N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Thème

Espace des fonctions test

Présenté par: Medjhouda Messaouda-Elaogbi Sara-Hammana Ikram.

Sous la supervision de :

Bekkar Meneceur MCB

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciement

La louange est à Allah, qui nous a facilité l'accomplisseme de ce travail de recherche chose ne peut étre qu'avec la volonté de Dieu -à lui le tout puissante et la Majesté- et que la louange initiale et finale appartieut à allah, Seigneur des mondes

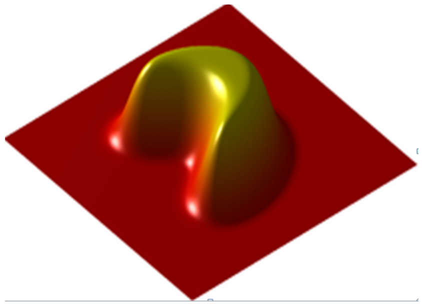
Aussi, il nous fait plaiser que nous, au commencement de ce travail, présentons nos grands remerciments, éstimations et reconnaissances à notre encadreur puissant " ***Meneceur Bekkar*** *" de nous avoir encourager moralement la durée de recherche et que ce travail est le fruit de ces encouragement*

Nous présentons nos veridiques remerciments à tout personne, du proche ou du loin, qui nous a donné un coup de main, à fin de términer ce travail de recherche

En fin, nous remercions vivement notres familles pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation

"Que la Grace et la paix soient sur nos profet Muhammad ainsi que sur sa famille et ses compagnons".

Table des matières



Représentation graphique d'une fonction test à deux variables.

Introduction

Dans cette mémoire on va discuter au sujet de l'espace des fonctions test $\mathfrak{D}(\Omega)$. Nous commencerons en se référant à quelques symboles fréquemment posées et quelques définitions nécessaires qui nous aidera à faire de cet espace, en plus nous définirons les éléments de cet espace.

Dans le deuxième chapitre, on va expliquer quelques exemples sur les fonction test, puis nous parlerons de fournir cet espace en termes d'infrastructures propriétés topologique. Ensuite, nous créerons une topologie sur cet espace grâce à topologie déterminée sur $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ par la famille de semi-normes sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ et une base de de voisinage de 0. Et puis de passer à la limite inductive de $\mathfrak{D}(\Omega)$. Il a également évoqué le concept de convergence au sens de $\mathfrak{D}(\Omega)$, puis étudier le produit de convolution de $L^1_{loc} \star \mathfrak{D}(\Omega)$ qui être un rôle de premier plan dans l'analyse fonctionnelle et nous a eu le concept de sens suite régularisant, et nous considèrerons d'un exemple sur elle .

Aussi nous considèrerons l'espace de distributions $\mathfrak{D}'(\Omega)$ le dual topologie de $\mathfrak{D}(\Omega)$, et nous définirons l'appartenance d'une forme linéaire de $\mathfrak{D}'(\Omega)$ à $\mathfrak{D}(\Omega)$, et étudierons le concept de convergence en elle l'exception de la convergence faible, depuis l'espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ est stable par l'opération du produit de convolution donc nous étudierons $\mathfrak{D}'(\Omega) \star \mathfrak{D}(\Omega)$.

Enfin, dans le dernier chapitre nous étudierons la densité de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans quelques espaces, le plus important est L^p.

La densité de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans ces espaces montre plus de propriétés de ce espace.

Laurent Schwarz : (5 mars 1915, Paris - 4 juillet 2002, Paris) est un des mathématiciens français les plus connus. Il obtint la Médaille Fields en 1950 pour ses travaux sur la théorie des distributions.

Chapitre 1

Notations et rappels topologiques

1.1 Notations

Initialement, nous donnons quelques symboles qui seront utilisés plus tard :

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

• $x = (x_{1,\cdots,}x_n) \in \mathbb{R}^n$.

• Pour $n \geq 1$, α est un multi-indice, c'est -à -dire :

$$\boxed{\alpha \ = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n}$$

• Le nombre $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ est appelé longueur du multi-indice α.

• Par analogie, on pose : $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

• On a $\alpha \leq \beta$ si : $\forall i = 1, \cdots, n : \alpha_i \leq \beta_i$.

• On pose : $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

• On a la relation suivante :

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $(x+y)^\alpha = \sum\limits_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^{\alpha-\beta} y^\beta = \sum\limits_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} y^\beta$.

• Pour $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 1$, on note l'opérateur de dérivation par rapport à la k-ième variable par: $\partial_k = \partial \diagup \partial_{x_k}$ et :

$$\boxed{\partial_x^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}}}$$

• Si f est une fonction à valeur dans Ω, on a :

$$\boxed{D^{\alpha} f = \partial^{\alpha} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}}$$

• On a la formule de Leibniz :

$$\boxed{D^{\alpha}(f.g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} f . D^{\beta} g.}$$

•Si x, ξ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on a :

$$\boxed{\langle x, \xi \rangle = x.\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \xi_i}$$

• On désignera par $|x|$ la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^N$, c'est- a-dire :

$$\boxed{|x| = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}}$$

qui muni $(\mathbb{R}^n; \|.\|)$ par un stracture d'espace métrique complet.

•On notera $k \subset\subset \Omega$ si k est relativement compact dans Ω c'est à dire $\overline{k}$ est un compact inclus dans Ω.

•On muni l'ensemble $\mathbb{R}^n$ par la mesure de Lebesgue sur Ω, que nous désignerons par : $dx = dx_1 \dots dx_n$.

1.2 Rappels topologiques

Nous passons maintenant quelques concepts des espaces qui nous concernent dans la fourniture de l'espace de l'étude :

Espace vectoriel topologique

Définition 1.2.1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

On appele une norme sur E toute application $\varphi : E \to [0, +\infty[$ vérifie les propriétés suivantes :

1- $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

2- $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\forall\ x \in E \quad : \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$.

3- $\forall\ x,\ y \in E \quad : \varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

On désigne pour la norme sur E par : $\|.\|_E$ ou $\|.\|$.

Définition 1.2.2 *On appelle $\mathbb{R}$-espace vectoriel topologique (e.v.t.) un espace topologique E muni d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, telle que les opérations :*

$$E \times E \rightarrow E : (x, y) \rightarrow x + y$$
$$\mathbb{R} \times E \rightarrow E : (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

soient continues et tel que $\{0\}$ soit une partie fermée.

Espace vectoriel normé

Définition 1.2.3 *Un espace normé $(E, \|.\|)$ est la donnée d'un espace vectoriel E et d'une norme $\|.\|$ sur E.*

Définition 1.2.4 *Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel.*

On dit qu'une application $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une semi-norme si, pour chaque $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$, on a :

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
- $p(\lambda x) = |\lambda|\ p(x)$.

Proposition 1.2.1 *Soit E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel.*

Si p est une semi-norme sur E alors :

- $p(0) = 0$.
- $p(x) \geq 0$.
- $|\ p(x) - p(y)| \leq p(x+y)$.

Définition 1.2.5 *On dit qu'une famille $(p_i)_{i \in I}$ de semi-normes sur un espace vectoriel E est séparante si, pour chaque $x \in E$ non nul, il existe $i \in I$ tel que $p_i(x) > 1$.*

Partie compact

Définition 1.2.6 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $k \in \mathbb{N}$.*

On dit qu'une partie K de Ω est compact si pour chaque recouvrement ouvert $\{A_i\}_{i\in I}$ de K, on peut extraire un recouvrement fini de K .

Espaces fonctionnels

Définition 1.2.7 $C(\Omega)$ *désigne l'espace des fonctions continues sur Ω, à valeur dans $\mathbb{R}$.*

1- On dit que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{k}$ est de classe C^k si toutes les dérivées partielles de f existent et sont continues jusqu'à l'ordre k.

(L'ordre dans lequel sont effectuées les dérivations est indifférent d'aprés la théorème de Schwarz).

2- $C^k(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions définies et k-fois continûment diffrentiables sur Ω, à valeur dans $\mathbb{R}$ .C'est à dire :

$$\boxed{C^k(\Omega) = \{f \in C(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq k, \partial^\alpha f \in C(\Omega)\}}$$

On rappelle qu'une fonction est continue sur Ω, si elle est continue en tout point $x \in \Omega$:

$$\boxed{\forall x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_{x,\varepsilon},\ \forall y \in \Omega,\ |x - y| < \eta_{x,\varepsilon} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon}$$

Par exemple, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

On défini sur Ω les semi-normes P_m par :

$$\boxed{P_{m,k_i}(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{a \in k_i} |\partial^\alpha f(x)|}$$

tel que k_i est un compact inclus dans Ω.

Support d'une fonction

1- On appelle adhérence de A, et l'on note $\overline{A}$, le plus petit fermé de X, contenant A.

2- Soit f une fonction réelle définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On appelle support de f l'ensemble :

$$\boxed{supp\,(f) = \overline{\{x \in \Omega \ : f\,(x) \neq 0\}}}$$

Le support de f est alors le plus petit fermé de $\mathbb{R}^n$ à l'extérieure du quel la fonction f est nul. C'est donc l'ensemble des points où il est intéressant d'étudier f (ailleurs f est identiquement nulle).

Par exemple dans $\mathbb{R}$:

•La fonction de Heaviside $H_0 = 1_{[0,\infty[}$ a pour support $\mathbb{R}+$ (elle est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$).

•La fonction $x \to \chi_{]-1,1]}$ a pour support $[-1, 1]$.

Remarque 1.2.1 *$supp\,(f)$ est toujour fermé, donc :*

$$\boxed{supp\,(f) \text{ compact} \Leftrightarrow supp\,(f) \text{ borné}}$$

3- Nous définissons l'ensemble des fonctions continues à support compact sur Ω :

$$\boxed{C_c(\Omega) = \{f : \Omega \to C : \ f \text{ est continue et à support compact}\}}$$

On note $C_0(\Omega)$: l'espace des fonctions continues nulles au bord de Ω.

1- On dit que $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{k}$ est de classe C^∞ si elle est de classe C^k sur Ω pour chaque entier $k \geq 1$.

2- Nous désignerons par $C^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables, noté d'aprés Laurent Schwarz, par

$$\boxed{\varepsilon\,(\Omega) = C^\infty(\Omega)}$$

On a :

$$\boxed{C^\infty(\Omega) \subset ... \subset C^k(\Omega) \subset ...C^1(\Omega) \subset C(\Omega)}$$

Définition 1.2.8 *On note par $C_c^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $C^k(\Omega)$ qui sont à support compact dans Ω.*

On définit sur cet espace la norme:

$$\boxed{\|f\|_{C_c^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|.}$$

On vérifie que $\| f \|_{C_c^k(\Omega)}$ est une semi-norme :

1- On a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\|\lambda f(x)\|_{C_c^k(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha (\lambda f(x))| = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |\lambda \partial^\alpha f(x)| \\
&= \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} (|\lambda| |\partial^\alpha f(x)|) = |\lambda| \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)| \\
&= |\lambda| \|f(x)\|_{C_c^k(\Omega)}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|\lambda f(x)\|_{C_c^k(\Omega)} = |\lambda| \|f(x)\|_{C_c^k(\Omega)}.$$

2- On a $\forall x, y \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\|f(x+y)\|_{C_c^k(\Omega)} &= \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha f(x+y)| = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha (f(x) + f(y))| \\
&= \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha f(x) + \partial^\alpha f(y)| \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} (|\partial^\alpha f(x)| + |\partial^\alpha f(y)|) \\
&= \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)| + \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{\Omega} |\partial^\alpha f(y)| \\
&= \|f(x)\|_{C_c^k(\Omega)} + \|f(y)\|_{C_c^k(\Omega)}.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|f(x+y)\|_{C_c^k(\Omega)} \leq \|f(x)\|_{C_c^k(\Omega)} + \|f(y)\|_{C_c^k(\Omega)}.$$

Définition 1.2.9 *Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C_0^k(\Omega)$ est le sous-espace de $C^k(\Omega)$ dont les éléments sont nuls en dehors d'un compact de Ω. Nous rappelons que :*

$$\boxed{\varepsilon(\Omega) = C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)}$$

$$\boxed{C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)}$$

$$\boxed{C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)}$$

Espace de Fréchet

Définition 1.2.10 *Un espace vectoriel topolgique réel est appelé espace de Fréchet s'il est à la fois localement convexe, métrisable, et complet.*

Exemple 1.2.1 *Les espaces $C(\Omega), C^k(\Omega)$ et $C^\infty(\Omega)$ sont des espaces de Fréchet.*

Espace de Schwarz

Définition 1.2.11 *On dit qu'une fonction f appartient à l'espace de Schwarz (notée $S(\mathbb{R}^n)$) sur $\mathbb{R}^n$ si u est de class C^∞ et que de plus toutes ses dérivées sont à décroissance rapide.*

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \ / \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta u(x) \right| < +\infty \right\}.$$

Proposition 1.2.2 **1-** *$S(\mathbb{R}^n)$ contient l'espace des fonctions test.*

2- $S(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de L^p pour $1 \leq p \leq \infty$ dense dans L^P pour $1 \leq p < \infty$.

