la somme de tous ces nombres soit égale à **1**.

Evènement

Définition

Un évènement **A** est une partie de **Ω.**

Remarque

On observe plusieurs types d'évènements. Parmi eux :

- **L'évènement impossible** qui ne comporte aucune issue
- **L'évènement certain** qui comporte toutes les issues.

Issue

Définition

Une issue est un évènement élémentaire. On dit que chaque issue qui est dans **A**, réalise l'évènement **A**.

Probabilité d'un évènement

Propriété

La probabilité d'un évènement est sa fréquence stabilisée de succès, observée après la répétition de l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

Définition

La probabilité d'un évènement **A**, notée **p(A)**, est la somme des probabilités des évènements élémentaires inclus dans **A.**

Exercice

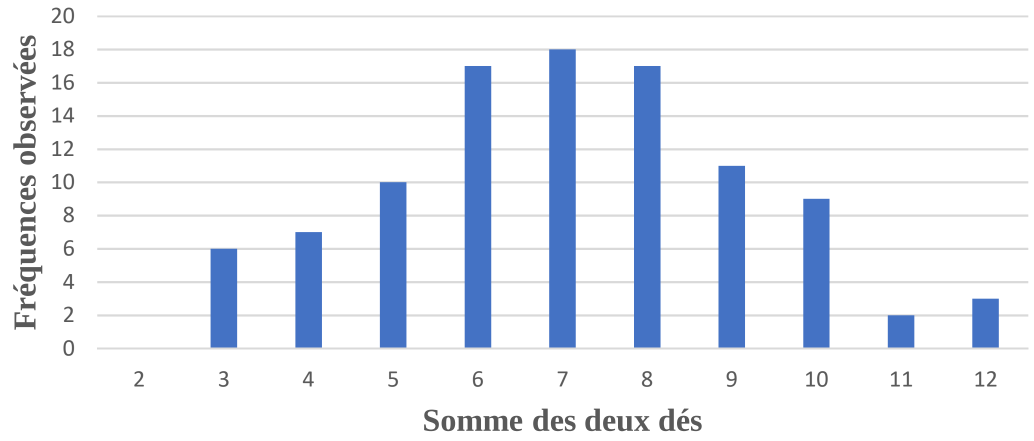
On a simulé le lancer de **2** dès **100 fois** sur **ALGOBOX** et les résultats obtenus sont comme suite :

Simulation de **100** lancers de **2** dés et calcul des fréquences observées pour la somme des points obtenus. Tracé du diagramme en bâtons des fréquences observées.

N = 100 lancés	% age	Observations
2 points →	0 %	des cas observés
3 points →	6 %	des cas observés
4 points →	7 %	des cas observés
5 points →	10 %	des cas observés
6 points →	17 %	des cas observés
7 points →	18 %	des cas observés
8 points →	17 %	des cas observés
9 points →	11 %	des cas observés
10 points →	9 %	des cas observés
11 points →	2 %	des cas observés
12 points →	3 %	des cas observés

Le diagramme tracé en bâton représentant les observations des fréquences de chaque chiffre lors de **100** jets des **2** dès :

Fig. 01: fréquences observées lors de 100 jets de 2 dés



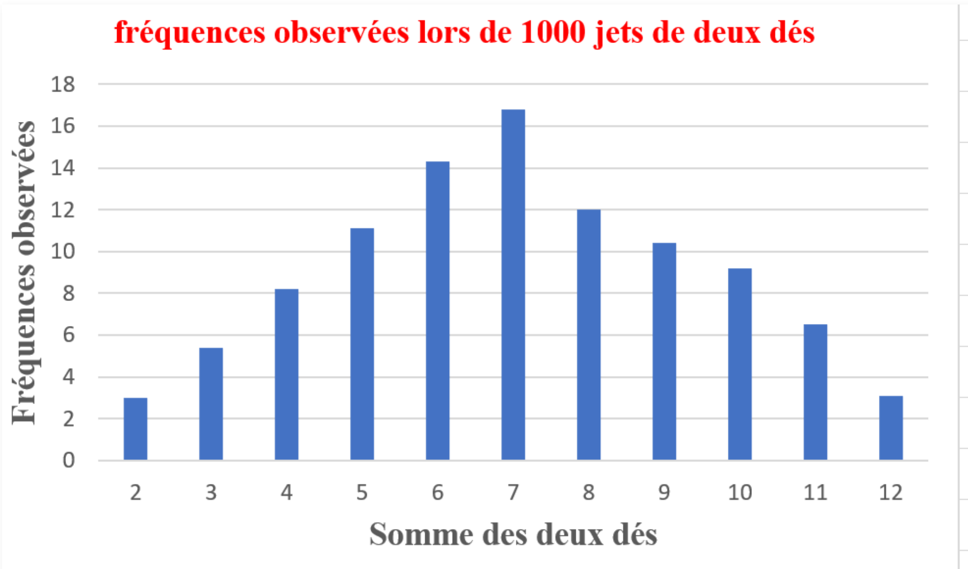
On remarque que

- La somme 2 n'a été observé aucune fois
- La somme 3 a été observé dans 6 % des cas
- La somme 4 a été observé dans 7 % des cas

Si on répète 1000 fois cette expérience on a obtenu les résultats suivants :

Simulation de 1000 lancers de 2 dés et calcul des fréquences observées pour la somme des points obtenus. Tracé du diagramme en bâtons des fréquences observées.

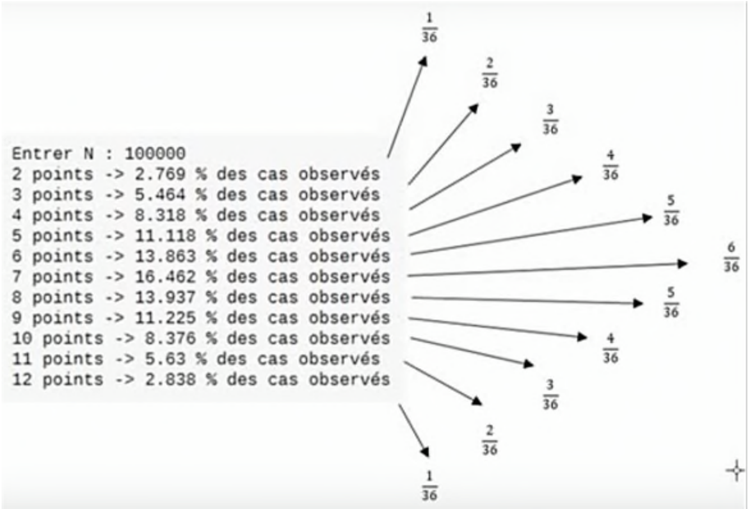
N = 1000 lancés	**% age**	**Observations**
2 points →	3 %	des cas observés
3 points →	5.4 %	des cas observés
4 points →	8.2 %	des cas observés
5 points →	11.1 %	des cas observés
6 points →	14.3 %	des cas observés
7 points →	16.8 %	des cas observés
8 points →	12 %	des cas observés
9 points →	10.4 %	des cas observés
10 points →	9.2 %	des cas observés
11 points →	6.5 %	des cas observés
12 points →	3.1 %	des cas observés



Remarque :

- On a obtenu la somme de 2 dans 3 % des cas
- On a obtenu une somme de 12 dans 3 % des cas également
- Une somme de 3 dans 5,4 % des cas
- Une somme de 11 dans 6,5 % des cas

Regardant ce que nous donne cette simulation si on lance 100.000 fois les deux dès :



N = 100.000 lancés	% age	Probabilités	Observations
2 points →	2.769 %	$\frac{1}{36}$	des cas observés
3 points →	5.464 %	$\frac{2}{36}$	des cas observés
4 points →	8.318 %	$\frac{3}{36}$	des cas observés
5 points →	11.118 %	$\frac{4}{36}$	des cas observés
6 points →	13.863 %	$\frac{5}{36}$	des cas observés
7 points →	14.462 %	$\frac{6}{36}$	des cas observés
8 points →	13.937 %	$\frac{5}{36}$	des cas observés
9 points →	11.225 %	$\frac{4}{36}$	des cas observés
10 points →	8.376 %	$\frac{3}{36}$	des cas observés
11 points →	5.63 %	$\frac{2}{36}$	des cas observés
12 points →	2.838 %	$\frac{1}{36}$	des cas observés

On remarque qu'on a obtenu la somme de **2** dans **2,7 %** des cas

La somme de **3** dans **5,4 %** des cas

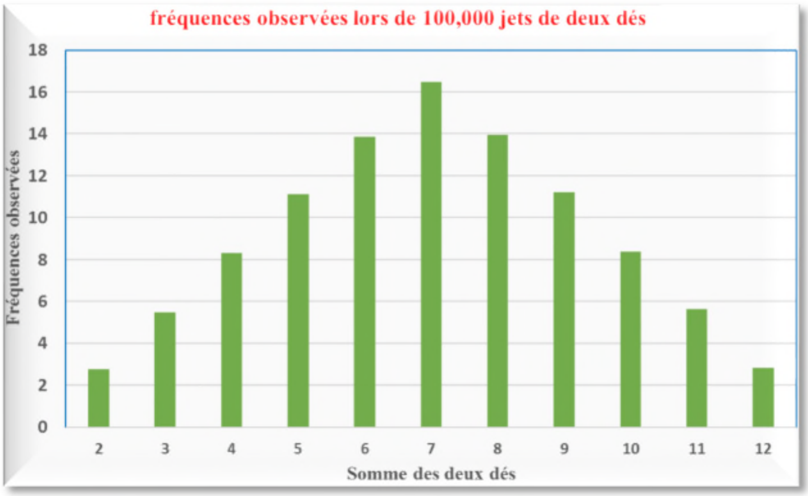
Et ces nombres tendent à se rapprocher de fractions bien identifiées qui sont :

Pour obtenir **2** = $\frac{1}{36}$

Pour obtenir **3** = $\frac{2}{36}$

Pour obtenir **4** = $\frac{3}{36}$

Pour obtenir **7** = $\frac{6}{36}$

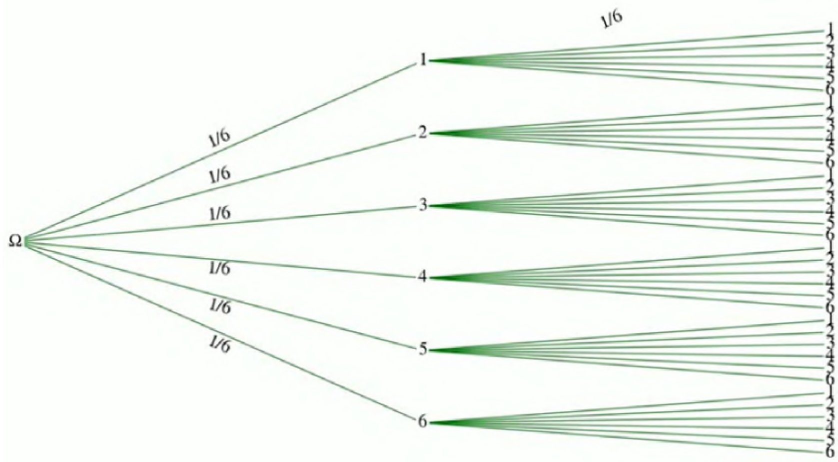


Cette observation des fréquences pour une expérience réalisée un très grand nombre de fois nous permet de déterminer quelle sera la probabilité de chacun des évènements élémentaires de l'expérience aléatoire observée.

Comment allons-nous modéliser ces expériences ? sans avoir à la répéter un très grand nombre de fois :

Plusieurs outils s'offrent à nous :

Nous pouvant réaliser un arbre dans lequel on a tous les issues possibles : à l'issu du premier lancer 1,2,3,4,5,6 et à la suite du deuxième lancé 123456.



Pour calculer la probabilité d'obtenir 2 : on multipliant les probabilités sur les deux branches pour obtenir 1 et 1 est $\mathbf{\frac{1}{6}x\frac{1}{6}} = \mathbf{\frac{1}{36}}$

DÉFINITION

La probabilité d'un évènement A, notée $p(A)$, est la somme des probabilités des évènements élémentaires inclus dans A.

Si on veut calculer la probabilité d'obtenir **2**, il suffira sur notre arbre de dénombrer tous les chemins qui mènent à **2**.

Pour la somme de **3** on dénombre les deux chemins qui sont : 1+2 et 2+1

En additionnant les probabilités sur ces deux chemins nous obtiendrons la probabilité totale d'obtenir **3**.

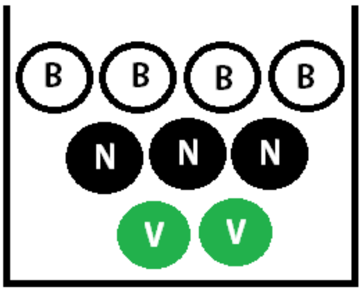
****

Travaux dirigés

Tirage simultané

Exemple

On tire **2** boules simultanément d'une urne contenant **4** boules blanches, **3** boules Noires et **2** boules vertes. (**4B ; 3N ; 2V**).



- Calculer la probabilité de tirer **2** boules blanches c'est l'évènement ''**A**''
- Calculer la probabilité de tirer **1** boule noire et **1** boule verte, c'est l'évènement ''**B**''

Solution :

$$\mathbf{P(A) = \frac{le\ nombre\ de\ cas\ favorables}{le\ nombre\ de\ cas\ total}}$$

⇒ le nombre de cas total (on utilise $\mathbf{C_n^p}$ car on a 9 boules et en tire 2 blanches.

⇒ $\mathbf{C_n^p = \binom{9}{2}}$

⇒ **P(A) =** $\mathbf{\frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$

P(B) = $\mathbf{\frac{\binom{3}{1} x \left(\binom{2}{1}\right)}{\binom{9}{2}} = \frac{3\ x\ 2}{36} = \frac{1}{6}}$

****

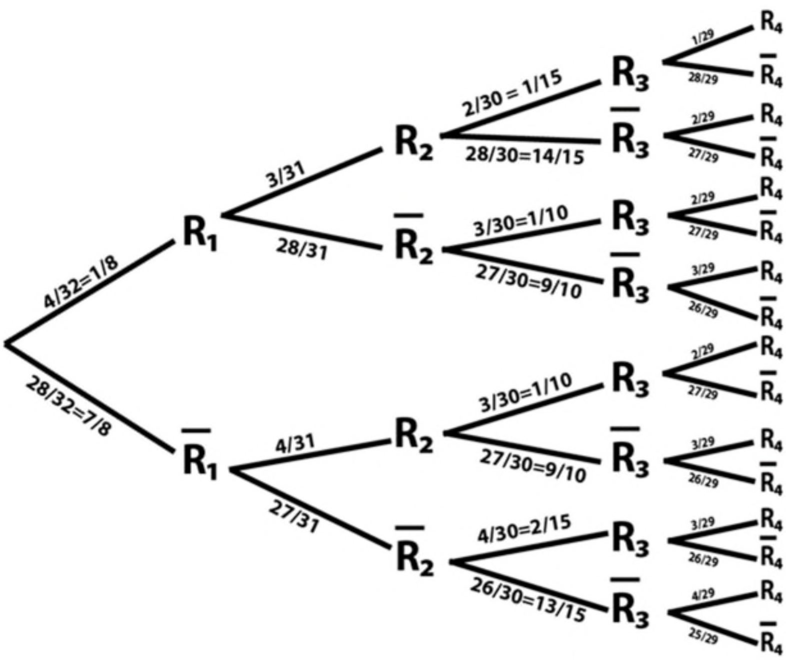
Tirage sans remise et arbre chiant

Exercice

Dans un jeu de 32 cartes, on prélève successivement et sans remise, 4 cartes :

Quelle est la probabilité que **3** exactement de ces cartes soient des rois ?

Solution



$$-RRR\bar{R} \Rightarrow P(RRR\bar{R}) = \frac{1}{8}\times\frac{3}{31}\times\frac{1}{15}\times\frac{28}{29} = \frac{84}{107880}$$

$$-RR\bar{R}R \Rightarrow P(RR\bar{R}R) = \frac{1}{8}\times\frac{3}{31}\times\frac{14}{15}\times\frac{2}{29} = \frac{84}{107880}$$

$$-R\bar{R}RR \Rightarrow P(R\bar{R}RR) = \frac{1}{8}\times\frac{28}{31}\times\frac{15}{15}\times\frac{2}{29} = \frac{84}{107880}$$

$$-\bar{R}RRR \Rightarrow P(\bar{R}RRR) = \frac{7}{8}\times\frac{4}{31}\times\frac{15}{15}\times\frac{2}{29} = \frac{84}{107880}$$

$$C_4^3 = \binom{4}{3} = 4$$

$$\text{Donc : P(3Rois)} = \binom{4}{3}\times\frac{7}{8990} = \frac{4\times7}{2\times4495} = \frac{14}{4495}$$

****

Comment utiliser un arbre pondéré de probabilité ?

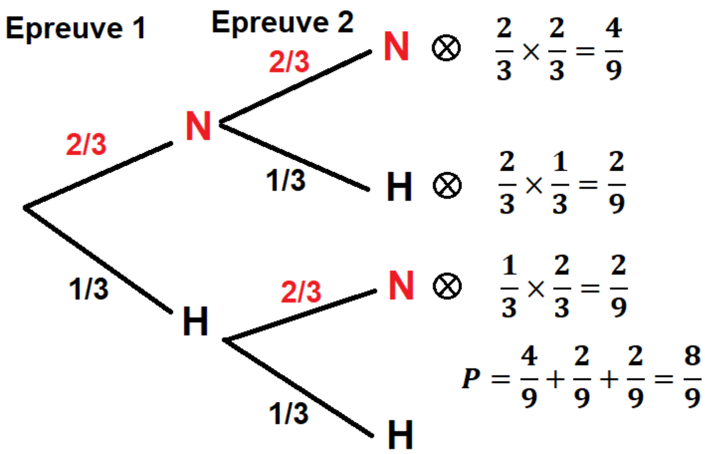
Il nous permet de modéliser ou d’écrire une expérience aléatoire qui se déroule en deux temps ou alors un jeu en **3** étapes etc…

Calculer une probabilité à l'aide d'un arbre

Les probabilités Travaux dirigés

Exercice 01

On tire deux fois de suite une carte, avec remise, dans un jeu de 3 cartes dont 2 cartes représentent le poisson Némo. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le poisson Némo ?



Donc cet évènement à de fortes chance pour qu'il se réalise.

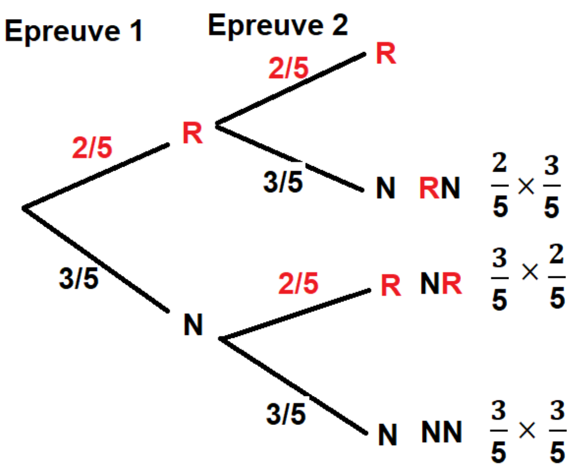
Exercice 02

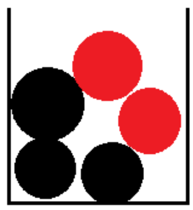
On tire au hasard et avec remise une boule de l'urne deux fois de suite. Déterminer la probabilité d'obtenir :

a) 2 boules noires

b) 1 boule noire et 1 boule rouge.

Solution





a) $\mathbf{P_1} = \frac{3}{5} \text{ x } \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

b) $\mathbf{P_2} = \frac{2}{5} \text{ x } \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \text{x } \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$

Donc ; La probabilité d'obtenir une boule noire et une boule rouge dans n'importe quel ordre est de $\frac{12}{25}$.

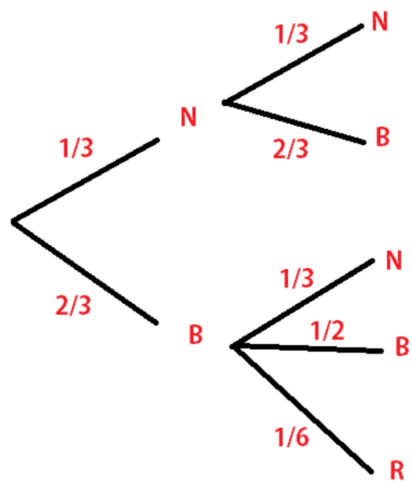
Remarque : Ce qu'il faut bien retenir, l'idée générale du fonctionnement d'un arbre de probabilité c'est que sur un même chemin je multiplie au bout des chemins je les additionne.

Exemple : on dispose de deux dés : le dé **A** possède **2** faces noire et **4** faces blanches ; le dé **B** possède **2** faces noires, **3** faces blanches et 1 face rouge.
Le jeu commence par un lancer du dé **A** :

- Si c'est une face blanche → on lance le dé **B**
- Si c'est une face Noire → on relance le dé **A**

On note les couleurs à chaque lancer.

Cette expérience se déroule en deux temps, en **1**^er^ on lance le dé **A** qui a **2** possibilités soit noire soit blanc.



- $\mathbf{P(B)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
- $\mathbf{P(N)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

A l'issu de chaque expérience la somme des probabilités = **1**.

→ la première branche c'est la principale

→ la deuxième branche c'est la conditionnelle.

Le $\frac{1}{3}$ sur la **2ème** branche de la noire veut dire (que c'est la probabilité d'avoir **N** sachant qu'on avait une face noire auparavant → elle s'écrit $\mathbf{P_N(N)}$

Le $\frac{1}{6}$ de la rouge correspond à la probabilité d'avoir une boule rouge sachant qu'on avait déjà une blanche → elle s'écrit $\mathbf{P_B(R)}$

Donc :

$$\mathbf{P_B(R) = \frac{1}{6}}$$

$$\mathbf{P_B(N) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}}$$

On peut utiliser cet arbre pour calculer la probabilité d'une intersection d'évènements.

- **Calculer la probabilité d'avoir 2 boules blanches :**

C'est-à-dire on calcule la probabilité d'avoir après deux tirages, **1 boule** blanche au **1er** tirage et **1 boule** blanche au **2èm** tirage.

Donc, ça va correspondre au chemin ou branches qui passent par **B** et **B** donc ça va correspondre aux produits des deux probabilités qui sont notés sur les deux branches ou sur ce chemin et qui sera comme suite :

$$\mathbf{P(B \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}}$$

- Calculer la probabilité d'avoir deux boules noires c'est-à-dire **N** et **N** :

$$\mathbf{P(N \cap N) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}}$$

Conclusion

L'utilisation de cet arbre pondéré c'est pour avoir et pouvoir calculer les probabilités d'intersection.

****

Probabilités conditionnelles et arbres pondérés.

Kiffelesmaths.com

Nous allons apprendre à manipuler un arbre pondéré ; alors : quand on a une population ou un ensemble d'éléments qu'on peut classer selon différents critères.

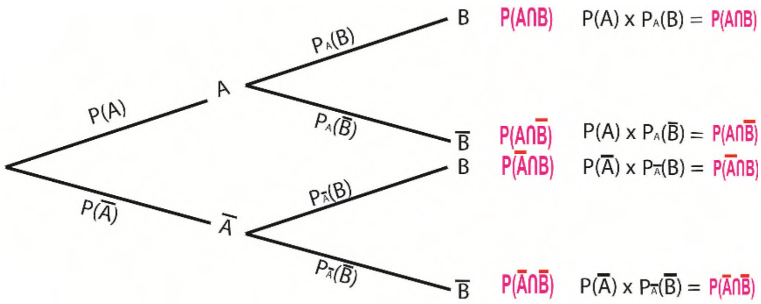
Exemple : sur un ensemble d'éléments, on va les classer suivant le critère A et d'autre qui ne répond pas au critère A et aussi dans ce même ensemble d'éléments qu'on peut les classer selon un autre critère qui est appelé B ; donc dans cet ensemble d'éléments de A y a des éléments qui répondent au critère B et d'autres qui ne répondent pas au critère B.

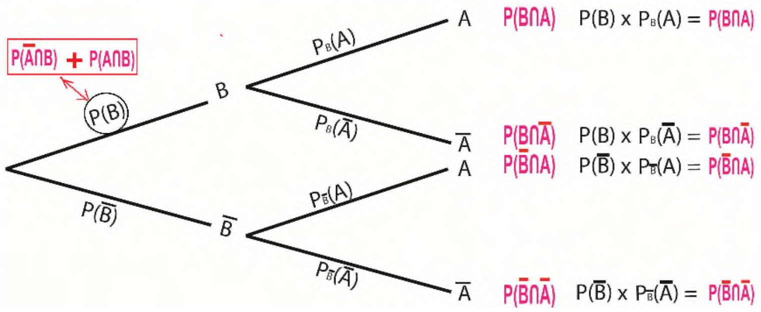
Exemple

Dans une classe y a des filles et des garçons, donc on peut l'ensemble des élèves selon le critère « sexe » **F** "fille" ou G "garçon", comme on peut les classer selon un autre critère exemple « les personnes qui aiment les maths ou n'aiment pas les maths » $A \text{ ou } \bar{A}$, et « Malades ou pas Maldes » $M \text{ ou } \bar{M}$.

