N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي
Université Echahid Hamma Lakhdar - El-Oued

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Sur les Équations Intégrales Méthodes Analytiques De Résolution

Présenté par: Bellabaci Radhia
Rehouma Khaoula

Soutenu devant le jury composé de

El Mehdi Zaouche	MCB	Rapporteur	Univ. d'El Oued
Mouhammed Tayeb Meftah	MCB	Présidente	Univ. d'El Oued
Ibrahim Ben Ali	MCB	Examinatrice	Univ. Ouregla

Année universitaire 2016 – 2017

Remerciements

Après au nom de Dieu, toutes les salutations et les prières soient sur notre prophète.

On tient particulièrement à remercier notre Dieu pour son soutien.

Un grand merci à l'encadrement de docteur **" El-mehdi Zaouche"**, qui nous pousse à terminer ce travail.

Nous ne pouvons manquer de remercier chaleureusement notre vertueux docteur **Mohammed Tayeb Meftah** sous leur meilleurs auspices du début jusqu'a la fin du parcours, et de faire montre de générosité d'esprit. de nous avoir accordé du temps, d'efforts et sa parfaite connaissance malgré leurs obligations professionnelles, par ces mots en n'appréciant pas leur juste valeur, que Allah leur récompense pour ses bienfaits et lui donne la santé et du bien-être.

Ainsi qu'à les professeurs" **M Said Touati Brahim, Brahim Ben Ali**" à l'université d'**El-Oued**, et des docteurs **Amara Guerfie** et **Ismail Chihi** à L'université de Ouregla, qui ont aide pour donner un bon travail.

Nous tenons a remercie tous les étudiants de notre promotion 2016/2017.

Table des matières

Introduction générale

En 1887, V. Volterra (1860-1940) a établi la méthode de résolution des équations intégrales par les noyaux itérés. En outre, il a étendu la théorie des équations intégrales.

Fredholm (1866-1927) a étudie la méthode pour résoudre l'équation intégrale de deuxième espèce.

Les équations intégrales apparaissent naturellement dans plusieurs phénomènes scientifiques en mathématiques et physique, comme les équations différentielles ordinaires (EDO) et certaines équations aux dérivées partielles (EDP), la diffusion et les problèmes de contacts ....etc.

Le but de ce mémoire est de présenter quelques méthodes analytiques de résolution des équations intégrales. Nous devisons notre travail en trois chapitre.

Dans le premier chapitre, nous rappelons des notions de l'analyse fonctionnelle, des espaces fonctionnels nécessaires, et nous présentons des notions sur les opérateurs et ses propriétés.

Dans le deuxième chapitre, nous intéressons à deux types principaux des équations intégrales, de Fredholm et ceux de Volterra et leurs classifications par linéarité (linéaire et non linéaire), ainsi qu'une liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra où l'on associe un exemple.

Dans le dernier chapitre, on a commencé à donner la théorie d'existence et d'unicité des solutions de ces équations intégrales. Ensuite, quelques méthodes analytiques de résolution dont les méthodes de résolution exactes, la transformation de Laplace, de Fourier et de Melin.

Chapitre 1

Preliminaires

1.1 Espaces fonctionnels

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *(Espace vectoriel)*

Soit E un ensemble non vide, on définit sur E deux opérations: opération intèrne notée par$(+)$, opération extèrne notée par$(\cdot)$.

E est un espace vectoriel sur le corps $\Bbbk$:

1. (E,+) st un groupe abelian.

2. $\forall x, y \in E, \forall\ \alpha, \beta \in \Bbbk$:

i) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$.

ii) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

iii) $\alpha(\beta.x) = (\alpha\beta)..x$.

vi) $1.x = x$.

Définition 1.1.2 *(Espace vectoriel normé)*

Soit E un espace vectoriel sur les corps $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, vérifiant pour tout x, y dans E et α dans $\Bbbk$:

i) $\|x\| = 0$ si et seulemnet si $x = 0$.

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$ (homogènéité).

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$(intégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.1 *1.Soit $C([a,b],\mathbb{R})$ l'espase vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. Pour tout $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, on pose:*

$$\|f\|_\infty = \sup |f(x)| \, .$$

L'application $\|.\|_\infty$ est une norme sur $C([a,b],\mathbb{R})$.

2.Soit $C([0,+\infty[\,,\mathbb{R})$ l'espase vectoriel des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ à valeurs réelles. Pour tout $f \in C([0,+\infty[\,,\mathbb{R})$ on a:

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,+\infty[} \{|f(x)| \exp(-Lx)\}$$

est une norme sur $C([0,+\infty[\,,\mathbb{R})$.

En effet:

i) $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0.$ $[\Rightarrow]$ $\quad \|f\| = 0$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} \{|f(x)| \exp(-Lx)\} = 0$

$\Rightarrow |f(x)| \exp(-Lx) = 0,$

on a: $\exp(-Lx) \neq 0$ alors, $|f(x)| = 0,$

donc $f(x) = 0$ (car $|.|$est une norme).

$[\Leftarrow]$ $f = 0$

$\Rightarrow \sup\limits_{x\in[0,+\infty[} \{|0| \exp(-Lx)\} = 0,$

donc, $\|f\| = 0.$

ii) $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\| \, .$

$$\begin{aligned} \|\alpha f\| &= \sup_{x\in[0,+\infty[} \{|\alpha f(x)| \exp(-Lx)\} \\ &= \sup_{x\in[0,+\infty[} \{|\alpha|\, |f(x)| \exp(-Lx)\} \\ &= |\alpha| \sup_{x\in[0,+\infty[} \{|f(x)| \exp(-Lx)\} \\ &= |\alpha|\, \|f\| . \end{aligned}$$

iii) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

$$\begin{aligned} \|f+g\| &= \sup_{x\in[0,+\infty[} \{|(f+g)(x)| \exp(-Lx)\} \\ &= \sup_{x\in[0,+\infty[} \{|f(x)+g(x)| \exp(-Lx)\} \\ &\leq \sup_{x\in[0,+\infty[} \{(|f(x)|+|g(x)|) \exp(-Lx)\} \\ &\leq \sup_{x\in[0,+\infty[} \{|f(x)| \exp(-Lx)\} + \sup_{x\in[0,+\infty[} \{|g(x)| \exp(-Lx)\} \\ &\leq \|f\| + \|g\| . \end{aligned}$$

Définition 1.1.3 *(Suite de Cauchy)*

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy d'un espace vectoriel normé si elle vérifie :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \; et \; m \geq n_0 : \; \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Définition 1.1.4 *(Espace métrique complet)*

On dit que E est un espace métrique complet si toute suite Cauchy de E converge dans E.

Définition 1.1.5 *(Espace de Banach)*

Tout espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banac.
Par example $(C\ ([a,b], \mathbb{R}\ ), \|.\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Définition 1.1.6 *(Produit scalaire)*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, notée $<.,.>$ vérifie pour tout x, y, z dans E et α, β dans $\mathbb{R}$:

i) $< \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, y > + \beta < y, z >$.

ii) $< x, y >=< y, x >$.

iii) $< x, x >= 0$ implique $x = 0$.

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien ou un espace préhilbertien.

Un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante:

$$\|x\|_E = \sqrt{< x, x >}.$$

Définition 1.1.7 *(Espace de Hilbert)*

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Définition 1.1.8 *(Espace $L(E, F)$)*

On note par $L(E, F)$ à l'ensemble des fonctions linéaires de E dans F.

Remarque 1.1.1 *Si $E = F$, on note:*

$$L(E, E) = L(E).$$

Définition 1.1.9 *(Fonction continue)*

Soit E un espace vectoriel normé. On dit que la fonction f est continue en $x \in E$ si: $\forall \varepsilon > 0, \exists\ \alpha > 0 : \|x - y\| < \alpha \ \Rightarrow \ \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

On dit que f est continue sur E si elle continue en tout point $x \in E$.

Définition 1.1.10 *(Espace $C[a, b]$)*

L'espace $C[a, b]$ est l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$.

Définition 1.1.11 *(Espace $\mathcal{L}(E,F)$)*

On note par $\mathcal{L}(E,F)$ à l'ensemble des fonctions linéaires continues de E dans F.

Remarque 1.1.2 *Si $E=F$, on pose:*

$$\mathcal{L}(E,E)=\mathcal{L}(E).$$

Définition 1.1.12 *(Fonction dérivable)*

Soient U un ouvert d'un espace vectoriel normé E, $a \in U$ et F un espace vectoriel normé. On dit que la fonction f de E dans F est différentiable en a s'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifie:

$$f(a+h)-f(a) = g(h)+o(h) \qquad \left(\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{\|h\|}=0\right).$$

On dit que f est différentiable sur U si elle dérivable en tout point $a \in U$.

Définition 1.1.13 *(Espace $C^k[a,b]$)*

L'espace $C^k\left[a,b\right]$ est l'espace des fonctions k fois continument dérivables sur $\left[a,b\right]$.

Définition 1.1.14 *(Fonction intégrable)*

On dit que f est intégrable sur I ssi $|f|$ est intégrable sur I, c'est-à-dire $\int_I |f| < +\infty$.

Définition 1.1.15 *(Espace $L^1(\Omega)$)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeur dans $\mathbb{R}$, on pose:

$$\|f\|_1=\int_\Omega |f(x)|\,dx.$$

Définition 1.1.16 *(Espace $L^p(\Omega)$)*

Soit $1\leq p<+\infty$, on pose:

$L^p(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R}, f \text{ mesurable: } |f(x)|^p\in L^1(\Omega)\}$ muni de la norme:

$$\|f\|_{L^p}=\|f\|_p=\left(\int_\Omega |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.1.2 Inégalités des auxiliaires

a) Inégalité de Hölder

Soient p et q deux exposants conjugues (i.e: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$) et $f \in L^p$, $g \in L^q$ alors:

$$f, g \in L^1 \text{et} \int |fg| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{1.1}$$

b) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour $p=q=2$, l'inégalité *(1.1) devient :*

$$\int |fg|\, dx \leq \left(\int |f|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |g|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2 Critère de Convergence

1.2.1 Suites des fonctions

a) Convergence simple

On dit que la suite des fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente simplement vers f sur E si:

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : [n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

b) Convergence uniforme

On dit que la suite des fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente uniformément vers f sur E si:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N} : [n \geq N \Rightarrow |f_n(x)| < \varepsilon].$$

Proposition 1.2.1 *Si la suite des fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformement vers f, alors elle converge simplement vers f.*

1.2.2 Séries des fonctions

a) Convergence simple

On dit qu'une série des fonctions est convergente en $x_0 \in E$ si la série numérique $\sum_n U_n(x_0)$ est convergente.

On dit que la série des fonctions $\sum_n U_n$ est convergente sur E si elle convergente pour tout point x de E.

On dit que la série des fonctions est convergente simplement sur E si elle est convergente sur E.

b) Convergence uniforme

On dit que la série des fonctions $\sum_n U_n$ est convergente uniformément sur E si la suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément sur E i.e:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in E : \left[n \geq N \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k(x) \right| < \varepsilon \right].$$

c) Convergence absolue

On dit qu'une série des fonctions $\sum_n U_n$ est convegente absolument sur E si la série des fonctions $\sum_n |U_n|$ converge simplement sur E.