Espace de Lebesgue [8]

Soit (Ω, Σ, μ) un espace de mesure et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Définition 1.2.12 *On dit que f vérifie la propriété P presque partout et on écrie p.p si f vérifie cette propriété pour tout $x \in \Omega$ sauf partie négligée de E.*

Fonction mesurable

Définition 1.2.13 *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite mesurable si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble*

$$\boxed{E_\alpha = \{x \in \Omega \ / \ f(x) \geq \alpha\}}$$

est mesurable au sens de Lebesgue.

Fonction intégrable

Définition 1.2.14

On dit qu'une fonction mesurable $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Lebesgue si :

$$\boxed{\int_{\Omega} |f\ | < \infty}$$

1- L'espace $L^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables (pour la tribu de Borel) intégrables (pour la mesure de Lebesgue dx) sur Ω. On note :

$$\boxed{\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |f\ \ (x)|\, dx}$$

2- On définit ensuite pour tout $1 \leq p < \infty$; l'espace $L^p(\Omega)$:

$$\boxed{L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \ \text{ mesurable et } \ |f\ |^p \in L^1(\Omega)\}}$$

que l'on munit de la norme :

$$\boxed{\|\ f\ \|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f\ \ (x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}}}$$

On vérifie que $\|\ f\ \|_{C_c^k(\Omega)}$est une semi-norme :

1- On a $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\|\ \lambda f\,(x)\ \|_{L^p(\Omega)} &= \left[\int_{\Omega} |\lambda f\ \ (x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_{\Omega} |\lambda|^p\, |f\ \ (x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= (|\lambda|^p)^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\Omega} |f\ \ (x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} = |\lambda\ | \left[\int_{\Omega} |f\ \ (x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda\ |\ \|\ f\,(x)\ \|_{L^p(\Omega)}\ .
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|\ \lambda f\,(x)\ \|_{L^p(\Omega)} = |\lambda|\ \|\ f\,(x)\ \|_{L^p(\Omega)}\ .$

2- On a $\ \forall x, y \in \Omega$:

$$\begin{aligned}
\|\ f\,(x+y)\ \|_{L^p(\Omega)} &= \left[\int_{\Omega} |f\ \ (x+y)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int_{\Omega} |(f\ \ (x) + f\ \ (y))|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left[\int_{\Omega} |f\ \ (x)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{\Omega} |f\ \ (y)|^p\, dx\right]^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \|\ f\,(x+y)\ \|_{L^p(\Omega)} \leq \|\ f\,(x)\ \|_{L^p(\Omega)} + \|\ f\,(y)\ \|_{L^p(\Omega)}\ .$

3- Lorseque $p = \infty$, on a la définition suivante :

$$\boxed{L^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, f \ \text{ mesurable et } \exists\ C\ \in \mathbb{R}_+ \quad , |f\ \ (x)| \leq C \quad p.p\}\,.}$$

dont la norme est :

$$\boxed{\parallel f \parallel_{L^{\infty}(\Omega)} = \inf\{C,\ |f\ \ (x)| \leq C \quad p.p\}}$$

Proposition 1.2.3 $\|.\|_p$ *est une semi-norme. En particulier (si f >0) :*

$$\boxed{\|f\|_p = 0 \Longleftrightarrow f \ \text{ nulle } p.p}$$

Fonction localement intégrable

Définition 1.2.15 *Une fonction f définie sur Ω est dite localement intégrable sur Ω si f est intégrable (au sens de Lebesgue) sur chaque compact $K \subset \Omega$.*

Ainsi, f est localement intégrable sur Ω si, pour tout compact K, le produit $f \cdot \varkappa_K$ est intégrable sur Ω, où $\varkappa_K$ est la fonction caractéristique de K, qui est égale à 1 sur K et 0 à l'extérieure de K.

1- Si $p \geq 1$, on désigne par $L^p_{loc}(\Omega)$ l'espace des fonctions $f \in L^p_{loc}(\Omega)$, pour tout compact K de Ω.

2- Soit $1 \leq p < \infty$; on dit qu'une fonction $f : \Omega \to R$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f \mid K \in L_p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Théorème 1.2.1 *[8] On a les propriétés suivantes :*

1. L^p est un espace vectoriel et $\|.\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p < \infty$.
2. L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p < \infty$.
3. L^p est séparable pour tout $1 \leq p < \infty$.

Convergence simple d'une suite

Définition 1.2.16 *On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de E converge vers un éléments $x \in E$ si, pour chaque voisinage V de 0, il existe un entier m_0 tel que, pour chaque entier $m > m_n$. on a : $x_m - x \in V$.*

Convergence uniforme d'une suite

Définition 1.2.17 *Soit E une partie non vide de $A \subset \mathbb{R}^n$.Soient $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ une suite de $F(A)$ et f un élément de $F(A)$. La suite $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ converge uniformément sur E vers f s'il existe $m \in \mathbb{N}_0$ tel que, pour tout $m \geq M$, $f_m - f$ soit borné sur E et si la suite $\|f_m - f\|_E$ converge vers 0. Une telle fonction f est appelée limite uniforme sur E de la suite f_m; on écrit $f_m \overset{E}{\Longrightarrow} f$.*

Suite de Cauchy On peut introduire dans les espaces vectoriels topologiques la notion de suite de Cauchy :

Définition 1.2.18 *On dit qu'une suite $(x_n)_n$ de E est une suite de Cauchy, si pour chaque voisinage V de 0, il existe un entier m_0 tel que, pour chaque entier m, $\acute{m} > m_0$, on a : $x_m - x_{\acute{m}} \in V$.*

Base de voisinages

Définition 1.2.19 (*Ensemble ouvert*) *On dit qu'un sous-ensemble O de E est ouvert s'il est vide ou bien si, pour chaque $x_0 \in O$, il existe un sous-ensemble fini non vide I_n de I et un réel $r > 0$ tels que $V_n(x_0, r) \subset O$.*

Définition 1.2.20 (*Voisinage d'un point*) *Soit x un point de l'espace topologique $(X; \tau)$. On appelle voisinage de x toute partie V, de X, contenant un ouvert qui lui-même contient le point x.*

Définition 1.2.21 *Soit E un espace vectoriel topologique.*

1- On appelle voisinage de 0 une partie contenant un ouvert contenant 0.

2- On dit qu'une famille β est une base de voisinage, ou base de voisinages en $0 \in$ E, si c'est une famille de voisinages de 0 telle que pour tout ouvert O contenant 0 on peut trouver $B \in \beta$ avec $B \subset O$.

Exemple 1.2.2 *Dans un espace vectoriel normé, les boules de rayon* $1/n$*, centrées en* 0*, constituent une base de voisinages.*

Densité d'un ensemble

Définition 1.2.22 *Soit* X *un espace topologique. Un sous-ensemble* A *de* X *est dit dense dans* X*, si tout ouvert non vide de* X *contient au moins un point de* A*.*

(Ce ci est equivalent a $\overline{A} = X$.).

Définition 1.2.23 *Soit* A *un sous-ensemble de* E*.*

A est convexe si, pour chaque x, $y \in A$ et chaque $\lambda \in [0,1]$, on a $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

Le dual topologique

Définition 1.2.24 *Une application* f *de* E *dans* F *est continue au point* $a \in E$ *, si pour chaque* $l \in L$ *et chaque réel* $\varepsilon > 0$*, il existe un sous-ensemble fini non vide* $I_n \subset I$ *et un réel* $r > 0$ *tels que :*

$$\boxed{\max_{i \in I_n} p_i\left(x-a\right) < r \Longrightarrow p_i\left(f\left(x\right) - f\left(a\right)\right) < \varepsilon}$$

Définition 1.2.25 *On dit que* f *est une application linéaire si :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in E \qquad \bullet f\left(x+y\right) = f\left(x\right) + f\left(y\right).$$
$$\bullet\ f\left(\lambda\, x\right) = \lambda\ f\left(x\right).$$

Si f est une application linéaire cette définition se reformule ainsi :

Théorème 1.2.2 *[6] Soit* f *une application linéaire de* E *dans* F*. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

• f est continue;

• f est continue en 0;

•$\forall l \in L$, il existe $I_n \subset I$, fini, et $c \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour chaque $x \in E$ on a :

$$\boxed{p_i\left(f\left(x\right)\right) \leq c \max_{i \in I_n} p_i\left(x\right).}$$

Lorsque $F = \mathbb{k}$; ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et f une forme linéaire sur E, on a :

Théorème 1.2.3 *[6] Soit f une forme linéaire de E.*

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

• f est continue;

• f est continue en 0;

• Il existe $I_n \subset I$, fini, et $c \in \mathbb{R}^+$tel que, pour chaque $x \in E$ on a :

$$\boxed{\left|f\left(x\right)\right| \leq c \max_{i \in I_n} p_i\left(x\right).}$$

Ce résultat s'écrit ainsi :

$$\boxed{\forall \eta > 0,\ \exists c > 0 \ et \ n \in \mathbb{N} \ tel \ que \ f\left(V_n\ \left(\tfrac{\eta}{c}\right)\right) \subset \left]-\eta, \eta\right[.}$$

L'ensemble des formes linéaires continues sur E est un espace vectoriel noté E' appelé le dual topologique de E.

1.3 Espace $\mathfrak{D}_k(\Omega)$

Définition 1.3.1 *Soit Ω un ouvert fixé de $\mathbb{R}^n$. Pour chaque partie compact $K \subset \Omega$ on note :*

$$\boxed{\mathfrak{D}_k(\Omega) = \{\varphi \in \varepsilon\left(\Omega\right) : \forall x \in \Omega \setminus k,\ \varphi\left(x\right) = 0\}}$$

L'espace $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ est le sous-espace vectoriel de $\varepsilon(\Omega)$ dont les éléments sont les fonctions dont le support, contenu dans K, est une partie compact de Ω .

Définition 1.3.2 *L'espace $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ que l'on muni par des semi-normes définir par :*

$p_j(f) = \sup\limits_{x\in k.|\alpha|\leq j.} |D^\alpha f(x)|$ est une espace de Fréchet.

Proposition 1.3.1 *[10] L'espace $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ est complet.*

Preuve. Si la suite $(f_i)_i$ est Cauchy dans $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ cela signifie : $\forall j \in \mathbb{N}, p_j(f_i - f_k) \overset{i,\, k \to +\infty}{\to} 0$.

i.e : $\sup\limits_{x\in k.|\alpha|\leq j.} |D^\alpha f_i(x) - D^\alpha f_k(x)| \overset{i,\, k \to +\infty}{\to} 0$.

Donc la suite $(D^\alpha f_i)_i$ est converge uniformement sur k pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$.Et puis en déduire que $D^\alpha f_i \overset{i \to +\infty}{\to} D^\alpha f$ quand $f_i \overset{i \to +\infty}{\to} f$.Ainsi, nous avons trouvé un élément f appartient à $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ vérifie :$\forall j \in \mathbb{N}$, $p_j(f_i - f) \overset{i \to +\infty}{\to} 0$.

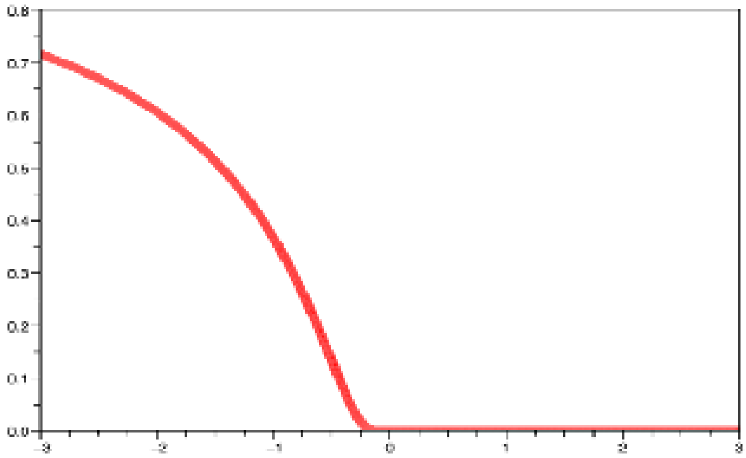
Donc l'espace $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ est complet. ■

On commence par construire des exemples des fonctions de classe C^∞ à support compact sur la droite réelle [4] :

$E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$E(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right) & si\ x < 0 \\ 0 & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1-



• Figure −1− Graphe de la fonction E.