Par exemple la même personne peut être garçon et aime les maths ou garçon et n'aime pas les maths.

Donc on peut les classer selon le critère **A** et sera (probabilité du critère **B** sachant le critère **A**) est se note : $\mathrm{P_A(B)}$





$$\mathbf{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

****

Probabilités conditionnelles

Chermak

Exemple

Une étude porte sur un lot de **100** articles qui présente **2** types de défauts, défaut **A** et le défaut **B**, On présente les résultats au niveau d'un tableau ;

A : l'article a le défaut A

$\bar{\mathbf{A}}$: $l'article n'a pas le défaut\ A$

B : l'article a le défaut B

$\bar{\mathbf{B}}$: $l'article n'a\ pas\ le\ défaut$ B Qu'on désigne par $\bar{\mathbf{B}}$

Parmi les **100** article **12** ont le défaut **A** et **8** ont le défaut **B**. par complémentarité à **100** nous avons **88** qui n'ont pas le défaut **A**, et **92** articles qui n'ont pas le défaut **B**, là je vais prendre **5** articles qui ont simultanément les deux défauts, le défaut **A** et le défaut **B** (**c'est une proposition par le professeur**), qu'on traduit par **A∩B**, ensuite je complète le reste du tableau (Schéma ci-dessous).

	B	$\bar{\mathbf{B}}$	$\sum$
A	**5**	**7**	**12**
$\bar{\mathbf{A}}$	**3**	**85**	**88**
$\sum$	**8**	**92**	**100**

Nous avons :

La probabilité que l'article ait le défaut A c'est :

$\mathrm{P(A)} = \frac{12}{100} = 0.12$

La probabilité que l'article ait le défaut B c'est :

$\mathrm{P(B)} = \frac{8}{100} = 0.08$

La probabilité que l'article ait les 2 défauts c'est :

$\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{5}{100} = 0.05$

La probabilité que l'article n'ait ni le défaut **A,** ni le défaut **B** c'est :

$\mathrm{P(\bar{A} \cap \bar{B})} = \frac{85}{100} = 0.85$ Ça c'est l'article présente zéro défaut

Et le contraire, l'article présente au moins un défaut :

$\mathrm{P(A \cup B)} = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(A \cap B)} = 0.12 + 0.08 - 0.05 = 0.15$

Ou $\mathrm{P(A \cup B)} = 1 - \mathrm{P(\bar{A} \cap \bar{B})} = 1 - 0.85 = 0.15$

On va maintenant introduire la notion de probabilités conditionnelles

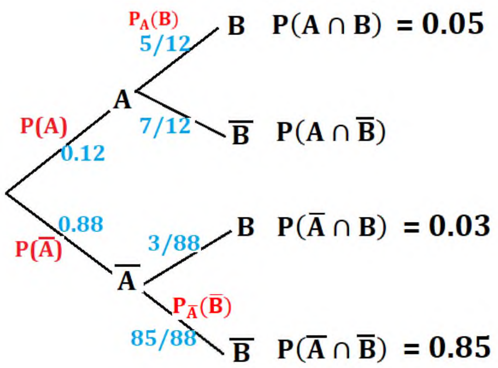
Exemple sur arbre pondéré

Je prends un article ⇒ soit il a le défaut **A** soit il n'a pas le défaut **A** et on le note $\bar{\mathbf{A}}$, si l'article a le défaut **A** il peut avoir aussi le défaut **B**, ou ne pas avoir le défaut **B** et on le note $\mathbf{\overline{B}}$, si l'article n'a pas le défaut **A**, il peut avoir le défaut **B** ou ne pas avoir le défaut **B** qu'on not $\mathbf{\overline{B}}$.

Je prélève un article il a déjà le défaut **A**, (donc, mon article est pris parmi les **12** et non pas parmi les **100**). Quelle est la probabilité qu'il ait le défaut B ? ⇒ **5** qui ont le défaut **B**. donc la probabilité d'avoir le défaut **B** sachant que l'article a le défaut **A** est $\frac{5}{12}$ si on multiplie 0.12 x $\frac{5}{12}$ = 0.05 et c'est la probabilité de $\mathbf{P(A \cap B)}$ au bout de la branche de l'arbre. (Schéma)

La probabilité que l'article n'a pas le défaut **B sachant qu'il a le défaut A** est de $\mathbf{\frac{7}{12}}$ et on l'écrit $\mathbf{P_A(\overline{B})}$,

	B	$\overline{B}$	$\sum$
A	5	7	12
$\overline{A}$	3	85	88
$\sum$	8	92	100



Probabilité conditionnelle

$$\boxed{\mathbf{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)}}$$

Et on appelle ça une **probabilité conditionnelle** (probabilité sous condition). Probabilité d'avoir un évènement sous condition qu'un autre évènement ait réalisé.

****

Probabilités conditionnelles

Elle est plus rigoureuse

$$\mathbf{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Elle se lit : probabilité de l’évènement **A** sachant **B** ⇒ c’est la probabilité de la réalisation de l’évènement **A** sachant que l’évènement **B** est déjà réalisé.

Exemple

Donc, on peut déduire directement les différentes probabilités de l’arbre pondéré

- $\mathbf{P_B(B) = \frac{1}{2} \,.\, P_B(N) = \frac{1}{3} \,.\, P_B(N) \neq P_N(B) \,;\, P_N(B) = \frac{2}{3}}$

Propriétés générales

- Probabilité d’avoir **A** ou **B**

$$\boxed{\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}}$$

- Pour montrer que **A** et **B** sont indépendant ⇔ (ça équivaut à dire que) la réalisation de l’évènement **A** n’influe pas sur la réalisation de l’évènement **B**.

A et **B** sont indépendant
$\Rightarrow \mathbf{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$

- **A** et **B** sont incompatible ⇔ **A** et **B** ne peuvent pas se réaliser en même temps ou simultanément ce qui veut dire que l’intersection des deux évènements est vide ⇔ $\mathbf{A \cap B} = \emptyset$

A et **B** sont incompatible ⇔ $\mathbf{A \cap B} = \emptyset$

Exemple

A et $\mathbf{\overline{A}}$: on ne peut pas être malade et en bonne santé en même temps.

****

4- Probabilité conditionnelle ; Indépendance et théorème de Bayes.

Définition

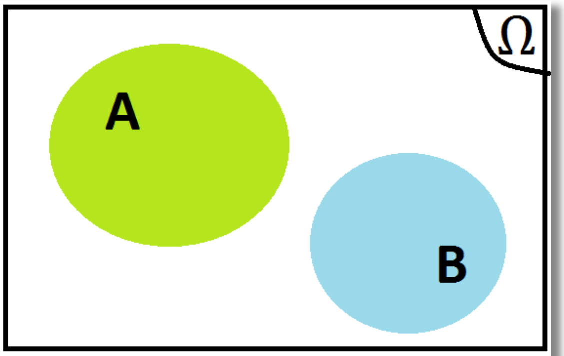
La probabilité d’un évènement certain = **1**

P(Ω) = 1

Si évènement **A** et évènement **B** sont incompatibles come le dessin suivant :

Pas de parties communes entre A et B

C'est-à-dire : **A ∩ B = Φ**



Deux évènements incompatibles
Dans un Univers Ω
Pas de parties communes entre A et B

La P(AUB) = P(A) + P(B)

Exemple

Dans un univers **Ω**, dans l'évènement **A** on a **10 articles**, et dans l'évènement **B** on a **8 articles** et **2 articles** au niveau de l'univers **Ω**, et ça me fait un total de **20 articles.**

Question

Je prélève un article au hasard :

- Quelle est la probabilité qu'il provient de A ?

Donc : P(A) = $\frac{10}{20}$

- Quelle est la probabilité qu'il provient de B ?

Donc : P(B) = $\frac{8}{20}$

- Quelle est la probabilité qu'il provient de A **ou** de B ?

Donc : P(AUB) = P(A) + P(B) = $\frac{10}{20} + \frac{8}{20} = \frac{18}{20}$

- Quelle est la probabilité qu'il ne provient pas de **A** ?

C'est ce qu'on appellera l'évènement contraire de **A** et on le note $\bar{A}$ et représente les éléments qui ne sont pas dans **A**.

Donc : P($\bar{A}$) = $\frac{10}{20}$

On peut dire aussi que la P(A) = $\frac{10}{20}$ ca veut dire que la **P($\bar{A}$) = 1 - P(A).**

Exp. : si on accepte de jeter une pièce de monnaie truquée, la probabilité d'avoir face est de 0,7 → la probabilité de l'évènement contraire qui est pile, est de 0,3.

Exp. : admettant que dans une entreprise on fabrique des articles, et ces articles peuvent présenter 2 types de défauts, Le défaut **A** (on le note l'évènement **A**. et le défaut **B** l'on note l'évènement B.

On va traduire cet énoncé comme suite :

- L'univers Ω représente la production totale
- **A** ''évènement qui représente le défaut **A** sur les articles''
- **B** '' évènement qui représente le défaut **B** sur les articles''

La partie en bleu représente tous les articles qui présentent le défaut **A** et qui ne présentent pas le défaut **B**.

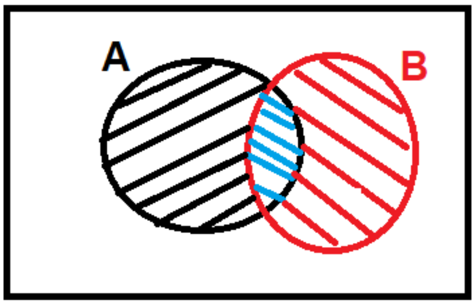
La partie en rouge sont les articles qui présentent le défaut **B** mais qui ne présentent pas le défaut **A**.

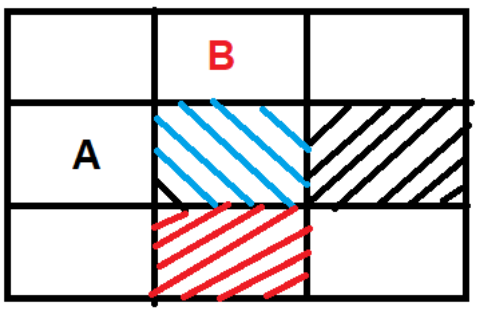
La partie en jaune présente tous les articles qui présentent les deux défauts.

La partie blanche dans le reste de l'univers représente les articles qui ne présentent aucun défaut.

- On peut traduire cette situation par un tableau :

Chaque partie sur le tableau correspond à la partie sur le schéma qui possède la même couleur.





On peut aussi les présenter de deux façons sur un arbre :

On commence par l'évènement **A** :

Je prends un article soit il a le défaut **A**, soit, il ne l'a pas.

Si cet article a le défaut A, soit il a le défaut **B**, soit, il ne l'a pas.

Si cet article n'a pas le défaut **A**, soit il a le défaut **B**, soit, il ne l'a pas.

Ou on commence par l'évènement **B** :

On prend un article, soit il a le défaut **B**, soit, il ne l'a pas.

S'il a le défaut B, il peut avoir le défaut **A**, ou ne pas avoir le défaut **A**.

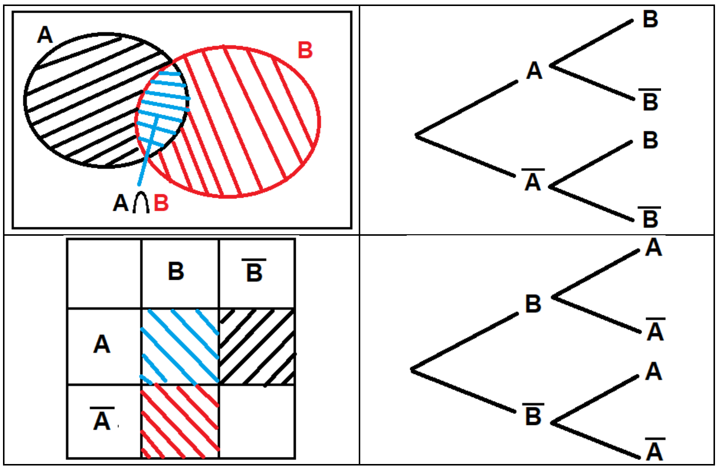
S'il n'a pas le défaut **B**, il peut avoir le défaut **A** ou ne pas avoir le défaut **A**.

Le schéma suivant représente tout :

Voilà toutes les représentations qu'on peut imaginer dans le cas d'une situation où on a deux évènements **A** et **B**.

Maintenant on va essayer de codifier chacune des situations,

Tous ce qui n'est pas **A** est $\overline{\mathbf{A}}$ et tous ce qui n'est pas **B** est $\overline{\mathbf{B}}$



On va essayer de traduire cette situation sur le schéma précèdent :

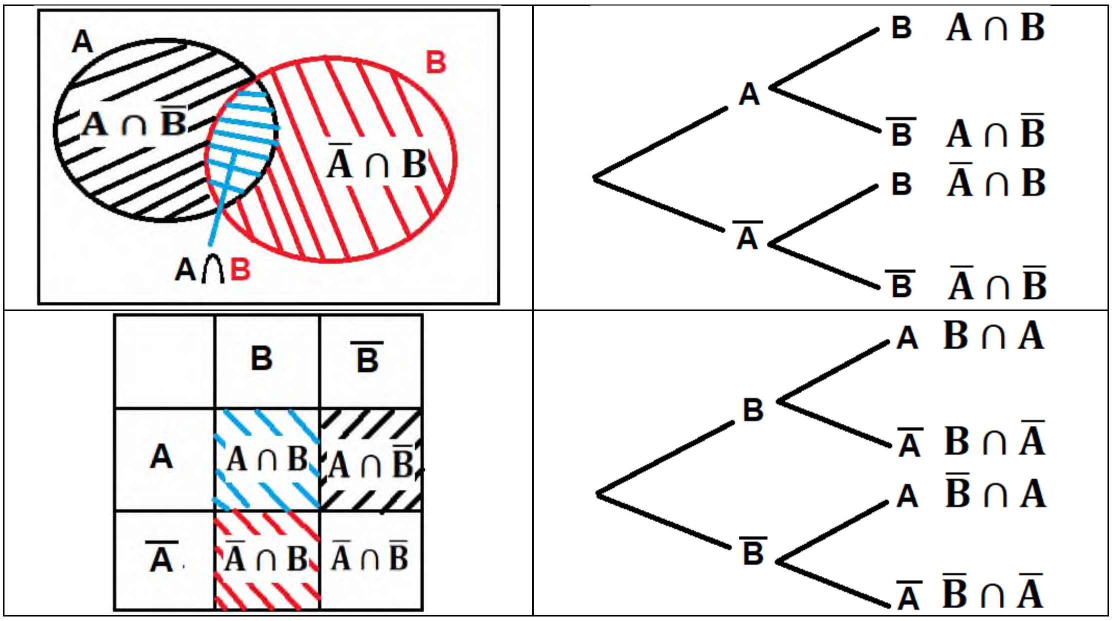
- **A** : L'article présente le défaut **A**.
- **B** : L'article présente le défaut **B**.
- $\overline{\mathbf{A}}$: l'article ne présente pas le défaut **A**.
- $\overline{\mathbf{B}}$: l'article ne présente pas le défaut **B**.
- A ∩ B : L'article présente les deux défauts, c'est-à-dire : à la fois A **et** B.
- A ∩ $\overline{\mathrm{B}}$: L'article présente seulement le défaut **A** (présente le défaut **A** **et** pas le défaut **B**)
- $\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B}$: L'article présente seulement le défaut **B** (présente le défaut **B** **et** pas le défaut **A**)
- $\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$: L'article ne présente aucun défaut. C'est en blanc dans le tableau.
- A **U** B : L'article présente au moins un défaut. (Le défaut **A** **ou** le défaut **B**) c'est toutes les parties colorées en noir, rouge et bleu.
- $\overline{A \cup B} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$: L'évènement contraire de ce qui est coloré, c'est ce qui n'est pas coloré c'est en blanc. Et veut dire au moins un défaut et l'évènement contraire de cet évènement c'est aucun défaut qui signifie $\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$.

L'article présente le défaut **A** on le voit sur le schéma en bleu et noir. Présente seulement le défaut **A** c'est noir.

L'article présente le défaut **B**, c'est bleu et rouge, présente seulement le défaut B c'est rouge.

Donc, on peut transcrire sur le schéma comme suite :

$A \quad \bar{A}$
$B \quad \bar{B}$
$A \cap B$
$A \cap \bar{B}$
$\bar{A} \cap B$
$\bar{A} \cap \bar{B}$
$A \cup B$
$\overline{A \cup B}$



Voilà toutes les configurations qu'on peut utiliser dans un exercice :

Mais celle qu'on utilise quasiment tout le temps, c'est soit un tableau soit un arbre, mais dans le cas des probabilités conditionnelles pour connaitre et toute suite savoir tous ce qui est indiqué c'est à travers un arbre pondéré.

$\bar{A} \cap \bar{B}$ ou $\bar{B} \cap \bar{A}$ et A **U** B ou B **U** A c'est pareil : (L'opération inter ou union est une opération commutative).

- Si je veux calculer P(A **U** B) si **A** et **B** sont incompatible c'est P(A) + P(B). mais dans notre exemple A et B ne sont pas incompatibles donc, c'est toute la partie colorée sur le tableau ou sur le schéma.

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

  On soustraire P(A ∩ B) car elle est compté deux fois.

  Dans le cas ou A et B sont incompatibles la $P(A \cap B) = 0$.

Exemple : admettant que dans une ville y a trois cinémas, y a 3 personnes qui se donnent rendez-vous dans une salle de cinéma. Quelle est la probabilité qu'aucune des personnes ne se retrouve avec l'autre.

Quelle est la probabilité qu'aucune des personnes ne soit dans la même salle, autrement dit, que chacune des personnes se trouve dans une salle différente. Je n'aurai jamais de personnes dans la même salle. Ce qui pourrait être le cas.

Solution

On va appeler les salles de cinémas **A, B, C**

Qu'on j'écris **A B C** ça veut dire que les trois personnes sont dans des salles différentes

A A C La première et la 2eme personne sont dans **A** et la 3ème est dans **C**.

B C C : la 1ere personne est dans la salle **B**, la 2ème et la 3ème personne, sont dans la salle **C**.

Donc y a combien de répartitions possibles.

La question : y a combien de façons que ces 3 personnes puissent se répartir dans les 3 salles de cinéma ?

L'arbre suivant démontre bien

La 1ère Personne peut se rendre soit dans la salle **A** ou **B** ou **C**

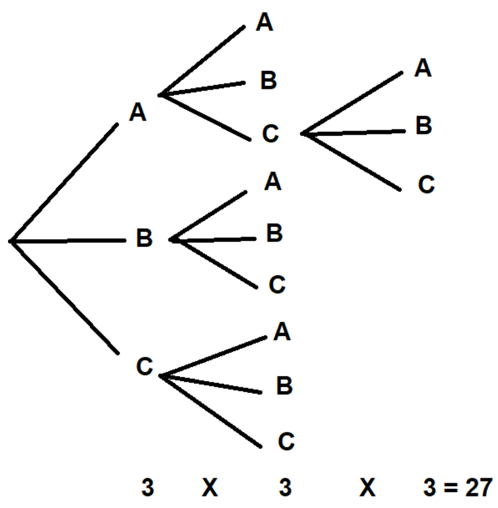
Si la 1ère personne s'est rendu dans la salle **A**, la 2ème personne peut se rendre dans la salle **A** ou **B** ou **C** ;

La 1ère personne s'est rendu dans la salle **C** la 2ème personne peut se rendre dans la salle **A**, **B** ou **C**.

L1ère personne s'est rendu dans la salle A, la 2ème personne s'est rendu dans la salle **C**, la 3ème personne peut aller en **A** ou **B** ou **C**.

L1ère personne à 3 choix X la 2ème à 3 choix X la 3ème a 3 choix

→ 3 x 3 x 3 = 27 répartitions possibles.



- Une autre question : quelle est la probabilité que les 3 personnes se retrouvent dans la salle **C** ?

Donc : y a une façon qui est **CCC**

La probabilité est $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}}$

C'est-à-dire $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{x}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathbf{x}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{27}}$

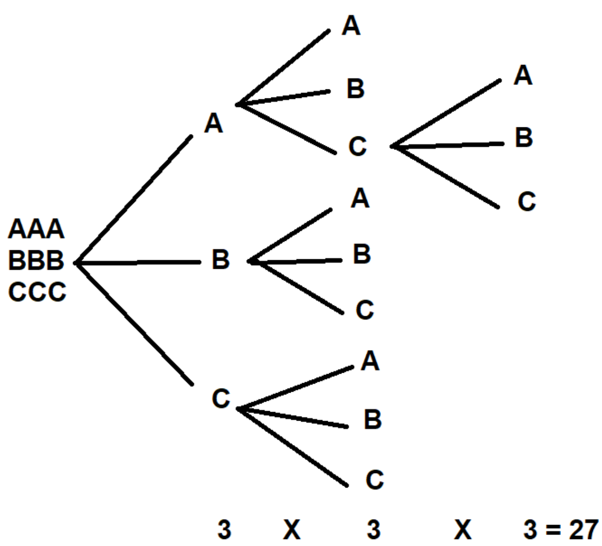
Donc la probabilité que les **3** personnes soient dans la même salle est :

Elles sont toutes dans la salle **A**

Ou toutes dans la salle **B** ou toutes dans la salle **C**.

Donc y a **3** cas favorables, et **27** cas possibles.

P(**3 personnes dans la même salle**) = $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{27}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{9}}$



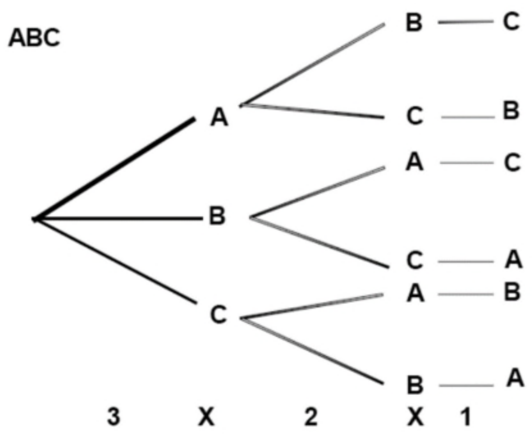
La question première est :

Quelle est la probabilité que les **3** personnes soient dans des salles différentes ?

On combien de permutation de **3** personnes selon le schéma suivant : y a **3x2x1=6**

Donc : P(**3 personnes soient dans des salles différentes**) = $\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{27}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$

Ce sont des situations qui font appel à des dénombrements.



Exercice

Dans une entreprise nous avons une production des articles de qualité **A**,

Si l'article est de qualité **A**, cet article peut présenter un défaut **D**, ou ne pas avoir de défaut que j'appellerais $\overline{\mathrm{D}}$

J'ai 100 articles au total parmi lesquels 70 de **A** et 30 de **B**.

20 présentant le défaut et 80 ne présentent pas de défaut

Selon le tableau ci-après :

Probabilité que l'article soit de qualité **A** est :

P(A) = $\frac{\mathbf{70}}{\mathbf{100}} = 0{,}7$

P(B) = $\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{100}} = 0{,}3$ (c'est l'évènement contraire).

La probabilité que l'article soit défectueux

P(D) = $\frac{20}{100} = 0{,}20$

La probabilité que l'article ne soit pas défectueux

P($\overline{\mathrm{D}}$) = $\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{100}}$ = 0,80

Quelle est la probabilité que l'article soit de qualité **A** et défectueux ?

P(A ∩ D) = $\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{100}} = \mathbf{0,08}$

Je prélève un article, il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provient de A ?

Puis que l'article est défectueux donc on a **20** articles défectueux et **8** proviennent de **A** ; donc j'ai une condition que l'article est défectueux le total des défectueux est **20** et ceux qui sont de qualité **A**, ils sont **8**. Là je vais introduire la notion de probabilités conditionnelles

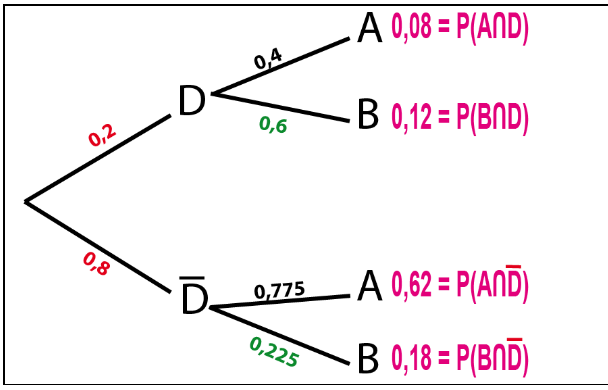
Je prélève un article, il est défectueux, quelle est probabilité qu'il soit de qualité **A** ? on va l'écrire P de A sachant D. P(A/D)

$P_D(A) = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{20}} = \mathbf{0,40}$

$P_D(B) = \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{20}} = \mathbf{0,60}$

Pour dessiner mon arbre, je peux le démarrer soit avec **A** soit avec **D** :

Et comme l'arbre est pondéré, je vais mettre des probabilités sur chaque branche.