Proposition 1.2.2 *Si la série des fonctions $\sum_n U_n$ converge abolument, alors elle converge simplement.*

1.2.3 Intégrale

a) Convergence Absolue

Soit f une fonction localement intégrale sur un intervalle (a, b) (ouvert ou semi-ouvert borné ou non) de $\mathbb{R}$. On dit l'intégrale de f sur (a, b) est absolument convergente si:

$$\int_a^b |f(x)|\, dx \quad \text{est convergente.}$$

b) Convergence Uniforme

Soit $[a,\ b[$ un intervalle semi ouvert de $\mathbb{R}$, D un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ et soit $f:\ (t,x)\rightarrow f(t,x)$ une fonction définie sur $[a,b[\times D$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1) Si pour chaque valeur $x\in D$ l'intégrale $F(x)=\int\limits_a^b f(t,x)dt$ est convergente on dira que l'intégrale $\int\limits_a^b f(t)dt$ est convergente simplement sur D.

2) L'intégrale $\int\limits_a^b f(t)dt$ simplement convergente sur D sera dite uniformement convergente si pour chaque $\varepsilon>0$, il existe un réel $\beta(\varepsilon)$ (ingépendant de x) telle que:

$$\text{le sinégalites } \beta(\varepsilon)<u<\text{bentraîne}\left|\int\limits_b^a f(t)dt\right|<\varepsilon.$$

1.3 Notions sur les Opérateurs

1.3.1 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.3.1 *(Opérateur linéaire)*

Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur A défini sur X dans Y est dite linéaire s'il vérifie les conditions suivantes:

pour tout u,v dans X et α,β dans $\mathbb{R}$ on a:

i) $Au\in Y$.

ii) $A(\alpha u+\beta v)=\alpha Au\ +\beta Av$.

Définition 1.3.2 *(Opérateur borné)*

Un opérateur linéaire A défini sur X dans Y est dite borné s'il existe une constante positive C, telle que :

$$\|Au\|_Y\leq C\,\|u\|_X\,,\forall u\ \in X.$$

Soient X et Y deux espaces normés et $A:X\rightarrow Y$ un opérateur linéaire, les proprietés suivantes sont équivalentes:

i) l'opérateur A est continu sur X.

ii) l'opérateur A est continu au point 0_x.

iii) l'opérateur A est borné.

Définition 1.3.3 *(Opérateur intégrale linéaire)*

Un opérateur intégral linéaire A est un opérateur qui admet une formulation de la forme suivante :

$$(A\varphi)x = \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt,$$

la fonction k étant appelée noyau de l'opérateur A.

Si k est une fonction continue de $[a,b] \times [a,b]$, l'opéateur A est appelé opérateur intégral à noyau continu k.

Cet opérateur est continu, de la norme:

$$\|F\|_{L(C(\Omega),(\Omega))} = \max_{x\epsilon\Omega} \int_\Omega |k(x,t)|\, dt \ .$$

1.3.2 Opérateurs Compacts

Définition 1.3.4 *(Ensemble compact)*

Soit U un ensemble d'un espace normé X. U est dit compact, si de tout recouvrement de U par des ouverts de U, on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e :

$$\forall V_j, j \ \in \ J \text{ (ouverts)}, U \subset \underset{j\in J}{\cup} V_j, \exists V_{j(k)}, j(k) = 1, 2....n \text{ tel que } U \subset \overset{n}{\underset{k=1}{\cup}} V_j(k).$$

Définition 1.3.5 *(Ensemble relativement compact)*

Un ensemble S d'un espace normé X est dit relativement compact si sa fermeture est compacte, ou si et seulement si toute suite de S contient une sous-suite convergente.

Définition 1.3.6 *(Opérateur compact)*

Soient V et W deux espaces normés. Un opérateur linéaire $L : V \to W$ est dite compact si l'image de la boule unité B_V est relativement compact i.e: si l'ensemble

$$\overline{L(B_V)} = \left\{ \overline{L(\varphi)/ \|\varphi\| \leq 1} \right\}$$

est compact, ceci est équivalent à dire que pour toute suite bornée $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de V, on peut extraire de $L\ (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans W.

1.3.3 Opérateurs intégrales compacts dans $\mathbf{C}(\Omega)$

Soient Ω un ensemble fermé dans $\mathbb{R}^N$, soit l'opérateur défini par:

$$K : \varphi \in C(\Omega) \to K(\varphi) \in C(\Omega)$$

$$K(\varphi)(x) = \int_{\Omega} k(x,t)\varphi(t)dt$$

Supposons que la fonction $t \to k(x,t)$ est intégrable au sens de Riemann pour tout $x \in \Omega$ et on a les conditions suivantes:

$$\text{P1}: \lim_{h\to 0} w(h) = 0, \ \ avec \ \ w(h) = \sup_{x,z\in\Omega, \|x-z\|\leq h} \int_{\Omega} |k(x,y) - k(z,y)| \, dy$$

$$\text{P2} \ : \ \sup_{x\in\Omega} \int_{\Omega} |k(x,t)| \, dt < \infty,$$

alors l'opérateur est compact.

Preuve. La démonstration se fait facilement à l'aide du théorème d'Arzela-Ascoli, qui donne une condition pour qu'un sous ensemble S de $C(\Omega)$ soit relativement compact dans l'ensemble des applications continues $(C(\Omega), \|.\|_\infty)$.

Rappelons le théorème d'Arezela-Ascoli.

Théorème 1.3.1 *Soit $S \subseteq C(\Omega)$ avec $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un ensemble fermé borné. Supposons que l'ensemble S est uniformement bornée i.e:*

$$\sup_{\Psi\in S} \|\Psi\|_\infty < \infty,$$

et que l'ensemble S est équicontinu i.e:

$$\|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leq C_S(\varepsilon). \ Pour \|x-y\| \leq \varepsilon, \forall \Psi \in S \ \ avec \ C_S(\varepsilon) \to 0 \ quand \ \varepsilon \to 0,$$

dans ce cas l'ensemble S est relativement compact.

Preuve. voir [5] ■

Suite de la preuve du théorème (1.3.1). Utilisons P1: Si $t \to \varphi(t)$ est bornée intégrable alors $K\varphi(t)$ est continue avec:

$$|K\varphi(t) - K\varphi(t')| \leq W(\|t-t'\|) \, \|\varphi\|_\infty .$$

Utilisons P2, alors K borné avec:

$$\|K\| \max_{x\in\Omega} \int_{\Omega} |k(x,t)|\, dt.$$

Il reste de montrer que K est compact. Pour ce faire, considérons le sous-ensemble S tel que:

$$S = \{K\varphi \ / \ \varphi \in C(\Omega) \quad \text{et} \quad \|\varphi\|_\infty \leq 1\},$$

il est uinformément borné car:

$$\|K\varphi\|_\infty \leq \|K\| \|\varphi\|_\infty \leq \|K\|,$$

et comme S est un ensemble équicontinu, d'après (1.3.1) ainsi S est relativement compact. Ce qui montre que:

$$K : \varphi \in C(\Omega) \to C(\Omega) \text{ est compact.}$$

■

Propriétés des opérateurs compacts Soient X et Y deux espaces vectoriels, un opérateur $K : X \to Y$ est dit de rang fini si son image est de dimension finie. Le rang de K est la dimension de son image.On note: $rg(K) = \dim(\mathrm{Im}(k))$.

Lemme 1.3.1 *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés et $K : X \to Y$ un opérateur de rang fini alors K est un opérateur compact.*

Lemme 1.3.2 *Soient $K \in \mathcal{L}(X,Y)$ et $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Si K ou bien T est compact alors TK est un opérateur compact.*

Lemme 1.3.3 *Soient X un espace vectoriel normé et Y un espace de Banach et soient*

$K \in \mathcal{L}(X,Y)$, (K_n) une suite des opérateurs compacts dans $\mathcal{L}(X,Y)$. Supposons que $K_n \to K$ dans $\mathcal{L}(X,Y)$ i.e: $\|K_n - K\| \to 0$, alors K est un opérateur compact.

Preuve. On trouve la démonstration des lemmes précédents dans [4] ■

Opérateurs intégrales dans $\mathbf{L^2(a,b)}$

Théorème 1.3.2

Soient $X = Y = L^2(a,b)$ et K l'opérateur intégrale associé au noyau $K(x,t)$ sous des hypothèses:

$$M = \left(\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty, \tag{1.2}$$

que l'opérateur intégrale $K = L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ est borné. Le noyau $K(x,t)$ s'appelle noyau de Hilbert-Schmidt associé au noyau K i.e:

$$\|K\| = \left(\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dxdt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve.

Soit $\varphi \in L^2(a,b)$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a:

$$\|K\varphi\|_2^2 = \int_a^b \left| \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \right|^2 dx,$$

ce qui inplique que :

$$\|K\varphi\|_2^2 \leq \int_a^b \left[\int_a^b |k(x,t)|^2 \, dt \right] \left[\int_a^b |\varphi(t)|^2 \, dt \right] dx.$$

On voit donc que l'on a:

$$\|K\varphi\|_2^2 = M^2 \, \|\varphi\|_2^2$$

Ce qui prouve que $K\varphi \in L^2(a,b)$ et que:

$$\|K\| \leq M. \tag{1.3}$$

Maintenant, examinons la compacité de l'opérateur intégrale K pour les fonctions des noyaux quelconques, nous supposons qu' il y'a une suite des fonctions des noyaux $k_n(x,t)$ tels que:

i) La première condition $k_n : L^2(a,b) \to L^2(a,b)$ sont compacts.

ii) La deuxième condition

$$M_n = \left[\int_a^b \int_a^b |k(x,t) - k(x,t)|^2 \, dxdt \right]^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

En appliquant (*1.2*) et (*1.3*) nous obtenons:

$$\|K - k_n\| \leq M_n \to 0 \ \text{ quand } n \to \infty,$$

et d'après le lemme (1.3.3) on constate que K est compact. ■

Alternative de Fredholm: On suposons que X est un espace de Banach.

Théorème 1.3.3

Soit $K : X \to X$ un opérateur compact. Alors l'équation:

$$(\lambda - K)\varphi = f, \ \lambda \neq 0,$$

admet une solution unique $\varphi \in X$ si et seulement si l'équation homogène

$$(\lambda - K)\varphi = 0,$$

n'a que la solution triviale $\varphi = 0$.
Dans ce cas l'opérateur $(\lambda - K)$ est inversible et borné.

Définition 1.3.7 *(Opérateur contractant)*

Soient H est un espace de Hilbert et T un opérateur borné. L'opérateur T est dit opérateur contractant s'il existe une constante L telle que $0 < L < 1$ et

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \ \in \ H, \|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq L \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Définition 1.3.8 *(Point fixe)*

On dit que a est un point fixe de l'application f si : $f(a) = a$.