Il est clair que E est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, d'autre part, on montre que

$$E^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(\frac{1}{x}\right) \text{ pour tout } x < 0,$$

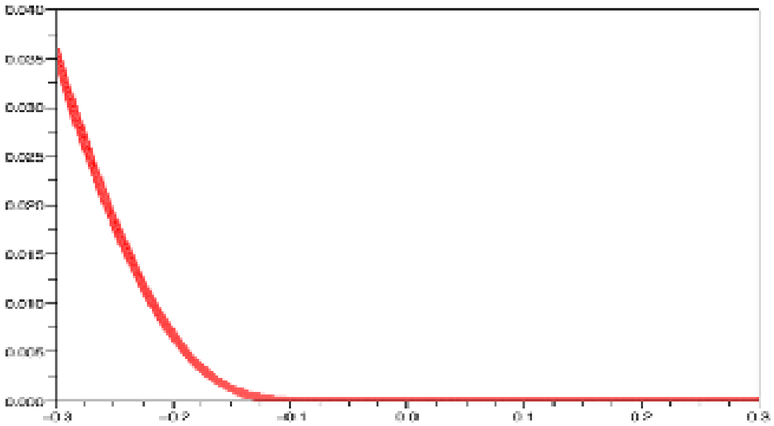
où P_n est la suite de polynômes définis par la relation de récurrence :

$$P_0(X) = 1$$
$$P_{n+1}(X) = -X^2(P_n'(X) + P_n(X)),\ n \geq 0.$$

On en déduit que :

$E^{(n)}(x) \to 0$ lorsque $x \to 0^-$ pour tout $n \geq 0$ et donc que $E \in C^\infty(\mathbb{R})$. D'autre part, le support de E est $\mathbb{R}_-$.

2-



• Figure $-2-$ zoom sur la région du graphe correspondant à $x = 0$.

Exemple 1.3.1 *A partir de la fonction E, on construit trés simplement une fonction F de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et à support dans un segment $[a, b]$, où $a < b$ sont deux réels quelconques, il suffit de poser :*

$$F(x) = E(a - x)E(x - b) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

c'est- à-dire

$$F(x) = \begin{cases} e^{-\frac{b-a}{(b-x)(x-a)}} & si\ x \in \,]a, b[\\ 0 \quad si & x \in]-\infty, a] \cup [b, +\infty[\end{cases}$$

Exemple 1.3.2 *En posant :*

$$G(X) = \prod_{k=1}^{N} E(a_k - x_k)\ E(x_k - b_k) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N\ .$$

A nouveau, on vérifie sans peine que $G \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ (par exemple en constatant que G admet des dérivées partielles continues à tout ordre et en tout point de $\mathbb{R}^N$) et que $supp(G) = [a_1, b_1]...[a_N, b_N]$.

Exemple 1.3.3 *En posant :*

$$H(x) = E(|x|^2 - 1) \ .$$

c'est- à-dire :

$$H(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & si \quad |x| < 1 \\ 0 & si \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

La fonction H est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$ comme composée de la fonction E et de la fonction : $\mathbb{R}^N \ni x \to |x|^2 - 1 \in \mathbb{R}$, toutes deux de classe C^∞; d'autre part,

$$supp(H) = \overline{B(0,1)} = \left\{x \in \mathbb{R}^N \quad ; \quad |x| \leq 1\right\} \ .$$

Exemple 1.3.4 *La fonction I donnée par :*

$$I(x) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} F(z)\ dz}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(z)\ dz}. \quad \text{où } F \text{ est la fonction définie ci-dessus.}$$

Remarquons que la fonction continue F vérifie $F > 0$ sur $]a, b[$
de sorte que

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(z) dz > 0 \ .$$

La fonction $I \in C^\infty(\mathbb{R})$ satisfait donc les conditions suivantes :

$$0 \leq I \leq 1, I\ |_{]-\infty,a]}\ = 0,\ I\ |_{[b,+\infty[}\ = 1,$$

où $a < b$ sont les deux réels apparaissant dans la construction de F ci-dessus.

Exemple 1.3.5 *A partir de la fonction I, en supposant que les paramétres a, $b > 0$, on construit trés simplement un exemple de fonction $J \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que :*

$$supp(J) \subset B(0, \sqrt{b}) \ , \qquad J\ |_{\overline{B(0,\sqrt{a})}}\ = 1, \qquad 0 \leq J \leq 1.$$

Il suffit en effet de poser : $J(x) = 1 - I(|x|^2)$.

Chapitre 2

Topologie d'espace des fonctions test

2.1 Topologie de $\mathfrak{D}(\Omega)$

Définition 2.1.1 *L'espace vectoriel de ces fonctions test sur Ω, dans la notation de L. Schwarz, est :* $\boxed{\mathfrak{D}(\Omega) = C_c^{\infty}(\Omega).}$

$$\boxed{\mathfrak{D}(\Omega) = \{\phi \in C^{\infty}(\Omega) : supp(\phi) \subset \Omega,\ supp(\phi)\ compact\ \}}$$

Le sous-espace vectoriel de $\varepsilon(\Omega)$ dont les éléments sont les fonctions dont le support est une partie compact de Ω. Le sous-espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ n'est pas fermé dans $\varepsilon(\Omega)$.

Remarque 2.1.1 *Si on se place dans un compact K de $\mathbb{R}^n$, on a tout simplement :*

$$\boxed{\text{K compact} \Rightarrow \mathfrak{D}(K) = C^{\infty}(K).}$$

Puisque les fonctions de $C^{\infty}(K)$ sont C^{∞} et à support compact. On ne considèrera pas ce cas : on verra qu'il faudra considérer $\mathfrak{D}(\Omega)$ avec Ω ouvert pour ne pas avoir de problème avec le bord de Ω, les fonctions de $\mathfrak{D}(\Omega)$ étant identiquement nulles dans un voisinage ouvert du bord de Ω.

Propriétés topologiques de $\mathfrak{D}(\Omega)$

Théorème 2.1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors :*

(i) Si A est un ensemble borné de $\mathfrak{D}(\Omega)$, alors il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $A \subset \mathfrak{D}_k$.

(ii) En particulier, si $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, alors il existe un compact fixe K tel que tous les f_j aient leur support dans K .

(iii) Une suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathfrak{D}(\Omega)$ si et seulement si tous les f_j ont leur support inclus dans un compact fixe K, et si la suite (f_j) converge uniformément, ainsi que la suite de ses dérivées à tous les ordres.

(iv) $\mathfrak{D}(\Omega)$ est un espace topologique complet .

(v) $\mathfrak{D}(\Omega)$ est un espace de Montel .

(vi) Le dual topologique de $\mathfrak{D}(\Omega)$ coïncide avec $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

(vii) pour tout compact $K \subset \Omega$, $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ est un fermé d'intérieur vide dans $\mathfrak{D}(\Omega)$.

(viii) $\mathfrak{D}(\Omega)$ n'est pas métrisable.

Démonstration. (Esquisse de démonstration)

Nous n'indiquerons que certains points-clé dans la démonstration. La propriété cruciale est le point (i), qui assure à la fin la complétude en forçant les suites de Cauchy à rester dans un espace (de Fréchet) $\mathfrak{D}_k(\Omega)$.

Pour établir (i), considérons par l'absurde un ensemble borné A qui n'appartienne à aucun $\mathfrak{D}_k(\Omega)$. Il existe donc une suite $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de fonctions de A, et une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ des points de Ω, n'est contenue dans aucun compact de Ω, telle que $\varphi_m(x_m) \neq 0$. On pose alors $c_m := |\varphi_m(x_m))| \ / \ m$.

Par exemple l'ensemble :

$W := \{\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) \ ; \forall m \in \mathbb{N}, |\varphi(x_m)| < c_m\}$.est un voisinage de 0. L'ensemble A étant borné, il doit donc être possible de trouver $\lambda > 0$ tel que $\lambda \ A \subset W$. En particulier, λ $|\varphi(x_m)| < c_m$, ce qui impose $\lambda < 1/m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$: nous obtenons une contradiction.

Les propriétés (ii), (iii) et (iv) sont alors des conséquences assez simples de la propriété (i), du fait que $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ est un espace de Fréchet, et de considérations topologiques générales. La propriété (v) découle assez simplement de ce que les ensembles bornés de $\mathfrak{D}(\Omega)$ sont inclus dans un $\mathfrak{D}_k(\Omega)$, et que $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ est un espace de Montel.

La propriété (v) découle de ce qu'une application linéaire continue doit envoyer un ensemble borné sur un ensemble borné, qu'un ensemble borné de $\mathfrak{D}(\Omega)$ est un ensemble borné d'un certain $\mathfrak{D}_k(\Omega)$, et de ce que les distributions sont les formes linéaires dont la restriction à chaque $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ est continue.

La propriété (vi) est presque évidente. D'une part, $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ est fermé, comme l'intersection des fermés $\delta_x^{-1}(0)$ pour $x \notin K$. D'autre part, soit $\varphi \in \mathfrak{D}_k(\Omega)$, et ψ un élément de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dont le support ne soit pas inclus dans K ; alors la fonction $\varphi + \varepsilon\psi$ n'appartient pas à $\mathfrak{D}_k(\Omega)$, mais converge vers φ dans $\mathfrak{D}(\Omega)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Pour démontrer le point (vii), il suffit d'invoquer le théorème de Baire, sous la forme suivante : dans un espace métrique complet, une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide. En l'occurrence, si l'on se donne une suite exhaustive $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de compacts de Ω, alors $\mathfrak{D}(\Omega)$ est l'union dénombrable des $\mathfrak{D}_{k_j}(\Omega)$,dont chacun est d'intérieur vide, mais $\mathfrak{D}(\Omega)$ lui-même n'est pas d'intérieur vide. Puisque $\mathfrak{D}(\Omega)$ est complet et ne satisfait pas la conclusion du théorème de Baire, on en conclut qu'il n'est pas métrisable. ■

Remarque 2.1.2 *L'espace $\mathfrak{D}(\Omega)$ n'étant pas métrisable, définir la topologie n'est pas érquivalent à définir la convergence des suites. Cependant, dans la pratique c'est presque la seule notion de convergence que l'on utilise.*

Proposition 2.1.1 [10] $\mathfrak{D}(\Omega) = \underset{k\,\subset\,\Omega}{\cup} \mathfrak{D}_k(\Omega)$.

Preuve. 1- On montre le compartiment $\mathfrak{D}(\Omega) \subset \underset{k\,\subset\,\Omega}{\cup} \mathfrak{D}(\Omega)$.

soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, donc $\varphi \in \xi(\Omega)$ et $supp(\varphi)$ compacte de Ω. On pose $K = supp(\varphi)$ donc on aura $\varphi \in \mathfrak{D}_k(\Omega)$ donc $\varphi \in \underset{k\subset\Omega}{\cup}\mathfrak{D}_k(\Omega)$.

2- On montre le compartiment $\underset{k\subset\Omega}{\cup}\mathfrak{D}_k(\Omega) \subset \mathfrak{D}(\Omega)$.

soit $\varphi \in \underset{k\subset\Omega}{\cup}\mathfrak{D}_k(\Omega)$ donc il existe K_0 compacte de $\Omega/\varphi \in \mathfrak{D}_{k_0}(\Omega)$ donc $\varphi \in \xi(\Omega)$ et $supp(\varphi) \subset K_0$, et on sait que $supp(\varphi)$ fermé et K_0 bornée donc $supp(\varphi)$ compacte donc $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Par les deux compartiments on aura l'égalité. ■

Corollaire 2.1.1 *[6] Soit K un compact de Ω. Il existe une fonction $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ et $\varphi = 1$ dans K.*

Preuve. Sans perdre de généralité, on peut supposer que Ω est borné.

Soit d la distance entre K et la frontière $Fr(\Omega)$ et posons $K_{d/3}$le $d/3$ -voisinage de K défini comme précédemment. Il est facile de voir que la fonction $\varphi = \chi_{d/3} * \alpha_{d/3}$ vérifie ce qui est demandé dans l'énoncé du corollaire. ■

Corollaire 2.1.2 *[6] Soient K_1 et K_2 deux compacts disjoints de l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

Il existe, alors, une fonction $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ telle que :
$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 \quad si & x \in K_1 \\ -1 \; si & x \in K_2 \end{cases}$$
et $|\varphi(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \Omega$.

Preuve. Soient U_1 et U_2 deux ouverts disjoints de Ω contenant respectivement K_1et K_2.

D'aprés le corollaire précédent, il existe φ_1 et $\varphi_2 \in \mathfrak{D}(\Omega)$, telles que $\varphi_i \equiv 1$ dans K_i, $\varphi_i \in \mathfrak{D}(U_i)$, $i \in \{1,2\}$, et $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$, $i \in \{1,2\}$.