	D	$\bar{D}$	∑
A	8	62	70
B	12	18	30
∑	20	80	100

$$P(A) = 0{,}7 \qquad P(B) = 0{,}3$$

$$P(D) = 0{,}2 \qquad P(\bar{D}) = 0{,}8$$

$$P(A \cap D) = 0{,}08$$

$$P_D(A) = \frac{8}{20} = 0{,}4$$

$$P_D(B) = 0{,}6$$

$$P_{\bar{D}}(A) = \frac{62}{80} = 0{,}775$$

****

Probabilités conditionnelles

Savoir traduire un énoncé en termes de probabilité conditionnelle

Exercice

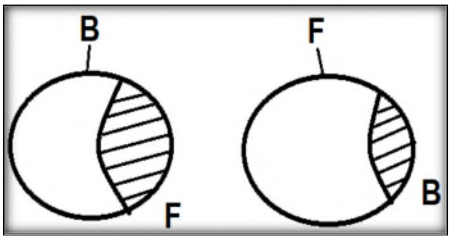
Dans une classe, on considère les événements **F** : « l'élève est blond(e) ».

Traduire chaque phrase en termes de probabilité :

1) Un cinquième des filles sont blondes. (**Parmi les filles, $\frac{1}{5}$ sont des blondes**)
2) La moitié des blonds sont des filles.
3) Trois huitièmes des élèves sont des garçons. **P(G) = $\frac{3}{8}$**
4) Un élève sur huit est une fille blonde.

Solution

1) $P_F(B) = \frac{1}{5}$
2) $P_B(F) = \frac{1}{2}$
3) $P(\bar{F}) = \frac{3}{8}$
4) $P(F \cap B) = \frac{1}{8}$



****

Conditional Probability Example Problems

Recall the conditional probability formula:

$$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

(provided P(B) > 0)

Suppose :

$P(A) = 0.34, P(B) = 0.50, P(A \cup B) = 0.70$

What is P(A\B) ?

$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

$P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.14}{0.50}$

The addition rule :

$$P(\cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.70 = 0.34 + 0.50 - P(A \cap B)$$

⇒ P(A∩B)= 0.14

Suppose we are about to roll a balanced six-sided die once.

S = {1,2,3,4,5,6}

Consider the events:

A = {1,4}

B = {2,3,5}

C = {1,3,5} ⇐ Reduced sample space

What is $P(A \cup B|C)$?

A U B = {1,2,3,4,6}

$P(A \cup B \setminus C) = \frac{2}{3}$

A study investigated causes of sudden (non-violent) deaths in western regions of Paris, France.

A sample of 523 such deaths revealed the following.

	Cardiovascular	Cerebral	Respiratory	Other	Total
Males	264	38	36	21	359
Females	89	27	29	19	164
Total	353	65	65	40	523

Suppose one of these cases is randomly selected.

What is the probability the person was female?

$P(F) = \frac{164}{523} \approx 0.31$

Given the cause was cardiovascular in nature, what is the probability the person was female?

$P(F \setminus CV) = \frac{89}{353}$

$P(F \setminus CV) = \frac{P(F \cap CV)}{P(CV)} = \frac{89\setminus 523}{353\setminus 523} = \frac{89}{353}$

	Cardiovascular	Cerebral	Respiratory	Other	Total
Females	**89**	27	29	19	**164**

Suppose one of these cases is randomly selected.

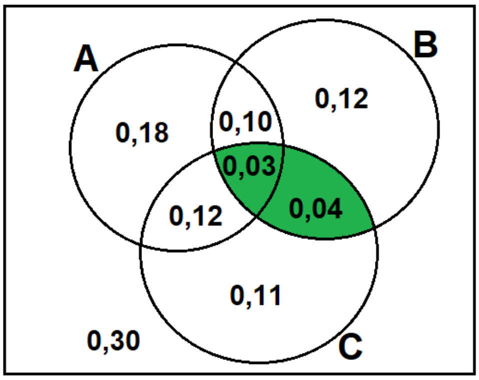
Given the person was female, what is the probability the cause was cardiovascular in nature?

$\mathbf{P(CV\backslash F)} = \mathbf{\frac{89}{164}}$

Given the cause was cerebral or respiratory in nature, what is the probability the person was male?

	Cardiovascular	Cerebral	Respiratory	Other	Total
Males	264	**38**	**36**	21	359
Females	89	27	29	19	164
Total	353	**65**	**65**	40	523

$$\mathrm{P(M \backslash C \cup R)} = \frac{38+36}{65+65} = \frac{74}{130} \approx 0.57$$



$$P(A) = 0.43$$

$$P(B) = 0.29$$

$$P(C) = 0.30$$

$$P(A \cap B) = 0.13$$

$$P(A \cap C) = 0.15$$

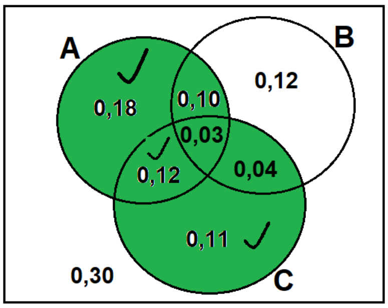
$$P(B \cap C) = 0.07$$

$$\mathbf{P(A \cap B \cap C)} = 0.03$$

What is $\mathbf{P(A \cap C \backslash B \cap C)}$?

$$\mathbf{P(A \cap C \backslash B \cap C)} = \frac{\mathbf{0.03} \Leftarrow}{\mathbf{0.03 + 0.04} \Leftarrow} = \frac{\mathbf{P((A \cap C) \cap (B \cap C))}}{\mathbf{P(B \cap C)}}$$

$$P(A \cap C \backslash B \cap C) = \frac{0.03}{0.03+0.04} = \frac{3}{7}$$



What is $\mathbf{P(\overline{B} \backslash A \cup C)}$?

$$\mathbf{P(\overline{B}\backslash A \cup C)} = \frac{\mathbf{0.18+0.12+0.11}}{\mathbf{0.18+0.12+0.11+0.10+0.03+0.04}} = \frac{\mathbf{P(\overline{B}\cap(A\cup C))}}{\mathbf{P(A\cup C)}} = \frac{\mathbf{0.41}}{\mathbf{0.58}} \approx \mathbf{0.707}$$

On to some conditional probability concept questions.

A Canadian adult is randomly selected.

A : The person is over 6 feet (183 cm) tall

B : The person is male

Which one of the following is true?

$P(A\backslash B) = P(A)$

$P(A\backslash B) > P(A)$

$P(A\backslash B) < P(A)$

$P(A\backslash B) = P(A) \Leftarrow$ If **A** and **B** were independent

$P(A\backslash B)$ ***X*** $P(A)$

$P(A\backslash B) > P(A) \Leftrightarrow P(B\backslash A) > P(B)$

$P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(B\backslash A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$P(A\backslash B) = P(A) \Leftrightarrow P(B\backslash A) = P(B)$

$P(A\backslash B) = \frac{P(A)\cancel{(B)}}{\cancel{P(B)}}$

When A and B are independent

$P(B\backslash A) = \frac{\cancel{P}(A)(B)}{\cancel{P(A)}}$

$P(A\backslash B) > P(A) \Leftrightarrow P(B\backslash A) > P(B)$

$P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Greater than it would be under independence

$P(B\backslash A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$P(A\backslash B) < P(A) \Leftrightarrow P(B\backslash A) < P(B)$

$P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Less than it would be under independence

$P(B\backslash A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

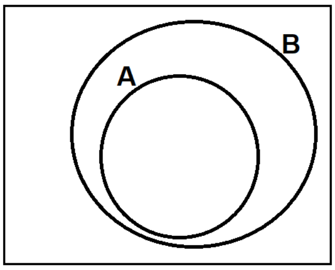
$P(B\backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Suppose **A** is a subset of **B**, and P(A) > 0.

What can be said of P(A\B) and P(B\A) ?

P(B\A) = 1

0 < P(A\B) ≤ 1



****

Probabilités totales

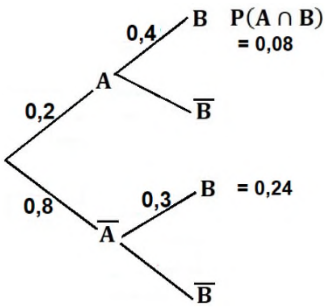
Si j'ai l'arbre suivant

Calculer la probabilité de **B**. P(B) = ?

On va faire appel aux probabilités totales

Réponse :

Pour réaliser **B**, j'ai **2** chemins possibles



Calculer P(B) = ?

$$\mathrm{B} = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$$

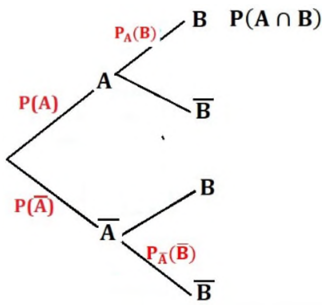
$$\mathrm{P(B)} = \mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$$

$$\mathrm{P(B)} = 0{,}08 + 0{,}24 = 0{,}32$$

Voilà ce qu'on doit retenir :

Dans un énoncé on peut calculer P(A ∩ B) de 2 façons différentes :

Soit à partir de $P_A(B)$, soit à partir de $P_B(A)$.



$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$$

$$P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Exercice

Dans une entreprise y a 60% de Femmes (F), parmi ces F, 20% utilisent leurs véhicules ; parmi les Hommes (H), 30% utilisent leurs véhicules.

Quelle est la probabilité qu'un salarié de l'entreprise utilise son véhicule ?

Les évènements on les liste :

F = femmes

V = véhicules

T = train

H = hommes

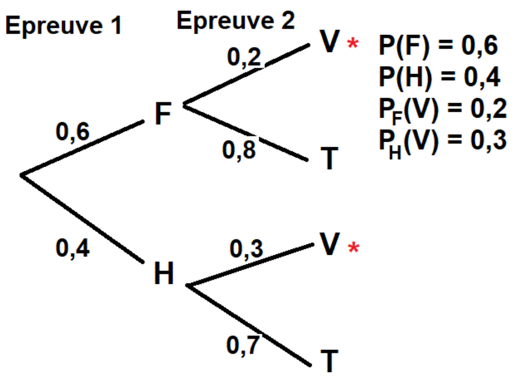
Alors, j'insiste là-dessus, il faut impérativement traduire l'énoncé.

Quelle est la probabilité qu'un salarié de l'entreprise utilise son véhicule ?

Ici je suis devant une situation où j'ai des probabilités conditionnelles, et à chaque fois que j'ai des probas conditionnelles,

Le schéma de l'arbre pondéré vous le fait à coté et vous traduisez l'énoncé.

Pour les probabilités conditionnelles il faut faire un arbre c'est beaucoup plus facile qu'un tableau, après avoir bien lire l'énoncé.



$$\mathrm{P(V)} = ?$$

$$\mathrm{V} = (\mathrm{F} \cap \mathrm{V}) \cup (\mathrm{H} \cap \mathrm{V})$$

$$\mathrm{P(V)} = \mathrm{P}(\mathrm{F} \cap \mathrm{V}) + \mathrm{P}(\mathrm{H} \cap \mathrm{V})$$

$$\mathrm{P(V)} = \mathrm{P_F(V)} \times \mathrm{P(F)} + \mathrm{P_H(V)} \times \mathrm{P(H)}$$

$$\mathrm{P(V)} = 0.2 \times 0.6 + 0.3 \times 0.4 = 0.24$$

Exercice

On vous donne les données suivantes :

$\mathbf{P(A) = 0.4}$

$\mathbf{P(B) = 0.6}$

$\mathbf{P(A \cup B) = 0.7}$

Calculer $\mathbf{P(A \cap B)}$; $\mathbf{P_B(A)}$; $\mathbf{P_A(B)}$

Solution

$$\mathbf{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)}$$

$$\mathbf{= 0.4 + 0.6 - 0.7 = 0.3}$$

$$\mathbf{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5}$$

$$\mathbf{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75}$$

****

Le théorème des probabilités totales

Dans le cas où on n'a pas le tableau précèdent et on seulement l'arbre pondéré. On peut lire sur notre arbre, on lit directement P(A) ; $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}})$; $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{B})$; $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}} \cap \mathrm{B})$; ce qu'on ne peut pas lire directement c'est P(B). Sur l'arbre P(B) n'apparait pas.

Comment à partir de cet arbre on calcule P(B) ?

Bien sûr **P(B)** = **0.08** puis que on a le tableau. Mais dans le cas où on a uniquement le tableau on le calcule comme suite :

Le théorème des probabilités totales dit ceci :

L'évènement **B** qu'est-ce que ci ?

L'évènement **B** c'est la réunion de **2** évènements en de sous de lui qui sont le **5** et le **3**.

Donc, l'évènement $\mathbf{B} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\bar{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B})$ ces **2** évènements sont incompatibles car un article ne peut pas avoir en même temps les **2** défauts et ne pas avoir le défaut **A**, par conséquent : pour arriver à la probabilité de **B**, je peux arriver par **2** chemins. Comme on le vois aussi sur tableau et sur (Tableau ci-dessous)

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\bar{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B})$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) + \mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B})$$

	B	$\bar{B}$	$\sum$
A	* **5**	**7**	**12**
$\bar{A}$	* **3**	**85**	**88**
$\sum$	**8**	**92**	**100**

C'est-à-dire : soit l'article a le défaut **A** et le défaut **B**, soit l'article n'a pas le défaut **A** mais il a le défaut **B**.

$$\boxed{\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \mathbf{P}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}) \times \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{A}}}(\mathbf{B}) \times \mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}})}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{B}) = (\frac{5}{12} \times 0.12) + \left(\frac{3}{88} \times 0.88\right) = 0.08$$

Et c'est ça le théorème des probabilités totales, et si on remplace les valeurs on trouve **0.08**.

****

Exercice 01

B.T.S. 2017

Sur les probabilités conditionnelles

Chermak

L'entreprise possède actuellement deux chaînes de production, l'une pour des drones à deux hélices et l'autre pour des drones à quatre hélices. Il arrive que les batteries des drones fabriqués aient un défaut et dans ce cas, on dira que les drones sont défectueux.

On souhaite avoir une idée du pourcentage de drones défectueux sur l'ensemble de la production.

On prélève **500** drones dans la production de l'entreprise et on obtient les résultats suivants :

- **300** drones possèdent deux hélices,
- Parmi les drones à deux hélices, **2 %** sont défectueux,
- Parmi les drones à quatre hélices, **96 %** ne présentent aucun défaut.

Un drone est choisi au hasard parmi les **500** drones prélevés.

On considère les évènements suivants :

- **A** : « le drone possède deux hélices » ;
- **D** : « le drone est défectueux ».

1. Donner la valeur des probabilités : $\mathrm{P(A)}, \mathrm{P_A(D)}, \mathrm{P_{\overline{A}}(\overline{D})}$.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré de probabilités.
3. Calculer la probabilité que le drone possède deux hélices et soit défectueux.
4. Montrer que la probabilité qu'un drone pris au hasard soit défectueux est égale à 0,028.
5. Sachant que le drone est défectueux, quelle est la probabilité qu'il possède quatre hélices ? Arrondir le résultat au millième.

Solution

Je reprends l'énoncée

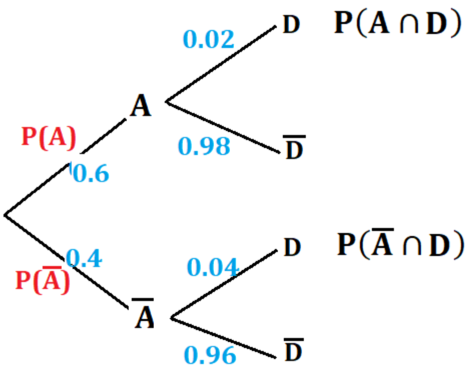
$\mathrm{P(A)} = \frac{300}{500} = 0.6$

$\mathrm{P(\overline{A})} = 0{,}4$

$\mathrm{P_A(D)} = 0{,}02$

$\mathrm{P_{\overline{A}}(\overline{D})} = 0{,}02$

Ces probabilités que l'on traduit à l'aide de cet arbre pondéré :



- On me demande de calculer la probabilité que le drone possède **2** hélices et soit défectueux

$$\mathbf{P(A \cap D) = P_A(D) \times P(A)} = 0.02 \times 0.6 = 0.012$$

2) Le drone est défectueux c'est-à-dire **P(D)**. On applique le théorème des probabilités totales : je peux arriver à **D** de par **2** chemins.

$$\mathbf{P(D)} = \mathbf{P(A \cap D)} \cup \mathbf{P(\overline{A} \cap D)} = (0.6 \times 0.02) + (0.4 \times 0.04) = 0.028$$

$$\mathbf{P(D)} = 0.028 \; comme \; demandé$$

3) Sachant que le drone est défectueux quelle est la probabilité qu'il possède quatre hélices

$$\mathbf{P_D(\overline{A})} = \frac{\mathbf{P(\overline{A} \cap D)}}{\mathbf{P(D)}} = \frac{\mathbf{P_{\overline{A}}(D) \times P(\overline{A})}}{\mathbf{P(D)}} = \frac{0.04 \times 0.4}{0.028} = \frac{0.016}{0.028} = 0.571$$

****

Exercice 02
B.T.S. 2018
Sur les probabilités conditionnelles
Chermak

Un fabricant de téléphones portables se fournit en microprocesseurs auprès de deux entreprises **A** et **B**. l'entreprise **A** fourni **55 %** des microprocesseurs, le reste étant fourni par l'entreprise **B**. il s'avère que **1 %** des microprocesseurs provenant de l'entreprise **A** et **1,5 %** des microprocesseurs provenant de l'entreprise **B** sont défectueux.

On prélève au hasard un microprocesseur dans le stock du fabricant. Tous les microprocesseurs ont la même probabilité d'être prélevés.

On considère les évènements suivants :

A : « Le microprocesseur provient de l'entreprise **A** »

D : « Le microprocesseur est défectueux »

2. a. Déduire des informations figurant dans l'énoncé les probabilités $\mathbf{P(A)}, \mathbf{P_A(D)}$.

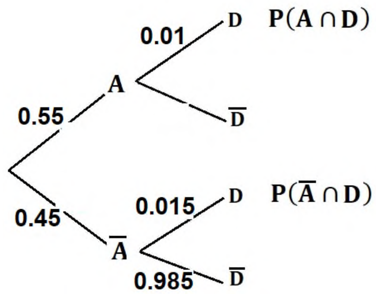
b. Représenter la situation par un arbre de probabilités pondéré.

2. Calculer les probabilités $\mathbf{P(A \cap D)}$ **et** $\mathbf{P(\overline{A} \cap D)}$

3. Justifier que la probabilité de prélever un microprocesseur défectueux est 0,01225.

4. Calculer la probabilité que le microprocesseur provienne de l'entreprise B sachant qu'il est défectueux. Arrondir le résultat à $\mathbf{10^{-3}}$.

Solution



$$P(A) = 0.55$$

$$P(\bar{A}) = 0.45$$

$$\mathrm{P_A(D)} = 0.01$$

$$\mathrm{P_{\bar{A}}(D)} = 0.015$$

$$\mathrm{P(A \cap D) = P_A(D) \times P(A)} = 0.01 \times 0.55 = 0.0055$$

$$\mathrm{P(\bar{A} \cap D) = P_{\bar{A}}(D) \times P(\bar{A})} = 0.015 \times 0.45 = 0.00675$$

$$\mathrm{P(D) = P(A \cap D) + P(\bar{A} \cap D)} = 0.0055 + 0.00675 = 0.01225$$

$$\mathrm{P_D(\bar{A})} = \frac{\mathrm{P(\bar{A} \cap D)}}{\mathrm{P(D)}} = \frac{0.00675}{0.01225} = 0.551$$

****

Exercice 03
2016
Sur les probabilités conditionnelles. Voici l'énoncé
Chermak

Pour contacter une compagnie d'assurances, deux possibilités sont offertes :

- se rendre en agence ;
- à distance par téléphone.

Le responsable du pôle « satisfaction client » décide de réaliser une enquête afin de savoir si les clients qui se rendent en agence ou qui contactent la compagnie par téléphone sont satisfaits de l'accueil.

A l'issue de l'enquête, réalisée auprès de **1000** clients, les résultats sont les suivants :

- **380** se sont rendus en agence,
- Parmi les clients qui se sont rendus en agence, **93 %** se sont déclarés satisfaits de l'accueil,
- Parmi les clients qui ont téléphoné, **15 %** ont déclaré qu'ils n'étaient pas satisfaits de l'accueil.

On interroge au hasard un client.

On considère les évènements suivants :

A : « Le client s'est rendu en agence »

S : « Le client est satisfait de l'accueil ».

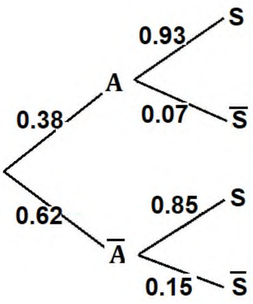
On rappelle que l'évènement contraire de A se note $\bar{\mathbf{A}}$, que la probabilité de l'évènement **A** se note P(A), et que la probabilité de l'évènement **A** sachant que l'évènement **B** est réalisé se note $P_B(A)$.

Dans toute cette partie, les probabilités seront arrondies à 10^{-4}, si nécessaire.

1. Donner la valeur des probabilités $P(A), P_A(S)\ et\ P_{\bar{A}}(\bar{S})$.
2. L'arbre de probabilité donné en annexe à rendre avec la copie représente la situation. Compléter celui-ci.
3. Calculer la probabilité que le client se soit rendu en agence et qu'il ait été satisfait de l'accueil.
4. Montrer que la probabilité de **S** est **0,8804.**
5. Le responsable a pour objectif qu'il y ait moins de **10 %** des clients non satisfaits par l'accueil. Cet objectif est-il atteint ?
6. Sachant que le client a été satisfait, quelle est la probabilité qu'il se soit rendu en agence ?

Solution

$$P(A) = 0.38$$
$$P(\bar{A}) = 0.62$$
$$P_A(S) = 0.93$$
$$P_{\bar{A}}(\bar{S}) = 0.15$$



$P(A \cap S) = P_A(S) \times P(A) = 0.93 \times 0.38 = 0.3534$

$P(S) = P(A \cap S) + P(\bar{A} \cap S) = 0.3534 + (0.85 \times 0.62) = 0.8804$

100 – 88.04 = 11.96 % ne sont pas satisfait **donc** : l'objectif n'est pas atteint car on dépasse les 10 %.

$$\mathrm{P_S(A)} = \frac{\mathrm{P(A \cap S)}}{\mathrm{P(S)}} = \frac{0.3534}{0.8804} = 0.4014$$

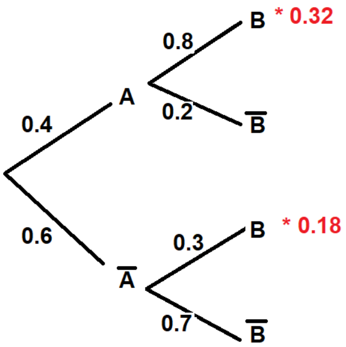
Ce qu'il faut maitriser c'est la lecture de l'énoncée.

****

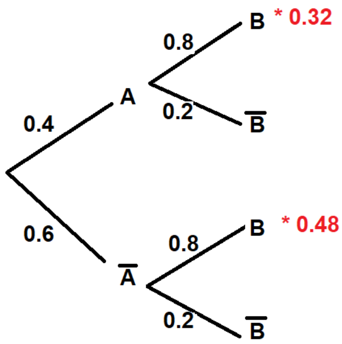
Les évènements indépendants

Chermak

Admettant que j'ai les 2 situations suivantes



$\mathbf{P_A(B) = 0.8}$
$\mathbf{P_{\overline{A}}(B) = 0.3}$



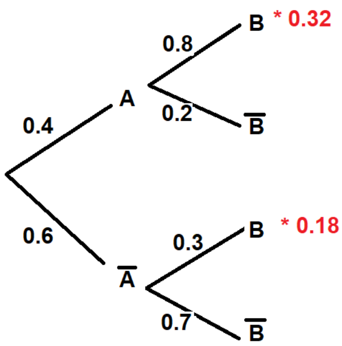
$\mathbf{P_A(B) = 0.8}$
$\mathbf{P_{\overline{A}}(B) = 0.8}$

Là, j'ai **2** situations ; qui possèdent **2** évènements **A** et **B**.