Théorème 1.3.4 *(Principe de contraction de Banach)*

Soit T un opérateur contractant dans un espace de Hilbert H, alors $T\varphi = \varphi$ admet une solution unique φ dans H. Cette solution est le point fixe de cet opérateur.

Chapitre 2

Classification des équations intégrales

2.1 Classification

Une équation intégrale peut être classé comme étant soit une équation intégrale linéaire ou bien comme une équation intégrale non linéaire.

Les équations intégrale les plus fréquaement utilisées sont les équations intégrale de Volterra et celles de Feredholm qui constituent donc les deux principales catégories.

2.1.1 Équation intégrale linéaires

La plupart des équations intégrales linéaires sont de la forme :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b(x)} k(x,t)\varphi(t)dt, \tag{2.1}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue, $k(x;t)$, $f(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions connues et λ un paramètre réel.

Définition 2.1.1 *(Équation intégrale de Volterra)*

Si $b(x) = x$ alors l'équation (*2.1*) est appelée équation intégrale de Volterra

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{x} k(x,t)\varphi(t)dt \ . \tag{2.2}$$

- Si $h(x) = 1$ alors (*2.2*) est appelée équation intégrale de Volterra de second espèce.
- Si $h(x) = 0$ alors (*2.2*) est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

Définition 2.1.2 *(Équation intégrale de Fredholm)*

Si $b(x) = b$ (constante) alors l'équation (*2.1*) est appelée équation intégrale de Fredholm

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \tag{2.3}$$

- Si $h(x) = 1$ alors (*2.3*) est appelée équation intégrale de Fredholm de second espèce.
- Si $h(x) = 0$ alors (*2.3*) est appelée équation intégrale de Fredholm de première espèce.

Remarque 2.1.1 • *Si $f(x) = 0$ l'équation (2.1) est dite homogène.*

- Si $f(x) \neq 0$ l'équation (*2.1*) est dite non homogène.

Définition 2.1.3 *(Équation intégrale de Wiener-Hopf)*

On appelle équation intégrale de Wiener-Hopf une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^\infty k(x-t)\varphi(t)dt \ = f(x).$$

Définition 2.1.4 *(Équation intégrale de Renwal)*

On appelle équation intégrale de Renwal une équation de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x-t)\varphi(t)dt \ = f(x).$$

Définition 2.1.5 *(Équation intégrale d'Abel)*

On appelle équation intégrale linéaire d'Abel toute équation de la forme

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt \ = f(x),$$

où α est une constante $0 < \alpha < 1$.

2.1.2 Équations intégrale non lineaires

La plupart des équations intégrales non linéaires sont de la forme:

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b(x)} F(x, t, \varphi(t))dt, \tag{2.4}$$

où $\varphi(x)$ est une fonction inconnue, $h(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues, F est une fonction non linéaire et λ un paramètre réel.

Définition 2.1.6 *(Équation intégrale de Volterra)*

Si $b(x) = x$ alors l'équation (2.4) est appelée équation intégrale de Volterra:

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{x} F(x, t, \varphi(t))dt \tag{2.5}$$

- Si $h(x) = 1$ alors (2.5) est appelée équation intégrale de Volterra de seconde espèce
- Si $h(x) = 0$ alors (2.5) est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

Définition 2.1.7 *(Équation intégrale de Fredholm)*

Si $b(x) = b$ (constant) alors l'équation (2.4) est appelée équation intégrale de Fredholm

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^{b} F(x, t, \varphi(t))dt \tag{2.6}$$

- Si $h(x) = 1$ alors (2.6) est appelée équation intégrale de Fredholm de seconde espèce.
- Si $h(x) = 0$ alors (2.6) est appelée équation intégrale de Fredholm de première espèce.

Remarque 2.1.2 • *Si $f(x) = 0$ donc l'équation (2.4) est dite homogène.*

- Si $f(x) \neq 0$ donc l'équation (2.4) est dite non homogène.

Définition 2.1.8 *(Équation intégrale de Hammerstein)*

On appelle équation intégrale Hammerstein de type de Fredholm, une équation de la forme:

$$h(x)\varphi(x) + \lambda\int_a^b k(x,t)F(t,\varphi(t))dt \ = f(x).$$

Définition 2.1.9 *(Équation intégrale d'Abel)*

On appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} g(\varphi(t))dt.$$

où $0 < \alpha < 1$ et $g : [0, \infty[\to [0, \infty[$ tel que: $g(0) = 0$ et $g(x) > 0$.

2.1.3 Équations intégrales singulières

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'une ou les deux limites de l'integrale sont infinies, par exemple:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_0^{\infty} \sin(xt)\varphi(t)dt,$$

ou bien le noyau devient infini au voisinage des points de l'intégrale.

Par exemple si le noyau $k(x,t)$ de l'équation intégrale linéaire de Fredholm est de la forme:

$$k(x,t) = \frac{M(x,t)}{|x-t|^{\alpha}} \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

avec $M(x,t)$ une fonction bornée sur $[a,b] \times [a,b]$.

Si $\alpha = 1$ dans l'exemple précédent alors $k(x,t)$ est appelé noyau de Cauchy.

L'équation integrale lineaire de Winer-Hoph et l'équation intégrale non linéaire d'Abel sont des équation intégrales singulières.

2.2 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

La résolution de l'équation différentielle linéaire

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_n(x)y = F(x),$$

à coefficients continus $a_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ avec les conditions initiales:

$$y(0) = C_0, y'(0) = c_1, y^{n-1}(0) = C_{n-1},$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation intégrale de Volterra de seconde espèce. Illustrons notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \tag{2.7}$$

$$y(0) = C_0, \; y'(0) = c_1. \tag{2.8}$$

Posons:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x), \tag{2.9}$$

d'où, vu les conditions initiales (2.8), on obtient successivement:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + C_1, \; y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + C_1 x + C_0. \tag{2.10}$$

Nous avons utilisé la formule:

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx....... \int_{x_0}^x}_{n} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z)dz.$$

Compte tenu de (2.9) et (2.10) mettons l'équation différentielle (2.7) sous la forme:

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt + C_1 x a_2(x) + C_0 a(x) = F(x)$$

$$\varphi(x)+\int_0^x\left[a_1(x)+a_2(x)(x-t)\right]\varphi(t)dt=F(x)-C_1a_1(x)-C_1xa_2(x)-C_0a_2(x). \quad (2.11)$$

En posant:

$$k(x,t)=-\left[a_1(x)+a_2(x)(x-t)\right]$$

$$f(x)=F(x)-C_1a_1(x)-C_1xa_2(x)-C_0a_2(x),$$

nous ramenons l'équation *(2.11)* à la forme suivante:

$$\varphi(x)=\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt+f(x)$$

Exemple 2.2.1 *Former l'équation intégrale corespondante à l'équation différentielle*

$$y''+x\ y'+y=0,$$

et aux conditions initiales

$$y(0)=1,\ \ y'(0)=0.$$

Si on pose

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x), \quad (2.12)$$

on obtient

$$\frac{dy}{dx}=\int_0^x\varphi(t)dt+y'(0)=\int_0^x\varphi(x)dt,\ \ y=\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt+1. \quad (2.13)$$

Portons *(2.12)* et *(2.13)* dans l'équation différentielle donnée, il vient:

$$\varphi(x)+\int_0^x x\varphi(t)dt+\int_0^x(x-t)\varphi(t)dt+1=0,$$

on sorte que

$$\varphi(x)=-1-\int_0^x(2x-t)\varphi(t)dt.$$

Chapitre 3

Théorie d'existence et d'unicité et résolution analytique des équations intégrales

3.1 Théorie d'exitance et d'unicité

3.1.1 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra

Soit l'équation intégrale de Volterra de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \quad 0 \leq x \leq a, \tag{3.1}$$

où $k(x,y)$ est une fonction continue sur $[0,a] \times [0,a]$ et $f(x)$ est continue sur $[0,a]$.

Définition 3.1.1

On appelle résolvante de l'équation intégrale, toute fonction $R(x,t,\lambda)$ donnée par:

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n k_{n+1}(x,t),$$

où les k_n sont les noyaux itérés définis par la relation de récurence suivante:

$$k_1(x,t) = k(x,t), \quad k_n(x,t) = \int_t^x k_n(x,s)k_{n-1}(s,t)ds.$$

Lemme 3.1.1

La résolvante vérifie l'équation suivante:

$$R(x,t,\lambda) = k(x,t) + \lambda \int_t^x k_n(x,s)R(s,t,\lambda)ds.$$

Théorème 3.1.1

Soit $k(x,t)$ une fonction continue pour $[0,a] \times [0,a]$ et $f(x)$ est continue pour $0 \leq x \leq a$. L'équation (*3.1*) admet une solution unique et continue donnée par la formule:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,t,\lambda)f(t)dt.$$

Théorème 3.1.2

Soit l'équation intégrale de Volterra de première espèce:

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{3.2}$$

où f, k sont fonctions continues, et dérivables sur $[a,b]$

$$k(x,t) \neq 0 \ et \int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dxdt < \infty,$$

alors, il existe une solution unique et continue de l'équation (*3.2*).

Preuve.

On remarque d'abord que:

$$f(x) = \int_a^a k(x,t)\varphi(t)dt = 0.$$

En utilisant la régle de Leibniz sur l'équation (*3.2*):

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = k(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial}{\partial x}k(x,t)\varphi(t)dt = f'(x),$$

comme $k(x,x) \neq 0$ alors:

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{k(x,x)} - \int_a^x \frac{k'_x(x,t)}{k(x,x)}\varphi(t)dt,$$

qui est une équation de Volterra de second espèce, et la théorème (3.1.1) donne l'existence et l'unicité de solution. ■

3.1.2 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale non linéaire de Volterra

Théorème 3.1.3

Soit l'équation intégrale non linéaire de Volterra suivante:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x F(x,t,\varphi(t))dt \qquad 0 \leq x \leq +\infty. \tag{3.3}$$

Si les conditions suivantes sont vérifiées:
i) $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est continue.
ii) $F : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue qui satisfait la condition de Lipschitz suivante:
$|F(x,t,\mu) - F(x,t,\nu)| \leq L\,|u-v|$ tel que: $x,t \in [0,+\infty[$ et $u,v \in \mathbb{R}$,
alors l'équation (3.3) admet une solution unique $\varphi \in C\left([0,+\infty[\,,\mathbb{R}\right)$.