La fonction cherchée sera définie par $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Avec la même argumentation, on montre que, si K est sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et si V est un voisinage arbitraire de K, il existe une fonction $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ vaut 1 sur un voisinage de K et $supp(\varphi) \subset V$. ■

2.2 Création de topologie sur $\mathfrak{D}(\Omega)$

1- On note τ_K la topologie induite par $\varepsilon(\Omega)$ sur $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. C'est la topologie déterminée sur $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ par la famille de semi-normes sur $\mathfrak{D}(\Omega)$:

$$\boxed{p_m(\varphi) = \sup_{|\alpha|\leq m, x\in\Omega} |\partial^\alpha \varphi(x)| < +\infty}$$

2- En distinguant une famille de parties qui sera, en fait, une base de voisinages de 0. Pour cela, on note

$$V = \{\upsilon \subset \mathfrak{D}(\Omega); \text{ absolument convexe et équilibré}, \forall k \in K_\Omega, V\cap \mathfrak{D}_K(\Omega) \in \tau_K \}.$$

Pour chaque $\upsilon \in V$, sa jauge $(\Im_\nu)_{\nu\in V}$ est une semi-norme sur $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Corollaire 2.2.1 *[6] La famille de semi-normes $(\Im_\nu)_{\upsilon\in V}$ est séparante.*

Preuve. Soit $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ telle que $\varphi \neq 0$. Evidemment $r = \underset{x\in\Omega}{sup}|\varphi(x)| > 0$.
Notons $\upsilon = \{f \in \mathfrak{D} : q_0(f) < r\}$.Il est clair que $\upsilon \in V$ et que $\Im_\upsilon(\varphi) \geq 1$.

On note par τ la topologie sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ déterminée par la famille $(\Im_\upsilon)_{\upsilon\in V}$. ■

Corollaire 2.2.2 *[6] Pour chaque $\upsilon \in V$ on a $\upsilon = \{\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) : \Im_\upsilon(\varphi) < 1\}$ et la famille V est un système de voisinage de 0 pour la topologie τ. Autrement dit, pour tout voisinage U de 0 pour τ il existe $\upsilon \in V$ tel que $V \subset U$.*

Preuve. Il est clair que υ est convexe et que$\{\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) : \Im_\upsilon(\varphi) < 1\}$.

Réciroquement, soit $\varphi \in \upsilon$. Il existe une partie compacte de Ω telle que φ appartient à l'ouvert $\upsilon \cap\mathfrak{D}_k(\Omega)$ de $\mathfrak{D}_k(\Omega)$. L'application $\lambda \in \mathbb{R} \to \lambda_\varphi$ étant continue au point $\lambda = 1$ il existe alors un réel $r > 1$ tel que pour tout réel véerifiant $1 - r \leq \lambda \leq 1 + r$ on a $\lambda_\varphi \in \upsilon \cap \mathfrak{D}_k(\Omega)$. Il découle $(1 + r)_\varphi \in \upsilon$ donc $\Im_\upsilon(\varphi) < 1$. La suite est clair. ■

Théorème 2.2.1 *[6] Pour chaque partie compact K de Ω, la topologie τ_k et la topologie induite par τ sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ sont égaux.*

Preuve. Fixons une partie compacte K de Ω. Soit U un voisinage de 0 dans $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ muni de la topologie induite par τ. D'aprés le corollaire précédent nous pouvons trouver $\upsilon \in V$ tel que $\upsilon \cap \mathfrak{D}_k(\Omega) \subset U$. Puisque $\upsilon \cap \mathfrak{D}_k(\Omega)$ est un voisinage de 0 pour τ_k il s'ensuit que U est aussi voisinage de 0 pour cette même topologie.

La topologie induite par τ sur $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ est donc moins fine que la topologie τ_k .

Réciproquement, soit W un voisinage de 0 pour τ_k . Puisque la suite $(p_m)_m$ détermine la topologie τ_k sur $\mathfrak{D}_k(\Omega)$, il existe alors un $m \geq 0$ et un réel $r > 0$ tel que : $\{\varphi \in \mathfrak{D}_k(\Omega) : p_m(\varphi) < r\} \subset W$.

Il est clair que $\upsilon = \{\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) : p_m(\varphi) < r\} \in V$, il s'ensuit que W est un voisinage de 0 pour la topologie induite par τ sur $\mathfrak{D}_k(\Omega)$. ■

2.3 La topologie limite inductive de $\mathfrak{D}(\Omega)$

Définition 2.3.1 *[6] Soit $(E_i)_{i\in N}$ une suite croissante d'espaces localement convexes tels que l'application identité $E_i \to E_{i+1}$ soit continue pour chaque i. Posons : $E = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i$.*

Définissons sur E la topologie localement convexe la moins fine rendant les identités $E_i \to E_{i+1}$ continues pour $i = 1, 2, \cdots,$. Elle est dite topologie limite inductive de E définie par les sous-espaces E_i. L'espace E muni de cette topologie est dit limite inductive des espaces $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

La suite exhaustive

Définition 2.3.2 *[1] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une suite $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de compacts de, et une suite$(O_j)_{j\in\mathbb{N}}$ d'ouverts, telles que*

$$K_j \subset O_j \subset K_{j+1}. \qquad \Omega = \underset{j\geq 0}{\cup} K_j \qquad .$$

Une telle suite $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est appelée suite exhaustive de compacts de Ω. Si K est un compact arbitraire de Ω, il existe j tel que $K \subset K_j$.

Les suites exhaustives permettent de définir des espaces locaux.

Définition 2.3.3 *[1] On fixe $(K_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts de Ω. L'espace $\mathfrak{D}(\Omega) := \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} \mathfrak{D}_{k_n}(\Omega)$ sera muni de la topologie limite inductive des $\mathfrak{D}_{k_n}(\Omega)$.*

2.4 La Convergence dans $\mathfrak{D}\,(\Omega)$

Au sens de $\mathfrak{D}\,(\Omega)$

Définition 2.4.1 *On dit qu'une suite $(\varphi_n)_{n\,\in\mathbb{N}}$ de $\mathfrak{D}\,(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathfrak{D}\,(\Omega)$ ssi :*

$\exists\ k \subset \Omega$, k compact, tel que :

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $supp\,(\varphi_n) \subset k$.

2) $\forall i \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{k} |\partial^i \varphi_n\,(x) - \partial^i \varphi\,(x)| \underset{n\,\to\,\infty}{\to 0}$. (1.1)

Donc les φ_n ont toutes un support inclus dans un compact commun k, et elles convergent uniformément ainsi que toutes leurs dérivées vers φ (qui a donc son support inclus dans k).

Remarque 2.4.1 *Cette notion de convergence sera suffisante un certain temps :*

elle donnera la continuité des distributions comme limite : si $\varphi_j \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} \varphi$ au sens de la convergence (1.1), alors $T : \mathfrak{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ sera un opérateur continu si $T(\varphi_j) \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} T(\varphi)$ dans $\mathbb{R}$.

Par contre, pour certaines propriétés des distributions à support compact, on aura besoin de regarder la topologie de $\mathfrak{D}(\Omega)$ (ses ouverts).

Cette topologie est celle d'un espace métrique non normé (il n'y a pas de norme sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ associée à la distance), et sera rapidement décrite quand on abordera les distributions à support compact.

Définition 2.4.2 *Une forme linéaire (ou fonctionnelle) sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ est continue ssi pour toute suite de fonctions test $\varphi_n \in \mathfrak{D}(\Omega)$ convergeant dans $\mathfrak{D}(\Omega)$ vers $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$: $\langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$.*

Théorème 2.4.1 *[6] Une suite $(\varphi_m)_m$ de $\mathfrak{D}(\Omega)$ tend vers 0 quand m tend vers $+\infty$ si, et seulement si,il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que, pour chaque m, on a $\varphi_m \in \mathfrak{D}_K(\Omega)$ et $(\varphi_m)_m$ tend vers 0 pour la topologie τ_K .*

Preuve. Puisque la topologie τ_K est induite par τ sur $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ il est clair qu'une suite $(\varphi_m)_m$ de $\mathfrak{D}(\Omega)$ telle que $\varphi_m \in \mathfrak{D}_K(\Omega)$ pour chaque entier m et qui tend vers 0 dans $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ tend aussi vers 0 dans $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Réciproquement, considérons une suite $(\varphi_m)_m$ de $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ tendant vers 0 et supposons que pour chaque compact $K \subset \Omega$ il existe un entier m tel que la restriction $\varphi_m\,|_{\Omega\setminus k} \neq 0$.

Fixons $(K_\ell)_\ell$ une suite exhaustive de compacts de Ω. Nous pouvons alors construire une suite strictement croissante d'entiers $(m_\ell)_\ell$ et une suite $(x_\ell)_\ell$ de Ω qui vérifient, pour chaque entier ℓ, $x_\ell \in \Omega \setminus K_i$ et $\varphi_{m_\ell}(x_i) \neq 0$.

Notons alors $\upsilon = \{\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega) : \forall\ \ell,\ |\varphi(x_\ell)| < (1/2)|\varphi_{m_i}(x_i)|\}$.

Il est clair que υ est absolument convexe. Pour chaque compact $K \subset \Omega$ il n'y a qu'un nombre fini de x_ℓ qui appartiennent à K, il s'ensuit que $\upsilon \cap \mathfrak{D}_k(\Omega) \in \tau_k$ et donc υ est un voisinage de 0 pour τ.

La suite $(\varphi_m)_m$ convergeant vers 0 il existe un entier m_ℓ tel que $\varphi_{m_\ell} \in \upsilon$ ce qui est contradictoire. ■

Nous avons le résultat (sous forme théorème) suivant:

Théorème 2.4.2 *[6] Une suite $(\varphi_m)_m$ de $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ est Cauchy si, et seulement si, il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que, pour chaque entier m, $\varphi_m \in \mathfrak{D}_k(\Omega)$ et $(\varphi_m)_m$ est de Cauchy pour la topologie τ_k.*

Preuve. elle est identique à celle du théorème précédent. ■

Théorème 2.4.3 *[6] Soit u une application linéaire de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans un espace vectoriel E muni de la topologie déterminée par une famille séparante de semi-normes.*

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1- u est continue.

2- pour toute suite $(\varphi_m)_m \to 0$ dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, la suite $(u(\varphi_m))_m$ tend vers 0 dans E.

3- pour tout compact $K \subset \Omega$, la restriction de u à $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ est continue.

Preuve. Les affirmations $1 \Rightarrow 2$ et $2 \Rightarrow 3$ sont évidentes.

Montrons que $3 \Rightarrow 1$. Pour cela nous allons établir la continuité de u en 0. Soit W un voisinage absolument convexe de 0 dans E.

Il est clair que $\upsilon = u^{-1}(W)$ est une partie absolument convexe de $\mathfrak{D}(\Omega)$. Puisque $\upsilon \cap \mathfrak{D}_k(\Omega) = (u|_{D_K(\Omega)})^{-1}(W)$ nous avons $\upsilon \cap \mathfrak{D}_K(\Omega) \in \tau_k$. Il s'ensuit que υ est un voisinage de 0 dans $\mathfrak{D}(\Omega)$. ■

Remarque 2.4.2 *[4] Soit u une forme linéaire sur $\mathfrak{D}(\Omega)$. u est continue si, et seulement si, pour chaque compact $K \subset \Omega$, il existe un réel C et un entier $m \geq 0$ tels que, pour chaque $\varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega)$, on a :*

$$|u(\varphi)| \leq C \sup_{x\in\Omega, |\alpha|\leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

La constante C et l'entier m dépendent du compact K.

2.5 Régularité de la convolution $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N) \star L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$

Définition 2.5.1 *Deux fonctions f et g définies p.p, et mesurables sur $\mathbb{R}^n$ sont dites convolables si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.*

On définit alors le produit de convolution de f et de g par la formule

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \quad p.p \text{ . en } x \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple 2.5.1 *Pour $f \in L^1(\Omega)$ à support borné dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{R}^n$ avec intégrales multiples), si $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, la fonction convolée :*

$$\psi(x) = (f \star \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(x-t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi(t)dt).$$

est une fonction de $\mathfrak{D}(\Omega)$. En effet, ψ est à suport borné inclus dans $supp(f) \cup supp(\varphi)$.

Et elle est $C^\infty(\mathbb{R})$ comme l'application du théorème de la convergence dominée de Lebesgue le montre, puisque presque tout $t \in \mathbb{R}$, $x \to f(t)\varphi(x-t)$ est C^k (en x),

et $\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}\left(f(t)\varphi(x-t)\right)\right| \leq \sup_{\mathbb{R}} \left|\varphi^{(k)}(t)\right| f(t)$ intégrable (indépendamment de x).