La première on a **2** évènements qui ne sont pas indépendante, alors que la **2ème** situation on a **2** évènements qui sont indépendante.

1/ la 1ère situation : la probabilité de **B** dépend de **A** car avec **A** $\mathbf{P_A(B)} = 0{,}8$, alors qu'avec $\mathbf{\overline{A}}$, la probabilité est différente $\mathbf{P_{\overline{A}}(B)} = 0{,}3$; donc : la probabilité de **B** dépend de **A** car avec $\mathbf{\overline{A}}$ y a eu une autre valeur de probabilité. Donc : **B** dépend de A. ca veut dire que le résultat de **B** est conditionné par **A**. donc les évènement **A** et **B** ne sont pas indépendant. On constate après calcule de **P(B)** qu'on a **3** valeurs différentes.

En appliquant le théorème des probabilités totales, et on calcule P(B) pour constater les différences.



$\mathbf{P_A(B) = 0.8}$

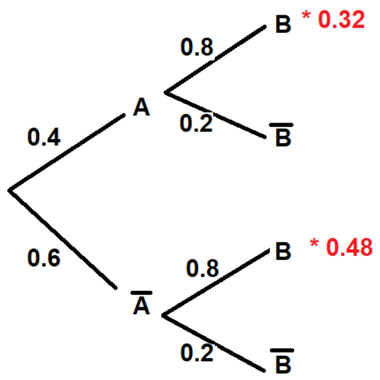
$\mathbf{P_{\overline{A}}(B) = 0.3}$

$\mathbf{P(B) = 0.50}$

$\mathbf{P_A(B) \neq P_{\overline{A}}(B) = P(B)}$

2/ la 2ème situation : la probabilité de **B** ne change pas selon qu'au départ on a **A** ou $\mathbf{\overline{A}}$, car on a la même probabilité, par conséquent dans cette situation les **2** évènements sont indépendants. Autrement dit la probabilité de **B** ne dépend pas de la réalisation de **A**. et on constate que toutes les différentes probabilités de B sont identiques.

En appliquant le théorème des probabilités totales, et on calcule P(B) pour constater les valeurs de **B** sont les mêmes.



Conclusion : quand 2 évènements sont indépendants la $\mathbf{P_A(B)}$ *est toujours* $=$ à $\mathbf{P_{\bar{A}}(B)}$

Donc : apriori on pourrait penser que

On peut écrire l'arbre comme ça puisque le **B** sachant ou sans sachant ne change pas.

$P_A(B) = 0.8$

$P_{\bar{A}}(B) = 0.8$

$P(B) = 0.8$

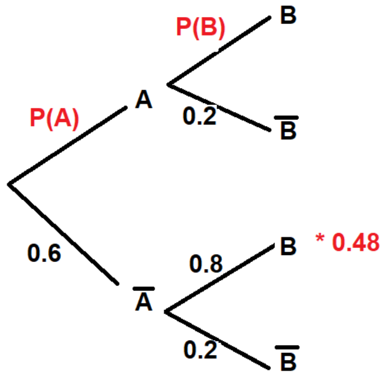
$P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = P(B)$

Les évènements A et B sont indépendants

Donc : **P(A∩B) = P(A) x P(B)** cette relation est vrais que lorsque les 2 évènements A et B sont indépendants.

Alors que dans tous les cas de figure si on ne vous dit rien du tout,

$$\mathbf{P(A \cap B) + P(A) \times P(B)}$$



$P(A \cap B) = A_A(B) \times P(A)$

Si A et B sont indépendants, alors :

$P_A(B) = P(B)$

D'où

$$\boxed{P(A \cap B)=P(A) \times P(B)}$$

En résumé voilà ce qu'il faut retenir :

2 évènements A et B sont indépendants ssi (si et seulement si) P(A∩B) = P(A) x P(B)

Exercice

On prend un article, il présente **2** types de défauts, la probabilité qu'il ait le défaut **A** est de 0.07, P(A) = 0.07 ; P(B) = 0.08 ; la probabilité qu'il ait au moins un défaut = 0.126 : P(AUB) = 0.126. Les évènements **A** et **B** sont-ils indépendants ? **donc** : on doit montrer que P(A∩B) = P(A) x P(B) alors je dirais qu'ils sont indépendants.

Solution

P(A) x P(B) = 0.05 x 0.08 = 0.004.

Et je sais que P(AUB) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

⇒ P(A∩B) = P(A) + P(B) – P(AUB) = 0.05 + 0.08 – 0.126 = 0.004

Conclusion : vous faites une phrase !

Comme P(A∩B) = P(A) x P(B) alors les évènements A et B sont indépendants.

Si on me demande : calculer la probabilité que l'article ne présente aucun défaut. C'est à dire ni le défaut, **A** ni le défaut B.

$$\mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}})\ \textit{mais comme les évènements sont indépendants}$$

Donc :

$\mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}) = \mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}) \times \mathbf{P}(\overline{\mathbf{B}})$

On a P(A) = 0.05 ⇒ $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) = 0.95$

On a P(B) = 0.08 ⇒ $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) = 0.92$

Par conséquent :

$\mathbf{P}(\overline{\mathbf{A}}) \times \mathbf{P}(\overline{\mathbf{B}}) = 0.95 \ \times 0.92 = 0.874$

Or P(A U B) « c'est l'article présente au moins un défaut » = 0.126 ⇒ « avoir zéro défaut » c'est 1 - P(A U B) = 1 – 0.126 = 0.874 autrement dit avoir aucun défaut je peux le calculer de 2 façons différentes, je prends l'évènement contraire à l'évènement avoir au moins un défaut c combien de défaut ? zéro défaut et je fais 1 – 0.126 et je retrouve bien le 0.874. (Au moins un défaut et aucuns défauts sont des évènements contraires).

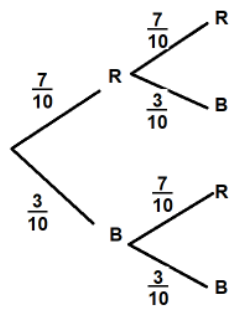
Quelle est la probabilité que l'article présente seulement le défaut A ? c'est-à-dire l'article ait le défaut A et n'ait pas le défaut B : $P(A \cap \bar{B})$

C'est-à-dire $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}})$ $mais\ comme\ les\ évènements\ sont\ indépendants$ c'est forcement $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) \times \mathbf{P}(\overline{\mathbf{B}}) = 0.05 \times 0.92 = 0.046$

Exemple sur l'indépendance

Une urne contient **10** boules ; **7** boules rouges et **3** boules blanches, on effectue **2** tirages successifs avec remise, et on va voir que les évènements sont indépendants.

Vous voyez très bien que je n'ai pas besoin de dire que les évènements sont indépendants, vous voyez la probabilité qu'elle soit rouge au **2ème** tirage sachant qu'elle est rouge au **1er** est exactement égale à la probabilité qu'elle soit rouge au **2ème** tirage sachant qu'elle est blanche au **1er** elle est aussi égale à la probabilité qu'elle soit tout simplement rouge. **Donc**, là j'ai affaire à **2** évènements indépendants, ici **2** évènements indépendants.



Si on me demande quelle est la probabilité de tirer 2 fois la boule rouge ? comme les 2 évènements sont indépendants c'est-à-dire :

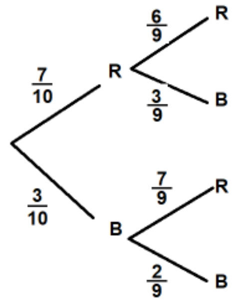
$$\mathbf{P}(\mathbf{R} \cap \mathbf{R}) = \mathbf{P}(\mathbf{R}) \times \mathbf{P}(\mathbf{R}) = 0.7 \times 0.7 = 0.49$$

Si on vous dit tirer 2 boules de couleurs différentes :

$$\mathbf{P}(\mathbf{RB}) = \mathbf{P}(\mathbf{R} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{P}(\mathbf{B} \cap \mathbf{R})$$

= (0.7 x 0.3) + (0.3 x 0.7) = 0.4

Mais si j'avais effectué un tirage sans remise,



Vous voyez ici que les évènements ne sont pas indépendants, car la probabilité qu'elle soit rouge au second sachant qu'elle est rouge au 1er, n'est pas la même qu'elle soit rouge au second sachant qu'elle est blanche au **1er**. Les probabilités de la boule rouge changent et sont différente au **2ème** tirage une fois $\frac{6}{9}$ et une fois $\frac{7}{9}$ et la probabilité de la rouge du **1er** tirage c'est $\frac{7}{10}$ ce n'est pas la même valeur ici **2** évènements ne sont pas indépendants.

****

Evènements indépendants et dépendants

Jaicompri.com

Définition

Deux évènements A et B sont indépendant si l'un n'influe pas sur l'autre.

Comment savoir si 2 événements sont indépendants ou pas

Donc, **A** et **B** sont indépendants si et seulement si :

- **P(A∩B) = P(A) x P(B) alors sont indépendants** ; si non pas indépendants
- **P(A)** = $P_B(A)$ **alors sont indépendants** ; si non pas indépendants.

Comment démontrer que des événements sont indépendants

Jaicompri.com

Définition

A et B sont indépendants ⇔ $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

P(A) ≠ $\mathbf{0}$ A et B sont indépendants ⇔ $\boldsymbol{P_A(B) = P(B)}$

P(B) ≠ $\mathbf{0}$ A et B sont indépendants ⇔ $\boldsymbol{P_B(A) = P(A)}$

Pour savoir si A et B sont indépendants y a 3 méthodes :

1- Calculer $\boldsymbol{P(A \cap B), P(A), P(B)}$; si $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$ alors indépendants, si non pas indépendants.

2- Calculer $P_A(B)$ *et* $P(B)$; si $P_A(B) = P(B)$ alors indépendants, si non pas indépendants.

3- Calculer $P_B(A)$ *et* $P(A)$, si $P_B(A) = P(A)$ alors indépendants, si non pas indépendants.

Démonstration

$P_A(B) = P(B)$ **; P(A) ≠ 0** $\Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = P(B)$**, P(A) ≠ 0,**

$\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$P_B(A) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

A et B sont incompatible (ne peuvent pas se produire en même temps) $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \Phi$

Exercice

On écrit les entiers de 1 à 20 sur vingt cartons. On tire au hasard un carton. On appel A l'évènement « obtenir un nombre impair » et B « obtenir un multiple de 5 »

1) Les événements A et B sont-ils indépendants ? A et B sont-ils incompatibles ?
2) Même question, mais cette fois-ci, on rajoute un carton numéroté 21.

Solution

1) L'univers Ω = {1 ; 2 ;…… ;20}. A = {1 ; 3 ; 5 ; 7 ;…. ;19}.

   B = {5 ; 10 ; 15 ;20}. A∩B = {5 ; 15}.

   On est dans une situation d'équiprobabilité : $P(A) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}; P(B) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

   $P(A \cap B) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$; $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = P(A \cap B). \textit{Donc, A et B sont indépendants}$

   $A \cap B \neq \emptyset, \textit{Aet B sont compatibles}.$

2) Ω = {1 ; 2 ;…… ;21}, A = {1 ; 3 ;…… ;21}, B = {5 ; 10 ; 15 ;20}

   A ∩ B = {5 ; 15}, $P(A) = \frac{11}{21}; P(B) = \frac{4}{21}; P(A \cap B) = \frac{2}{21}$

   $\Rightarrow P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B); \textit{Donc, A et B ne sont pas indépendants}$

Exercice1

Dans l'urne ci-dessous, il y a des jetons numérotés de différentes couleurs. On tire au hasard un jeton dans cette urne. On considère les évènements suivants :

R : ''le jeton tiré est rouge''

B : ''le jeton tiré est bleu''

I : ''le numéro du jeton tiré est impaire''

1) Les évènements R et I sont-ils indépendants ?
2) Les évènements B et I sont-ils indépendants ?

Solution

1) On est dans une situation d'équiprobabilité

   P(I) = $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

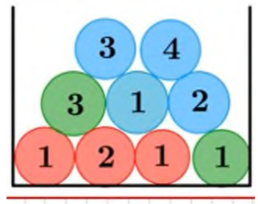
   $P_R(I) = \frac{2}{3}$

   $donc, p(I) = P_R(I)$ Donc, I et R sont indépendants

   P(I) = $\frac{2}{3}$

   $P_B(I) = \frac{2}{4}$

   Donc, $\mathrm{P(I)} \neq P_B(I)$ *donc, I et B sont dépendants*



****

Maintenant on va passer à la notion d'indépendance

On va passer aux évènements indépendants

- Il faut absolument que vous compreniez la notion d'indépendance.

Je mis au tableau **2** situations comme suite :

Dans la **1ère** situation la probabilité de **B** sachant **A** = 0.3 est différente de la probabilité de B sachant ($\overline{\mathrm{A}}$) = 0.1

Pour la **2ème** situation on a P(B/A) = P(B/$\overline{\mathbf{A}}$**)**

La probabilité de **B** ici ne change pas quel que soit mon résultat initial.

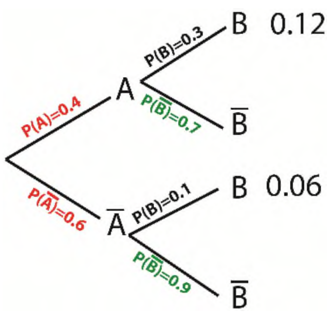
Donc la 2ème situation est une situation d'indépendance.

Donc, les évènements **A** et **B** sont indépendants.

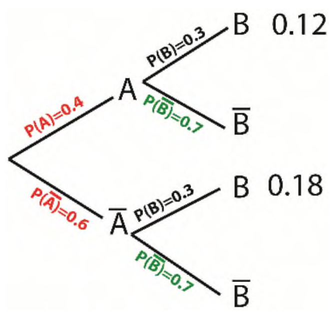
Alors que pour le premier arbre les évènements **A** et **B** ne sont pas indépendants.

Deux évènements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'est pas conditionnée par la réalisation de l'autre.

Quand vous avez **2** évènements indépendants quel que soit l'issue précédente ça n'a pas d'incidence sur les issus suivantes.



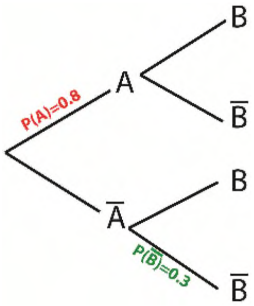
$P_A(B) \neq P_{\bar{A}}(B) \neq P(B)$
$P(B) = 0{,}18$



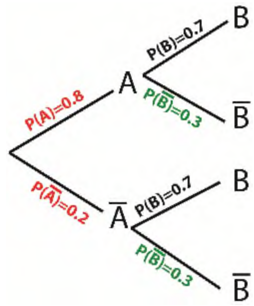
$P_A(B) = P_{\bar{A}}(B) = P(B)$
$P(B) = 0{,}13$

Exercice

On suppose les évènements **A** et **B** sont indépendants, compléter l'arbre pondéré suivant :



⇒



Deux évènements sont indépendants, si et seulement si,

$\mathbf{P_A(B) = P(B)}$

$\mathbf{\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(B)}$

A et B indépendants équivaut à

$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$

Exercice

La probabilité qu'un article possède le défaut **A** est de **0.08,** La probabilité qu'un article présente le défaut **B** est de **0.05,** La probabilité que l'article ne présente aucun défaut est de **0.84**

Question : les évènements **A** et **B** sont-ils indépendants :

$P(A) = 0.08$

$P(B) = 0.05$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.98 \Rightarrow P(A \cup B) = 0.02$

Pour montrer que les évènements **A** et **B** sont indépendants il suffit de montrer que

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

$\mathbf{P(A) \times P(B) = 0.08 \times 0.05 = 0.004}$

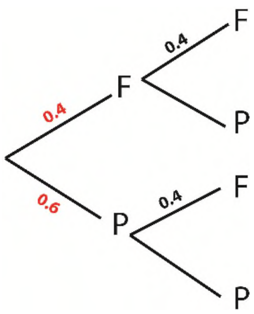
$\mathbf{P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.08 + 0.05 - 0.02 = 0.11}$

Je compare donc, $\mathbf{P(A \cap B)}$ et $\mathbf{P(A) \times P(B)}$ ce sont deux valeurs qui sont différentes, par conséquent les évènements A et B ne sont pas indépendants, donc là il n'y a vraiment pas d'indépendance.

Comme $\mathbf{P(A \cap B)}$ est différent de $\mathbf{P(A) \times P(B)}$ alors les évènements **A** et **B** ne sont pas indépendants.

Exemple

Si j'ai une pièce de monnaie truquée, la probabilité d'obtenir face est de **0.4**, je lance la pièce de monnaie **5** fois de suite, calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois "FACE". P(F) = 0,4.



Soit P_n la probabilité d'avoir au moins 1 "Face" à l'issue de n lancers.

Déterminer la valeur minimale de n pour que : $P_n \geq 0{,}999$

$$P(F) = 0{,}4$$

$$\mathbf{1 - 0{,}6^5 = 0{,}922 \ \Rightarrow \ P_n = 0{,}922}$$

****

Deux événements indépendants
Travaux dirigés
Kiffelesmaths.com

Exercice2

Dé à six faces équilibrées.

A : "Obtenir un nombre pair"

B : "Obtenir le 2"

C : "Obtenir un nombre ≥ 5"

A et B sont-ils indépendants ?

- $\mathrm{p(A)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \mathrm{p(B)} = \frac{1}{6}; \mathrm{p(A \cap B)} = \frac{1}{6}$
- $\mathrm{p(A)xp(B)} = \frac{1}{2}\mathrm{x}\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

- $\mathrm{p}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{6}$

⇒ p(A∩B) ≠ p(A) x p(B) ⇒ les évènements A et B ne sont pas indépendants

A et C sont-ils indépendants ?

* $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{A}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \boldsymbol{p}(\boldsymbol{C}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

* p(A∩C) = $\frac{1}{6}$

⇒p(A) x p(C) = $\frac{1}{2} x \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; p(A∩C) = $\frac{1}{6}$

⇒ $p(A \cap C) = \mathrm{p}(\mathrm{A}) \mathrm{x}\ \mathrm{p}(\mathrm{C})$ donc: A et C sont deux évènements indépendants

****

Evènements indépendants

Travaux dirigés

Yvan monka

Exercice

Lors d'un week-end prolongé, la TV annonce qu'il y a **42%** de tomber dans un bouchon sur l'autoroute **A6** et **63%** sur l'autoroute **A7**.

Soit **A** l'évènement :''On tombe dans un bouchon sur l'autoroute **A6**''

Soit **B** l'évènement : ''On tombe dans un bouchon sur l'autoroute **A7**''

On suppose que les évènements **A** et **B** sont indépendants.

Calculer la probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute **A7** mais pas sur l'**A6**.

Deux évènements A et B sont indépendants
Lorsque : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Si A et B sont indépendants
Alors $\bar{A}$ et B sont indépendants

P($\bar{A}$ ∩ B) = P($\bar{A}$) X P(B)

Car les évènements $\bar{A}$ et **B** sont indépendants.

P($\bar{A}$ ∩ B) = 0,58 X 0,63 = 0,3654.

****

Démontrer l'indépendance entre deux événements

Travaux dirigés

Exercice

1) On tire une carte dans un jeux de 32 cartes

Soit **R** l'évènement : ''On tire un roi''

Soit **T** l'évènement : ''On tire un trèfle''

Les évènements **R** et **T** sont-ils indépendants ?

2) Même question en ajoutant deux joker dans le jeux

1) P(R) = $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

P(T) = $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

P(R ∩ T) = $\frac{1}{32}$

P(R) X P(T) = $\frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$

P(R ∩ T) = P(R) X P(T)

Donc, les évènements **R** et **T** sont indépendants.

Maintenant, on ajoute **2** jokers à notre jeu et on se retrouve avec 54 cartes.

$$\Rightarrow \frac{1}{8} = \frac{4}{34} \neq \frac{1}{8}$$

2) P(R) = $\frac{4}{34} = \frac{2}{17}$

P(T) = $\frac{8}{34} = \frac{4}{17}$

P(R ∩ T) = $\frac{1}{34}$

P(R) X P(T) = $\frac{2}{17} \times \frac{4}{17} = \frac{8}{289}$

P(R ∩ T) ≠ P(R) X P(T)

Donc, les évènements **R** et **T** ne sont pas indépendants

****

Utiliser l'indépendance entre deux événements
Travaux dirigés

Exercice

Dans une population, un individu est atteint par une maladie **m** avec une probabilité égale à **0,005** et une maladie **n** avec une probabilité égale à **0,01**.

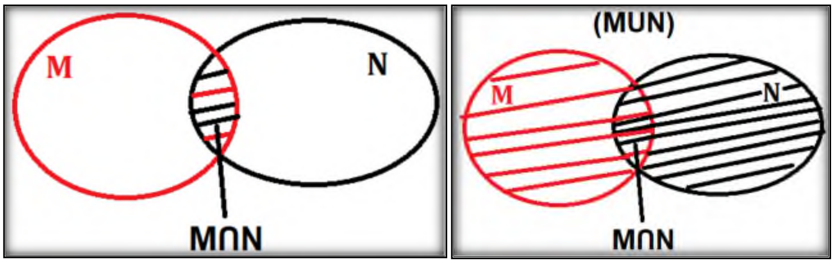
M est l'évènement : ''l'individu a la maladie **m**''

N est l'évènement : ''l'individu a la maladie **n**''

On suppose que les évènements **M** et **N** sont indépendants.

Calculer la probabilité qu'un individu ait au moins une des deux maladies

P(**MUN**)



Deux évènements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

On a : P(M U N) = P(M) + P(N) – P(M ∩ N)

= P(M) + P(N) – P(M) x P(N)

= 0,005 + 0,01 – 0,005 x 0,01 = 0,01495

La probabilité qu'un individu ait au moins une des deux maladies est environ égale à 1,5 %.

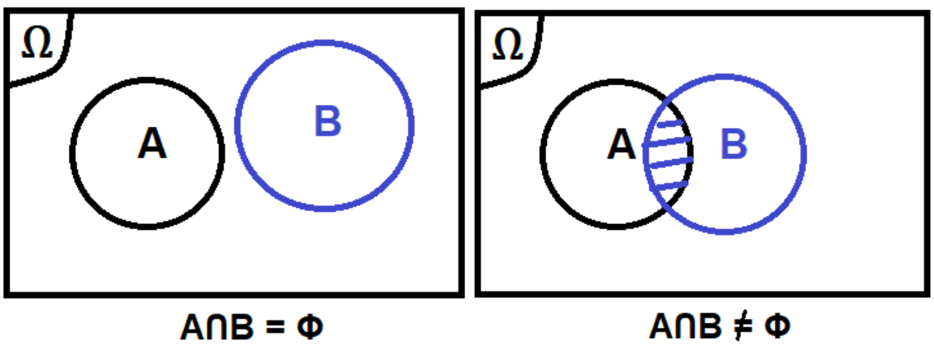
****

Deux événements incompatibles. Définition et exemples.

Kiffelesmaths.com

Définition

Deux évènements **A** et **B** sont incompatibles, si et seulement si **A∩B = Φ**



Exercice

Dé à six faces équilibrées

A : "Obtenir un nombre pair"

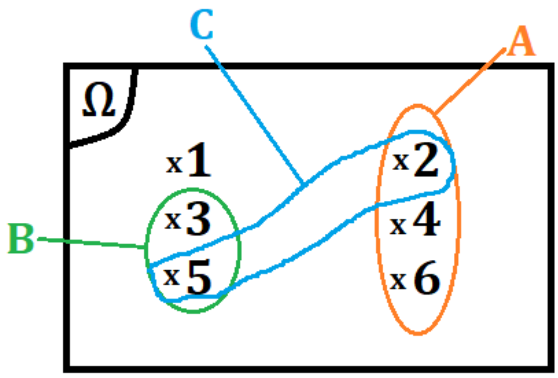
B : "Obtenir le 5 ou le 3"

C : "Obtenir le 2 ou le 5"

A∩B = Φ ; donc **A** et **B** sont incompatibles

A∩C = {2} ‡ Φ, donc : **A** et **C** ne sont pas incompatible

B∩C = {5} ‡ Φ ⇒ **B** et **C** ne sont pas incompatibles.



****

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Kiffelesmaths.com

Notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire

On définit la variable aléatoire sur un univers **E** d'une certaine expérience aléatoire. La première chose qu'il faut retenir c'est que cette loi de probabilité, en fait, on va la présenter sous forme d'un tableau.

Exemple

On lance un dé (6 faces), notre univers **E** = {1,2,3,4,5,6}

L'univers c'est l'ensemble des issues possible de cette expérience aléatoire.

On va définir une loi de probabilité sur cet univers.