Preuve.
On choisit la norme suivante:

$$|g| = \sup_{x\in[0,+\infty[} \left\{|g(x)|\exp(-Lx)\right\}.$$

On définit l'opérateur T comme suit:

$$T\varphi(x) = f(x) + \int\limits_0^x F(x,t,\varphi(t))dt.$$

On va montrer que l'opérateur T est contractant.

$$\begin{aligned}
|T\varphi(x) - T\Psi(x)| &\leq \sup_{x\in[0,+\infty[} \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x |F(x,t,\varphi(t)) - F(x,t,\Psi(t))|\, dt \right\} \\
&\leq L \sup_{x\in[0,+\infty[} \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x |\varphi(t) - \Psi(t)|\, dt \right\} \\
&\leq L \sup_{x\in[0,+\infty[} \left\{ \exp(-Lx) \int_0^x \exp(-Lt)\exp(Lt)\, |\varphi(t) - \Psi(t)|\, dt \right\} \\
&\leq L\, |\varphi - \Psi| \sup_{x\in[0,+\infty[} \left\{ \exp(-Lx) \frac{\exp(Lx) - 1}{L} \right\} \\
&\leq (1 - \exp(-Lx))(\varphi - \Psi).
\end{aligned}$$

Comme:

$$(1 - \exp(-Lx)) < 1,$$

l'opérateur, T est contractant, d'après le principe de Banach l'opérateur T admet un point fixe unique $\varphi \in C([0,+\infty])$, qui est une solution unique de l'équation intégrale (*3.3*) ■

3.1.3 Existence et unicité de la solution de l'équation intégrale de Fredholm

On considère l'équation intégrale de Fredholm du second espèce:

$$\lambda\varphi(x) - \int_\Omega k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad \Omega \in \mathbb{R}^N,$$

où Ω est un exsemble compact inclu dans $\mathbb{R}$.

On associe l'espace $C(\Omega)$ le produit scalaire:

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)dx,$$

et la norme uniforme:

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in\Omega} |f(x)|.$$

Théorème de la série géométrique de Neumann

Théorème 3.1.4

Soit V un espace de Banach, L un opérateur linéaire borné, $L \in \mathcal{L}(V)$ et I l'opérateur identique.Supposons que:

$$\|L\| < 1,$$

alors l'oérateur $(I - L)$ est inversible dans V et $(I - L)^{-1}$est borné. De plus:

$$\left\|(I - L)^{-1}\right\| \leq \frac{I}{1 - \|L\|}, \tag{3.4}$$

Preuve.

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$M_n = \sum_{i=0}^{n} L^i \quad n \geq 0.$$

On a:

$$\|M_{n+p} - M_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} L^i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \left\|L^i\right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|L\|^i,$$

d'où:

$$\|M_{n+p} - M_n\| \leq \frac{\|L\|^{n+1}}{1 - \|L\|},$$

et:

$$\sup_{p \geq 1} \|M_{n+p} - M_n\| \to 0 \qquad \text{quand} \quad n \to +\infty,$$

donc la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $\mathcal{L}(V)$, donc il existe $M \in \mathcal{L}(V)$ tel que:

$$\|M_n - M\| \to 0.$$

On remarque aussi:

$$(I - L)M_n = M_n(I - L) = I - L^{n+1}.$$

Si $n \to \infty$, on obtient:

$$(I - L)M = M(I - L) = I.$$

Ce qui permet de dire que l'opérateur $(I - L)$ est inversible et on a:

$$M = (I - L)^{-1} = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} L^i = \sum_{i=0}^{\infty} L^i.$$

Ici $M = (I-L)^{-1}$ est la somme de la série de Neumann $\sum L^i$. Il reste à montrer (*3.4*) puisque:

$$\|M_n\| = \left\|\sum_{i=0}^{n} L^i\right\| \leq \sum_{i=0}^{n} \|L\|^n \leq \frac{1}{1-\|L\|}.$$

Donc :

$$\lim_{n\to\infty} \|M_n\| = \|M\| \leq \frac{1}{1-\|L\|}$$

$$\left\|(I-L)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|L\|}.$$

■

Résultat: Sous les hypothèses du théorème (*3.1.4*) pour tout $f \in V$ l'équation:

$(I-L)\varphi = f$ admet une solution unique sans V telle que:

$$\varphi = (I-L)^{-1} \ , \ \ f \in V.$$

Approximation successive

Il est à remarque que la somme partielle

$$\vartheta_n = \sum_{k=0}^{n} A^k f,$$

de la serie de Neumann vérifie l'équation :

$$\vartheta_{n+1} = A\vartheta_n + f, \forall n \ \in \mathbb{N}.$$

D'où la relation directe entre la série de Neumann et la théorie des approximations successives .

Soit A un opérateur lineaire borné d'un espace de Banach E dans lui-même avec

$\|A\| < 1,$ et soit I l'opérateur identique dans E pour tout $f \in E$ l'approxination successive:

$$\vartheta_{n+1} = A\vartheta n + f,$$

avec ϑ_0 un vecteur arbitraire de E converge vers une unique solution ϑ de l'équation :

$$\vartheta - A\vartheta = f.$$

Preuve. Il est aisé de voir que de la relation précédente, on a:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0 &= f. \\
\vartheta_1 &= A\vartheta_0 + f = Af + f. \\
\vartheta_2 &= A\vartheta_1 + f = A^2 f + Af + f. \\
&\vdots \\
\vartheta_{n+1} &= A\vartheta_n + f = A\sum_{k=0}^{n} A^k f + f = A^{n+1} f + \sum_{k=0}^{n} A^k f.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \vartheta_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} (A^{n+1} f + \sum_{k=0}^{n} A^k f) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} A^k f = \sum_{k=0}^{\infty} A^k f \\
&= (I - A)^{-1} f.
\end{aligned}$$

■

3.2 Résolution analytique des équations intégrales

3.2.1 Équation intégrales de Volterra

Définition 3.2.1

Soit l'équation intégrale de Volterra:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt. \tag{3.5}$$

On appelle solution de l'équation intégrale (3.5) une fonction $\varphi(x)$ qui des qu'elle est portée dans cette équation la change en identité (en x).

Exemple 3.2.1 *Montrer que la fonction*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

est solution de l'équation intégrale de Volterra

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\varphi(x)dt. \tag{3.6}$$

Substituant la fonction $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ à $\varphi(x)$ dans le second membre de *(3.6)* nous obtenons:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dt &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\left(-\frac{1}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} \\ &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \varphi(x).\end{aligned}$$

Ainsi, en faisant

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Méthode de Résolvante:

Soit l'équation intégrale de Volterra du seconde espèce:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt, \tag{3.7}$$

où $K(x,t)$ est une fonction continue pour $0 \leq t \leq x$ et f est une fonction continue. Nous cherchons la solution de cette équation sous la forme:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ... \tag{3.8}$$

Remplaçant *(3.7)* dans *(3.8)*, on obtient:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ... \\ &= f(x) + \lambda\int_0^x k(x,t)\left[\varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + ... + \lambda^n\varphi_n(x) + ...\right]dt.\end{aligned}$$

Par comparaison, on obtient:

$$\varphi_0(x) = f(x).$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \int_0^x k(x,t)\varphi_0(t)dt \\ &= \int_0^x k(x,t)f(x)dt.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= \int_0^x k(x,t)\varphi_1(t)dt \\ &= \int_0^x k(x,t)\int_0^t k(t,t_1)f(t_1)dt_1dt.\end{aligned}$$

On peut définir successivement les fonctions $\Phi_n(x)$ par:

$$\Phi_1(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt.$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(x) &= \int_0^x k(x,t)\left[\int_0^x k(t,t_1)f(t_1)dt_1\right]dt \\ &= \int_0^x f(t_1)dt_1\int_{t_1}^x k(x,t)k(t,t_1)dt \\ &= \int_0^x k_2(x,t_1)f(t_1)dt_1,\end{aligned}$$

où

$$k_2(x,t_1) = \int_{t_1}^x k(x,t)k(t,t_1)dt.$$

De la même façons:

$$\varphi_n(x) = \int_0^x k_n(x,t)f(t)dt \quad (n = 1, 2...).$$

Formule pour le calcul de $\varphi_n(x)$ avec $\varphi_0(x) = f(x)$ sous les hypothèses faites sur $f(x), k(x,t)$, la serie (*3.7*), converge uniformément en x et λ pour tout λ et $x \in [0,a]$ .Les fonctions $k_n(x,t)$ s'appelent noyaux itérés définis comme suit:

$$k_1(x,t) = k(x,t)$$

$$k_{n+1}(x,t) = \int_t^x k(x,z)k_n(z,t)dz.$$

Donc:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{\gamma=0}^{\infty}\lambda^\gamma\int_a^x k_\gamma(x,t)f(t)dt.$$

Le noyau résolvant de l'équation intégrale (*3.7*) est défini par la série suivante:

$$R(x,,t,\lambda)=\sum_{\gamma=0}^{\infty}\lambda^{\gamma}k_{\gamma+1}(x,t)$$

qui est convergente absolument et uniformément si le noyau $k(x,t)$ est continue. La solution de l'équation (*3.7*) est

$$\Phi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x R(x,,t,\lambda)f(x)dt.$$

Exemple 3.2.2 *Trouver la résolvants de l'équation intégrale de Volterra à noyau*

$$k(x,t)=1.$$

On a

$$\begin{aligned}
k_1(x,t) &= k(x,t)=1\\
k_2(x,t) &= \int_t^x k(x,z)k_1(z,t)dz=\int_t^x dz=x-t\\
k_3(x,t) &= \int_t^x 1-(z-t)dz=\frac{(x-t)^2}{2!}\\
k_4(x,t) &= \int_t^x 1-\frac{(z-t)^2}{2}dz=\frac{(x-t)^3}{3!}\\
k_n(x,t) &= \int_t^x 1-k_{n-1}(z,t)dz\\
&= \int_t^x 1-\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!},
\end{aligned}$$

ainsi, par définition

$$R(x,t,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n k_{n+1}(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\frac{(x-t)^n}{n!}=e^{\lambda(x-t)}.$$

Méthode d'approximations successives:

a) Le cas d'équation intégrale linéaire

Soit l'équation de Volterra de seconde espéce:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt, \tag{3.9}$$

telle qu $f(x)$ est une fonction continue sur $[0, a]$ et le noyau $k(x, t)$ est une fonction continue dans:

$$0 \leq x \leq a \qquad \text{et} \qquad 0 \leq t \leq x,$$

considérons $\varphi_0(x)$ une fonction continue sur l'intervalle $[0, a]$.

On remplace $\varphi(x)$ par $\varphi_0(x)$ dans le deuxième membre de (*3.9*), on obtient la première approximation

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)\varphi_0(t)dt.$$

La fonction $\varphi_1(x)$ est aussi une fonction continue sur le même intervalle $[0, a]$.

On continue de la même façon, on obtient une suite des fonctions:

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x),$$

où:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)\varphi_{n-1}(t)dt,$$

est la $n^{ème}$ approximation.