On aura même $\mathfrak{D}(\Omega)$ dense dans $L^1(\Omega)$.

Proposition 2.5.1 *[4] Pour toute fonction $\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ et tout $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$,le produit de convolution $\phi\star f$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, et on a $\partial^\alpha(\phi \star f) = (\partial^\alpha \phi) \star f$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. De même*

$$\phi \in C_c^m(\mathbb{R}^n) \text{ et } f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \phi \star f \quad C^m(\mathbb{R}^n).$$

Démonstration. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\eta > 0$, on considère la fonction mesurable

$F : B(x_0, \eta) \times \tilde{k}_\eta \ni (x, y) \mapsto \phi(x-y) f(y) \in \mathbb{R}$, où on rappelle que :

$\tilde{k}_\eta = \{a - b \,; |a| \leq \eta \text{ et } |b| \in k\}$, avec $K = supp(\phi)$.

Pour presque tout $y \in \tilde{k}_\eta$, la fonction $x \mapsto F(x,y)$ est de classe C^∞ sur $B(x_0,\eta)$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a $|\partial_x^\alpha F(x,y)| = |\partial^\alpha \phi(x-y) f(y)| \leq \mathbf{C}_\alpha |f(y)|$ pour tout

$(x, y) \in B(x_0, \eta) \times (\tilde{k}_\eta \diagdown N)$, où N est un ensemble négligeable éventuel sur lequel la fonction localement intégrable f n'est pas définie, et où

$$\mathbf{C}_\alpha = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \phi(z)| = \max_{z \in k} |\partial^\alpha \phi(z)| < \infty.$$

Comme la fonction f est localement intégrable, sa restriction au compact $\tilde{k}_\eta$ est intégrable et on déduit du théorème de dérivation sous le signe somme [4] que la fonction

$$x \mapsto \int_{\tilde{k}_\eta} F(x, y) dy = \phi \star f(x)$$

admet des dérivées partielles de tous ordres sur $B(x_0, \eta)$, avec $\partial^\alpha (\phi \star f) = (\partial^\alpha \phi) \star f$ sur $B(x_0, \eta)$. En particulier $\phi \star f$ est de classe C^∞ sur $B(x_0, \eta)$, d'où la proposition, puisque x_0 et $\eta > 0$ sont arbitraires. ■

- [6] Cas particulière : telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha(x) dx = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit

$$\boxed{\alpha_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \alpha\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)}$$

On voit clairement que :

⊙ $\alpha_\varepsilon \in C_c^\alpha(\mathbb{R}^n)$.

⊙ Le support de α_ε est $\overline{B_\varepsilon(0)}$, boule fermée de centre 0 et de rayon ε.

⊙ $\int_{\mathbb{R}^n} \alpha_\varepsilon(x) dx = 1$.

A l'aide de la famille $(\alpha_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$, on peut régulariser les L^p-fonctions discontinues c'est-'a-dire qu'on peut montrer qu'elles peuvent être approchées par des fonctions tests. C'est la vocation principale du théorème qui suivra.

Définition 2.5.2 *[6] Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$. La fonction*

$$\boxed{f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\ \alpha_\varepsilon(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f\ (x)\, \alpha_\varepsilon(x - y)\, dy}$$

est dite la convolution de f par α_ε, notée par $f * \alpha_\varepsilon$ ou $\alpha_\varepsilon * f$.

Théorème 2.5.1 *[6] (ce théorème montre le sens de la suite régularisante). Soit f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^n$, alors :*

1- La convolution f_ε est une fonction dans $\mathbb{R}^n$.

2- Si f est à support compact K, le support de $f_\varepsilon$est contenu dans un ε-voisinage de K définie par

$$k_x = k + \overline{B_\varepsilon(0)} = \underset{x\in k}{\cup} \overline{B_\varepsilon(x)}$$

3- Si f est continue, alors la suite $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

4- Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$, alors la suite $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge uniformément vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Preuve.

1- Comme l'intégrale définissant $f_\varepsilon(x)$ est prise sur des compacts de $\mathbb{R}^n$ donc on peut dériver sous le signe intégrale.

2-

$$\text{Si } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } d(x,K) > \varepsilon \text{ alors } x \notin K_\varepsilon = K + B_\varepsilon(0).$$

$$\text{Donc, pour tout } y \in K,\ x - y \notin B_\varepsilon(0) = supp\alpha_\varepsilon \text{ donc } \alpha_\varepsilon = (x - y) = 0.$$

Il s'ensuit que :

$$\text{l'intégrale définissant } f_\varepsilon(x) \text{ vaut } 0 \text{ pour tout } x \notin suppf_\varepsilon,$$

ce qui assure que le support de $f(x)$ est contenu dans K_ε.

3- Supposons que f est une fonction continue et fixons $\acute{K}$ un compact quelconque de $\mathbb{R}^n$.

Comme f est uniformément continue sur $\acute{K}$,

pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ telque $|f(x-y)-f(x)| < \eta$ pour tout $x \in \acute{K}$ et $|y| < \delta$

(y est dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$).

En choisissant $\varepsilon < \delta$ il vient que

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq |f(x-y) - f(x)|\alpha_\varepsilon(y)dy < \eta.$$

pour tout $x \in \acute{K}$, ce qui montre que f_ε converge uniformément vers f sur $\acute{K}$ lorsque ε tend vers 0.

4- Supposons que $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$. D'après le théorème de densité, f peut être approchées dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ par des fonctions continues à supports compacts. D'autre part, en utilisant l'inégalité de Minkowski dans sa forme intégrale on montre que si

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ alors $f_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f_\varepsilon\|_p \leq \|f\|_p$.

Soit $\eta > 0$ et $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f - g\|_p < \dfrac{\eta}{3}$.

Il s'ensuit que $\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p \leq \|f - g\|_p < \dfrac{\eta}{3}$.

Écrivons $\|f_\varepsilon - f\|_p \leq \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_p + \|g_\varepsilon - g\|_p + \|g - f\|_p$.

Comme g est continue à support compact, alors d'aprés 3, la suite (g converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}^n$, donc $g_\varepsilon \to g$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

En choisissant ε assez petit, on en déduit que $\|g_\varepsilon - g\|_p < \frac{\eta}{3}$.

■

Finalement, on obtient $\|f_\varepsilon - f\|_p < \eta$. Ce théorème justifie la définition suivante :

Suite régularisante

Définition 2.5.3 *[6] On appelle suite régularisante (ou approximation de l'identité) une famille* $(\zeta_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ *de fonctions définies sur* $\mathbb{R}^n$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, $\zeta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $supp(\zeta_\varepsilon) \subset \overline{B(0, r_\varepsilon)}$, $\zeta_\varepsilon \geq 0$, *et* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \zeta_\varepsilon(x)\,dx = 1$, où on a supposé que $r_\varepsilon \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0^+$.

Voici comment construire un exemple de suite régularisante.

On part de la fonction H définie comme dans la section précédente.

Remarquons que

$$H \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \text{ et que } H > 0 \text{ sur } B(0,1), \text{ de sorte que } \int_{\mathbb{R}^n} H(x)\, dx > 0.$$

On définit une fonction ζ en posant

$$\zeta(x) = \frac{H(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} H(z)\, dz} \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Il est clair que

$$\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et que } supp(\zeta) = \overline{B(0,1)}$$

$$\text{puisque } H \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et } supp(H) = \overline{B(0,1)};$$
$$\text{de plus, on a } \zeta \geq 0 et \int_{\mathbb{R}^n} \zeta(x)\, dx = 1.$$

$$\text{Posons alors, pour tout } \varepsilon > 0\ , \zeta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\zeta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right);$$

on vérifie facilement que $(\zeta_\varepsilon)_\varphi > 0$ est une suite régularisante sur $\mathbb{R}^n$, avec $r_\varepsilon = \varepsilon$.

Autre exemple de suite régularisante

On définit la fonction $\tilde{\rho} : x \in \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ par:

$$\tilde{\rho}(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & si\ \ |x| \leq 1 \\ 0 & si\ \ |x| > 1 \end{cases}.$$

Cette fonction est dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ et vérifie supp $\tilde{\rho} \subset B(0,1)$.

On pose alors

$$\rho := \tilde{\rho} / \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\rho}(x)\ \ dx \ \text{ qui est également dans } \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N).$$

La suite régularisante $(p_n)_n \subset \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ définie par :

$$p_n(x) = n^N p(nx),$$

vérifie:

1- $p_n \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ et supp $p_n \subset B(0, 1/n), \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2- $\int_{\mathbb{R}^n} p_n(x)\, dx = 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

6-

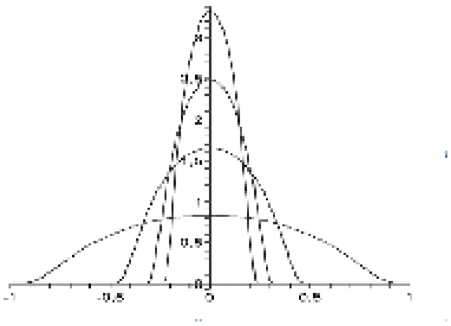


Figure -6- Graphes des fonctions ρ_1, ρ_2, ρ_3, et, ρ_4.

Régularisation C^∞ d'une fonction en escalier

Proposition 2.5.2 *[4] Étant donné un intervalle fermé :*

$$[a, b]\,,\ avec -\infty\ < a\ \ < b\ < \infty,\ \text{et } \gamma_k \text{ definie par :}$$

$$\gamma_n\ \ (x)\ = \frac{\zeta\,(nx)}{\int_{\mathbb{R}} \zeta\,(nx)\, d\ x}\quad (\text{oŭ } supp\,(\gamma_n\ \ ) = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]\ et \int \gamma_n\ \ = 1),$$

la fonction $\varphi = 1_{[a,b]}\ * \gamma_k$ est une fonction de $\mathfrak{D}\,(\mathbb{R})$ à support dans $\left[a - \dfrac{1}{k}, b + \dfrac{1}{k}\right]$,

telle que $0 \leq \varphi \leq 1$et qui vaut 1 sur $\left[a + \dfrac{1}{k}, b - \dfrac{1}{k}\right]$ désque $\dfrac{2}{k} < b - a.$

$$\text{Dans le cas de } \mathbb{R}^n,\ \text{avec } \gamma_k\ \ \left(\overrightarrow{x}\right)\ = \frac{\zeta\left(k\overrightarrow{x}\right)}{\int_{\mathbb{R}^n} |\zeta\,(nt)|\, d\ \Omega}$$

$$\text{où } \zeta \text{ défini par : } \zeta(\overrightarrow{x}) = \exp\left(-\frac{1}{1-|\overrightarrow{x}|^2}\right)$$

$$\text{la fonction } 1_K \ * \gamma_k \ \text{ est également dans } \mathfrak{D}(\mathbb{R}_n) \text{ de support } K + B\left(\overrightarrow{0}, \frac{1}{k}\right)$$

$$\text{où } B\left(\overrightarrow{0}, \frac{1}{k}\right) \text{ est la boule unité de centre} \overrightarrow{0} \text{et rayon } \frac{1}{k}.$$

Preuve. La fonction $1_{[a,b]} * \gamma_k$ est C^∞ car γ_k l'est .

