



**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de**  
**la Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED**  
**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

**Mémoire de fin d'étude**

# **MASTER ACADEMIQUE**

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

## **Thème**

**Sur les ondelettes construites à partir  
d'une analyse multirésolution dyadique**

**Présenté par: Telhig Ahmed  
Redouani Omar**

**Soutenu publiquement le 20/06/2021 devant le jury composé de**

Doudi Nadjat	MCB.	Président	Univ. El Oued
Dehda Bachir	MCA.	Rapporteur	Univ. El Oued
Mesai Aoun M. salah	MAA.	Examineur	Univ. El Oued

**Année universitaire 2020 – 2021**

# Remerciements

*Nous remercions « **ALLAH** » qui nous a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.*

*Nous tenons à notifier un remerciement spécial à tous nos professeurs qui ont contribué à notre formation de mathématique, en particulier, notre encadreur pédagogique "**Dehda Bachir**".*

*Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseigné durant nos études à la faculté des sciences exactes.*

*Nous remercions également tous nos collègues d'étude, particulièrement notre promotion de master mathématique, 2020/2021 à l'université de **Chahid Hama Lakhdar El-Oued**.*

*En fin, nous remercions vivement notre famille pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation.*

## Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de la partie théorique des bases d'ondelettes. On commence par un survol sur l'analyse de Fourier et la transformée en ondelettes, où on introduit la série de Fourier, la transformée de Fourier, la définition d'une ondelette, la transformée en ondelette et leur propriétés principales. Ensuite, on introduit l'analyse multirésolution et quelques propriétés de sa fonction d'échelle, aussi le théorème standard d'Albert Cohen pour la construction de cette notion AMR.

Finalement, on démontre le théorème de Meyer pour la construction d'une base d'ondelettes associé par des exemples pratiques.

**Mots-clés** : Analyse de Fourier, ondelette, analyse multirésolution, ondelette de Daubechies, ondelette de Coifman.

## Abstract

This work is devoted to the study of the theoretical part of wavelets bases. We begin with an overview of a Fourier analysis and wavelet transform, where we introduce the Fourier series, Fourier transform, wavelet definition, wavelet transform and their principal properties. Then, we introduce the multiresolution analysis and some properties of its scaling function, also the standard theorem of Albert Cohen for constructing this AMR notion. Finally, we demonstrate the Meyer theorem to construct a wavelet basis associated by practical examples.

**Keywords** : Fourier analysis, wavelet, multiresolution analysis, Daubechies wavelet, Coifman wavelet.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Analyse de Fourier et transformée continue en ondelette</b>	<b>1</b>
1.1	Rappel d'analyse de Fourier . . . . .	1
1.1.1	Série de Fourier . . . . .	1
1.1.2	Transformation de Fourier . . . . .	4
1.1.3	L'inverse de la Transformation Fourier . . . . .	8
1.2	Rappel sur la transformation en Ondelettes . . . . .	9
1.2.1	La transformée en ondelettes continue . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Analyse Multirésolution de <math>L^2(\mathbb{R})</math></b>	<b>13</b>
2.1	Définitions et quelques exemples . . . . .	13
2.1.1	Analyse multirésolution . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Construction des ondelettes</b>	<b>25</b>
3.1	La construction dans le cas général . . . . .	25
3.2	Exemples[13] . . . . .	32
	<b>Bibliography</b>	<b>38</b>

## Introduction générale

Bien que la transformée de Fourier ait obtenu un grand succès tout au long du XIX<sup>e</sup> siècle dans le domaine du traitement du signal, elle ne donne que des informations fréquentielles sur le signal, où on a la nécessité d'une analyse en temps et en fréquence.

Pour cet effet, la transformée d'ondelette est conçue pour être adaptative, elle permet d'analyser un signal à l'aide d'une fonction (petite onde) bien localisée appelée ondelette, que l'on peut translater sur tout le signal et que l'on peut dilater. En fait, les ondelettes sont adoptées comme un outil prometteur pour des applications scientifiques variées. La transformée en ondelettes permet d'exprimer sans perte d'information d'un signal dans une base dans laquelle on obtient la contribution locale de chaque fréquence. Certains utilisent les ondelettes pour leur régularité, d'autres pour leur simplicité et la rapidité du calcul. Certains aussi utilisent les ondelettes pour résoudre les équations différentielles (EDP, EDO, EDF, éq. Intég, ...). Mallat et Meyer ont créé un environnement tout particulier : Analyse multirésolution (AMR) qui permet de construire des bases d'ondelettes associées à une transformée discrète rapide. Cette notion de l'AMR implique l'introduction des espaces d'approximation.