La suite $\{\varphi_n(x)\}$ converge vers la solution de l'équation intégrale (*3.9*) quand $n \to \infty$

Exemple 3.2.3 *Soit l'équation intégrale:*

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)dt.$$

Solution 3.2.1 *On considère* $\varphi_0(t) = 0,$ *d'où*

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x \varphi_0(x)dt = 1.$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x \varphi_1(x)dt = 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x.$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \int_0^x \varphi_2(x)dt == 1 + \int_0^x (1 + x)\, dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

$$\varphi_4(x) = 1 + \int_0^x \varphi_3(x)dt$$
$$= 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dt$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$
$$=1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!},$$

donc l'approximation d'ordre n est:

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{n-1}}{(n-1)},$$

c'est-à-dire que $\varphi_n(x)$ représente la somme partielle de la série:

$$\sum_{k=2}^{2v-2} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

ce qu'il résulte: $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} e^x$.
On peut facilement verifier que $\varphi_n(x) = e^x$ est une solution de l'équation intégrale donnée.

b) Le cas d'équation intégrale non linéaire:

soit l'équation:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x F\left[x, t, \varphi(t)\right] dt. \tag{3.10}$$

On peut considérer $\varphi_0(x) = f(x)$ par exemple, et on peut calculer les autres éléments de la suite séquentillement par la relation:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_a^x F\left[x, t, \varphi_{n-1}(t)\right] dt \qquad n = 1, 2, ...$$

La solution de (*3.10*) est définie comme une limite de la suite $\varphi_n(x)$.

Remarque 3.2.1

Pour $\varphi_0(x)$, on peut choisir toute fonction continue, et on peut considérer $\varphi_0(x) = 0$ pour trouver la solution facilement.

Exemple 3.2.4 *Soit l'équation intégrale:*

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1+\varphi^2(t)}{1+t^2} dt,$$

prendre $\varphi_0(x) = 0,$ *puis:* $\varphi_0(x) = x.$

Solution 3.2.2

1.Considérons: $\varphi_0(x) = 0.$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{1+\varphi_0^2(t)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x.$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \frac{1+\varphi_1^2(t)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{1+\arctan^2 x}{1+t^2} dt$$
$$= \arctan x + \frac{1}{3}\arctan^3 x.$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x \frac{1+\left(\arctan t + \frac{1}{3}\arctan^3 t\right)^2}{1+t^2} dt$$
$$= \arctan x + \frac{1}{3}\arctan^3 t\ x + \frac{2}{3\times 5}\arctan^5\ x + \frac{1}{7\times 9}\arctan^7\ x.$$

$$\varphi_4(x) = \int_0^x \frac{1+\varphi_3^2(t)}{1+t^2} dt = \arctan x + \frac{1}{3}\arctan^3 t\ + \frac{2}{3\times 5}\arctan^5\ x + \frac{1}{7\times 9}\arctan^7\ x +$$
$$\frac{38}{5\times 7\times 9}\arctan^9\ x + \frac{134}{9\times 11\times 21\times 25}\arctan^{11}\ x +$$
$$\frac{4}{3\times 5\times 7\times 9}\arctan^{13}\ x + \frac{1}{7^2\times 9^2\times 15}\arctan^{15}\ x + ...$$

supposons que:

$$\arctan x = u,$$

et on trouve:

$$\tan u = \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^{v-1} \frac{2^{2v}(2^{2v}-1)}{(2v)!} B_{2v} u^{2v-1} \qquad |u| < \frac{\pi}{2},$$

tels que: B_v sont les nombres de Bernoulli qui définissent par suite:

1.les nombres de l'indice impaire sont nuls:

$$B_{2v+1} = 0,$$

sauf: $B_1 = -\frac{1}{2}$.

2. les nombres de l'indice paire définis par la relation:

$$B_{2v} = -\frac{1}{2v+1} + \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{2v-2} \frac{2v(2v-1)....(2v-2k+2)}{k!} B_k,$$

avec $B_0 = 1$.

On remarque:

$$\varphi_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tan(\arctan x) = x,$$

et $\varphi(x) = x$ est la solution de l'équation intégrale donnée.

2. considérons:

$$\varphi_0(x) = x.$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{1+\varphi_0^2(t)}{1+t^2} dt = \int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2} dt = x,$$

de la même façon on trouve:

$$\varphi_n(x) = x \qquad (n = 2, 3, ...),$$

et:

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = x,$$

donc: $\varphi(x) = x$ est une solution de l'équation intégrale donnée.

Remarque 3.2.2 *Dans certains cas, la suite $\{\varphi_n(x)\}$ ne converge pas vers la solution de l'équation (3.9), ici on a besoin de determiner la solution numériquement et la methode suivie est une méthode numérique.*

3.2.2 Équation intégrales de Fredholm

Définition 3.2.2

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt, \tag{3.11}$$

on appelle solution de l'équation intégrale (*3.11*) toute fonction $\varphi(x)$ telle qu'après sa substitution dans l'équation, celle-ci devient une identité en $x \in (a,b)$.

Exemple 3.2.5 *Montrer que la fonction* $\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$ *est solution de l'équation intégrale de Fredholm*

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)dt = \frac{\pi}{2},$$

où le noyau est de la forme

$$k(x,t) = \begin{cases} \frac{x(2-t)}{2} & 0 \leq x \leq t \\ \frac{t(2-x)}{2} & t \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Solution 3.2.3 *Mettons le premier membre sous la forme suivante:*

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 k(x,t)\varphi(t)dt = \varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x k(x,t)\varphi(t)dt + \int_x^1 k(x,t)\varphi(t)dt\right\}$$

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{\int_0^x \frac{t(2-x)}{2}\varphi(t)dt + \int_x^1 \frac{x(2-t)}{2}\varphi(t)dt\right\}$$

$$\varphi(x) - \frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{(2-x)}{2}\int_0^x t\varphi(t)dt + \frac{x}{2}\int_x^1 (2-t)\varphi(t)dt\right\},$$

portons dans l'expression obtenue $\sin\frac{\pi x}{2}$ *au lieu de* $\varphi(x)$, *il vient:*

$$\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\int_0^x (t\frac{\sin\frac{\pi t}{2}}{2}dt + x\int_x^1 (2-t)\sin\frac{\frac{\pi t}{2}}{2}dt\right\}$$

$$= \sin\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi^2}{4}\left\{(2-x)\left(-\frac{t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sin\frac{\pi t}{2}\right)_{t=x}^{t=1} + x\left(-\frac{2-t}{\pi}\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{2}{\pi^2}.\sin\frac{\pi t}{2}\right)_{t=x}^{t=1}\right\} = \frac{x}{2}.$$

Ainsi, on a $\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$, *ce qui signifie par défnition que*

$$\varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{2},$$

est une solution de l'équation intégrale donnée.

Méthode de Fredholm

La solution de l'équation de Fredholm de seconde espèce

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{3.12}$$

est donnée par la formule suivante:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,,t,\lambda)f(t)dt, \tag{3.13}$$

où la fonction $R(x,t,\lambda)$ dite résolvante de Fredholm de l'équation (*3.12*) est définie par l'égalité

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,,t,\lambda)}{D(\lambda)},$$

sous la condition $D(\lambda) \neq 0$. Ici $D(x,,t,\lambda)$ et $D(\lambda)$ sont des séries de puissances de λ:

$$D(x,t,\lambda) = k(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x,t)\lambda^n. \tag{3.14}$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n. \tag{3.15}$$

Avec les coefficients ainsi définis:

$$B_n(x,t) = \int_a^b ... \int_a^b \begin{vmatrix} k(x,t) & k(x,t_1) & ...... & k(x,t_n) \\ k(t_1,t) & k(t_1,t_1) & ...... & k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t) & k(t_2,t_1) & ...... & k(t_2,t_n) \\ \vdots & \vdots & ...... & \vdots \\ k(t_n,t) & k(t_n,t_1) & ...... & k(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1......dt_n, \tag{3.16}$$

est $B_0(x,t) = k(x,t)$

$$C_n = \int_a^b ... \int_a^b \begin{vmatrix} k(t_1,t_1) & k(t_1,t_2) & ...... & k(t_1,t_n) \\ k(t_2,t_1) & k(t_2,t_2) & ...... & k(t_2,t_n) \\ k(t_3,t_1) & k(t_3,t_2) & ...... & k(t_3,t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k(t_n,t_1) & k(t_n,t_2) & ... & k(t_n,t_n) \end{vmatrix} dt_1......dt_n. \tag{3.17}$$

Les fonction $D(\lambda)$ et $D(x,t,\lambda)$ sont respectivement le déterminant de Fredholm et le mineur du déterminant de Fredholm. Si le noyau $k(x,t)$ est borné ou si l' intégrale

$$\int_a^b \int_a^b k^2(x,t)dxdt,$$

est finie, les séries *(3.16)* *(3.17)* convergentes quelque soit λ et sont donc les fonctions analytiques entières de λ .
La résolvante

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)},$$

est une fonction analytique de λ sauf les λ qui sont zéros de $D(\lambda)$. Ces derniers sont les pôles de la résolvante $R(x,t,\lambda)$.

Exemple 3.2.6 *A l'aide des déterminants de Fredholm trouver la résolvante du noyau*

$$k(x,t) = xe^t, a = 0, b = 1.$$

Solution 3.2.4 *On a* $B_0(x,t) = xe^t$ *en suite*

$$B_1(x,t) = \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} \end{vmatrix} dt_1 = 0$$

$$B_2(x,t) = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^t & xe^{t_1} & xe^{t_2} \\ t_1e^t & t_1e^{t_1} & t_1e^{t_2} \\ t_2e^t & t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1dt_2 = 0,$$

puisque les déterminants sous $\int$ *sont nuls, il est évident que tous les* $B_n(x,t)$ *suivants sont nuls aussi. Trouvons les coefficients* C_n *:*

$$C_1 = \int_0^1 k(t_1,t_1)dt_1 = \int_0^1 t_1e^{t_1}dt_1 = 1.$$

$$C_2 = \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} t_1et_1 & t_1e^{t_2} \\ t_2e^{t_1} & t_2e^{t_2} \end{vmatrix} dt_1dt_2 = 0.$$

Evidemmet, tous les $C_n, n \geq 2$ suivants sont nuls. Dans notre cas, conformément aux formules (3.14) et (3.15), on trouve:

$$D(x,t,\lambda) = k(x,t) = xe^t, \qquad D(\lambda) = 1-\lambda.$$

Donc

$$R(x,t,\lambda) = \frac{D(x,t,\lambda)}{D(\lambda)} = \frac{xe^t}{1-\lambda}.$$

Appliquons le résultat obtenu à l'équation intégrale

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 xe^t \varphi(t)dt = f(x) \qquad (\lambda \neq 1).$$

D'après la formule (3.13)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 \frac{xe^t}{1-\lambda} f(x)dt.$$

En particulier, nous obtenons pour $f(x) = e^{-x}$

$$\varphi(x) = e^{-x} + \frac{\lambda}{1-\lambda}x.$$

Méthode des noyau itérés: construction de la résolvante à l'aide de noyaux itérés

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{3.18}$$

la même chose que pour l'équation de Volterra on pose:

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x)\lambda^n,$$

telle que $\Psi_n(x)$ est définie par les formules:

$$\Psi_1(x) = \int_a^b k(x,t)f(t)dt.$$

$$\Psi_2(x) = \int_a^b k(x,t)\Psi_1(t)dt$$
$$= \int_a^b k_2(x,t)f(t)dt.$$

$$\Psi_3(x) = \int_a^b k(x,t)\Psi_2(t)dt$$
$$= \int_a^b k_2(x,t)f(t)dt.$$

Par récurrence on obtient:

$$\Psi_n(x) = \int_a^b k_n(x,t)f(t)dt. \tag{3.19}$$
$$k_2(x,t) = \int_a^b k(x,z)k_n(z,t)dz.$$
$$k_3(x,t) = \int_a^b k(x,z)k_2(z,t)dz.$$
$$\vdots$$
$$k_n(x,t) = \int_a^b k(x,z)k_{n-1}(z,t)dz \qquad n = 2, 3, ..,$$

telle que:

$$k_1(x,t) = k(x,t),$$

$k_n(x,t)$ est défini par les formules (*3.19*) qui s'appellent noyaux itérés et la résolvante de l'équation intégrale (*3.18*) est définie en fonctions des noyaux itérés

$$R(x,t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x,t)\lambda^{n-1}. \tag{3.20}$$

Le second membre de la série (*3.20*) est la série de Neumann des noyaux $k(x,t)$ converge pour

$$|\lambda| < \frac{1}{B}, \tag{3.21}$$

et

$$B = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 k^2(x,t)dxdt.}$$

La solution de l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce est:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,t,\lambda)f(t)dt.$$

La relation (*3.21*) est suffisante pour l'existence de solution de l'équation (*3.18*), mais n'est pas nécessaire c'est-à-dire on peut avoir une solution dans le cas où $|\lambda| > \frac{1}{B}$.