Si on tire un nombre impair on gagne 5 €

Si on tire le nombre 2 on perd - 25 €

Si on tire le nombre 4 on perd - 30 €

Si on tire le nombre 6 on perd - 35 €

Donc : à chacune de ces issues {1,2,3,4,5,6} de cette expérience aléatoire on va associer un nombre un nombre réel qui traduit cette notion de gain et on dit grand X c'est la variable aléatoire **X** est égale au gain positif ou négatif en Euros.

Donc : on a un nouvel ensemble $\acute{E}$ qui va prendre toutes les valeurs possibles de cette variable aléatoire.

$$\mathbf{É} = \{\mathbf{50};\ \mathbf{-25};\ \mathbf{-30};\ \mathbf{-35}\}$$

C'est l'ensemble des variables possible que peut prendre **X**.

On va dire que l'expérience aléatoire est définie sur l'ensemble $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ qui est l'univers de notre experience aléatoire et l'univers de $\acute{E} = \{50;\ -25;\ -30;\ -35\}$ ce sont les valeurs aléatoires que peut prendre grand X. donc : on va définir la loi de probabilité de **X** :

Valeurs que peut prendre grand X	x_i	50	-25	-30	-35
Probabilité que peut avoir grand X quand elle prend la valeur aléatoire x_i	$P(X = x_i)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

C'est à dire l'évènement associé à X=50

Événement A = {1,3,5} ⇒ P(X= 50) = P(A)

Événement B = {2} ⇒ P(X= - 25) = P(B)

Événement C = {4} ⇒ P(X= - 30) = P(C)

Événement D = {6} ⇒ P(X= -35) = P(C)

Donc, les issues favorables à l'évènement A, sont 3 issues favorables sur 6 issues possibles ⇒ $\mathbf{\frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$

Probabilité de l'événement $\mathbf{B = \frac{1}{6}}$

Probabilité de l'événement $\mathbf{C = \frac{1}{6}}$

Probabilité de l'événement $\mathbf{D = \frac{1}{6}}$

$\Rightarrow \sum \mathbf{P(X = x_i) = 1.}$

****

Utiliser une loi de probabilité

Kiffelesmaths.com

Nous allons apprendre à utiliser une loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Exemple

On considère un commerçant qui vend des télévisions, et ce commerçant vend un certain nombre de télévisions par semaine. Donc, il peut vendre 0, 1, 2, 3 ou 4 téléviseurs par semaine. ⇒ X = un nombre de téléviseurs vendues / semaine et la loi de probabilité de cette variable aléatoire grand X peut prendre les valeurs suivantes : 0, 1, 2, 3, 4

Tableau représentant la loi de probabilité

Nombre k de Téléviseurs vendus	0	1	2	3	4
P(X = k)	0,26	0,23	…….	0,15	0,05

La probabilité que **X = 0** est de 0,26

La probabilité que **X = 1** est de 0,23

C'est-à-dire le vendeur vend 1 téléviseur / semaine.

1/ quelle est cette probabilité manquante ?

En fait on dit que $\sum P(X = x_i) = 1$

$$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$$

⇒ 0,26+ 0,23 + …. + 0,15 + 0,05 = 1

⇒ P(X = 2) = 1 – (0,26 + 0,26 + 0,15 + 0,05) = 0,31 = 31%.

2/ quelle est la probabilité pour que ce vendeur vend au moins 2 téléviseurs ?

Ça veut dire il peut vendre 2 ou 3 ou 4.

Soit A l'événement "le vendeur vende au moins 2 téléviseurs"

⇒ P(A) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0,31 + 0,15 + 0,05 = 0,51.

3/ quelle est la probabilité pour que ce vendeur vende au moins 1 téléviseur ?

- Soit B l'événement "le vendeur vende au moins **01** téléviseur"

  Ici y a 2 façons de faire

- $P(B) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$ou
- $P(B) = 1 - P(X = 0)$ (C'est l'évènement contraire)

  = 1 – 0,26 = 0,74 = 74%

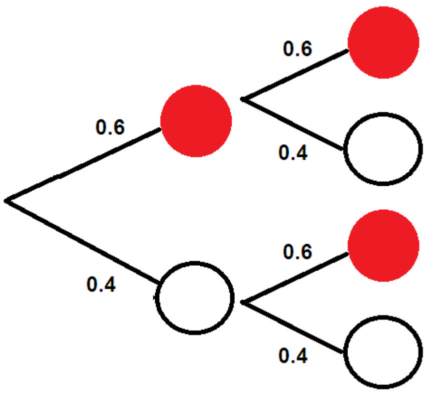
****

Loi Binomiale
La Variable aléatoire
La loi de probabilité de X
(Chermak)

Deux événements indépendant **A** et **B** (indépendants) ⟺ (Équivaux à dire) que P(A∩B) « probabilité de A **et** B » = P(A) x P(B)

Exemple

Une urne contient **6** boule Rouge et **4** Blanche et on effectue **2** tirages successif avec remise d'une boule ; c'est-à-dire je prends une boule je note sa couleur et je la remis ; donc la boule au **1er** tirage, elle peut être soit Rouge soit Blanche. Au second tirage si elle est Rouge, elle peut être Rouge ou blanche si elle est blanche elle peut être Rouge ou Blanche.



Maintenant ; quelle est la probabilité que les **2** boules tirées soient toutes les deux rouges ? c'est-à-dire rouge au 1er tirage et rouge au second tirage.

Donc ; on me demande la probabilité d'avoir une boule rouge et une boule rouge P(R∩R) ((probabilité de R **et** R)) les deux évènements sont indépendants, en vertu ce qui a été écrit au-dessus je peux écrire c'est la probabilité qu'elle soit rouge que multiplie la probabilité qu'elle soit rouge. P(R∩R) = P(R) x P(R).

Et donc, ça vous fait 0.6 x 0.6 = 0.36.

- **Maintenant** je peux vous demander quelle est la probabilité d'avoir au moins une boule rouge ?

donc la démarche la plus simple pour calculer la probabilité d'avoir au minimum une boule rouge c'est qu'on passe par l'évènement contraire, et quel est l'évènement contraire d'avoir au moins une boule rouge ? c'est d'avoir aucune rouge c'est-à-dire **2** blanches.

1 – P(B∩B)

$1 - P(B)x\ P(B)$

$1 - 0{,}4^2 = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$

Et peut égale P(R∩R) + P(R∩B) + P(B∩R) = (0.6x0.6) + (0.6x0.4) + (0.4x0.4) = 0.36 + 0.24 + 0.16 = 0.84

On va essayer de codifier ainsi donc on va essayer de définir la notion de **variable aléatoire** :

Soit **X** la variable aléatoire qui associe le nombre de boules rouges tirées

Les valeurs prises par **X** sont {0 ; 1 ; 2}

On va définir une notion qu'on appellera la loi de probabilité de grand **X**.

La loi de probabilité de X est la probabilité associée à chacune des valeurs prises par **X**.
C'est-à-dire **X** associe le nombre de boules rouges tirées.

Ça veut dire concrètement ; j'aurais entièrement déterminé la loi de probabilité de **X** dès qu'on aura calculer la probabilité que **X = 0** ; puis la probabilité que **X = 1** ensuite la probabilité que **X = 2**.

Et une fois que j'ai terminé de calculer la probabilité associée à chacune de ces valeurs-là, j'aurais entièrement déterminé la loi de probabilité de grand **X**.

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{0})$$
$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{1})$$
$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{2})$$

Et la somme des valeurs ici doit forcément me donner **1**.

P(X=0) = 0.4^2= 0.16 (la probabilité de tirer zéro boule rouge égale 0.16)

P(X=1) = 2 x 0.24 = 0.48 car ((R∩B) + (B∩R) = 0.6x0.4 + 0.4 x 0.6 = 0.24 +0.24 = 2x0.24 = 0.48) car c'est une opération comitative (Dont le résultat est invariable quel que soit l'ordre des facteurs. *L'addition est commutative. Anneau, corps commutatif,* dont la multiplication est commutative. *Groupe commutatif,* dont l'addition est commutative.

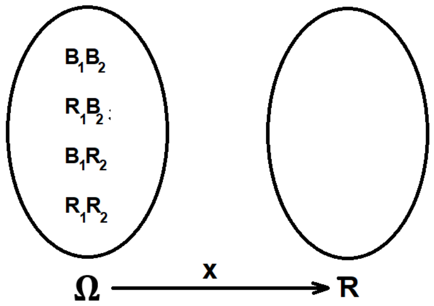
⇒ abélien.)

P(X=2) = 0.6^2 = 0.36

⇒ 0.16+0.48+0.36= 1.

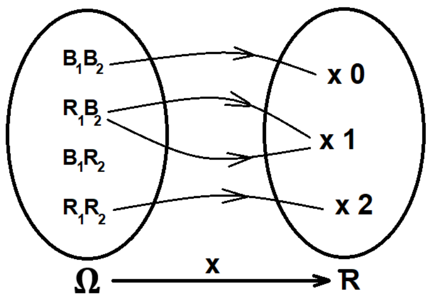
Pour expliquer la variable aléatoire ; j'ai mon univers aléatoire oméga Ω et j'ai ici l'univers de tous les nombres réels. Pour l'univers Ω se sont tous les résultats possibles lorsque j'effectue deux tirages, je peux tirer 1 boule Blanche puis 1 boule

Blanche ; je peux tirer 1 boule rouge puis 1 boule blanche, (le numéro que je mis c'est l'ordre du tirage, je peux tirer 1 blanche puis 1 rouge, et je peux tirer 2 rouges.



R = ensemble des nombres réel

Donc dans l'univers oméga y a **4** résultats possibles ; la question, est celle-ci, j'ai écrit grand **X** associe au nombre de boules rouges, donc les résultats dans l'univers des nombres réel **IR** sera comme suit :



Donc 0,1,2 c'est l'univers images de X(Ω) et ça s'écrit :

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\Omega}) = \{\mathbf{0}; \mathbf{1}; \mathbf{2}\}$$

Et donc à partir de là et une fois qu'on a déterminer les valeurs que prend grand **X**, on peut entièrement déterminer la loi de probabilité de grand **X**, on détermine

$P(X = 0)$

$P(X = 1)$

$P(X = 2)$

Exemple :

Une entreprise fabrique un article, et cet article peut présenter de façon indépendante **2** types de défauts, **1** défaut électrique que j'appelle **E** avec une probabilité que j'appelle P(E) = 0.08. Y a **8%** de chance pour que l'article ait un défaut électrique, ou un défaut mécanique P(M) = 0.05 y a **5%** de chance pour que l'article ait un défaut mécanique. Mais on suppose que le défaut électrique et le défaut mécanique sont indépendants

$$\mathbf{P(E) = 0.08; P(M) = 0.05}$$

Le cout de production de l’article est de 100 €.

Coût de production 100 €

Coût de SAV **E** 20 €

Coût de SAV **M** 30 €

Soit **X** la variable aléatoire qui associe le coût de revient de l’article.

$$X(\Omega) = \{100; 120; 130; 150\}$$

Ça c’est les valeurs prises par grand **X** ; maintenant quelle est la loi de probabilité de grand **X** ;

$$\mathbf{P(X = 100)}$$
$$\mathbf{P(X = 120)}$$
$$\mathbf{P(X = 130)}$$
$$\mathbf{P(X = 150)}$$

Lorsque j’aurais calculé toutes ces probabilités-là, j’aurais entièrement déterminé la loi de probabilité de grand **X**, maintenant ce qui je vais vous demander c’est de réfléchir pendant 3, 4 minutes, pour me dire quelle valeur je mis ici, je vous laisse faire ça.

1/ qu’est-ce que ça veut dire **P(X=150)** ça veut dire c’est un article qui présente deux défauts ; défaut mécanique = 0.05 ; défaut électrique = 0.08 ; ⇒ quelle est la probabilité qu’il ait les deux défauts ? c’est-à-dire :

P(X=150) = P(M ∩ E) défaut mécanique et électrique = P(M) x P(E) = 0.05 x 0.08= 0.04. (C’est la probabilité que l’article ait les deux défauts). Maintenant vous complétez la suite :

P(X = 130) c’est le cout de production auquel on rajoute = $P(\overline{M} \cap M)$= (pas de défaut électrique et probabilité de défaut mécanique). Je vous laisse finir et j’espère que vous aurez aucun mal à me déterminer les deux restants.

$\mathbf{P(X = 150)} = P(M \cap E) = P(M) \times P(E) = 0.05 \times 0.08 = 0.004$

$\mathbf{P(X = 130)} = P(\overline{E} \cap M) = P(\overline{E}) \times P(M) = 0.92 \times 0.05 = 0.046$

P(X= 120) c’est-à-dire un défaut électrique et pas de défaut mécanique

P(X= 120) = P(E∩$\overline{M}$) = P(E) x P($\overline{M}$) $= P(E) \times \big(1 - P(M)\big) = 0.08 \times 0.95 = 0.076$

$\mathbf{P(X = 100)} = P(\overline{E} \cap \overline{M}) = P(\overline{E}) \times P(\overline{M}) = 0.92 \times 0.95 = 0.874$

Je vous propose d'effectuer 5 tirages successifs : et grand **X** est la variable aléatoire qui associe le nombre de boules rouges tirées.

Question n°1/ quelles sont les valeurs prises par grand **X** ?

Donc, les valeurs sont = 0,1,2,3,4,5 donc je peux tirer entre zéro boule rouge et 5 boules rouges.

P(X=0) ça veut dire 0 boule rouge, ça veut dire 5 boules blanches, (BBBBB) ça fait du 0.4 x 0.4 x 0.4 x 0.4 x 0.4 = 0.4^5 = 0.01024

$$\mathbf{P(X=5)} = \mathbf{RRRRR} = 0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}6^5 = 0{,}0778$$

Maintenant qu'elle est p(x = ?) qu'on peut calculer en faisant un minimum de dénombrement possible?

P(X=1) on met **1 R** et **4 B** ça donnerait **RBBBB**

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = 5 \times 0{,}6 \times 0{,}4^4 = 0{,}0768$$

Car on a 5 chemins qui mènent à 1 rouge et 4 blanches

RBBBB = 0,6 x $0{,}4^4$ = 0,6 x 0,0256 = 0,01536

BRBBB = 0,6 x $0{,}4^4$ = 0,6 x 0,0256 = 0,01536

BBRBB = 0,6 x $0{,}4^4$ = 0,6 x 0,0256 = 0,01536

BBBRB = 0,6 x $0{,}4^4$ = 0,6 x 0,0256 = 0,01536

BBBBR = 0,6 x $0{,}4^4$ = 0,6 x 0,0256 = 0,01536

Le total est : 0,01536 x 5 = 0,0768

$P(X=0) = 0{,}4^5$ = 0,01024 (C'est-à-dire **BBBBB** = $0{,}4^5$)

$P(X=5) = 0{,}6^5 =$ 0,07776 (C'est-à-dire **RRRRR** = $0{,}6^5$)

$P(X=1) = 5 \times 0{,}6 \times 0{,}4^4 = 0{,}0768 = 7{,}68\%$

$P(X=4) = 5 \times 0{,}6^4 \times 0{,}4$ = 0,2592 = 25,92%

C'est-à-dire

BRRRR

RBRRR

RRBRR

RRRBR

RRRRB

Un petit détour pour calculer P(X=2) et P(X=3)

Exemple si j'effectue 20 tirages successifs : j'aurai

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = 0.4^{20} = 0{,}00000001099$

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) = 20 \times 0.6 \times 0.4^{19}$

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 19) = 20 \times 0.6^{19} \times 0.4$

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 20) = 0.6^{20}$

La question à laquelle je dois répondre est quelle est la probabilité qu'il y est **2** rouge P(X=2) et **3** rouge P(X=3) etc. ?

Donc je vais trouver une formule qui me permettra de calculer la probabilité de grand **X** qui est $P(X = k)$ et k peut aller dans mon exemple de 0 à 20. C'est-à-dire k c'est le nombre de boules rouges.

Donc k est un entier naturel qui est compris dans mon exemple entre **0** et **20**

$$P(X = k);\ k \in \mathbb{N}$$

$$0 \leq k \leq 20$$

Et une fois que j'aurais terminé cette formule j'aurais entièrement **déterminé la loi de probabilité de grands X** et cette loi s'appellera une loi binomiale qui a **2** paramètres, le premier paramètre c'est le nombre d'épreuves, qui est dans notre exemple 20 c'est-à-dire **n = 20** ; et le deuxième paramètre c'est la probabilité de succès celle que j'ai retenu pour **X**, **X** associe le nombre de boules rouges donc c'est la probabilité de tirer **1** boule rouge p = **0.6.**

Donc : **n** = 20 et **p** = 0,6

Et j'écris que grand **X** suit une loi binomiale de paramètre 20 et 0.6.

$$\mathbf{X \hookrightarrow \mathcal{B}(20;\ 0{,}6)}$$

Et si j'écris cet exemple :

$$X \hookrightarrow \beta(15; 0.7)$$

$$P(X = 0) = 0.3^{15} = 0{,}00000001434$$

$$P(X = 1) = 15 \times 0.7 \times 0.3^{14} = 0{,}0000005022$$

$$P(X = 15) = 0.7^{15} = 0{,}004747$$

Maintenant si je prends les nombres suivants : **1** – **2** – **3** combien de nombres différents puis je former avec les chiffres **1-2-3** ?

1-2-3

1-3-2

2-1-3

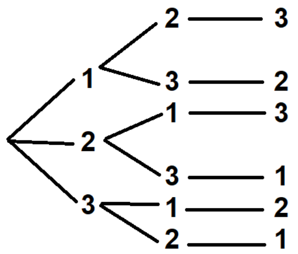
2-3-1

3-1-2

3-2-1

C’est facile à faire manuellement, mais lorsque je vous dis 1-2-3-4-5-6-7-8-9 ça devient quand même difficile à faire manuellement.

D’où la mise en place ce que j’appelle faire du dénombrement simple.



3 x 2 x 1 = 6 = 3!

Ici je dissocie : j’ai combien de choix pour le premier chiffre ? j’ai 3 ; et j’ai 2 choix ou possibilité pour le 2ème chiffre, et j’ai 1 choix pour le 3ème chiffre. Donc 3 x 2 x 1 = 6 possibilités. Pour 1-2-3-4 j’ai 4 ! = 4 x 3 x 2 x 1 = 24 possibilités nombres formés avec le chiffre 1-2-3-4. En revanche pour 1-2-3-4-5 je peux former 5 ! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 =120 nombres avec ces chiffres.

Exemple

Si je vous écris un mot comme ça (**AMIES**) j’ai combien de mots anagramme d’**AMIES** ? anagramme c’est un mot que l’on peut former avec ces lettres. C’est le même raisonnement, puis que j’ai **5** lettres distinctes, j’ai combien de façon de choisir la **1ère** lettre j’ai **5** choix, puis **4** puis **3** puis **2** puis **1**.

Donc, j’ai factoriel 5 (**5!**) anagrammes du mot AMIES. **5!**

On garde le même raisonnement pour les lettres kif kif

Donc le factoriel du nombre de lettres total sur le factoriel des lettres kif kif

AMIES 5!

ÉLÈVES 6!

ELEVES $\frac{6!}{3!}$ Car Ici on a EEE = 3E

247622 $\frac{6!}{3!}$

ATTENTIVE $\frac{9!}{3!\text{x }2!}$

RRBBB $\frac{5!}{2!\text{ x }3!} = C_5^2$

RRR BBBBBBB

$$C_{20}^{5} = \frac{20!}{5!\,x\,15!} \quad \frac{10!}{3!\,x\,7!} = C_{10}^{3}$$

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$

On revient pour notre 1er exemple qui est :

$$P(R) = 0.6; \;\; P(B) = 0.4$$

$$P(X = 0) = 0.4^5; P(X = 1) = 5 \times 0.6 \times 0.4^4$$

$$P(X = 5) = 0.6^5; \;\; P(X = 4) = 5 \times 0.6^4 \times 0.4$$

$$P(X = 2) = C_5^2 \times 0.6^2 \times 0.4^3$$

$$P(X = 3) = C_5^3 \times 0.6^3 \times 0.4^2$$

RR BBB

Je n'ai pas uniquement cette possibilité mais j'ai autant de possibilité que d'anagramme de ce mot.

Exemple

Voilà la probabilité d'avoir **3** rouges lorsque tu effectues 10 tirages successifs

$$P(X = 3) = C_{10}^3 \times 0.6^3 \times 0.4^7$$

Dans notre exemple précédent de 5 tirages et de la probabilité d'avoir une boule rouge est = **0.6**

$$X \backsim \beta(5; 0.6)$$

$$P(X = k)$$

Pour calculer la probabilité d'avoir **k** rouge c'est comme ça :

Et puisque j'ai **5** épreuves je peux déduire la formule suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = k) = C_5^k \times 0.6^k \times 0.4^{5-k}}}$$

Donc de façon générale : on va généraliser la formule comme ceci :

En présence de **n** épreuves indépendantes présentant **2** issues **"Succès"** et **"Echec"** avec une probabilité de succès **p** ; avec une probabilité d'échec **1 – p**.

Voilà la probabilité d'avoir $\boldsymbol{k}$ succès

Si **X** est la variable aléatoire qui associe le nombre $\boldsymbol{k}$ de succès alors **X** suit une loi binomiale de paramètres **n** et **p**, notée $\boldsymbol{X \backsim \beta(n; p)}$ avec :

$$\boxed{\boldsymbol{P(X = k) = C_n^k \times p^k (1-p)^{n-k}}}$$

$$\underbrace{\overbrace{\text{SSS....S}}^{k\ S}\overbrace{\text{EE....E}}^{(n-k)\ E}}_{n\ \text{épreuves}}$$

$$\frac{\mathbf{n}!}{k!(\mathbf{n}-k)} = \mathbf{C}_{\mathbf{n}}^{k}$$

$$X \backsim \beta(n;p)$$

$$\boldsymbol{P(X=k) = C_n^k \times p^k(1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}$$

$$\boldsymbol{E(X) = np}$$

$$\boldsymbol{V(X) = np(1-p)}$$

$$\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$$

E(X) c'est l'espérance mathématique et qui correspond à une valeur moyenne.

V(X) c'est la variance

σ(X) écart-type

L'écart type ou la variance, ils mesurent la dispersion des valeurs prises par grand **X** autour d'une valeur centrale qui est l'espérance plus élevé la dispersion est grande plus élevé sera l'écart-type, donc l'espérance est un paramètre de position alors que l'écart-type est un paramètre de dispersion.

Cette leçon est portée sur les évènements indépendants, les éléments importants savoir reconnaitre une loi binomiale, le champ d'application d'une loi binomiale c'est être en présence d'une succession d'épreuves indépendantes binaires une succession d'épreuves indépendantes à **2** issus, une succession d'épreuves indépendante de Bernoulli. Et après qu'on a mis en place une fois qu'on a établi une loi binomiale on applique les formules de cette loi.

****

Loi Binomiale
Travaux dirigés
Calculer une probabilité sur une loi binomiale

Yvan Monka

Exercice

On tire **4** fois de suite avec remise une boule de l'urne.

X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages gagnants.

Calculer la probabilité de tirer 3 boules gagnantes.

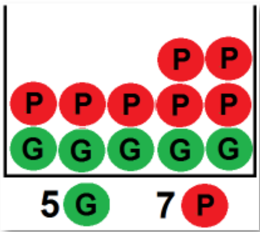
Calculer **P (X = 3).**

X suit une loi binomiale de paramètres :

n = 4 (n représente le nombre de tirages)

p = $\frac{5}{12}$ (p représente la probabilité du succès)

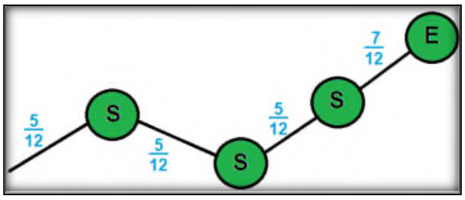
Succès : ''Tirer une boule gagnante'' $\mathcal{B}\ (4, \frac{5}{12})$



Regardant notre formule

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

3 boules gagnantes ça veut dire selon arbre pondéré on aura



Donc : SSSE ou SSES ou SESS ou ESSS ca veut dire y a 4 possibilités

Alors : on appliquant la formule et on aura :

$$\textbf{P(X = 3)} = C_4^3\ x\ (\frac{5}{12})^3\ x\ \frac{7}{12} = \mathbf{0,17 = 17\ \%.}$$

****

Loi binomiale

Calculer une probabilité à l'aide d'un arbre

Travaux dirigés

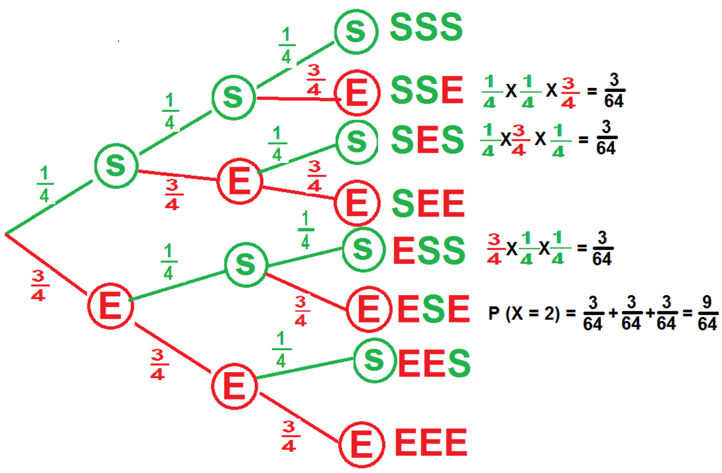
Yvan Monka

Ajoutée le 4 déc. 2014

Exercice

On tire **3** fois de suite une carte avec remise dans un jeu de **4** cartes. On considère comme succès ''obtenir le poisson Nemo ''.