Ce mémoire est structuré en trois chapitres :

Dans un premier chapitre, nous commencerons par introduire l'analyse de Fourier, son formalisme et les limites de son utilisation. Par suite, nous arriverons à parler du besoin de trouver une autre méthode pour compléter ce manque. C'est la transformée en ondelettes.

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons le concept théorique de l'analyse multirésolution et les propriétés principales de sa fonction d'échelle, ensuite le théorème fondamental de construction d'une analyse multirésolution.

Dans le troisième chapitre, nous démontrerons la méthode de la construction d'une base d'ondelettes et quelques exemples fréquemment utilisés.

Finalement, nous compléterons ce mémoire par une conclusion générale et des références principales.

# Chapitre 1

## Analyse de Fourier et transformée continue en ondelette

Dans ce chapitre, nous présenterons quelques outils qui nous seront utilisés par la suite. Il sera divisé en deux parties. La première partie présente la définition d'analyse de Fourier, la deuxième partie, sera une introduction à la transformation en ondelettes.

### 1.1 Rappel d'analyse de Fourier

#### 1.1.1 Série de Fourier

Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier en 1822. Il a démontré qu'une fonction périodique peut être décomposée sous forme de série trigonométrique, chaque terme est une fonction de fréquence multiple d'une fréquence fondamentale.

**Définition 1.1.1.** Soient  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et  $P$  un réel strictement positif, on dit que  $f$  est  $P$ -périodique, si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + P) = f(x). \quad (1.1)$$

où  $P$  est le plus petit nombre vérifiant (1.1) [5].

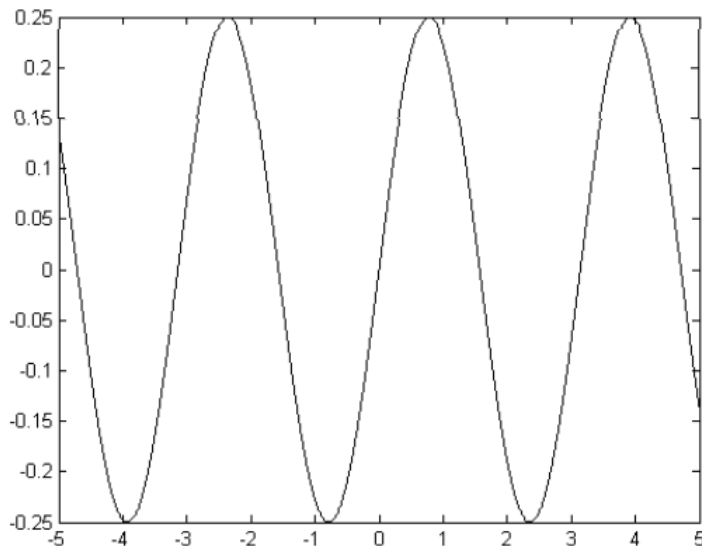


Figure 1 – Une fonction périodique.

**Exemple 1.1.** Les fonctions sinusoidales,  $x \mapsto \cos\left(2\pi\frac{n}{T}x\right)$  et  $x \mapsto \sin\left(2\pi\frac{n}{T}x\right)$  sont périodiques d'une période  $P = \frac{T}{n}$ .

### 1.1.1.1 Série Trigonométriques

Les fonctions  $\{\cos n\omega_0 t\}_{n \geq 0}$ , et  $\{\sin n\omega_0 t\}_{n \geq 0}$  forment sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$  un ensemble complet infini de fonctions orthogonales, avec  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

Il est donc possible de représenter sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$  une fonction quelconque  $f$  :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin n\omega_0 t \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \quad (1.2)$$

$a_0$  est la valeur moyenne de  $f(t)$  sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$ . Les coefficients sont obtenus par les relations suivantes :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt. \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt. \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t dt. \end{cases} \quad (1.3)$$

### 1.1.1.2 Série Exponentielles

**Définition 1.1.2.** [6] La série de Fourier d'une fonction périodique sur le segment  $[-L, L]$ , est une série trigonométrique de la forme :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\frac{\pi}{L}x}. \quad (1.4)$$

Les fonctions  $\{e^{jn\omega_0 t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  forment sur l'intervalle  $[t_0, t_0 + T]$  un ensemble complet infini de fonctions orthogonales [5]. Sur ce même intervalle, une fonction quelconque  $f$  peut s'écrire :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad t \in [t_0, t_0 + T]. \quad (1.5)$$