On a (avec le changement de variable $u = x - t$ donnant $du = -dt$)

$$\varphi(x) = 1_{[a,b]} * \gamma_k \ (x) = \int_{t=a}^{b} \gamma_k \ (x-t)\, dt$$

$$= -\int_{u=x-a}^{x-b} \gamma_k \ (u)\, du = \int_{u \in [x-b, x-a]} \gamma_k \ (u)\, du.$$

Donc, sachant que :

$$supp(\gamma_k) \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right], \text{ si } x - b > \frac{1}{k} \text{ ou si } x - a < -\frac{1}{k},$$

$$\text{on a} 1_{[a,b]} * \gamma_k(x) = 0,$$

$$\text{d'où } \ supp\left(1_{[a,b]} * \gamma_k\right) \in \left[a - \frac{1}{k}, b + \frac{1}{k}\right].$$

$$\text{Et la fonction } \gamma_k \text{ étant positive d'intégrale} \int_{\mathbb{R}} \gamma_k = 1,$$

$$\text{on a } 0 \le \int_{u \in [x-b, x-a]} \gamma_k(u)\, du \le 1, \text{ i.e } 0 \le \varphi \le 1.$$

$$\text{Enfin, si } x - b < -\frac{1}{k} \text{ et si } x - a > \frac{1}{k}, \text{ i.e si } x \in \left[a + \frac{1}{k}, b - \frac{1}{k}\right],$$

$$\text{alors } \varphi(x) = \int_{u \in [x-b, x-a]} \gamma_k(u)\ du \ge \int_{u \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]} \gamma_k(u)\, du = 1.$$

■

Et l'autre résultat attendu (trés utilisé) est la proposition suivante :

Proposition 2.5.3 *[4] Ètant donné un intervalle ouvert $]a,b[$, avec $-\infty < a < b < \infty$, et un intervalle fermé $[c,d] \subset]a,b[$, il existe une fonction $\varphi \in \mathfrak{D}(]a,b[)$ qui vaut 1 sur $[c,d]$, et qui de plus est positive et bornée par 1. Même résultats dans $\mathbb{R}^n$ où $[a,b]$ est remplacé par un compact K .*

Preuve. C'est un corollaire de la proposition précédente : on prend $\varphi = 1_{\left[a-\frac{1}{k},b+\frac{1}{k}\right]} * \gamma_k$ avec k assez grand pour que $c < a - \frac{1}{k}$ et $d > b + \frac{1}{k}$. ■

2.6 Le dual topologique de $\mathfrak{D}(\Omega)$

Définition 2.6.1 *On appelle distribution T tout élément de $\mathcal{L}(\mathfrak{D}(\Omega), \mathbb{R}) = \mathfrak{D}'(\Omega)$*

L'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathfrak{D}(\Omega)$, i.e. toute fonctionnelle $T : \mathfrak{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

1- Pour tout φ, $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$T(\varphi + \lambda\psi) = T(\varphi) + \lambda T(\psi) \qquad \text{(linéarité)},$$

2- si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathfrak{D}(\Omega)$ qui converge vers $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ (au sens de $\mathfrak{D}(\Omega)$), alors :

$$|T(\varphi_n) - T(\varphi)| \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \text{dans } \mathbb{R} \qquad \text{(continuité)},$$

soit encore

$$\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n\right) \quad (\text{dans } \mathbb{R}).$$

•L'ensemble $\mathfrak{D}'(\Omega)$ (dual topologique de $\mathfrak{D}(\Omega)$) est appelé espace des distributions sur Ω.

Remarque 2.6.1 *Par définition de la continuité de T , on peut passer à la limite sous la distribution T*

$$\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T\left(\lim_{n\to\infty}\varphi_n\right) = T(\varphi).$$

Dés que (φ_n) est une suite de $\mathfrak{D}(\Omega)$ qui converge vers $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ au ses de $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Notation 2.6.1 *La linéarité fait qu'on emploie le crochet de dualité :*

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle, \forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega),$$

ou la notation intégrale: $T(\varphi) = \int T\varphi$.

Et la continuité de T fait qu'on peut passer à la limite sous le crochet :

$$\lim_{n\to\infty}\langle T, \varphi_n\rangle = \left\langle T, \lim_{n\to\infty}\varphi_n\right\rangle = \langle T, \varphi\rangle,$$

ou qu'on peut passer à la limite sous le signe $\int$:

$$\lim_{n\to\infty}\int T\varphi_n = \int T \lim_{n\to\infty}\varphi_n = \int T\varphi,$$

dés que (φ_n) est une suite convergente dans $\mathfrak{D}(\Omega)$ (i.e. convergente au sens de $\mathfrak{D}(\Omega)$).

Proposition 2.6.1 *[6] Une forme linéaire T est une distribution sur Ω si, et seulement si, pour chaque compact K, il existe une constante $C > 0$ et un entier $m \geq 0$ tels que*

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \sup_{x\in\Omega\ ,\ |\alpha|\leq m} |\partial^\alpha\varphi(x)|, \ \forall\varphi \in \mathfrak{D}_k(\Omega). \qquad (\star)$$

Preuve. Soit $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$. Pour chaque compact $K \subset \Omega$, T est une forme linéaire sur $\mathfrak{D}_k(\Omega)$.

Il existe, alors, $\upsilon \in V_0$ de la forme

$$\upsilon = \upsilon_k^{m,\varepsilon} = \{\varphi \in \mathfrak{D}_k(\Omega) : p_{m,K}(\varphi) \leq \varepsilon\}$$

où $p_{m,K}(\varphi) = \sup\limits_{x\in\Omega,\ |\alpha|\leq m} |\partial^\alpha \varphi(x)|$ telque $|\langle T, \varphi\rangle| \leq 1$ pour tout $\varphi \in \upsilon$.

D'autre part, si $\varphi \in \mathfrak{D}_k(\Omega)$ est telque $\varphi \neq 0$,

on a $\dfrac{\varepsilon \cdot \varphi}{p_{m,K}(\varphi)} \in \upsilon$, ils'ensuit que

$$|\langle T, \varphi\rangle| < (1/\varepsilon) \cdot p_{m,K}(\varphi),\ \forall \varphi \in \mathfrak{D}_k(\Omega) \setminus \{0\}.$$

En posant $C = \varepsilon^{-1}$ on obtient $(\star)$ lorsque $\varphi \neq 0$.

Notons, enfin, qu'on a l'égalité dans $(\star)$ lorsque $\varphi = 0$. Inversement, si $(\star)$ est satisfaite, alors pour chaque compact $K \subset \Omega$, T est une forme linéaire continue sur $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, on en déduit que T est une distribution sur Ω . ■

L'inégalité $(\star)$ n'est pas le seul critère à démontrer pour vérifier qu'une forme linéaire sur $\mathfrak{D}(\Omega)$ est une distribution. Une autre caractérisation s'impose en terme de suites convergentes dans $\mathfrak{D}(\Omega)$:

Théorème 2.6.1 *[6] On a $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ si, et seulement si, pour toute suite (φ_i) convergente vers 0 dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, la suite numérique $| < T, \varphi_i > |$ converge vers 0 dans $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

Preuve. Supposons que $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ et (φ_i) une suite convergente vers 0 dans $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Il existe un compact $K \subset \Omega$ telque $(\varphi_i) \in \mathfrak{D}_k(\Omega), \forall i$ et $\varphi_i \to 0$ dans $\mathfrak{D}_k(\Omega)$.

Comme T est continue dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, d'aprés $(\star)$, on a $< T, \varphi_i > \to 0$ lorsque $i \to +\infty$.

Inversement, Supposons que ceci est vérifié. Il suffit de vérifier que T est continue sur chaque espace $\mathfrak{D}_k(\Omega)$. Supposons, par contradiction, qu'il existe K_{i_0} telle que T n'est pas continue sur $\mathfrak{D}_{K_{i_0}}(\Omega)$. On peut trouver, alors, une suite (φ_i) de fonctions de $\mathfrak{D}_{K_{i_0}}(\Omega)$ convergente vers 0 dans $\mathfrak{D}_{K_{i_0}}(\Omega)$ telle que $< T, \varphi_i >$ ne converge pas. Comme l'inclusion $\mathfrak{D}_{K_{i_0}}(\Omega) \hookrightarrow \mathfrak{D}_k(\Omega)$ est continue, la suite (φ_i) doit converger vers 0 dans $\mathfrak{D}_k(\Omega)$, ainsi $(< T, \varphi_k >)$ devrait converger vers 0 ; contradiction. ■

Exemple 2.6.1 *Soit* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Définissons une forme linéaire* $T_f : \mathfrak{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ *par*

$$\boxed{T_f(\varphi) = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)}$$

Comme $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ alors $C = \int_\Omega |f(x)|\,dx < +\infty$.

Posons $supp(\varphi) = K$; on vérifie facilement que :

$$|T_f(\varphi)| \leq \int_\Omega |f(x)|\,|\varphi(x)|\,dx \leq \sup_{x\in k} |\varphi(x)| \,.\int_\Omega |f(x)|\,dx \leq C(K)\cdot \sup_{x\in k} |\varphi(x)| \,.$$

δ_0 comme limite de fonctions de $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$

On considère la fonction ζ définit par :

$$\zeta(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right), & \forall x \in]-1,1[, \\ 0 \quad , & \forall x \notin]-1,1[, \end{cases}$$

(dont le support est $[-1,1]$ appartient à $\mathfrak{D}(]-2,2[)$.

On a également $\zeta \in \mathfrak{D}(]-1-\varepsilon; 1+\varepsilon[)$ pour tout $\varepsilon > 0$, et on va rétrécir son support, cela à masse constante.

On considère pour $n \geq 1$ la fonction positive définie par :

$$\gamma_1(x) \overset{déf}{=} \frac{\zeta(x)}{\int_\mathbb{R} \zeta(x)\,dx}, \qquad \gamma_n(x) \overset{déf}{=} n\gamma_1(nx),$$

qui satisfont à, pour tout $n \in N^*$:

$$supp(\gamma_n) = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right], \qquad \int_\mathbb{R} \gamma_n(x)\,dx = 1.$$

On a alors au sens des distributions :

$$\gamma_n \rightharpoonup \delta_0 dans \mathfrak{D}'(\mathbb{R}),$$

i.e. pour toute fonction

$$\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}) : \lim_{n\to\infty} \int_\mathbb{R} \gamma_n(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \in \mathbb{R}.$$

2.7 La Convergence dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$

Définition 2.7.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, T une distributions sur Ω et*

$(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de distributions sur Ω. On dit que T_j converge vers T quand $j \to +\infty$ au sens des distributions si et seulement si

$$\forall\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \quad \langle T_j, \varphi\rangle \underset{j\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \langle T, \varphi\rangle.$$

Proposition 2.7.1 *Si elle existe, la limite T de la suite T_j est également une fonctionnelle linéaire et continue sur $\mathfrak{D}(\Omega)$, i.e. T définit une distribution.*

Preuve. [5]. ■

Principe de bornitude uniforme

Théorème 2.7.1 *[4] Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $K \subset \Omega$ compact. Soit une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ de distributions sur Ω telle que la suite $\langle T_n, \phi\rangle$ est convergente pour tout $\phi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. Alors il existe un entier $p \geq 0$ et $C > 0$ tels que :*

$$\boxed{|\langle T_n, \phi\rangle| \leq C \max_{|\alpha|\leq p} \sup_{x\in k} |\partial^\alpha \phi(x)|}$$

pour tout $n \geq 1$ et toute fonction test ϕ.

• Nous ne donnerons pas la preuve de ce résultat, qui est une variante du théorème de Banach-Steinhaus -également basée sur le théorème de Baire.

Continuité séquentielle du crochet de dualité

Proposition 2.7.2 *[4] Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, une suite $(T_n)_{n\geq 1}$ de distributions sur Ω, et une suite$(\phi_n)_{n\geq 1}$de fonctions test appartenant à $\mathfrak{D}(\Omega)$.*

Supposons que :

$$T_n \to T \quad \text{dans } \mathfrak{D}'(\Omega) \text{ lorsque } n \to \infty, \text{ et } \phi_n \to \phi \quad \text{dans } \mathfrak{D}(\Omega) \text{ lorsque } n \to \infty.$$

$$Alors: \ \langle T_n, \phi_n \rangle \to \langle T, \phi \rangle \ \ lorsquen \to \infty.$$

Démonstration.

$$Comme\ \phi_n \to \phi\ dans\ \mathfrak{D}(\ \Omega)\ ,$$

$$il\ existe\ K \subset \Omega\ compact\ telque\ supp(\ \phi_n) \subset K\ pour\ tout\ n \geq 1.$$

D'aprés le principe de bornitude uniforme, il existe un entier $p \geq 0$ et une constante $C > 0$ tels que :

$$|\langle\ T_n, \psi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in k} |\partial^{\alpha} \psi\,(x)|$$

$$pour\ tout\ n \geq 1\ et\ pour\ toute\ fonction\ test.$$

$$Appliquant\ cela\ à\ \psi = \phi_n - \phi, on\ trouve\ que:$$

$$|\langle\ T_n, \phi_n - \phi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq p} \sup_{x \in k} |\partial^{\alpha}\,(\phi_n - \phi)\,(x)| \to 0 \quad lorsque\ n \to \infty,$$

puisque, par hypothèse sur la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$,

$$\partial^{\alpha} \phi_n \to \partial^{\alpha} \phi \text{ uniformément sur} K \text{ pour } n \to \infty.$$

$$Alors: \quad \langle T_n, \phi_n \rangle - \langle T, \phi \rangle = \ \langle T_n, \phi_n - \phi \rangle + \langle T_n - T, \phi \rangle\,.$$

On vient de voir que le premier terme au membre de droite converge vers 0 lorsque $n \to \infty$, quant au second, il converge également vers 0 puisque $T_n \to T$ dans $\mathfrak{D}'(\ \Omega)$. ∎

2.8 Régularité de la convolution $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})\star\mathfrak{D}'(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$

On a défini au le produit de convolution d'une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$ par une fonction de classe C^{∞} à support compact.Cette définition s'étend sans difficulté au cas du produit de convolution d'une distribution par une fonction de classe C^{∞} à support compact.