X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Calculer P(X = 2).



$$\mathrm{P(X = 2)} = \frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} = \frac{9}{64}$$

****

Loi Binomiale

X variable aléatoire suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$ cas !

Exemple à 2 issues (**Réussite** ou **Echec**)

P : probabilité de réussite **0 ≤ p ≤ 1**

Ω = {P, F}

X(P) = 1

X(F) = 0

$\mathrm{P(X = 0)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ et $P(\mathrm{X} = 1) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

10 fois l'exp. P(X = 7)

$$X \sim \mathfrak{B}(n, p) = \binom{n}{k} P^k k(1 - p)^{n-k}$$

$$E[X] = np$$

$$Var.(X) = np^{1-p}$$

****

Exercice 2

Dans un lycée 50 profs, la probabilité qu'un tombe malade 0,01. (Indépendants).

Calculer la probabilité

- Qu'aucun prof soit malade
- 5 profs soient malades
- Au moins 1
- Au plus 3

Réponse

X variable aléatoire compte le nombre de profs malades.

Ω = {0,1,2,3, ………………… ,49,50}

Epreuve de Bernoulli : $X \sim \mathfrak{B}(n, p) = \binom{n}{k} P^k k(1-p)^{n-k}$
S : "malade", $\bar{S} = "pas\ malade"$

$P(S) = 0{,}01$

$\boldsymbol{X \sim \mathfrak{B}(50;\ 0{,}01)}$

a) $P(X=0) = \binom{50}{0}.0{,}01^0.(0{,}99)^{50}$= x 1 x 0,6050 = 0,6050
b) $P(X=5) = \binom{50}{5}.0{,}01^5.(0{,}99)^{45}$ = 2118760 x 0,0000000001 x 0,6362 = 0,000128.
c) X ≥ 1 ⇒ $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - a = 1 - 0{,}6050 = 0{,}395$
d) $P(X \leq 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$= 0,9987
   1. $P(X=1) = \binom{50}{1}.0{,}01^1.(0{,}99)^{49} = 50 \times 0{,}01 \times 0{,}6111 = 0{,}3055$
   2. $P(X=2) = \binom{50}{2}.0{,}01^2.(0{,}99)^{48} = 1225 \times 0{,}0001 \times 0{,}6173 = 0{,}076$
   3. $P(X=3) = \binom{50}{3}.0{,}01^3.(0{,}99)^{47} = 19600 \times 0{,}000001 \times 0{,}6235 = 0{,}0122$

   $\Rightarrow P(X \leq 3) = 0{,}6050 + 0{,}3055 + 0{,}076 + 0{,}0122 = 0{,}9987$
e) $E[X] = n \times p = 50 \times 0{,}01 = 0{,}5$

Donc en moyenne j'ai 0.5 prof malade par jour et c'est ça l'espérance de **X**

****

Schéma de Bernoulli et variable aléatoire

Kiffelesmaths.com

Expérience aléatoire

Qui consiste à répéter **n** fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli $\binom{\textbf{Succés}}{\textbf{Echèc}}$

Schéma de Bernoulli de paramètres

n : nombre de répétitions

p : probabilité de "épreuve de Bernoulli"

- Schéma de Bernoulli de paramètres **n** et **p**
- Loi Binomiale de paramètre **n = 3** et **p** $\boldsymbol{\mathcal{B}}$(3 , p)

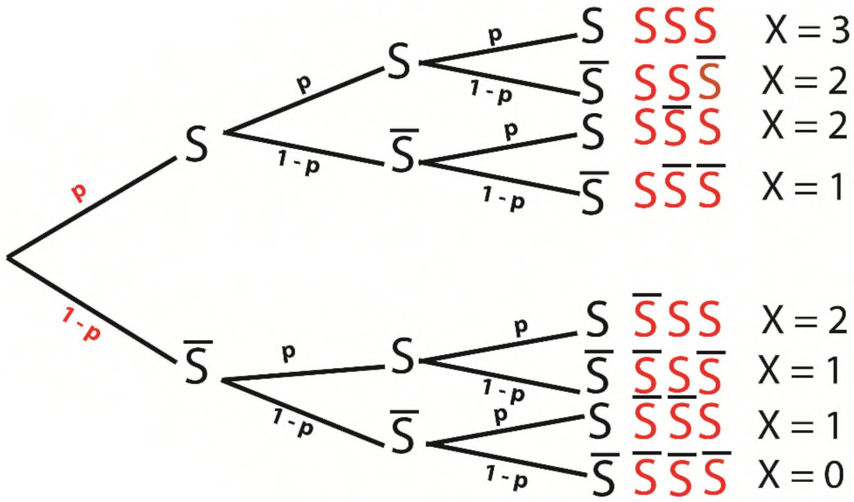
$\mathbf{X} = nombre\ de\ succès\ dans\ un\ Schéma\ de\ Bernoulli$

Réponse

X suit une loi Binomiale de paramètre n et p $\boldsymbol{\mathcal{B}}$(n , p)

- Epreuve de Bernoulli de paramètre **p**
- Répéter **3** fois de façon identique

X = nombre de succès dans un schéma de Bernoulli.



$$\mathbf{P(X = 0) = P(\bar{S}\bar{S}\bar{S}) = (1 - p)}$$

$$\mathbf{P(X = 1) = P(S\,\bar{S}\,\bar{S}) + P(\bar{S}\,S\,\bar{S}) + P(\bar{S}\,\bar{S}S)}$$

$$\mathbf{p \times (1 - p)^2 + p \times (1 - p)^2 + p \times (1 - p)^2}$$

$$\mathbf{= 3 \times p \times (1 - p)^2}$$

****

Evènements indépendants et Probabilités conditionnelles

Indépendance

Définition : Deux événements A et B sont dits indépendants si

$$\mathbf{P(A \cap B) = P(A).P(B)}$$

Attention : Ne pas confondre indépendants et disjoints ! (A et B sont disjoints si $\mathbf{P(A \cap B) = 0, card\ A \cap B = 0}$)

Exemple 1

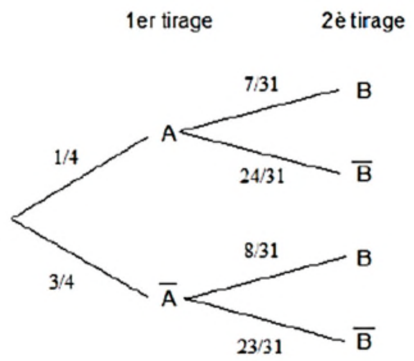
On tire au hasard, dans un jeu de 32 cartes non truqué, une carte, puis sans la remettre, une autre. Soit

A : "la première carte tirée est un cœur"

B : " la seconde carte tirée est un cœur"

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

- $\mathbf{P(A) = \frac{card(A)}{card\ (\Omega)} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}}$
- $\mathbf{P(B) = \frac{card(B)}{card\ (\Omega)}}$**; card (B)dépend de la première étape.**
- **Si A alors card** $\mathbf{(B) = 7}$ **et** $\mathbf{P(B) = \frac{7}{31}}$
- **Si** $\bar{\mathbf{A}}$ **alors card** $\mathbf{(B) = 8}$ **et** $\mathbf{P(B) = \frac{8}{31}}$



$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{31} = \frac{7}{124}$$

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{4} \times \frac{24}{31} = \frac{6}{31}$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{3}{4} \times \frac{8}{31} = \frac{6}{31}$$

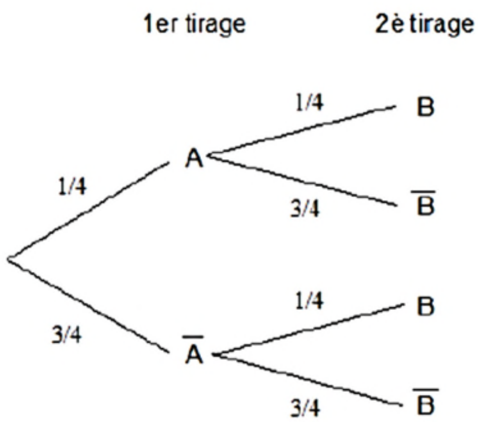
$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{3}{4} \times \frac{23}{31} = \frac{69}{124}$$

$$\mathbf{Rq: P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + (P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1}$$

$$\mathbf{P(B) = P\big((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)\big) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)} = \frac{7}{124} + \frac{6}{31} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P(A \cap B) \neq P(A)P(B)} \Rightarrow A\ et\ B\ ne\ sont\ pas\ indépendants$$

Avec remise on a :



$\mathrm{P(A \cap B)} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \mathrm{P(A)P(B)} \Rightarrow$ **A**et **B** sont indépendants

Exemple 2

- Soit une famille de deux enfants.
    - A = "la famille a des enfants des 2 sexes",
    - B = "la famille a, au plus, une fille"
        - A et B sont-ils indépendants ?

Ω = {(F, F),(F, G),(G, F),(G, G)} 5eauiprobqbilit2

A = {(F, G), (G, F)} ⇒$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

B = {(F, G), (G, F), (G, G)} ⇒$P(B) = \frac{3}{4}$

$(\bar{B} = \{F, F\})$

$A \cap B = A \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{2} \neq P(A)P(B)$

⇒ A et B ne sont pas indépendants

- **Même question avec 3 enfants**

  Ω = {(F, F,F), (F,F,G), (F,G,F), (F,G,G), (G,F,F), (G,F,G), (G,G,F), (G,G,G)}

$$\bar{A} = \{\{(\mathrm{F,F,F}), (\mathrm{G,G,G})\}\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$B = \{(\mathrm{F,G,G}), (\mathrm{G,F,G}), (G,G,F), (G,G,G)\} \Rightarrow \mathrm{P(B)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{(\mathrm{F,G,G}), (\mathrm{G,F,G}), (\mathrm{G,G,F})\}$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{8} = P(A)P(B)$$

$$\Rightarrow A\ et\ B\ sont\ indépendants\ (ceci\ est\ uniquement\ vrai\ pour\ n = 3)$$

Remarque

1. Pour tout événement **A**, **A** et **Ω** sont indépendants

   $\mathbf{P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A)P(\Omega)}$

2. Soient **A** et **B** deux événements non impossibles. Si A et B sont disjoints, alors A et **B** ne sont pas indépendants. $\mathbf{A \cap B = 0 \Rightarrow P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)}$ car **A** et **B** ne sont pas impossibles.

3. Si **A** et **B** sont indépendants alors **A** et $\mathbf{\bar{B}}$ le sont aussi.

   $\mathbf{P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}))}$

   $car\ \mathbf{(A \cap B) et\ (A \cap \bar{B})}\ sont\ disjoints$

   $= \mathbf{P(A)P(B) + P(A \cap \bar{B})}$ car A et B sont indépendants

   $\Rightarrow \mathbf{P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)\big(1 - P(B)\big) = P(A)P(\bar{B})}$

   ⇒ **A** et $\mathbf{\bar{B}}$ sont indépendants.

Généralisation

Définition

Les événements A_1, A_2, ….., A_n sont mutuellement indépendants si $\forall\, p\ \in$ $\mathbb{N}\ tel\ que\ 2\ \leq p\ \leq n\ et\ pour\ toute\ collection\ de\ p\ événements$ A_{i1}, A_{i2}, …, A_{ip} on a

$P\left(A_{i1} \cap A_{i2\cap} \ldots \cap A_{ip}\right) = P(A_{i1})P(A_{i2}) \ldots P(A_{in})$

Remarque :

Il y a $C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - C_n^1 - C_n^0 = 2^n - n - 1\ conditions\ à\ vérifier$

Cas particulier : Trois événements **A**, **B** et **C** sont mutuellement indépendants si :
$\mathrm{P(A \cap B) = P(A)P(B)},$

$\mathrm{P(A \cap C) = P(A)P(B), P(B \cap C) = P(B)P(C)}$ et

$\mathrm{P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)}$

****

Probabilité conditionnelle

Définition

Soient A et B deux événements d'une même épreuve et B un événement non impossible (P(B) ǂ 0). On appelle

Probabilité conditionnelle de A sachant (que l'évènement) B (s'est réalisé), notée $P_B(A) = P(A\backslash B) = P(A\ sachant\ B)$, la probabilité $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

1. Si A et B sont indépendants

$$\mathrm{P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)}$$

2. $\mathbf{P(B\backslash A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = P(A\backslash B)\frac{P(B)}{P(A)}}$

Dans les exemples précédents :

- Jeu de carte sans remise

  $*\,\boldsymbol{P(B\backslash A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{7/124}{1/4} = \frac{7}{31}}$

  $*\,\boldsymbol{P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{7/124}{1/4} = \frac{7}{31}}$

* Famille de 2 enfants

$**\,\mathbf{P(A\backslash B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3}}$

$*\,\mathbf{P(B\backslash A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{1/2}{1/2} = 1 (A \subset B)}$

* 9 boules numérotées dans une urne ;

A = "le numéro tiré est un multiple de 3 "

B = "le numéro tiré est impaire"

- **A** = {3,6,9} ⇒ card (A) = 3 ⇒ P(A) = $\frac{1}{3}$

- $\mathbf{B = \{1,3,5,7,9\} \Rightarrow card(B) = 5 \Rightarrow P(B) = \frac{5}{9}}$

- $\mathbf{A \cap B = \{3,9\} \Rightarrow card(A \cap B) = 2 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{9}}$

- $\mathbf{P(A \backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{5}}$
- $\mathbf{P(B \backslash A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2}{3}}$

****

Formule des probabilités totales

Théorème

Soit $(A_i)_{i\ldots n}$ une collection d'évènements non impossibles formant une partition de Ω. Alors pour tout événement B de Ω :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B \backslash A_i)P(A_i)$$

Corolaire

Soit **A** un événement de **Ω** tel que 0 < P(A) < 1. Alors pour tout événement B de Ω :

$$\mathbf{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}) = P(B \backslash A)P(A) + P(B \backslash \bar{A})P(\bar{A})}$$

Exemple

Une compagnie d'assurance a deux catégories de clients :

- Les jeunes conducteurs qui ont une probabilité d'accident de **40%** (sur **5** ans)
- Les autres, dont la probabilité d'accident est **20%**

Les jeunes conducteurs représentent **30%** de la clientèle de la compagnie. Quelle est la probabilité d'avoir un accident pour un client quelconque ?

Soit **A** l'événement "avoir un accident" et **J** l'événement "être un jeune conducteur". Alors

$$\mathbf{P(A) = P(A \backslash J)P(J) + P(A \backslash \bar{J})P(\bar{J})}$$

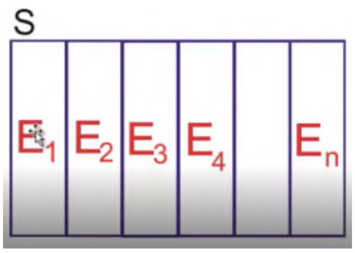
$$= 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}26$$

****

Théorème de bayes

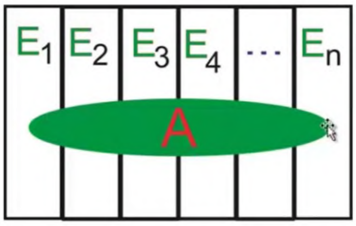
Exemple

Admettant que nous avons un certain nombre d'expériences $E_1 E_2 E_3 \ldots E_n$ ou on les appelle un nombre d'évènements qui se trouve au niveau d'un univers appelé S. comme indiqué sur schéma



L'intersection entre ces événements = Φ c'est-à-dire y n'a pas d'intersection, l'union entre tous ces événements nous donne l'univers S (Sample space).

Dans un autre cas comme indique ce schéma



Avec les mêmes événements précédents on croise l'événement A, on constate que le A se croise avec tous les évènements de l'univers S. on s'aperçoit qu'il y a des aires d'intersection entre tous les évènements de l'univers S et l'événement A.

Donc, on peut dire $P(A) = P(E_1 \cap A) \cup P(E_2 \cap A) \cup P(E_3 \cap A) \cup P(E_4 \cap A) \cup \ldots \cup P(E_n \cap A)$

$P(A) = P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A) + P(E_3 \cap A) + P(E_4 \cap A) + \ldots + P(E_n \cap A)$

Nous transformant $P(E_1 \cap A)$ par la probabilité conditionnelle et on peut la réécrire de cette façon :

$P(E_1 \cap A) = P(E_1).P_{E_1}(A)$

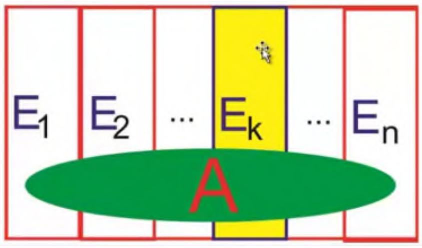
$P(E_2 \cap A) = P(E_2).P_{E_2}(A)$

$P(E_3 \cap A) = P(E_3).P_{E_3}(A)$

$P(E_n \cap A) = P(E_n).P_{E_n}(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A) = P(E_1).P_{E_1}(A) + P(E_2).P_{E_2}(A) + P(E_3).P_{E_3}(A) + \cdots + P(E_n).P_{E_n}(A)$

$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i).P_{E_i}(A)$

On a : 

On va exprimer l'événement haché en jaune et son intersection avec l'événement A par les probabilités conditionnelles et on dit :

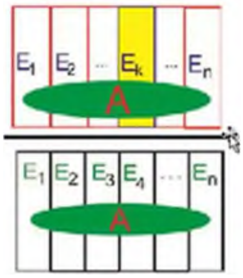
Donc, P(E_k ∩ A) = $P(E_k) \times P(A/E_k)$

Théorème de Bayes (Baye's Theorem)

Si on a E_1, E_2, ……….., E_n des évènements qui subdivisent l'univers S, et $P(E_i) > 0$ pour toutes les valeurs de i, et A n'importe quel évènement à condition que P(A) > 0 on aura :

$$P_A(E_k) = \frac{P(E_K).P_{E_K}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i).P_{E_i}(A)} ; i = 1, 2, \ldots\ldots, n$$

Donc : démonstration selon schéma suivant :

$\mathbf{P_A(E_k)} =$ 

$P(E_k \cap A) = P(E_k).P_{E_k}(A)$

P(A) = P(E_1∩ A)U P(E_2∩ A)U P(E_3∩ A)U P(E_4∩ A)U …UP(E_n∩ A)

⇒ P(A) = $\sum_{i=1}^{n} P(E_i).P_{E_i}(A)$

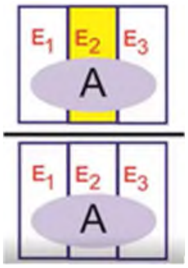
Théorème de Bayes

$$\boxed{\mathbf{P_A(E_k) = \frac{P(E_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(E_k).P_{E_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i).P_{E_i}(A)}}}$$

Le but du théorème de Bayes c'est de répondre à la question suivante :
Si l'évènement **A** est réalisé, qu'elle est la probabilité qu'il soit à cause de l'expérience **E_k** ?

Exemple

On 3 machines, E_1, E_2 et E_3, chaque surface des évènements représente la probabilité de ce que produit chaque machine.

$$P_A(E_2) = $$ 

On prend la 2ème zone où le A ∩ E2. Donc : P(A ∩ E2) on la changer par les probabilités conditionnelles. Et sera : P(E2) x P(A).

Le numérateur sera égal à $\mathbf{P(A \cap E_2)} = P(E_2) \times P_{E_2}(A)$

Le dinoménateur **P(A)** = $P(E_1 \cap A) \cup P(E_2 \cap A) \cup P(E_3 \cap A)$

⇒ **P(A)** = $P(E_1) \times \mathbf{P_{E_1}(A)} + P(E_2) \times \mathbf{P_{E_2}(A)} + P(E_3) \times \mathbf{P_{E_3}(A)}$

$$\mathbf{P_A(E_2) = \frac{P(E_2 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(E_2).P_{E_2}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i).P_{E_i}(A)}}$$

$$\mathbf{P_A(E_2)} = \frac{\mathbf{P(E_2 \cap A)}}{\mathbf{P(A)}} = \frac{\mathbf{P(E_2).P_{E_2}(A)}}{P(E_1) \times \mathbf{P_{E_1}(A)} + P(E_2) \times \mathbf{P_{E_2}(A)} + P(E_3) \times \mathbf{P_{E_3}(A)}}$$

Exemple 2 :

Dans une usine la production totale se fait par ses 3 machine. Si la première machine produit 30% de la production totale et la 2ème produit 25% et la 3ème produit 45% de la production totale. 3% de la production de la 1ère machine est défaillante, 4% de la production de la 2ème machine est défaillante et 3% de la production de la 3ème machine est défaillante. Si on tire au hasard une unité de cette production totale, et nous l'avons découvert qu'elle est défaillante, quelle est la probabilité qu'elle soit produite par la 2ème machine ?

Réponse

On affecte des symboles pour chaque événement
Evénement **E1** : « l'unité produite par la première machine »
Evénement **E2** : « l'unité produite par la deuxième machine »
Evénement **E3** : « l'unité produite par la troisième machine »
Evénement **A** : « l'unité produite présente une défaillance »

La 1ère machine produit 30% ⇒ $\mathrm{P(E_1)} = 0{,}30$ de la production totale

La 2ème machine produit 25% ⇒ $\mathrm{P(E_2)} = 0{,}25$ de la production totale

La 3ème machine produit 45% ⇒ $\mathrm{P(E_3)} = 0{,}45$ de la production totale

Le pourcentage de la défaillance dans la 1ère machine est 3%

⇒ $P_A(E_1) = 0{,}03$; $P_A(E_2) = 0{,}04$; $P_A(E_3) = 0{,}03$;

Si on tire au hasard une unité de cette production totale, et nous l'avons découvert qu'elle est défaillante, quelle est la probabilité qu'elle soit produite par la 2ème machine ? donc, par l'utilisation du théorème de Bayes, on aura :

$$P_A(E_2) = \frac{P(E_2).P_{E_2}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i).P_{E_i}(A)} = 0{,}04; i = 1, 2, 3$$

$$P_A(E_2) = \frac{0.25 \ x \ 0.04}{(0.30 \ x \ 0.03)+(0.25 \ x \ 0.04)+(0.45 \ x \ 0.03)} = \frac{0.01}{0.0325} = 0.3077$$

****

Formule de Bayes

Formule de probabilité des causes.

Exemple

Un labo commercialise un test médical

- Le test est positif chez 95% des personnes atteintes (5% de "faux négatifs"
- Le test est négatif chez 99% des personnes saines (1% de "faux positifs"

La maladie touche 0,5% de la population. Une personne passe le test et le résultat est positif. Quel est la probabilité qu'elle soit atteinte ?

Théorème

Soient A et B deux événements non impossibles. Alors

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B).P(A)}{P_A(B).P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})}}$$

Dans l'exemple, en définissant A = "la personne est atteinte" et B = "le test est positif", on a $P(A) = 0{,}005$, $P_A(B) = 95\% \ et \ P_{\bar{A}}(B) = 0{,}01$. Ainsi

$$P_B(A) = \frac{0{,}95 \times 0{,}005}{0{,}95 \times 0{,}005 + 0{,}01 \times 0{,}995} \simeq 0{,}32$$

Formule de Bayes

Généralisation

Soit $(A_i)_{i=1...n}$ une collection d'évènements non impossibles formant une partition de Ω. Alors pour tout événement B non impossible :

$$\boxed{\mathbf{P(A_i \backslash B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \backslash A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \backslash A_i)P(A_i)}}}$$

****

Théorème de Bayes
Travaux dirigés

Exercice 1 : Des études statistiques sur une population constituée de **60%** de femmes et 40% d'hommes, permettent de considérer qu'il y a **50%** d'hommes et 30% de femmes qui fument. On choisit au hasard une personne de la population.

1°) Sachant qu'elle est homme ; quelle est la probabilité qu'elle soit non-fumeur ?

2°) Si la personne est une femme, quelle est la probabilité qu'elle soit non-fumeuse ?

3°) Calculer la probabilité qu'elle soit fumeur.

4°) Calculer la probabilité qu'elle soit non-fumeur.