Les coefficients de la décomposition sont donnés par [5] :

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt ; n \in \mathbb{Z}. \quad (1.6)$$

**Théorème 1.1.1.** [6] *L'ensemble  $\{e^{in\frac{\pi}{L}x}, n \in \mathbb{Z}\}$  constitue une base orthonormée de  $L^2_{\text{pér}}[-L, L]$ , ainsi toute fonction  $f \in L^2[-L, L]$  et  $2L$ -périodique peut s'écrire au sens de  $L^2$  comme :*

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{in\frac{\pi}{L}x}. \quad (1.7)$$

**Remarque 1.1.1.** [6] *Si la fonction  $f$  à valeurs réelles, alors sa série de Fourier définie dans (1.4) devient comme suit :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(n\frac{\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right).$$

avec

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \cos\left(n\frac{\pi}{L}y\right) dy, n \geq 0.$$

et

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(y) \sin\left(n\frac{\pi}{L}y\right) dy, n \geq 1.$$

### 1.1.1.3 Relations entre les deux formes de série

Les relations suivantes permettent de passer d'une forme à l'autre [5] :

$$\begin{cases} a_0 = C_0. \\ a_n = C_n + C_{-n} & b_n = j(C_n - C_{-n}). \\ C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) & C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n). \end{cases} \quad (1.8)$$

Il existe une forme alternative pour la série trigonométrique [5] :

$$\begin{cases} f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n). \\ A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ et } \text{tg } \varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Le tableau 1.1 récapitule ces différentes formules [5] :

Forme de la série	Calcul des coefficients
$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$	$C_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$
$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n \sin n\omega_0 t$ $= a_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$	$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$ $a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos n\omega_0 t dt$ $b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin n\omega_0 t dt$

### 1.1.2 Transformation de Fourier

La transformée de Fourier est une extension pour les fonctions non périodiques, elle s'exprime comme une somme infinie des fonctions trigonométriques de toutes fréquences. Une telle sommation se présente sous forme d'intégrale [5]. En ce qui suit, on va présenter la définition et des propriétés de la transformée de Fourier.

**Définition 1.1.3.** On note  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $f$  définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continues par morceaux et telles que [7] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \text{ existe.}$$

**Exemple 1.2.** [7]

1. La fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

appartient à  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \pi.$$

2. Par contre, la fonction  $g$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par  $g(t) = t$  n'appartient pas à  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ . De façon plus générale, sauf dans le cas de la fonction nulle, les fonctions polynômes n'appartiennent pas à  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ .

**Définition 1.1.4.** Soit  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ , on appelle transformée de Fourier de  $f$ , la fonction

$\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi st} f(t) dt. \quad (1.10)$$

**Remarque 1.1.2.** L'application  $\mathcal{F} : f \rightarrow \mathcal{F}(f)$  est appelée transformation de Fourier.

**Remarque 1.1.3.**  $\mathcal{F}(f)(s)$  est défini par une intégrale dépendant du paramètre réel  $s$ , contrairement à la transformation de Laplace où le paramètre  $p$  est complexe [6]. On a

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad |e^{-2i\pi st} f(t)| = |f(t)|. \quad (1.11)$$

donc la fonction  $\mathcal{F}(f)$  est définie et bornée sur  $\mathbb{R}$ . On admettra que  $\mathcal{F}(f)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 1.1.4.**

La courbe de la fonction  $y = |\mathcal{F}(f)(s)|$  est appelée spectre de  $f$  [7]. On a

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} |\mathcal{F}(f)(s)| = 0.$$

**Cas particuliers** [5]

1. Si  $f$  est **paire**. On sait que  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . Donc l'intégrale de Fourier s'écrit :

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos 2\pi st - i \sin 2\pi st) dt. \quad (1.12)$$

Or les fonctions

$$t \rightarrow f(t) \cos 2\pi st.$$

et

$$t \rightarrow f(t) \sin 2\pi st.$$

sont respectivement paire et impaire Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos 2\pi st dt = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos 2\pi st dt$$

et  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin 2\pi st dt = 0.$

Donc si  $f$  est paire,  $\mathcal{F}(f)(s)$  est un nombre réel et

$$\mathcal{F}(f)(s) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos 2\pi st dt. \quad (1.13)$$

2. Si  $f$  est **impaire** alors on a de la même façon :

$$\mathcal{F}(f)(s) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin 2\pi st dt. \quad (1.14)$$

**Exemple 1.3. Signal "porte" [7]**

La fonction " porte" notée  $\Pi$  est définie par :