On a

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \varphi(t)dt = 1.$$

Avec des calculs on a:

$$k(x,t) = 1,$$

et

$$\begin{aligned} R(x,t,\lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x,t)\lambda^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} = \frac{1}{1-\lambda} , \end{aligned}$$

donc

$$\varphi(x) = \frac{1}{1-\lambda}$$

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 k^2(x,t)dxdt = \int_0^1 \int_0^1 dxdt = 1.$$

Dans ce cas la condition (*3.21*) assure la convergence de la série (*3.20*) pour $|\lambda| < 1$ mais l'équation (*3.18*) est résoluble quand $|\lambda| \neq 1$.

Exemple 3.2.7 *Considérons l'équation de Fredholm suivante :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b (1+x)(1-t)\varphi(t)dt.$$

Solution 3.2.5

$$k(x,t) = (1+x)(1-t) \quad a=-1, b=0$$

$$k(x,t) = k_1(x,t) = (1+x)(1-t),$$

donc

$$\begin{aligned} k_2(x,t) &= \int_{-1}^{0} (1+x)(1-z)(1+z)(1-t)dz \\ &= (1+x)(1-t) \int_{-1}^{0} (1-z^2)dz \\ &= \frac{2}{3}(1+x)(1-t). \end{aligned}$$

$$k_3(x,t) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 (1+x)(1-t),$$

par récurrence

$$k_n(x,t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (1+x)(1-t),$$

alors

$$\begin{aligned} R(x,t,\lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty} k_n(x,t)\lambda^{n-1} \\ &= (1+x)(1-t)\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\lambda}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3(1+x)(1-t)}{3-2\lambda}. \end{aligned}$$

La solution est de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-1}^{0} \frac{3(1+x)(1-t)}{3-2\lambda} f(t)dt \qquad |\lambda| < \frac{3}{2}.$$

Méthode des noyaux dégénérés

a) Le cas d'équation intégrale non homogène

Le noyau $k(x,t)$ de l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce s'appelle dégénéré si il s'écrit de la forme

$$k(x,t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t) \ .$$

Les fonctions $a_k(x),\ b_k(t)$ $(k = 1, 2, 3, ..., n)$ sont continues sur $a \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendantes. L'équation intégrale à noyau dégénéré

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(t) \right] \varphi(t) dt = f(x), \tag{3.22}$$

se résout comme suit:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \int_a^b b_k(t) \varphi(t) dt. \tag{3.23}$$

On pose:

$$\int_a^b b_k(t) \varphi(t) dt = C_k \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{3.24}$$

alors l'équation (*3.23*) devient

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x), \tag{3.25}$$

où C_k : des constantes inconnues telle que $\varphi(x)$ inconnue d'aprés la forme (*3.24*) on a:

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \varphi(t) dt = 0. \tag{3.26}$$

Remplaçant (*3.25*) dans (*3.26*), on obtient:

$$C_m - \int_a^b b_m(t) \left(f(t) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(t) \right) dt = 0,$$

c'est-à-dire:

$$C_m - \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k \int_a^b a_k(t) b_k(t) dt = \int_a^b b_m(t) f(t) dt,$$

on note:

$$a_{mk} = \int_a^b a_k(t) b_m(t) dt,$$

$$f_m = \int_a^b b_m(t) f(t) dt,$$

donc:

$$C_m - \lambda \sum_{k=1} a_{mk} C_k = f_m.$$

Nous obtenons un système de n équations linéaires et n inconnus C_i $(i = 1, 2, ..., n)$

$$\begin{cases} (1 - \lambda a_{11})C_1 - \lambda a_{12}C_2 - .... - \lambda a_{1n}C_n = f_1 \\ -\lambda a_{21}C_1 + (1 - \lambda a_{22})C_2 - .... - \lambda a_{2n}C_n = f_2 \\ \vdots \\ -\lambda a_{n1}C_1 - \lambda a_{n2}C_2 - ..... - (1 - \lambda a_{nn})C_n = f_n \end{cases},$$

le déterminant est:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} (1 - \lambda a_{11}) & -\lambda a_{12} & ...... & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & (1 - \lambda a_{22}) & ...... & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{n2} & ...... & (1 - \lambda a_{nn}) \end{vmatrix}. \quad (3.27)$$

Si $\Delta(\lambda) \neq 0$, le système (*3.27*) admet une unique solution $(C_1, C_2, ..., C_n)$ obtenue moyennant les formules de Cramer

$$C_k = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{1k-1}.f_1 & ...... & -\lambda a_{1n} \\ -\lambda a_{21} & -\lambda a_{2k-1}.f_2 & ...... & -\lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\lambda a_{n1} & -\lambda a_{nk-1}.f_n & ...... & 1 - \lambda a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Donc l'équation intégrale (*3.22*) a pour solution une fonction $\varphi(x)$ définie par l'égalité:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} C_k a_k(x).$$

Exemple 3.2.8 *Considérons l'équation de Fredholm suivante:*

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x \cos t - \sin 2x \sin 2t).f(t)dt + \sin x.$$

Solution 3.2.6 *L'équation homogène est:*

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x \cos t - \sin 2x \sin 2t)f(t)dt = 0.$$

On pose :

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi} C_1 \cos x - \frac{\lambda}{\pi} C_2 \sin 2x,$$

où

$$C_1 = \int_0^{2\pi} \cos t f(t) dt \Rightarrow \begin{cases} C_1(1\frac{\lambda}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt) + \frac{\lambda}{\pi} C_2 \int_0^{2\pi} \cos t \sin 2t dt \\ -\frac{\lambda}{\pi} C_1 \int_0^{2\pi} \sin 2t \cos t dt + C_2(1 + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt \end{cases}$$

$$C_2 = \int_0^{2\pi} \sin 2t f(t) dt \begin{cases} C_1(1 - \frac{\lambda}{\pi}) \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos 2t)}{2} dt + \frac{2\pi C_2}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos t dt = 0 \\ \frac{-2\lambda}{\pi} C_1 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin dt + C_2(1 + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos t)}{2} dt = 0 \end{cases},$$

où

$$C_1(1-\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = (1-\lambda^2)$$

$$C_2(1-\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda \pm 1$$

$$\Delta(\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1+\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda) = 1 - \lambda^2$$

$$\Delta(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

pour $\lambda = -1 \Rightarrow f(x) \ = \frac{C_2}{\pi} \sin 2x \Rightarrow f_2(x) = \frac{\sin 2x}{\pi}$.
pour $\lambda = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{C_1}{\pi} \cos x \Rightarrow f_1(x) = \frac{\cos x}{\pi}$.

b) Le cas de l'équation intégrale homogène

L'équation intégrale homogène à noyau dégnéré

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} C_k(x) a_k(t) \right] \varphi(x) dt = 0, \tag{3.28}$$

n'admet, lorsque le paramètre λ n' en est pas nombre caractérisitique (i.e$\Delta(\lambda) \neq 0$), que la solution null $\varphi(x) = 0$ Si λ est nombre caractéristique (i.e : $\Delta(\lambda) = 0$) l'équation (*3.28*), en plus de la solution null, des solution non nulles, fonctions propres relatives à ce nombre caractéristique. La solution générale de l'équation homogéne (*3.28*) s'obtient comme combinaison linéaire de ces fonctions propres.

Exemple 3.2.9 *Considérons l'équation intégrale à noyaux dégénéré*

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-1}^{1} \left(5xt^3 + 4x^2t + 3xt\right) \ \varphi(t)dt = 0.$$

Solution 3.2.7

$$\varphi(x) = \lambda \left[5x \int_{-1}^{1} t^3\varphi(t) + 4x^2 \int_{-1}^{1} t\varphi(t) + 3x \int_{-1}^{1} t \ \varphi(t) \right] dt.$$

On note

$$a_1 = 5x, \quad a_2 = 4x^2, \quad a_3 = 3x.$$
$$b_1 = t^3, \quad b_2 = t \ , \quad b_3 = t.$$

On a:

$$a_{mk} = \int_a^b a_k(t)b_m(t)dt,$$

$$a_{11} = 2, \quad a_{21} = \frac{10}{3}, \quad a_{31} = \frac{10}{3}.$$
$$a_{12} = 0, \quad a_{22} = 0 \ , \quad a_{32} = 0.$$
$$a_{13} = \frac{6}{5}, \ a_{23} = 2, \quad a_{33} = 2.$$

Et

$$A = \begin{vmatrix} (1-2\lambda) & 0 & -\frac{6}{5}\lambda \\ -\frac{10}{3}\lambda & 1 & -2\lambda \\ -\frac{10}{3}\lambda & 0 & (1-2\lambda) \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = -(1-2\lambda)(1-2\lambda) + 4\lambda^2$$
$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{4},$$

avec des calcules on trouve

$$\varphi(x) = \frac{3}{2}xC + x^2C,$$

on trouve $C = 1$. Et la solution de l'équation est la forme

$$\varphi(x) = \frac{3}{2}x + x^2.$$

3.2.3 Application des transformations intégrales à la résolution d'équations intégrales:

Résolution d'équations intégrales par la transformation de Fourier

Définition 3.2.3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et absolument intégrable sur $\mathbb{R}$. On définit la transformation de Fourier de f la fonction notée F ou $F(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telle que:

$$F(f)(w) = F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iwx}dx, \tag{3.29}$$

$$f \quad \xrightarrow{\text{transformation de Fourier}} \quad F,$$

on dit que f a une transformation de Fourier au point $\omega \in \mathbb{R}$ si l'intégrale (*3.29*)est convergente.