Solution

Les évènements sont :

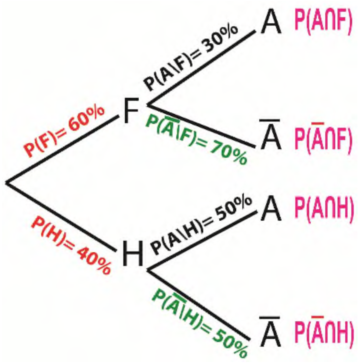
F : « La personne choisie soit une Femme »

H : « La personne choisie soit un Homme »

A : « La personne choisie soit un Fumeur »

$\bar{A}$: « La personne choisie soit non-fumeur »

L'arbre pondéré est :



1°) $P(\bar{A}/H)$ = **50%**

Sachant que cette personne non-fumeur, quelle est la probabilité qu'elle soit un homme :

$P(H/\bar{A})$ = là, on utilise la formule de Bayes

2°) $P(\bar{A}/F)$ = **70%**

Si on inverse la question : si la personne est non-fumeur, quelle est la probabilité qu'elle soit une femme ?

$P(F/\bar{A})$ = là, on utilise la formule de Bayes

Pour utiliser le théorème de Bayes, les bouts de l'arbre soit réalisés et on cherche les bouts de la première épreuve ou les deux premières issues. C'est-à-dire le contraire de la probabilité conditionnelle.

****

Exercice 2

Une entreprise utilise trois machines différentes pour fabriquer des arbres de transmission de même diamètre et de même longueur. **40%** des arbres sont fabriqués par la machine **A**, **30%** par la machine **B** et **30%** par la machine C. malgré des réglages fréquents, ces machines produisent des arbres défectueux, compte tenu des normes de fabrication.

Machine	A	B	C
Pourcentage de défectueux	2%	4%	5%

On a prélevé un arbre au hasard dans la production.

1°) Calculer la probabilité qu'il soit défectueux.

2°) Sachant qu'il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par :

- La machine **A** ?
- La machine **C** ?

Solution

Les évènements

A : « l'arbre produit par la machine **A** »

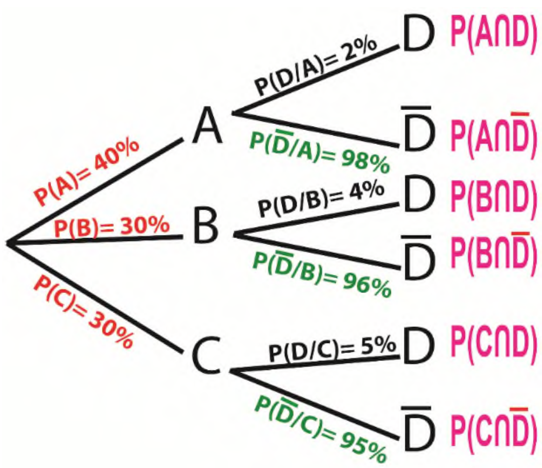
B : « l'arbre produit par la machine **B** »

C : « l'arbre produit par la machine **C** »

D : « l'arbre défectueux »

$\overline{\mathbf{D}}$: « l'arbre non-défectueux »

L'arbre pondéré



1°) la probabilité que l'arbre soit défectueux = c'est la probabilité totale de toutes les issues des défectueux :

P(D) = P(D∩A) U P(D∩B) U P(D∩C)

= P(D∩A) + P(D∩B) + P(D∩C)

$= P(A).P_A(D) + P(B).P_B(D) + P(C).P_C(D)$

= (0.4 x 0.02) + (0.3 x 0.04) + (0.3 x 0.05) = 0.008 + 0.012 + 0.015 = 0.035

= **3,5%** (c'est la probabilité totale que l'arbre soit défectueux).

2°) Sachant qu'il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par A ?

- $\boldsymbol{P_D(A) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)}}$
- $\boldsymbol{P_D(A)} = \frac{\boldsymbol{P_A(D)}\mathbf{xP(A)}}{\mathbf{P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)}}$

C'est la probabilité composée sur la probabilité totale et c'est ça la formule de Bayes.

- $\boldsymbol{P_D(A)} = \frac{\mathbf{0.02x0.4}}{\mathbf{0.035}} = 0.22857 = 22{,}86\%$ c'est la probabilité que l'arbre défectueux ait été fabriqué par la machine **A**.

2°) Sachant qu'il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par C ?

- $\boldsymbol{P_D(C)} = \frac{\mathbf{P(C\cap D)}}{\mathbf{P(D)}}$
- $\boldsymbol{P_D(C)} = \frac{\mathbf{P(D/C)xP(C)}}{\mathbf{P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)}}$

C'est la probabilité composée sur la probabilité totale et c'est ça la formule de Bays.

- $\boldsymbol{P_D(C)} = \frac{\mathbf{0.05x0.3}}{\mathbf{0.035}} = 0.42857 = 42{,}86\%$ c'est la probabilité que l'arbre défectueux ait été fabriqué par la machine C.

3°) Exemple d'une autre question qui demande : sachant qu'il est défectueux, quelle est la probabilité qu'il été fabriqué par la machine B ?

- $\boldsymbol{P_{\overline{D}}(B)} = \frac{\mathbf{P(B\cap\overline{D})}}{\mathbf{P(\overline{D})}}$
- P($\overline{\text{D}}$) on le calcule par la probabilité totale ; par la somme de tous les $\mathbf{\overline{D}}$.
- $\boldsymbol{P_{\overline{D}}(B)} = \frac{\mathbf{P(\overline{D}/B)xP(B)}}{\mathbf{P(A\cap\overline{D})+P(B\cap\overline{D})+P(C\cap\overline{D})}}$
- $\boldsymbol{P_{\overline{D}}(B)} = \frac{\mathbf{0.96x0.3}}{\mathbf{0.392+0.288+0.285}} = \frac{\mathbf{0.288}}{\mathbf{0.965}} = \mathbf{0.2984 = 29{,}84}\%$ c'est la probabilité

que sachant que l'arbre est défectueux est fabriqué par la machine **B**.

****

Formule des probabilités composées

Soit $(A_i)_{i=1 \dots n}$ une collection d'événements telle que

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) \neq 0, alors$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \backslash A_1)P(A_3 \backslash A_1 \cap A_2) \dots P(A_n \backslash A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Cas particuliers :

- n = 2 : $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \backslash A_1)P(A_1)$ (déf proba condi)
- n = 3 : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3 \backslash A_1 \cap A_2)P(A_1 \cap A_2)$
  $= P(A_3 \backslash A_1 \cap A_2)P(A_2 \backslash A_1)P(A_1)$

Exemple

- soit un jeu de 32 cartes. On tire les cartes une par une et sans remise. Quelle est la probabilité de tirer le 1^er^ as au 3^ème^ tirahe ?
  on note A_i = "on obtient un as au i^me^ tirage".
  On cherche alors $E = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$. On a donc :
  $$P(E) = P(\overline{A_1})P(\overline{A_2} \cap \overline{A_1})P(A_3 \backslash \overline{A_1} \cap \overline{A_2})$$
  $$= \frac{28}{32} \times \frac{27}{31} \times \frac{4}{30} = \frac{63}{620} \simeq 0{,}10$$
- on a un trousseau de n clefs. Une seule ouvre la porte. On essaye chaque clef (une fois) jusqu'à ouvrir la porte. Quel est la probabilité que la K^ème^ clef ouvre la porte ?
  on note A_i = "le i^me^ essai est un échec". On cherche alors
  $$E = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}. on\ a\ alors:$$
  $$P(E) = P(A_1)P(A_2)P(A_3 \backslash A_1 \cap A_2) \dots P(A_{k-1} \backslash A_1 \cap \dots \cap A_{k-2})P(\overline{A_k} \backslash A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})$$
  $$= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{n-(k-1)}{n-(k-2)} \times \frac{1}{n-(k-1)} = \frac{1}{n}$$

****

Loi normale

Semaine avant dernière
Du 1^er^ semèstre
Entre le 10/12/2017 et le 14/10/2017

Définition

Appelée aussi loi de Gauss est la loi de probabilité la plus utilisée comme théorème central limité (loi normale)

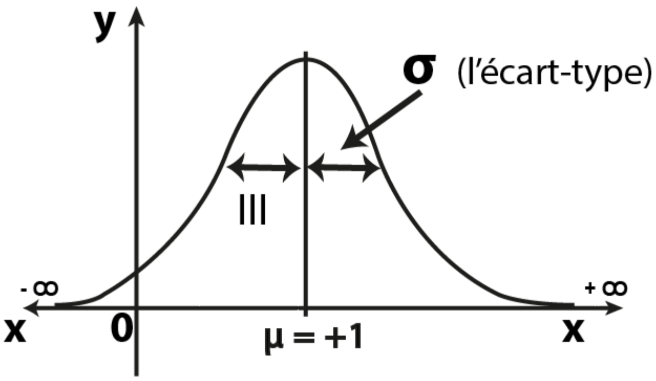
Dire qu'une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètre E[X] = µ et V[X] = Ϭ²

Alors la distribution d'échantillonnage de $\bar{x}$ tend vers une loi normale N($E[\bar{X}] =$ µ; σ)

⇒ si x suit une loi normale

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

On notera simplement $\mathbf{X \rightsquigarrow N(m;\sigma)}$



La loi normale centrée réduite

Si on a $X \rightsquigarrow N(m;\sigma)$

Alors $z = \frac{x-m}{\sigma} \longrightarrow N(0;1)$

L'équation de la loi normale centrée réduite est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z}{2}}$$

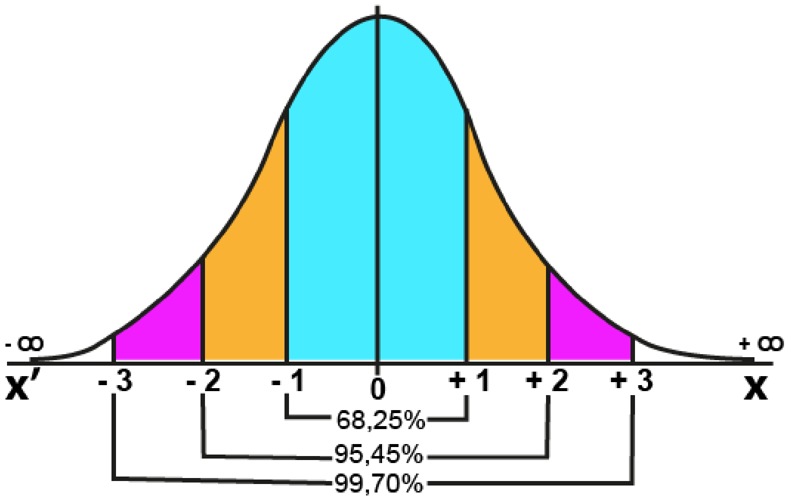
C'est une formule d'une distribution normale des données et cette courbe est représentée sous forme de cloche de Gauss qui représente les données continues pour une expérience aléatoire.

N.B. : on peut l'utiliser pour exprimer les phénomènes naturels comme la taille, le poids, la paie, la production agricole etc…

Caractéristique de cette courbe :

- Symétrique (la courbe est partagée en deux parties)
- Centrée en µ = 0 et Ϭ = 1.
- Mode = Médiane = Moyenne.
- Aire sous la courbe = 1
- 68,25% de la surface est comprise entre cote z de -1 à +1
- 95,45% de la surface est comprise entre cote z de -2 à +2

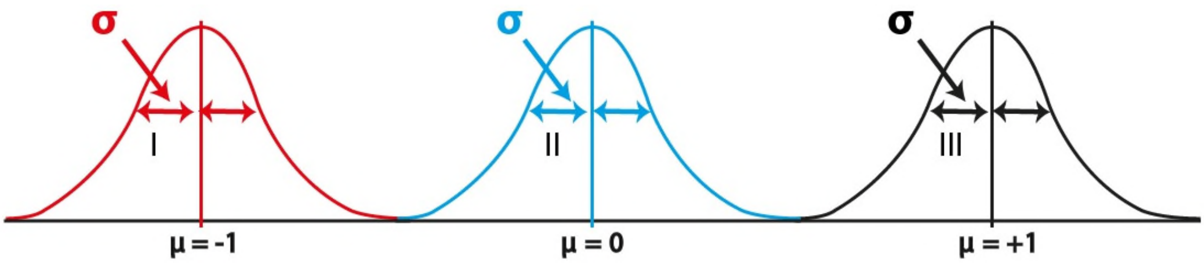
99,7% de la surface est comprise entre cote z de -3 à +3.



Les deux bouts de la courbe ne touchent jamais l'axe des abscisses

Cette courbe est liée aux facteurs suivants

a) **La valeur de la moyenne μ**



⇒ le 3 courbes ont le même écart-type б qui égal = 1 alors que la moyenne μ est différente d'une courbe à une autre.

On constate que :

La courbe I présente une moyenne μ = -1

La courbe I présente une moyenne μ = 0

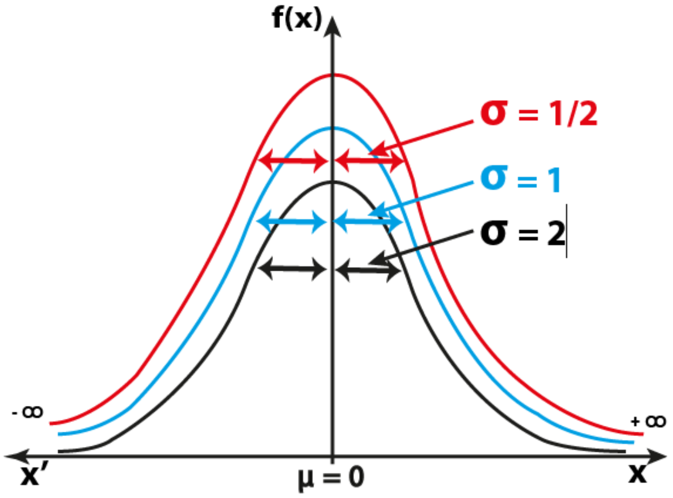
La courbe I présente une moyenne μ = +1

b) La valeur de l'écart-type б

On constate que les courbes présentent les mêmes moyennes μ = 0 alors que б est différente

- La courbe I présente un б = 2.

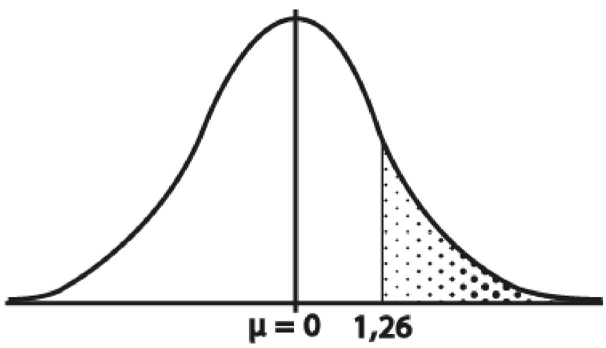
- La courbe II présente un Ϭ = 1
- La courbe III présente un Ϭ = $\frac{1}{2}$



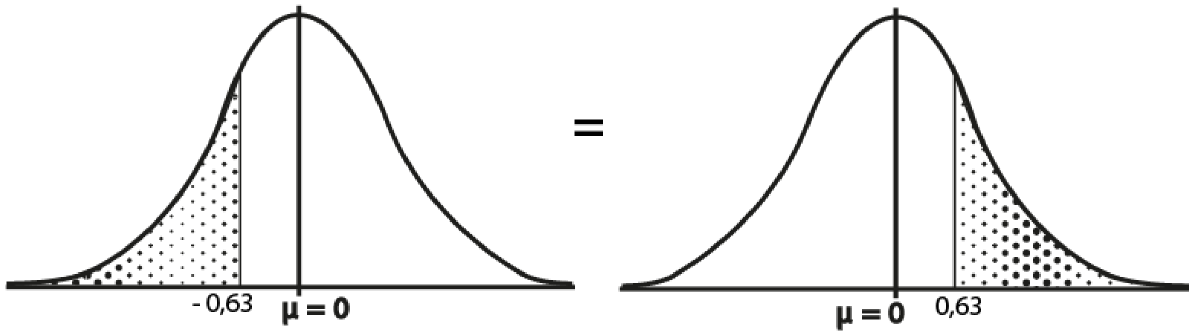
- Symétrique
- Centrée en μ = 0 et Ϭ = 1
- Mode = Médiane = Moyenne
- Aire sous la courbe = 1
- 68,3% de la surface est comprise entre cote z de -1 et +1.
- 95,45% de la surface sous la courbe est comprise entre une cote z de -2 à +2.
- 99,7% de la surface sous la courbe est comprise entre une cote z de -3 à +3.

Calcule de la surface

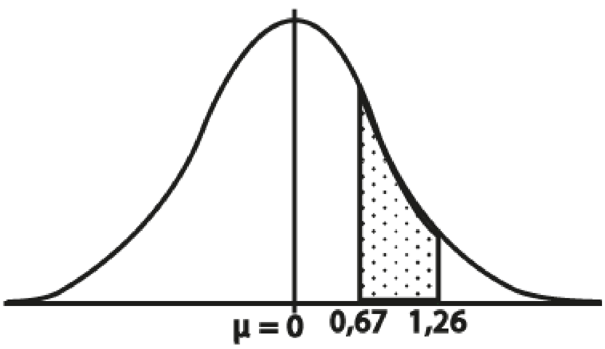
- $\mathbf{P(z > 1,26) = 0,1038 = 10,38\%}$

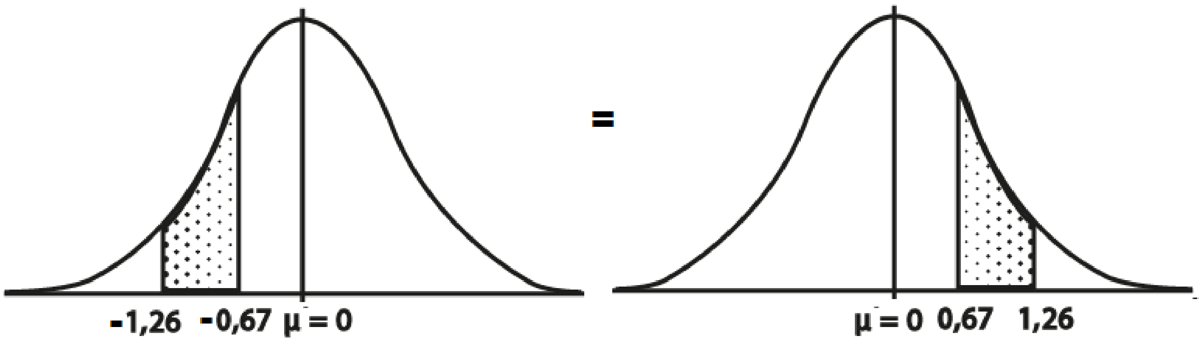


- $\mathbf{P(z < -0,63) = P(z > 0,63) = 0,2643 = 26,43\%}$

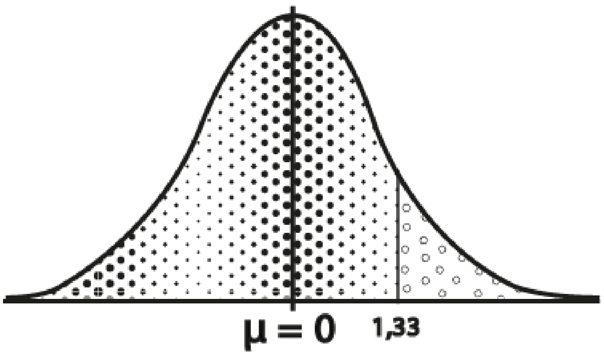


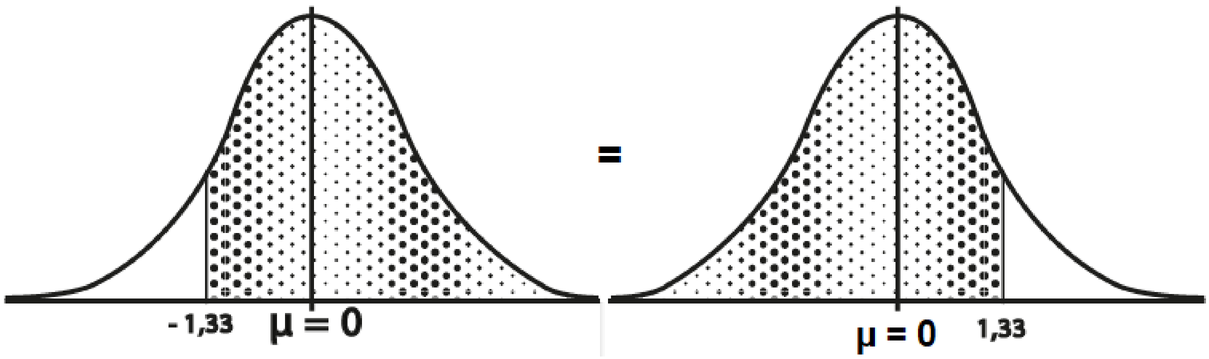
- $\mathbf{P(0,67 < z < 1,26) = P(z > 0,67) - P(z > 1,26) = 0,2514 - 0,1038 = 0,1476 = 14,76\%}$





- $\mathbf{P(z < 1,33) = 1 - P(z > 1,33) = 1 - 0,0918 = 0,8524 = 85,24\%}$

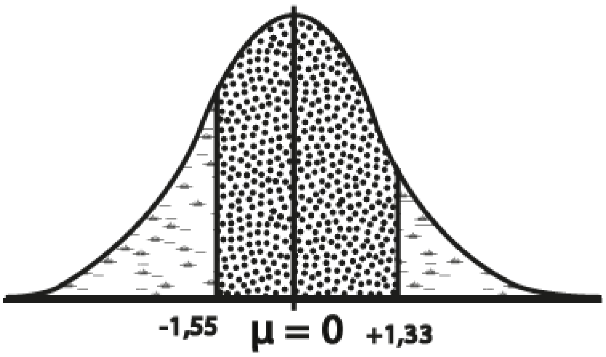




- $\mathbf{P(-0,55 < z < 1,33) = 1 - P(z < -0,55) - P(z > 1,33)}$

  $\mathbf{= 1 - P(z > 0,55) - P(z > 1,33)}$

  $\mathbf{= 1 - 0,2912 - 0,0918 = 0,617 = 61,7\%}$



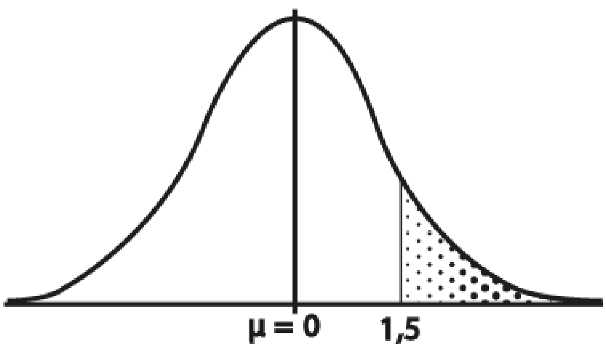
Exp. Calcul d'une fréquence pour une distribution normale : $X \backsim \mathcal{N}(40\,;8)$

On cherche la fréquence de $\mathbf{x \geq 52}$

$\mathbf{z = \frac{x-40}{8} \longrightarrow \mathcal{N}(0\,;1)}$

$\mathbf{x = 52 \longrightarrow z = \frac{52-40}{8} = \frac{12}{8} = 1,5}$

$\mathbf{P(z > 1,5) = 0,1340 = 13,40\%}$



Exp. On cherche la fréquence de $x \in [160\,,180]$

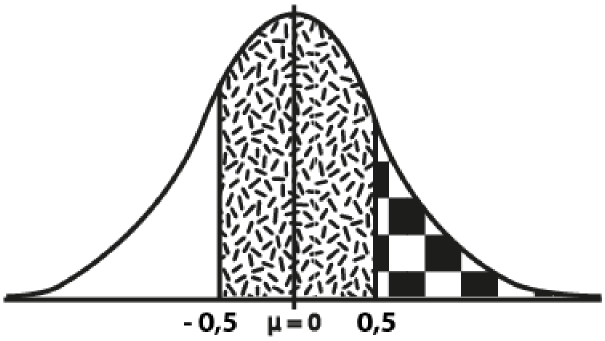
$\mathbf{X} \backsim \mathcal{N}[40\,;8]$

$$z = \frac{160-170}{20} = -0,5$$

$$z = \frac{180-170}{20} = 0,5$$

$$P(160 < z < 180) = P(-0,5 < z < 0,5) = 0,5 - P(z > 0,5) \times 2$$

$$= (0,5 - 0,3085) \times 2 = 0,383 = 38,30\%$$



****

9. Estimation – intervalle de confiance

Avoir la moyenne (μ) d'une population

Pour avoir la moyenne d'une population et pour des raisons économiques du recensement on se contente de sélectionner un échantillon aléatoire de la population par un sondage d'où on peut avoir une moyenne de l'échantillon $\bar{x}$; comme l'échantillon aléatoire est représentatif de la population on s'attend est ce que la moyenne de la population soit semblable à la moyenne de l'échantillon pour une variable donnée **$\mu \approx \bar{x}$;** on peut exprimer ça autrement en disant que la moyenne de la population sera probablement égale à la moyenne de l'échantillon (plus ou moins) une certaine marge d'erreur **$\mu \approx \bar{x} \pm$ ME (ME = marge d'erreur)**. Le problème qui se pose est comment déterminer cette marge d'erreur ?