Fonctions plateaux

Lemme 2.8.1 *Soient Ω ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ et K compact inclus dans Ω. Il existe une fonction ϕ de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ vérifiant $0 \leq \phi \leq 1$, supp(ϕ) compact $\subset k$, et $\phi = 1$ sur un voisinage de K.*

Définition 2.8.1 *Pour toute distribution $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$ et toute fonction test $\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$, on définit*

$$T \star \phi\,(x) = \langle T, \phi\,(x - .)\rangle = \left\langle T, (\tau_x) * \tilde{\phi}\right\rangle$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, où on a noté $\tilde{\phi}$ la fonction définie par :

$$\tilde{\phi}(x) = (-x)$$

et où τ_x désigne la translation de vecteur

$$x : \tau_x : y \to \tau_x(y) = y + x,$$

c'est- à-dire que:

$$(\tau_x) * f(y) = f \circ \tau_{-x} = f\,(x - y)\,,\ pourtoutx, y \in \mathbb{R}^n.$$

Majoration du support

Proposition 2.8.1 *pour toute fonction test ϕ on a :*

$$supp(\phi) \cap supp(T) = \oslash impliqueque\,\langle T, \phi\rangle = 0.$$

Preuve. [4]. ■

Proposition 2.8.2 *[4] Pour toute distribution $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$ et toute fonction test $\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})$, on a :*

$$supp(T \star \phi) \subset supp(T) + supp(\phi).$$

Démonstration.

$$Si\ x \in \mathbb{R}^n \setminus (supp(T) + supp(\phi)),$$

$$alors:\ \ supp(\phi(x - .)) = \{x\} - supp(\phi),$$

$$donc: supp(\phi(x - .)) \cap supp(T) = \varnothing.$$

D'aprés proposition (2.8.1) ceci entraîne que :

$$T \star \phi(x) = \langle T, \phi\,(x - .)\rangle = 0.$$

$$Par\ conséquent,\ T \star \phi = 0\ sur\ \text{l'ouvert}\ \mathbb{R}^n \setminus (supp(T) + supp(\phi)).$$

Ce qui montre que cet ouvert est inclus dans le complémentaire du support de $T \star \phi$:

$$\mathbb{R}^n \setminus (supp(T) + supp(\phi)) \subset \mathbb{R}^n \setminus (supp\,(T \star \phi)).$$

■

On en déduit l'inclusion annoncée par passage au complémentaire.

Proposition 2.8.3 *[4] Pour toute distribution $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R}^\mathbf{n})$ et toute fonction test $\phi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^\mathbf{n})$, le produit de convolution de la distribution T par la fonction test ϕ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^\mathbf{n}$, et on a :*

$$\boxed{\partial_x^\alpha\,(T \star \phi) = (\partial_x^\alpha T\ ) \star \phi = T \star \partial_x^\alpha \phi.}$$

Démonstration. d'une part:

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha T\ ) \star \phi\,(x) &= \langle \partial^\alpha T\ , \phi\,(x - .)\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|}\,\langle T\ , \partial^\alpha\,(\phi\,(x - .))\rangle \\ &= \langle T\ , (\partial^\alpha \phi)\,(x - .)\rangle \\ &= T \star \partial^\alpha \phi\,(x)\end{aligned}$$

$$puisque,\ (-1)^{|\alpha|}\,\partial_y^\alpha\,(\phi\,(x - y)) = (\partial^\alpha \phi)\,(x - y)\,.$$

D'autre part, soit $x_0 \in \mathbb{R}^\mathbf{n}$ et $\chi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^\mathbf{n})$ fonction plateau telleque $\chi = 1$ *sur* $B(x_0, 1)$.

■

Lemme 2.8.2 *[4] La fonction de classe C^{∞} $(x,y) \to \chi(x)\phi(x-y)$ est à support dans $supp(\chi) \times (supp(\chi) + supp(\phi))$.*

On a la fonction $x \to \langle T\ , \chi(x)\phi\,(x - .)\rangle$ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$ et

$$\partial^{\alpha}\left\langle T\ , \chi(x)\phi\,(x-.)\right\rangle = \left\langle T\ , \partial_{x}^{\alpha}\left(\chi(x)\phi\,(x-.)\right)\right\rangle . \ Sur\ B(x_0,1),$$

cette fonction coïncide avec $T\star\phi$ ce qui montre que $T\star\phi$ est de classe C^{∞} sur $B(x_0,1)$ et que, pour tout $x\in B(x_0,1)$, l'on a :

$$\begin{aligned} T\ \star\partial^{\alpha}\phi\,(x) &= \left\langle T\ , \left(\partial^{\alpha}\phi\right)(x-.)\right\rangle \\ &= \left\langle T\ , \partial_{x}^{\alpha}\left(\phi\,(x-.)\right)\right\rangle \\ &= \partial^{\alpha}\left\langle T\ , \phi\,(x-.)\right\rangle \\ &= \partial^{\alpha}\left(T\ \star\phi\right). \end{aligned}$$

On conclut en observant que ceci vaut pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

Chapitre 3

Densité de $\mathfrak{D}(\Omega)$

3.1 Densité $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $\varepsilon(\Omega)$

Théorème 3.1.1 *[6] L'application injective :*

$$Id : \mathfrak{D}(\Omega) \to \varepsilon(\Omega) \text{ est continue.}$$

Preuve. Considérons (K_i) une famille exhaustive de sous-ensembles compacts de Ω.

Par définition, l'injection $\mathfrak{D}_{K_i}(\Omega) \hookrightarrow \varepsilon(\Omega)$ est continue.

Il s'ensuit la continuité de Id car $\mathfrak{D}(\Omega) = \underset{i}{\cup} \mathfrak{D}_{K_i}(\Omega)$. ■

Comme conséquence à ce résultat, tout sous-ensemble borné de $\mathfrak{D}(\Omega)$ est un sous-ensemble borné de l'espace $\varepsilon(\Omega)$. De plus on a la théorème suivente:

Théorème 3.1.2 *[6] L'ensemble $\mathfrak{D}(\Omega)$ est un sous-espace dense dans $\varepsilon(\Omega)$.*

Preuve. Soit (K_i) une famille exhaustive de sous-ensembles compacts de Ω. Il existe une famille des fonctions de $\mathfrak{D}(\Omega)$, notée (β_i), telle que $\beta_i \equiv 1$ dans chaque voisinage de K_i. Si $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, posons $\varphi_i = \beta_i \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$. On vérifie, aussitôt, que $\varphi_i \to \varphi$ dans $\mathfrak{D}(\Omega)$. ■

Introduction

Densité $C_c(\Omega)$ dans $L_p(\Omega)$

Théorème 3.1.3 *[4] pour tout ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et tout $1 \leq p < \infty$ (mais non pour $p = \infty$), l'ensemble $C_c(\Omega)$ est dense dans $L_p(\Omega)$.*

En d'autres mots, *pour toute* fonction $f \in L_p(\Omega)$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\textit{il existe } g \in C_c(\Omega) \textit{ telle que } \|g - f\|_p < \varepsilon,$$

ou encore, il existe une suite $\{f_n\}_n \subseteq C_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ en $\|.\|_p$.

Preuve.

$$\textit{Puisque } E(\Omega) \textit{ est dense dans } L_p,$$

$$\text{il suffit de montrer que pour toute fonctions} \in E(\Omega) \text{ et } \varepsilon > 0$$

$$\text{il existe } g \in C_c(\Omega, C) \ t.q. \ \|g - s\|_p < \varepsilon.$$

Puisque s est étagée elle est bornée, et (par définition de $E(\Omega)$) $\mu(\{x : s(x) \neq 0\}) < \infty$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Lusin :

$$\textit{il existe } g \in C_c(\Omega, C) \textit{ telle que } \|g\|_\infty \leq \|s\|_\infty \textit{ et}$$

$$\mu(\{x : g(x) \neq s(x)\}) < \left(\frac{\varepsilon}{2\|s\|_\infty}\right)^p$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int |g - s|^p \, d\mu &= \int_{\{x:s(x)\neq g(x)\}} |g - s|^p \, d\mu \\ &\leq \mu(\{x : s(x) \neq g(x)\}) \cdot \|g - s\|_\infty^p \\ &< \left(\tfrac{\varepsilon}{2\|s\|_\infty}\right)^p (\|g\|_\infty + \|s\|_\infty)^p \\ &= \varepsilon^p.\end{aligned}$$

Donc en effet, $\|g - s\|_p < \varepsilon$ et le théorème est démontré.

Pour voir les limites de ce résultat, considérons un ouvert non vide quelconque $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, et fixons $x \in \Omega$.

Soit $r > 0$ assez petit pour que $B(x, 2r) \subseteq \Omega$, et posons $f = 1_{B(x,r)}$.

Il est facile à voir que $f \in L_p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

Nous prétendons que pour toute fonction continue

$$g : \Omega \to C \textit{ nous avons } \|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2}.$$

En effet, soit y $\in \Omega$ tel que $d(x, y) = r$ (par exemple $y = x + (r, 0, ..., 0)$).
Supposons d'abord que $|g(y)| < \frac{1}{2}$, et posons

$$U = \{z \in \Omega : |g(z)| < \frac{1}{2}\}.$$

Par continuité de g, $U \cap B(x, r)$ est un ouvert non vide dans lequel $f = 1$

$$\textit{et donc } |f - g| > \frac{1}{2}, \text{ d'où } \|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2}.$$

L'autre possibilité est que

$$|g(y)| \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Pour chaque n posons : } V_n = \{z \in : |g(z)| > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\}.$$

Alors encore par continuité de g, $V_n \setminus \overline{B}\ (x, r)$ est un ouvert non vide sur lequel $f = 0$

$$\textit{et donc } |f - g| > \frac{1}{2} - \frac{1}{n}.$$

Nous obtenons que

$$\|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \textit{ pour tout } n,$$

$$\textit{donc } \|f - g\|_\infty \geq \frac{1}{2}.$$

En particulier, $C_c(\Omega)$ n'est jamais dense dans $L^\infty(\Omega)$ (sauf si $\Omega = \varnothing$, que l'on exclut de toute façon). ■

3.2 Densité de $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $C_c(\mathbb{R}^n)$

Commutativité de la convolution

Proposition 3.2.1 *Soient deux fonctions f et g mesurables sur $\mathbb{R}^n$ et convolables .Alors,*

$$f \star g(x) = g \star f(x) p.p. en x \in \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. [4]. ∎

Majoration du support de f⋆g

Proposition 3.2.2 *Soient f et g deux fonctions mesurables définies p.p. sur $\mathbb{R}^n$ et convolables. Alors*

$$supp(f \star g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)},$$

avec la notation $A + B = \{a + b; a \in A \text{ et } b \in B\}$.

Démonstration. [4]. ∎

Théorème 3.2.1 *[4] Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ et $(\zeta_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ suite régularisante. Alors,*

$$\zeta_\varepsilon \star f \in D(\mathbb{R}^n) \text{ et } \zeta_\varepsilon \star f \to f \text{ uniformément sur } \mathbb{R}^n \text{ lorsque } \varepsilon \to 0^+.$$

Démonstration. Supposons que $supp(f) \subset B(0, R)$. Alors,

$$supp(\zeta_\varepsilon \star f) \subset B(0, R) + B(0, r_\varepsilon) \subset B(0, R + r_\varepsilon) \text{ pour tout } \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[,$$

(daprés la Proposition 3.2.2). D'autre part, d'aprés la Proposition 2.6.1; la fonction

$$\zeta_\varepsilon \star f \in C^\infty(\Omega) \text{ pour tout } \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

Enfin, en utilisant la commutativité du produit de convolution, on a

$$\begin{aligned} \zeta_\varepsilon \star f\ (x) - f\ (x) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \zeta_\varepsilon (y) f (x - y) dy - f (x) \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \zeta_\varepsilon (y) (f (x - y) - f (x)) dy \end{aligned}$$

$$car : \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_\varepsilon (y) dy = 1.$$

Par conséquent, comme $\zeta_\varepsilon \geq 0$ est à support dans $\overline{B(0, r_\varepsilon)}$

$$\begin{aligned}
|\zeta_\varepsilon \star f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_\varepsilon(y) |f(x-y) - f(x)| \, dy \\
&\leq \sup_{|y| \leq r_\varepsilon} |f(x-y) - f(x)| \int_{B(0,r_\varepsilon)} \zeta_\varepsilon(y) \, dy \\
&= \sup_{|y| \leq r_\varepsilon} |f(x-y) - f(x)| \, .
\end{aligned}$$

Or f est continue à support compact, et donc uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$ .Par conséquent, comme

$$r_\varepsilon \to 0 \; lorsque \; \varepsilon \to 0^+, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^n \;\; , \; |y| \leq r_\varepsilon} |f(x-y) - f(x)| \to 0 \; lorsque \; \varepsilon \to 0^+.$$

On en déduit alors que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\, \zeta_\varepsilon \star f(x) - f(x)| \to 0 \; lorsque \; \varepsilon \to 0^+.$$

■

3.3 Densité $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $L^P(\Omega)$

• Notation : ρ_n désigne une suite régularisante.