Théorème 3.2.1 *(Théorème de convolutions)*

Soient f et g deux fonctions bornées, absolument intégrables sur $\mathbb{R}$ et continues par morceaux sur chaque intervalle bornée. Alors la produit de convolution $f * g$ est une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}$ admet une transformée de Fourier et on a la propriété convolution

$$F(f * g)(\omega) = \sqrt{2\pi} f(f)(\omega)F(g)(\omega).$$

La méthode de résolution Soit l'équation intégrale de Fredholm de secnde espèce à noyau dépenant de différence des arguments

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)\varphi(t)dt, \tag{3.30}$$

où $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ et $k(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$.
Appliquant la tansformation de Fourier et le théoréme de convolution nous obtenons:

$$\Phi(\omega) = f(w) + \sqrt{2\pi}\Phi(\omega)\,\tilde{k}(\omega), \tag{3.31}$$

avec $\Phi(\omega), f(\omega), \tilde{k}(\omega)$ les transformation de Fourier de $\varphi(x), f(x), k(x)$ respectivement. Sous la condition $1 - \sqrt{2\pi}\tilde{k}(\omega) \neq 0$ l'égalité (*3.31*) donne

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi}\tilde{k}(\omega)}.$$

Moyennant la formule d'inversion de la transformation de Fourier, nous trouvons la solution de l'équation (*3.30*).

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi}\tilde{k}(\omega)} e^{ix\omega} d\omega.$$

Si pour certaines valeurs réeles de ω, on a $1 - \sqrt{2\pi}\tilde{k}(\omega) = 0$, alors l'équation (*3.30*) n'admet en général pas de solution absolument intégrable sur l'axe (Ox) tout entier.
On procède de même dans le cas de l'équation de Fredholm de première éspèce à noyau dépendant de la différence des arguments

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(x-t)\varphi(t)dt = f(x).$$

Application de cette équation est de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\omega)}{\tilde{k}(\omega)} e^{ix\omega} d\omega.$$

Exemple 3.2.10 *Résoudre l'équation intégrale*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}\varphi(t)dt. \qquad (\lambda < \frac{1}{2}).$$

Solution 3.2.8 *Soit $F(\omega)$ la transformée de Fourier de la fonction $f(x)$ et $\tilde{k}(\omega)$ celle du noyau $k(x) = e^{-|x|}$.Ici*

$$\tilde{k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-ix\omega}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x(1-i\omega)}dx + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x(1+i\omega)}dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\frac{1}{1-i\omega} + \frac{1}{1+i\omega}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2},$$

transformation par Fourier les deux membres de l'équation proposée il vient:

$$\Phi(\omega) = F(\omega) + \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}\Phi(\omega)\sqrt{2\pi},$$

d'où

$$\Phi(\omega) = \frac{1+\omega^2}{1-2\lambda+\omega^2}F(\omega).$$

Donc ,l'équation primitive admet comme solution la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+\omega^2}{1-2\lambda+\omega^2}F(\omega)e^{ix\omega}d\omega. \tag{3.32}$$

Notons qu'en l'occurrence

$$1 - \sqrt{2\pi}\tilde{k}(\omega)\lambda = 1 - \frac{2\lambda}{1+\omega^2} = \frac{1-2\lambda+\omega^2}{1+\omega^2},$$

ne s'annule, lorsque $\lambda < \frac{1}{2}$, pour aucune valeur réelle de ω. Prenons par exemple:

$$f(x) = e^{-|x|},$$

nous avons

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2},$$

de sorte que la formule (*3.32*) fournit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix\omega}}{1-2\lambda+\omega^2}d\omega.$$

Calculons la dernière integrale en recourant aux integrales de contour. Nous obtenons:

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}} \text{ pour } x > 0$$

$$\varphi(x) = \frac{e^{+x\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}} \text{ pour } x < 0,$$

en bref

$$\varphi(x) = \frac{e^{-|x|\sqrt{1-2\lambda|x|}}}{\sqrt{1-2\lambda}}.$$

Transformation de fourier en sinus et en cosinus

• La fonction:

$$\Phi_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \sin xt \; dt,$$

est dite transformée de Fourier en sinus de $\varphi(x)$.

• la fonction

$$\Phi_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos xt \; dt,$$

est dite trasformée de Fourier en cosinus de $\varphi(x)$

Les formules des transformations réciproques sont respectivement .

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \Phi_s(x) \sin tx \; dx. \tag{3.33}$$

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \Phi_c(x) \cos tx \; dx.$$

Si $\varphi(t)$ est paire , alors $\Phi(x) = \Phi_{s(x)}$, dans le cas contraire, $\Phi(x) = i\ \Phi_s\ (x)$, ou $\Phi(x)$ est la transformées de Fourier de $\varphi(t)$ et $\Phi_s(x), \Phi_{c(x)}$ sont ses transformées de Fourier Respectivement en sinus et en cosinus .

Exemple 3.2.11 *Résoudre l'équation intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos xt \; dt = e^{-x} \qquad (x > 0).$$

Solution 3.2.9 *La fonction* $\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x}$ *est évidemment la transformée en sinus de la fonction cherchée* $\varphi(t)$*. Appliquons la formule (3.33) (formule d'inversion de la transformation de Fourier en sinus), il vient:*

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-x}\sin\ xt\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin\ xt\ dx.$$

La dernière intégrale se calcule en intégrant deux fois par parties Nous avons:

$$\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin\ xt\ dx = \frac{t}{1+t^2},$$

de sorte que:

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi}\frac{t}{1+t^2}.$$

Résolution d'équations integrales par la transformation de Laplace

La transformation de Laplace d'une fonction est donnée par l'expression

$$L\left\{f(t)\right\} = \int_0^{+\infty}f(t)e^{-st}dt.$$

Ou le symbole $L\left\{f(t)\right\}$ signifie la transformée de la Laplace de la fonction $f(t)$.

On utilise aussi l'expression F(p) pour décrire la transformée de Laplace :

$$F(p) = L\left\{f(t)\right\}.$$

a) Équation integral de volterra de type de convolution

Considérons l'équation integrale de Volterra de seconde espèce :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x k(x-t)\varphi(t)dt, \tag{3.34}$$

dont le noyau dépend seulement de la diffrence $(x-t)$. Appelons l'equation *(3.34)* équation integrale du type convolution .

Soient $f(x)$ et $k(x)$ deux fonctions suffisamment réguliéres qui croissent pour x$\to \infty$ au plus comme une fonction exponentielle, de sort que :

$$|f(x)| \leq M_1 e^{s_1 x}.$$

$$|f(x)| \leq M_2 e^{s_2 x}.$$

On montre que dans ce cas la fonction $\varphi(x)$ vérifie elle aussi une esstimation du type (2), à savoir:

$$|\varphi(x)| \leq M_3 e^{s_3 x}.$$

On peut donc trouver les images de Laplace des fonctions $f(x)$, $k(x)$ et $\varphi(x)$ (ces images seront définies dans le demi-plan Re $p = s >$ max (s_1, s_2, s_3).

Soit :

$$f(x) = \ F(p).$$
$$\varphi(x) = \Phi(p).$$
$$f(x) = \tilde{k}(p).$$

Effectuant sur les deux membres de (*3.34*) la transformation de Laplace et utilisant le théorème du produit, nous trouvons :

$$\Phi(p) = F(p) + \tilde{k}(p)\Phi(p),$$

d'où

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1.\tilde{k}(p)} \quad (\tilde{k}(p) \neq 1),$$

l'original $\varphi(x)$ de $\Phi(p)$ est solution de l'équation integrale (*3.34*).

Exemple 3.2.12 *Résoudre l'équation integrale*

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)\ dt.$$

Solution 3.2.10 *On sait que*

$$\sin x \;= \frac{1}{p^2+1}, \;\; \cos x = \frac{p}{p^2+1}.$$

Soit $\varphi(x) = \Phi(p)$, transfomations par Laplace les deux membres de l'équation proposée, nous obtenons compte tenu du théorème du produit (image du produit de convolution):

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{2p}{p^2+1}\Phi(p).$$

Il en résulte :

$$\Phi(p)\left[1 - \frac{2p}{p^2+1}\right] = \frac{1}{p^2+1},$$

où:

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p-1)^2} = xe^x,$$

par conséquent, l'équation donnée possède pour solution

$$\varphi(x) = xe^x.$$

b) Équation integrale de Volterra sur l'inervalle $[x, +\infty[$

Les équations intégrales de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_x^{+\infty} K(x-t)\;\varphi(t)\;dt. \tag{3.35}$$

Apparaissant dans certains problèmes de physique, se résolvent également par transformation de Laplace .

On a la formule suivante:

$$\int_x^{+\infty} K(x-t)\varphi(t)dt = \tilde{k}(-p)\Phi(p), \tag{3.36}$$

où

$$\varphi(t) = \Phi(p), \quad \tilde{k}(-p) = \int_x^{+\infty} k(-x)e^{px}dx.$$

Transformant par Laplace les deux membres de (*3.35*) et utilisant (*3.36*) nous obtenons

$$\Phi(p) = F(p) + \tilde{k}(-p)\Phi(p),$$

où

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \tilde{k}(-p)} \qquad (\tilde{k}(-p) \neq 1).$$

La fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{F(p)}{1 - \tilde{k}(-p)} e^{px}\, dp, \tag{3.37}$$

est une solution particulière de l'équation (*3.35*). Notons que pour que la solution (*3.37*) ait un sens, il est nécessaire que les domaines d'analyticité de $\tilde{k}(-p)$ et de F(p) soient en chevauchement.

Exemple 3.2.13 *Résoudre l'équation intégrale*

$$\varphi(x) = x + \int\limits_{x}^{+\infty} e^{2(x-t)}\varphi(t)dt. \tag{3.38}$$

Solution 3.2.11 *Dans notre cas* $f(x) = x,\ K(x) = e^{2x},$ *c'est pourquoi*

$$F(p) = \frac{1}{p^2},\ \tilde{k}(-p) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-2x} e^{px} dx = \frac{1}{2-p},\ \ \mathrm{Re}\, p < 2.$$

Ainsi nous aboutissons à l'équation opératorielle suivante:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{2-p}\Phi(p).$$

De sorte que:

$$\Phi(p) = \frac{p-2}{p^3(p-1)},$$

d'oú

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} \frac{p-2}{p^2(p-1)} e^{px} dp \qquad (0 < \gamma < 2), \tag{3.39}$$

l'intégrale (*3.39*) se calcule d' après la formule intégrale de Cauchy.

La fonction sous le signe $\int$ possède le pôle double p=0 et le pôle simple p=1 (pour $\gamma > 1$) selon que la solution de (*3.38*) comprend ou non la solution de l'équation homogène associée:

$$\varphi(x) = \int_x^\infty e^{2(x-t)}\varphi(t)dt.$$

Trouvons les résidus de la fonction à intégrer en ses pôles. On a:

$$\underset{p=0}{res}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)}e^{px}\right) = 2x+1, \ \underset{p=1}{res}\left(\frac{p-2}{p^2(p-1)}e^{px}\right) = -e^x,$$

l'équation intégrale (3.38) admet donc comme solution $\varphi(x) = 2x + 1 + Ce^x$ (C étant une constante quelconque).