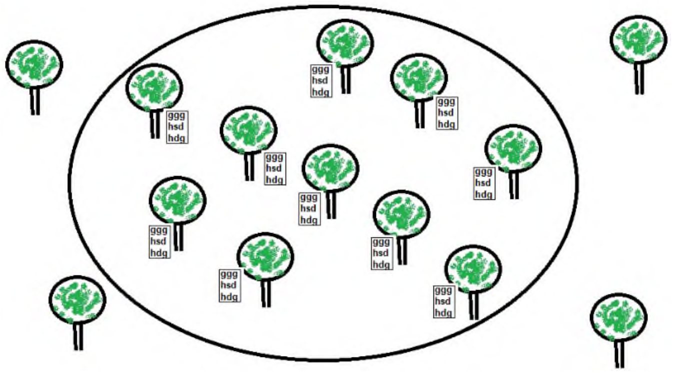
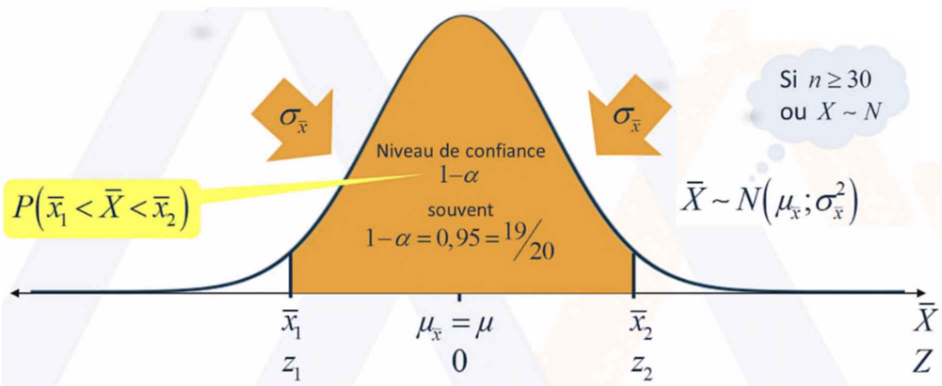
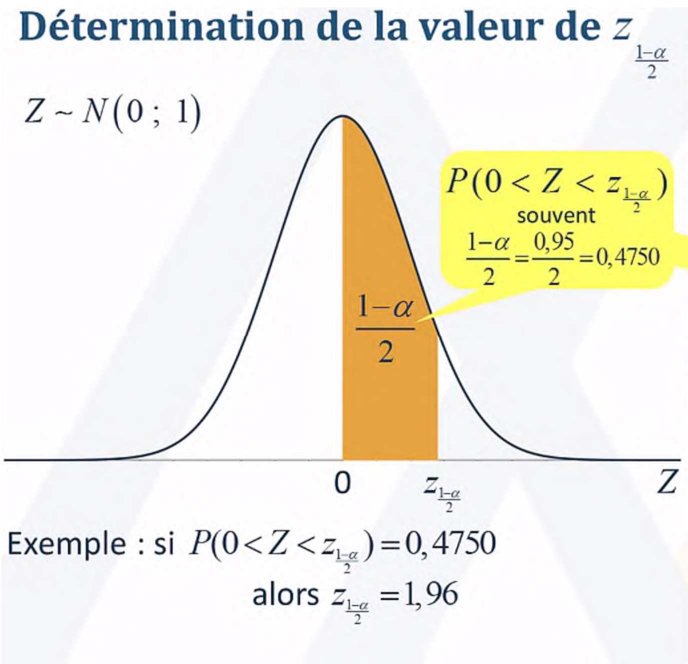


Schéma d'un échantillon aléatoire pris parmi une population

Intervalle contenant la moyenne d'un échantillon aléatoire

En réalité on sait que la distribution des échantillons aléatoires de même taille n choisis dans une population donnée selon leurs moyennes, de la variable étudiée, lieu, moment de l'étude, est normal.





z_i	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	[illegible]	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	[illegible]	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	[illegible]	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	[illegible]	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	[illegible]	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	[illegible]	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	[illegible]	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	[illegible]	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	[illegible]	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	[illegible]	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	[illegible]	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	[illegible]	0,3790	0,3810	0,3830
[illegible]	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	[illegible]	0,3980	0,3997	0,4015
[illegible]	[illegible]	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	[illegible]	0,4147	0,4162	0,4177
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	[illegible]	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	[illegible]	[illegible]	0,4370	0,4382	0,4394	[illegible]	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	[illegible]	[illegible]	0,4495	0,4505	[illegible]	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	[illegible]	0,4599	[illegible]	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	[illegible]	[illegible]	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
3,6	0,4998	0,4998	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,7	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,8	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999
3,9	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
4,0	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000

Si la taille de l'échantillon n est supérieure ou égale à 30 (si n ≥ 30) ou que la variable étudiée était aussi distribuée normalement X ~ N. cette distribution est centrée à $\mu_{\bar{x}} = \mu$ et a comme écart-type $\sigma_{\bar{x}}$ ainsi il est possible de déterminer les valeurs de $\bar{x}$ $(\overline{x_1}\ et\ \overline{x_2})$ entre lesquelles une moyenne d'un échantillon pris au hasard à une probabilité connu de se trouvé (cette probabilité est appelée « niveau de confiance » est notée $P(\overline{x_1} \leq \bar{x} \leq \overline{x_2}) \rightarrow 1 - \alpha$.

On utilise souvent un niveau de confiance 1 – α = 0,95 (95 %) et on l'exprime parfois comme étant 19/20. Pour déterminer les valeurs de $\overline{x_1}$ et $\overline{x_2}$ il faut utiliser la code Z associée au niveau de confiance.

Comme la loi normale.

Détermination de la valeur de $\boldsymbol{Z_{\frac{1-\alpha}{2}}}$ que nous utilisons dans la probabilité que la code

Z se trouve entre **0** et une valeur positive.

Nous devons diviser le niveau de confiance par 2. Par conséquent nous pourrons identifier la code **Z** recherchée comme étant la code **Z** associée au niveau de confiance divisée par 2.

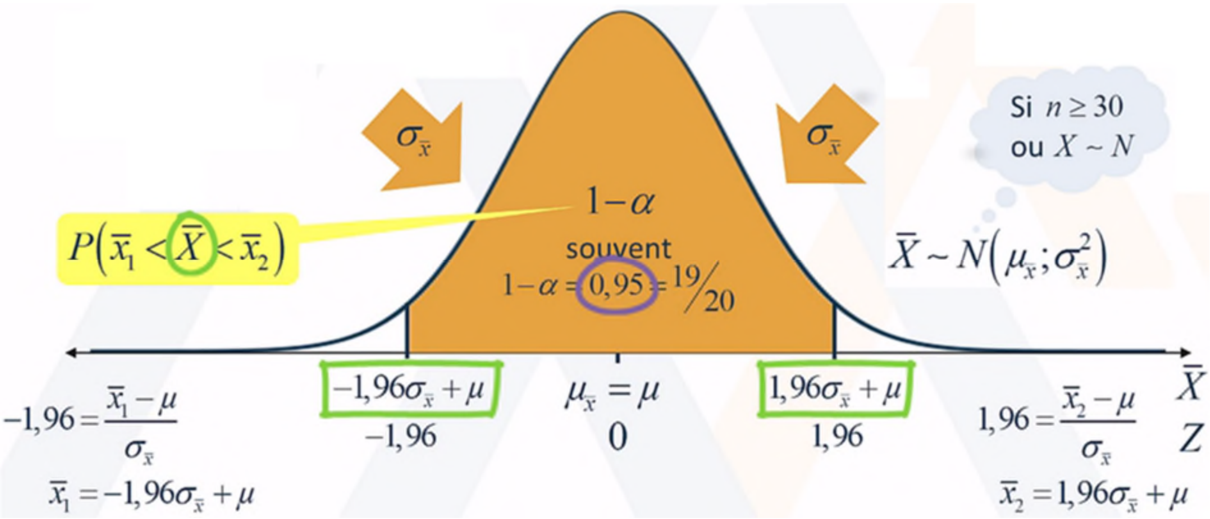
Souvent, (et comme nous avons ici le niveau de confiance est 95 % en divisant par 2 ⇒ on a une probabilité de 0,475 ($\frac{\mathbf{1-\alpha}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{0{,}95}}{\mathbf{2}} = \mathbf{0,475}$)

On doit déterminer la valeur en $\frac{\mathbf{1-\alpha}}{\mathbf{2}}$

Exemple : si $\mathbf{P\left(0 < Z < Z_{\frac{1-\alpha}{2}}\right) = 0,4750}$

C'est dans la table de la loi normale centrée réduite qu'on retrouve les probabilités avec le chiffre 0,4750. On lit la valeur de Z associé à cette probabilité qui est de 1,96.

On peut donc venir remplacer les codes Z recherchés par leurs valeurs dans la représentation graphique.



Puis à l'aide de ces codes **Z** et de la formule de la code **Z** adaptée à la variable $\bar{x}$, on peut déterminer l'expression qui permet de trouver la valeur de $\overline{x_1} \Rightarrow -1,96 = \frac{\overline{x_1} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$ (la formule de la code (**Z**) cette formule adaptée à la variable $\bar{x}$ on peut déterminer l'expression qui permet de trouver la valeur de $\overline{x_1} = -1,96\,\sigma_{\bar{x}} + \mu$ par la suite on remplace $\overline{x_1}$ par celle-ci dans la représentation graphique. De la même façon on trouve $\overline{x_2} = -1,96\,\sigma_{\bar{x}} + \mu$ ainsi on sait qu'il y a 95 % de chance qu'une moyenne d'un échantillon aléatoire $\bar{x}$ se retrouve entre $-1,96\,\sigma_{\bar{x}} + \mu\ et\ +1,96\,\sigma_{\bar{x}} + \mu$. (μ) moyenne de la population).

Donc, $-1,96\,\sigma_{\bar{x}} + \mu \leq \bar{x} \leq +1,96\,\sigma_{\bar{x}} + \mu$

Si on soustrait μ à chacun des membres de cette équation on obtient ceci :

$$-1,96\,\sigma_{\bar{x}} \leq \bar{x} - \mu \leq +1,96\,\sigma_{\bar{x}}$$

Et si on soustrait $\bar{x}$ à chacun des membres on obtient :

$$-\bar{x} - 1,96\,\sigma_{\bar{x}} \leq -\mu \leq -\bar{x} + 1,96\,\sigma_{\bar{x}}$$

En multipliant par -1 chacun des membres de cette équation on obtient ceci :

$$\bar{x} + 1,96\,\sigma_{\bar{x}} \geq \mu \geq \bar{x} - 1,96\,\sigma_{\bar{x}}$$

Cette équation dans son ordre croissant en commençant par le petit nombre et elle devient ainsi :

$$\bar{x} - 1,96\,\sigma_{\bar{x}} \leq \mu \leq \bar{x} + 1,96\,\sigma_{\bar{x}}$$

Ainsi on peut affirmer qu'il y a 95 % de chance que la moyenne de la population (μ) se trouve dans l'intervalle suivant :

$$[\bar{x} - 1,96\ \sigma_{\bar{x}} ; \bar{x} + 1,96\ \sigma_{\bar{x}}]$$

$$\bar{\mathbf{x}}\ est\ la\ moyenne\ de\ l'échantillon$$

1,96 : c'est la code **Z** associé au niveau de confiance de 95 % ⇒ ainsi pour écrire l'intervalle de confiance de manière plus générale pour n'importe quel niveau de confiance on remplace 1,96 par son symbole $\mathbf{Z}_{\frac{1-\alpha}{2}}$ ⇒ $[\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{Z}_{\frac{1-\alpha}{2}}\ \sigma_{\bar{\mathbf{x}}} ; \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}_{\frac{1-\alpha}{2}}\ \sigma_{\bar{\mathbf{x}}}]$

Nous avons dit auparavant qu'il était probable que la moyenne de la population soit la moyenne de l'échantillon $\bar{\mathbf{x}}\ \pm une\ marge\ d'erreur\ qui\ est\ \pm\ \mathbf{Z}_{\frac{1-\alpha}{2}}\ \sigma_{\bar{\mathbf{x}}}$.

Et bien cette marge d'erreur c'est elle qu'on soustrait et qu'on additionne ici à la moyenne de l'échantillon pour obtenir l'intervalle de confiance pour que μ reste une moyenne de population.

$[\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{ME}\ ; \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{ME}]$ (ME = Marge d'erreur).

Définition

(1 – α) = c'est un niveau de confiance ; c'est un intervalle ayant une probabilité connue (1 – α) de contenir la moyenne de la population **(μ)**. Cet intervalle est de la forme $[\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{ME}\ ; \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{ME}]$ où $\bar{x}$ est la moyenne d'un échantillon aléatoire de taille n prélevé dans la population et $\mathbf{ME} = \mathbf{Z}_{\frac{1-\alpha}{2}} \sigma_{\bar{\mathbf{x}}}$ c'est la marge d'(erreur qu'on trouve en multipliant la code Z associé au niveau de confiance et à l'écart-type des moyennes d'échantillon, ce dernier est obtenu en divisant l'écart-type de la population par la racine carrée de la taille de l'échantillon.

$$\sigma_{\bar{\mathbf{x}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\mathbf{n}}} \approx \frac{\mathbf{s}^*}{\sqrt{\mathbf{n}}}$$

Cependant en général lorsque on cherche à estimer la moyenne d'une population, on ne connut pas n l'écart-type de la population (parce que ça prend de moyens pour trouver un écart-type). On estime à l'aide de l'écart-type de l'échantillon S. ceci s'applique si la taille de l'échantillon représente moins de **5** % de la taille de la population ou si l'échantillon est prélevé avec remise, sinon, il faut multiplier $\sigma_{\bar{x}}$ par le facteur de correction $\sqrt{\frac{\mathbf{N}-\mathbf{n}}{\mathbf{N}-\mathbf{1}}}$

Dans tous les cas : il est possible de construire un tel intervalle si n ≥ 30 ou X ~ N (ou si la variable étudiée est tellement distribuée normalement).

Conclusion

Si on veut déterminer la moyenne d'une population (μ) on doit faire un recensement ; lors que ce n'est pas possible, on doit se contenter d'une estimation de la moyenne de la population. Pour faire cette estimation on doit d'abord se demander si la variable étudiée **X** est distribuée normalement **X ~ N**, ou non ; puis on procède à la sélection d'un échantillon aléatoire de la population visée par l'étude. Si la variable étudiée n'est pas distribuée normalement on doit s'assurer que l'échantillon a une taille d'au moins de **30** unités statistiques **n ≥ 30** ; on procède ensuite au sondage et on détermine la moyenne de l'échantillon. A partir de cette valeur et du niveau de confiance souhaité pour l'estimation on construit l'intervalle de confiance à l'aide de l'expression suivante : $[\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{ME}\,;\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{ME}]$ où $\mathbf{ME} = \ \mathbf{Z}_{\frac{\mathbf{1-\alpha}}{\mathbf{2}}}$ à la fin on connu pas la moyenne de la population exacte comme on l'aurait souhaité mais on sait que la probabilité qu'elle se trouve dans l'intervalle relativement restreint qu'on a crié est de **1 – α**, ce qui nous permet d'avoir une bonne idée de la valeur qu'elle devrait prendre la moyenne de la population **(μ)** on a une bonne estimation de la moyenne .

La probabilité que μ se trouve dans l'intervalle $[\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{ME}\,;\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{ME}]$ est de **1 – α.**

****

Introduction aux Statistiques

Citation :

Introduction aux statistiques - © 1996, Ramousse R., Le Berre M. & Le Guelte L.

5.2 Comparaison entre deux échantillons : Le Test t de Student

Ce **test paramétrique** repose sur des comparaisons de moyennes.

Conditions d'utilisation du test : le test de Student est utilisé pour comparer deux échantillons indépendants et/ou appariés (2 versions, adaptées à chaque catégorie d'échantillons).

Lorsqu'il y a plus de **2** échantillons, il devient nécessaire d'utiliser une **ANOVA** adaptée.
Le test de Student concerne des données quantitatives, mesurées sur une échelle d'intervalle ou de rapport.

5. 2. 1. Précautions ! !

Avant de faire des tests paramétriques on doit :

1 S'assurer que la distribution de l'échantillon est compatible avec l'hypothèse de **distribution gaussienne** de la variable (test de normalité). Sinon on peut essayer de rendre cette distribution compatible avec une distribution gaussienne en réalisant une transformation, par exemple logarithmique.

Pour vérifier que la distribution d'un échantillon suit une loi normale, il est possible d'utiliser, dans Statview II, le test descriptif d'aplatissement et de symétrie (de *kurtosis and skewness*, en anglais).

On considère que l'échantillon suit une loi normale à 95 % lorsque la valeur de son aplatissement est comprise entre -2 et +2 et que la valeur de son asymétrie est comprise entre -2 et +2.

*2 Vérifier l'homogénéité des variances de tous les échantillons ;***Vérification de l'homogénéité des variances.**

Supposons que les données suivantes ont été obtenues dans une expérimentation portant sur deux traitements **A** et **B** :

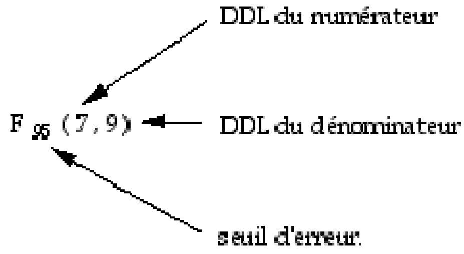
Traitement	Taille de l'échantillon	variance de l'échantillon
A	na = 10	= 15,28
B	nb =8	= 28,20

Pour tester l'hypothèse nulle H0: " Variance(**A**) = Variance(**B**) " contre l'hypothèse alternativeH1 " Variance(A) – Variance(B) ", on calcule les deux variances, puis on fait le rapport de la plus grande sur la plus petite.

Ce rapport constitue le **F de Snedecor**. Ici : F=28,20/15,58 =1,81

La valeur de F est comparée, dans une **table de Snedecor**, à une valeur théorique et doit lui être inférieure pour un seuil de risque choisi, pour conserver l'hypothèse d'homogénéité des variances. Le degré de liberté qui correspond a la variance la plus élevée est porté au numérateur (colonnes de la table F), celui qui correspond à la variance la plus faible, est porté au dénominateur (lignes de la table F).

On note :



Le test **t de Student** est relativement robuste. Une distorsion modérée d'avec la loi normale et d'avec l'hypothèse d'homogénéité des variances est acceptable.
Pour tester l'homogénéité des variances dans l'exemple, Va = Vb opposé à Va–Vb :
Nous avons **F**obs = 28,20 / 15,28 = 1,81 pour na**-**1 ddl=9, nb-1 ddl=7.
La valeur critique de rejet de **F** 0,95 (7,9) = 3,29. Comme **F**obs n'excède pas cette valeur, l'hypothèse d'égalité des variances n'est pas contredite.
On peut donc appliquer le test de Student à ces échantillons.

5. 2. 2. Test t pour deux échantillons indépendants

Soient **2** échantillons de mesures, faites sur des individus différents concernant **2** traitements **A** et **B** et constitués de variables quantitatives continues.

Traitement **A**	Traitement **B**	**données brutes**	
3	6		
5	5		
2	7		
4	8	na = 7	nb = 10
6	9	moy A = 4,14	moy B = 7,0
2	4		

7	7
	8
	9
	7

Soit m=*moyenne de la population*

L'hypothèse nulle H0 est :	$\mu_a - \mu_b = 0$
L'hypothèse alternative H1 est :	$\mu_a - \mu_b \neq 0$

En raison de la nature de l'hypothèse H1, nous appliqueront un **test bilatéral**.

Formules à utiliser dans les situations de calcul manuel (ou avec un tableur) :

Somme des na observations du groupe A = S Xa	29
Somme des nb observations du groupe B = S Xb	70
Somme de toutes les observations = S X	99
Somme des carrés des observations du groupe = AS Xa_2	143
Somme des carrés des observations du groupe B = S Xb_2	514
Somme des carrés des observations = SX_2	657
Somme des carrés des écarts $SCE_1 = \sum X_a^2 - \frac{\left(\sum X_a\right)^2}{n_a}$	143-(29)^2/7=22,857
Somme des carrés des écarts $SCE_2 = \sum X_b^2 - \frac{\left(\sum X_b\right)^2}{n_b}$	514-(70)^2/10=24

$$t = \frac{\mu_a - \mu_b}{\sqrt{\frac{SCE1 + SCE2}{(n_a + n_b - 2)}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

" **t** " est la valeur critique du test de Student.

$$t = \frac{\frac{29}{7} - \frac{70}{10}}{\sqrt{\frac{22,857 + 24}{(7 + 10 - 2)}\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{10}\right)}} = -3,28$$

le signe - est utilisé car [moyenne Xa-moyenne Xb] est négative

<u>t qui est la valeur critique du test est, ici, supérieur à la valeur de la table</u> [cf.Winer p. 641 (2,13)]

donc

• L'hypothèse nulle H0 est rejetée, pour t=3,28, avec un seuil de confiance de=0,0051.

• On peut donc conclure que la moyenne de l'échantillon A est significativement différente de celle de B, au seuil de confiance de 0,005 (5 chances sur mille de se tromper en rejetant l'hypothèse nulle).

Expression des résultats du test avec le logiciel Statview :

DDL	t non apparié	Prob. (bilatéral)
15	**-3,28**	**,0051**

Groupe :	Fréquence	Moyenne	Déviation Std. :	Erreur Stdard
Groupe 1	7	4,14	1,95	,74
Groupe 2	10	7	1,63	,52

5. 2. 3. Test t pour deux échantillons appariés

Dans ce cas, le même échantillon est mesuré 2 fois :

une première fois, " avant " : a, puis une seconde fois " après " : b

Exemple numérique

	X1	**X2**	**Différence**
Sujet	avant	après	d

1	3	6	3
2	8	14	6
3	4	8	4
4	6	4	-2
5	9	16	7
6	2	7	5
7	12	19	7

Soit m la moyenne de la population d'où est extrait l'échantillon

Hypothèse nulle H0	$\mu_a - \mu_b = 0$
Hypothèse alternative H1	$\mu_a - \mu_b \neq 0$

Formules à utiliser dans les situations de calcul manuel (ou avec un tableur) :

Somme des différences des n observations	Sd	30
Moyenne des différences des n observations	md=Sd/n	4,29
Somme des carrés des différences des n observations	S d2	188
Somme des carrés des écarts	$SCE_d = \sum d^2 - \frac{\left(\sum d\right)^2}{n}$	59,43
Valeur critique du test de Student pour échantillons appariés :	$t = \frac{\frac{\sum d}{n}}{\sqrt{\frac{SCE_d}{n(n-1)}}}$	-3,61
Nombre de degrés de liberté	ddl = n-1	6

Dans la **table,** on trouve la valeur critique de **t :**

pour 6 d.d.l., t = 2,45 (a = 0,05, test bilatéral)

Conclusions statistiques

• L'hypothèse nulle H0 peut être rejetée, pour t=-3,61, avec un seuil de confiance de=0,05.

• On peut donc conclure que la moyenne de l'échantillon mesuré " avant " est significativement différente de celle de l'échantillon mesuré après, au seuil de confiance de 0,05 (5 chances sur cent de se tromper en rejetant l'hypothèse nulle).

Expression des résultats du test avec le logiciel Statview :

DDL	Moyenne X - Y:	t apparié	Probabilité p (test bilatéral)
6	-4,29	-3,61	,0113

Conclusions expérimentales

Le calcul de probabilité exact fourni par le logiciel permet de rejeter l'hypothèse nulle H0 au seuil de confiance de 0,01.

On peut donc considérer qu'il y a une différence significative entre les deux séries de mesure, au seuil de confiance de 0,01.

5.2.4. Informatisation du test de Student :

Utilisation de Statview 2 sur Macintosh

1.• Entrée des données :

Echantillons indépendants :

Créer un nouveau fichier (menu Fichier) ou importer les données à partir d'un fichier (Excel ou .txt).

Dans **une colonne** placer les valeurs mesurées des deux échantillons (d'abord échantillon 1, puis échantillon 2).

Affecter la variable Y à cette colonne.

Dans **une autre colonne** indiquer le numéro (1 ou 2) de l'échantillon et lui affecter la variable X.

Echantillons appariés :

Créer un nouveau fichier (menu Fichier).

Dans **une colonne** placer les valeurs mesurées de l'un des deux échantillons (par exemple échantillon 1).