Théorème 3.3.1 *Soit $f \in L^P(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors $\rho_n * f \longrightarrow f$ dans $L^P(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. [2] . ■

Corollaire 3.3.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque. Alors$\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $L^P(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration.

$$Soient \; f \in L^P(\Omega), \; \varepsilon > 0 \; et \; f_1 \in C_c(\Omega) \; telque \; \|f - f_1\|_{L^P(\Omega)} < \varepsilon.$$

On considére la fonction $\overline{f_1}$ définit par :

$$\overline{f_1}(x) = \begin{cases} f_1(x) & si \; x \in \Omega \\ 0 & si \;\; x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

de sorte que $\overline{f_1} \in L^P(\mathbb{R}^n)$ et théorème (3.2.1) :

$$\left\|\rho_n \star \overline{f_1} - \overline{f_1}\right\|_{L^P(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0.$$

D'autre part

$$supp(\rho_n * \overline{f_1}) \subset B\left(0, \frac{1}{n}\right) + suppf_1 \subset \Omega \ pour \ n \ assez \ grand.$$

$$Soit \ U_n = (\rho_n * \overline{f_1})_{|\Omega}. \ Alors, \ pour \ n \ assez \ grand,$$

$$U_n \in C_c(\Omega) \ et \ de \ plus \ \ \|U_n - f_1\|_{L^P(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

$$Donc, \ pour \ n \ assez \ grand, \ \ \|U_n - f\|_{L^P(\Omega)} < 2\varepsilon.$$

■

3.4 Densité $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $L^P(\mathbb{R}^n)$

Lemme 3.4.1 *Soient $A \subset \mathbb{R}^N$ compact et $B \subset \mathbb{R}^N$ fermé. Alors $A + B$ est fermé dans $\mathbb{R}^N$.*

Démonstration. [4]. ■

Théorème 3.4.1 *Soit $f \in L^P(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors :*
a) pour toute suite régularisante $(\zeta_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$, on a

$$\|f - \zeta_\varepsilon \star f\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \to 0 \ lorsque \ \ \varepsilon \to 0^+ \quad ;$$

b) pour tout $\eta > 0$, il existe une fonction $f_\eta \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\|f - f_{\ \eta}\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \leq \eta.$$

Comme nous l'avons rappelé plus haut, l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour $1 \leq p < \infty$. Mais pour $p = \infty$, ce n'est pas le cas : $C_c(\mathbb{R}^N)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (puisque la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue).

Donc, en particulier, $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^N)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration.

$$\textit{Par densité de } C_c(\mathbb{R}^N) \textit{ dans } L^p(\mathbb{R}^N),$$

$$\textit{étant donné } \eta > 0, \textit{ il existe } \phi \in C_c(\mathbb{R}^N)$$

$$\textit{telque } \|f-\phi\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{2}\eta\ .$$

$$\textit{Puis, si } (\zeta_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} \textit{ est une suite régularisante}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\zeta_\varepsilon \star \phi(x) - \phi(x)| \to 0 \textit{ lorsque } \varepsilon \to 0^+.$$

Or $supp(\phi)$ est compact;

$$\textit{soit donc } R > 0 \textit{ telque } supp(\phi) \subset B(0,R)$$

de sorte que

$$supp(\zeta_\varepsilon \star \phi) \subset B(0,R) + B(0,r_\varepsilon) = B(0,R+r_\varepsilon),$$

d'aprés la Proposition 3.2.2. et le Lemme 3.4.1. Alors, grâce à l'inégalité de Holder. (théoréme (1.5.1).[4]).

$$\|\zeta_\varepsilon \star \phi - \phi\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\zeta_\varepsilon \star \phi(x) - \phi(x)| \left|B(0,R+\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} r_{\varepsilon_0})\right|^{\frac{1}{p}} \to 0$$

$$\textit{lorsque } \varepsilon \to 0^+.$$

Pour démontrer le b), on choisit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que

$$\|\zeta_\varepsilon \star \phi - \phi\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} < \frac{1}{2}\eta\ ,$$

et on pose $f_n = \zeta_\varepsilon \star \phi$:

$$\textit{ainsi } \|f-f_n\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \ \leq\ \|f-\phi\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \ +\ \|\phi - \zeta_\varepsilon \star \phi\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \ < \eta.$$

D'autre part $\zeta_\varepsilon \star \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ est à support dans $B(0,R+\sup_{0<\varepsilon<\varepsilon_0} r_{\varepsilon_0})$, ce qui établit le b). Pour démontrer le a), on écrit que

$$\begin{aligned}
\|f - f\star\zeta_\varepsilon\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} &\leq \|f-\phi\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} + \|\phi - \zeta_\varepsilon\star\phi\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} + \|\zeta_\varepsilon\star\phi - \zeta_\varepsilon\star f\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq \left(1 + \|\zeta_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\right)\|f-\phi\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} + \|\phi-\zeta_\varepsilon\star\phi\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \\
&= \eta + \|\phi - \zeta_\varepsilon\star\phi\|_{L^P(\mathbb{R}^N)}\ .
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Hausdor -Young (Théorème (1.3.10))[4].

Or on a vu que

$$\|\phi - \zeta_\varepsilon \star \phi\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \to 0, \ lorsque \ \varepsilon \to 0^+.$$

Prenant la limite supérieure de chaque membre de cette inégalité pour $\varepsilon \to 0^+$, on trouve que

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0^+}} \ \|f - f \star \zeta_\varepsilon\|_{L^P(\mathbb{R}^N)} \leq \eta \ .$$

Et comme ceci vaut pour tout $\eta > 0$, il s'ensuit que le membre de gauche de cette inégalité, qui est un nombre indépendant de η, est nul, ce qui établit le a). ∎

3.5 Densité de $\mathfrak{D}(\Omega)$ dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$

On sait déjà que la distribution δ_0 (masse de Dirac) est limite de la suite de fonctions (γ_k) de $\mathfrak{D}(\Omega)$.

On commence par le cas où $\Omega = \mathbb{R}$ tout entier (ou $\mathbb{R}^n$).

Proposition 3.5.1 *[4] Toute distribution $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ est limite dans $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$ d'une suite des foncions de $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$. On dit que $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$.*

Preuve. (Par régularisation et troncature) . On se donne une distribution $T \in \mathfrak{D}'(\mathbb{R})$.

Il s'agit de trouver une suite (α_k) de $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$ telle que $\alpha_k \rightharpoonup T$ dans $\mathfrak{D}'(\mathbb{R})$, i.e. telle que pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle T - \alpha_k, \varphi \rangle \to 0 \ quand \ k \to \infty$$

(vois paragraphe (1.3.5)[4]). On a $\gamma_k * T$ est une fonction $C^\infty(\mathbb{R})$.

On restreint son support : soit $\alpha_k = \lambda_k (\gamma_k * T)$ où la fonction $\lambda_k \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ vaut 1 sur $[-k, +k]$ et 0 sur $[-k-1, k+1]$ (une telle fonction existe, (voir proposition (2.6.2).

Il est immédiat que $\alpha_k \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$.

Enfin, pour φ donné dans $\mathfrak{D}(\mathbb{R})$, on a, en prenant k assez grand pour que

$$supp\,(\varphi) \subset [-k, k]\,,$$

et donc

$$\begin{aligned}
\lambda_k \varphi = \varphi : \langle \lambda_k (\gamma_k * T), \varphi \rangle &= \langle \gamma_k * T, \lambda_k \varphi \rangle \\
&= \langle \gamma_k * T, \varphi \rangle \\
&= \langle T_y, \langle \gamma_k (x), \varphi (x+y) \rangle \rangle \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \langle T_y, \langle (\delta_0)_x \ , \varphi (x+y) \rangle \rangle \\
&= \langle T_y, \varphi (y) \rangle \\
&= \langle T, \varphi \rangle .
\end{aligned}$$

Ce résultat étant vrai pour tout $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathbb{R})$ on a bien

$$\alpha_k = \lambda_k (\gamma_k * T) \rightharpoonup T \text{ } quand \text{ } k \to \infty.$$

■

Dans le cas où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}$ quelconque, le résultat n'est pas modifié (la suite proposition):

Proposition 3.5.2 *Toute distribution $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ est limite dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$ d'une suite de S fonctions de $\mathfrak{D}(\Omega)$. On dit que $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$.*

Preuve. On reprend la démonstration précédente, mais on construit maintenant une suite de fonctions λ_k de $\mathfrak{D}(\Omega)$ qui vaut 1 sur compact K tel que $d(K, \mathbb{R} - \Omega) \leq \frac{1}{k}$ (distance maximale du bord de K au bord de Ω). Et une telle suite existe d'aprés la proposition (2.6.3). ■

3.6 Conclusion général

L'espace $\mathfrak{D}_k(\Omega)$ est le sous-espace vectoriel de $\varepsilon(\Omega)$ dont les éléments sont les fonctions dont le support, contenu dans K, est une partie compacte de Ω ces éléments appellent les fonctions test.

Cette terminologie "fonction-test " vient du fait que ce sera contre ces êtres que seront testées ultérieurement les distributions.

Ces fonctions seront utilisées dans les techniques de convolution et de régularisation de fonctions et de distributions.

Les fonctions test jouent, en Analyse, plusieurs rôles distincts, également importants :

1- Elles servent à localiser les fonctions sans en dégrader les hypothèses de régularité*.

(* Sauf l'analyticité, car, d'aprés le principe des zéros isolés, il n'existe pas de fonction analytique à support compact dans un ouvert de $\mathbb{C}$ qui ne soit pas identiquement nulle).

2- Elles servent à approcher les fonctions localement integrables par des fonctions de classe C^{∞}.

3- Elles sont des fonctions par un procédé de dualité que l'on va étendre le calcul diffèrentiel des fonctions aux distributions, qui sont des objets plus généraux que les fonctions.

L'espace vectoriel de ces fonctions test sur Ω, dans la notation de L. Schwartz, est $\mathfrak{D}(\Omega)$ qui n'est pas réduit à la fonction nulle, et que c'est un espace de dimension infinie et, il est un espace topologique complet, non métrisableet et est un espace pour Fréchet, en plus est un espace de Montel. Il existe plusieurs méthodes pour construire des fonctions test vérifiant quelques propriétés; quelques-unes sont présentées de manière très synthétique dans [H örmander, chapitre 1]. $\mathfrak{D}(\Omega)$ est aussi appelé l'espace des fonctions infiniments lisses à support compact.

La dual topologie de cet espace est $\mathfrak{D}'(\Omega)$ c'est l'espace des distributions, qu'est l'espace des formes linéaires continues sur $\mathfrak{D}(\Omega)$.

$\mathfrak{D}(\Omega)$ equipé d'une topologie appropriée que l'on précisa, jouera un rôle important dans la d'efinition des distributions sur Ω. En plus $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans L^p (pour $1 \leq p < \infty$)

Bibliographie

[1] **Ayman Moussa** : Analyse réelle : Rappels de Cours – Distributions.Master de Mathéma-tiques- 2014/2015.

[2] **Brézis.H** : Analyse fonctionnelle théorie et applications . Dunod Paris - 2005.

[3] **Cédric Villani** : Analyse II.Cours de deuxième année -2003/2004.

[4] **Golse.F** : Distributions : Analyse de Fourier, équations aux dérivées partielles -Octobre 2012.

[5] **Gilles Leborgne**: Introduction à la théorie des Distributions - 8 Mars 2006.

[6] **Hitta Amara**: Espaces vectoriels topologiques , Distributions et EDP. Cours Master - 2008/2009 .

[7] **Jean-Bernard Zuber** : Mathématiques pour physiciens - 2013/2014.

[8] **Jonathan Rochat** : Les espaces de Sobolev.Dernière modification le 16 décembre 2009.

[9] **Jean Schmets** : Analyse Mathematique Introduction aux espaces fonction-nels.2004/2005.

[10] **Mrabt.M et Abd Rachid Sadi** : Création d'une topologie sur espace des fonctions tests.Mémoire de magister -2003/2004.

[11] **Rekil Melouka** : Calcul fonctionnel pour les opérateurs h-admissible et applica-tions.Mémoire de magister-2011/2012.

[12] **Richard Zekri** : Cours de topologie. Master 1. Année 2010/2011.9 septembre 2010.