Résolution d'équations integrale par la transformation de Melin

Définition 3.2.4

Étant donnée une fonction définie pour positifs et vérifiant les condition:

$$\int_0^1 |f(t)|\, t^{\ \sigma_1-1}dt < +\infty, \int_1^\infty |f(t)|\, t^{\ \sigma_2-1}dt < +\infty,$$

pour un choix convenable des nombres et on appelle transformée de Mellin de la fonction

.

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)t^{\ s-1}dt, \quad (s = \sigma + i\tau\ , \sigma_1 < \sigma < \sigma_2).$$

La formation d'inversion de la transformation de Mellin s'écrit

$$f(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty F(t)t^{\ s-1}ds \ \ (t > 0,\ \sigma_1 < \sigma < \sigma_2). \tag{3.40}$$

La transformation de Melin et tout indiquée pour résoudre des équations intégrales telles que

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty K(\frac{x}{t})\varphi(t)\ \frac{dt}{t}. \tag{3.41}$$

En effet, supposons que $\varphi(x), f(x)$ et $k(x)$ admettent la transformée de Mellin et soit $\varphi(x) \ \to\ \Phi(s), f(x) \ \ \to\ F(s)\ \ k(x)\ \to\ \tilde{k}(s)$ les domaines dans lesquels F(s) et $\tilde{k}(s)$ sont analytiques ayant en commun la bande $\sigma_1 < \operatorname{Re} s = \sigma < \sigma_2$. Appliquant la transformation de Mellin Terme à terme, nous obtenons, à partir de (*3.41*).

$$\Phi(s) = F(s) + \tilde{k}(s)\Phi(s),$$

d'ou

$$\Phi(s) = \frac{F(s)}{1 - \tilde{k}(s)} \qquad (\tilde{k}(s) \neq 1),$$

c'est la solution opérationnelle de l'équation intégrale (*3.41*). La formule d'inversion (*3.40*) permet d'en trouver la solution:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{F'(s)}{1 - \tilde{k}(s)} x^{-s} ds.$$

Considérants l'équation intégrale de la forme:

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_0^\infty K(x,t)\varphi(t)dt. \tag{3.42}$$

Multiplication les deux membres de (*3.42*) par x^{s-1}et intégrons par rapport à x entre 0 et ∞ il vient:

$$\int\limits_0^\infty \varphi(x)x^{s-1}dx = \int\limits_0^\infty f(x)x^{s-1}dx \int\limits_0^\infty \varphi(t)dx \int\limits_0^\infty K(x,t)x^{s-1}dx.$$

Notons $\Phi(s), F(s), \tilde{K}(s)$ les transformée de Mellin respectives des fonctions $\varphi(x), f(x)$ et $K(x)$ nous obtenus par des simples transformations:

$$\Phi(s) = F(s) + \tilde{K}(s) \int\limits_0^\infty \varphi(t)t^{-s}dt.$$

On voit aisément que de sorte que $\int\limits_0^\infty \varphi(t)t^{-s}dt = \Phi(1-s)$ de sorte que s'écrit:

$$\Phi(s) = F(s) + \Phi(1-s)\tilde{K}(s), \tag{3.43}$$

substituant dans (*3.43*) la valeur $(1-s)$ par la valeur s nous trouvons:

$$\Phi(1-s) = F(1-s) + \Phi(s)\tilde{K}(1-s), \tag{3.44}$$

les égalités (*3.43*) et (*3.44*) entrainent

$$\Phi(s) = F(s) + F(1-s)\tilde{K}(s) + \Phi(s)\tilde{K}(s)\tilde{K}(1-s).$$

D'où

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + F(1-s)\tilde{K}(s)}{1-\tilde{K}(s)\ \tilde{K}(1-s)}, \tag{3.45}$$

c'est la solution opérationnelle de l'équation (*3.42*).

Moyennant la formule de réciprocitée Mellin on a:

$$\Phi(s) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(s) + F(1-s)\tilde{K}(s)}{1-\tilde{K}(s)\ \tilde{K}(1-s)} x^{-s} ds.$$

Qui est solution de l'équation intégrale (*3.42*).

Exemple 3.2.14 *Résoudre l'équation intégrale*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \varphi(t)\cos xt\ dt. \tag{3.46}$$

Solution 3.2.12 *On a:*

$$\tilde{K}(s) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty x^{s-1}\cos x\ dx, \tag{3.47}$$

le calcul de l'intégrale (*3.47*) se fait compte tenu de ce que

$$\int\limits_0^\infty e^{-ix}x^{z-1}dx = \Gamma(z), \tag{3.48}$$

faisons coïncider dans (*3.48*) la demi-droite d'intégration avec l'axe imaginaire, opération possible pour 0< z <1 en vertu du lemme de Jordan. Nous obtenons la formule:

$$\int\limits_0^\infty e^{-ix}x^{z-1}dx = e\Gamma(z).$$

Séparons les parties réelle et imaginaire il vient:

$$\int\limits_0^\infty x^{z-1}\cos x\ dx = \cos\frac{\pi z}{2}\Gamma(z) \tag{3.49}$$

$$\int\limits_0^\infty x^{z-1}\sin x\ dx = \sin\frac{\pi z}{2}\Gamma(z),$$

ainsi, en vertu de (*3.47*) et (*3.49*) on obtenons:

$$K(s) = \lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2},$$

ensuite

$$K(s)K(1-s)\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi s}{2} = \frac{\lambda^2}{\pi}2\cos\frac{\pi s}{3}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \lambda^2.$$

Puisque $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$ Par conséquent, si $\mathrm{M}\{f(x)\} = F(s)$ on a conformément à la formule à la formule (*3.45*) (pour $|\lambda| \neq 1$)

$$\Phi(s) = \frac{F(s) + F(1-s)\tilde{K}(s)}{1-\lambda^2},$$

et donc

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i(1-\lambda^2)}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[F(s) + F(1-s)\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\right]x^{-s}ds \tag{3.50}$$

$$= \frac{1}{1-\lambda^2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}F(s)x^{-s}ds + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}F(1-s)x^{-s}ds,$$

remplaçons $F(1-s)$ par $\int_0^\infty f(t)t^{-s}$ dans la dernière intégrales du second membre de (*3.50*) et notons que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s)x^{-s}ds = f(x)$.

La formule (*3.50*) se récrit:

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}(xt)^{-s}ds\int_0^\infty f(t)dt.$$

Selon la formule de réciprocité de Mellin:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}(xt)^{-s}ds = \cos\ xt,$$

de sorte qu'on a en définitive pour solution de l'équation (*3.46*):

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos xt\ dt.$$

Indication (Lemmes de Jordan)

Soit $S(\theta_1, \theta_2)$ le secteur du plan complexe

$\left\{z = re^{i\theta}, r > 0, 0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\right\}$, et $\gamma\ (r, \theta_1, \theta_2)$ l'arc de cercle $|z| = r$ dans $S(\theta_1, \theta_2)$.

Soit f une fonction continue$f : S(\theta_1, \theta_2) \to \mathbb{C}$.

1. Si $z\ f\ (z)$ tend uniformément vers 0 sur l'arc $\gamma(r, \theta_1, \theta_2), \theta_2 \leq 2\pi$, quand $r \to 0$, resp. r$\to \infty$, alors:

$$\lim_{r\to 0+} \int\limits_{\gamma(r;\theta_1,\theta_2)} f(z)dz = 0.$$

2. Si $f(z)$ tend uniformément vers 0 sur l'arc $\gamma(r; \theta_1, \theta_2)$, $\theta_2 \leq 2\pi$, quand r$\to \infty$, alors:

$$\lim_{r\to\infty} \int\limits_{\gamma(r;\theta_1,\theta_2)} e^{iz} f(z)dz = 0.$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-r\sin\theta} d\theta \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-2r\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-r}) < \frac{\pi}{2}.$$

Bibliographie

[1] **Abdul J. JERRI**, Introduction to Integral Equations With Application, A Wiley-Intersciences Publication.1999.

[2] **Abdul.MajidWazwaz**, linear and Nonlinear intégral équations Méthods and Applications, Higher Education press, Beijin and springer-Verlag Berlim Heidelberg 2011.

[3] **Amdrei D. Polyanin,Alexander V. Manzhirov**, Intégral equations, CRC Press LLC 1998.

[4] **Atkinson kendall**, the Numerical Solution of integral equations of the second kind, Cambrindge University Press, Combridge 1997.

[5] **Atkinson Kendall, Weimin Han, theoretical Analysis**, AF unctional Analysis Frame work, Springer.

[6] **Brezis H**. Analyse fonctionnelle, Théorie et application, Masson, Paris, 1992.

[7] **Claude Zuily**, Distribution et transformation de Fourir, Dunod 1999.

[8] **Krasnov M, Kissélev A, Makarenko G**, Equations intégrales, probmèmes et exercice, Editions Mir, Moscou, 1977.

[9] **Graye Jean.laurent**, Cours de physique: transformation de Laplace, lycée Montaigne Bordeaux Mathématique Spéciales, Edition 2012.

[10] **Michael A. Golberg**, Solution Methods for Intégral Equations, theory and Applications, Plenum Press-New uork and London.

Résumé

Les équations intégrales jouent un rôle important dans plusieurs recherches théorique et appliquée, on a essayé dans ce mémoire d'étudier les importantes d'entre elles, notamment celle de Volterra et Fredholm.

Nous avons présenté en première lieu quelques notions d'analyse et des espaces fonctionnels. Ensuite dans le deuxième chapitre on a classé les équations intégrales selon la linéarité.

Enfin dans le première section de la 3ème chapitre nous avons donné quelques théorèmes d'existence et d'unicité de solution des équations intégrales, et dans la deuxième section nous y exposons quelques méthodes analytiques de résolution.

Equation intégrale de Volterra, équation intégrale de Fredholm, linéarité, existence, unicité, transformation de Laplace et Fourier.

Abstract

Integral equations play an important role in many theoretical and applied researches, we have tried in this work to study the most important types, especially of Volterra and Fredholm integral equations.

First, we introduce some analytical notions and basic spaces. Then we present in the second chapter a classification of linear and nonlinear integral equations.

The third chapter in the first part we devoted to study the existence and uniqueness of integral equation, and in the second part we give some analytical methods for solving it.

Volterra integral equation, Fredholm integral equation, , linearity, existence, uniqueness, Laplace and Fourier transform.

ملخص

تلعب المعادلات التكاملية دورا هاما في العديد من الأبحاث النظرية والتطبيقية، وقد حاولنا في هذه المذكرة دراسة أهم أنواعها خاصة معادلتي فولتيرا وفريدهولم.

قدمنا بداية بعض المبادئ التحليلية والفضاءات الأساسية، ثم عرضنا في الفصل الثاني تصنيفا للمعادلات التكاملية حسب خطيتها. أما في الفصل الثالث في شطره الأول قدمنا بعض نظريات وجود ووحدانية حل المعادلات التكاملية، وفي الشطر الثاني منه تناولنا أهم الطرق التحليلية لحلها.

معادلة فولتيرا التكاملية، معادلة فريدهولم التكاملية، الخطية، وجود، وحدانية، تحويل فوريي ولابلاس.