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]. \\ 0 & \text{si } t \notin \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Comme  $f$  est paire, si  $s \neq 0$ , on a :

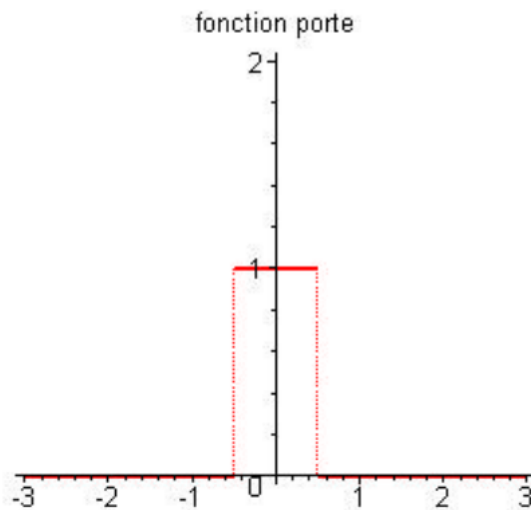
$$\mathcal{F}(\Pi)(s) = 2 \int_0^{1/2} \Pi(t) \cos 2\pi st dt = 2 \left[ \frac{\sin 2\pi st}{2\pi s} \right]_0^{1/2} = \frac{\sin \pi s}{\pi s}.$$

si  $s = 0$ , alors  $\mathcal{F}(\Pi)(0) = 1$ . La fonction  $\mathcal{F}(\Pi)$  est donc prolongeable par continuité en 0 .

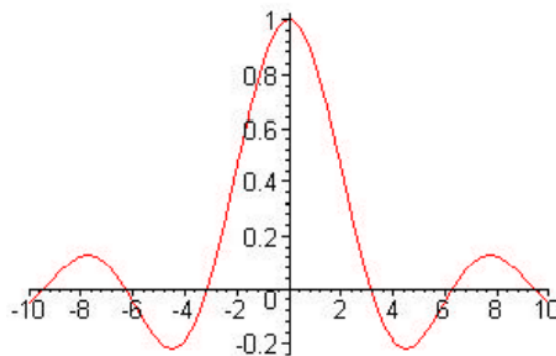
En conclusion : La transformée de Fourier de la fonction "porte"  $\Pi$  est la fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  par :

$$\mathcal{F}(\Pi) : s \rightarrow \frac{\sin \pi s}{\pi s}.$$

Cette fonction s'appelle sinus cardinal [7]. Sa représentation graphique est donnée par la **figure 3** [5].



**Figure 2** : Graphe du signal porte.



**Figure 3** : Sinus cardinal.

**Remarque 1.1.5.** [6] La transformée de Fourier se prolonge à  $L^2(\mathbb{R})$  par la densité de l'espace de Schwartz  $S(\mathbb{R})$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Rappelons qu'une fonction  $f \in S(\mathbb{R})$ , si et seulement si elle est indéfiniment dérivable et à décroissance rapide, c'est-à-dire elle vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{1 + |x|^n} = 0. \quad (1.15)$$

**Remarque 1.1.6.** [6] Certains scientifiques utilisent d'autre façon pour définir la Transformée de Fourier, on trouve parfois l'expression :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx \text{ ou } \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i2\pi\omega x} dx. \quad (1.16)$$

**Remarque 1.1.7.** [7] La Transformée de Fourier se généralise pour les fonctions de  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , par la formule suivante :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle \omega, x \rangle} dx. \quad (1.17)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire canonique dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple 1.4.** [7]

En traitement d'images, on considère la transformée de Fourier à deux dimensions, telle que :

$$\hat{f}(\omega_1, \omega_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} dx dy.$$

**Proposition 1.1.1.** [5] Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , on a la formule de Parseval :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle. \quad (1.18)$$

d'où en particulier,  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ .

**Proposition 1.1.2.** [5] Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , on a la formule d'inversion suivante :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\omega) e^{i\langle x, \omega \rangle} d\omega. \quad (1.19)$$

Le théorème suivant relie entre deux sommes infinies, la première construite par une fonction et la deuxième par sa transformée de Fourier. Ce théorème présente une formule appelée formule sommatoire de Poisson.

**Théorème 1.1.2.** [6]

Soient  $a$  un réel strictement positif et  $\omega_0 = \frac{2\pi}{a}$ . Si  $f$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  et intégrable telle que :

$$\exists C > 0, \exists \alpha > 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha}.$$

et

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(m\omega_0)| < \infty.$$

alors, on a la formule sommatoire de Poisson suivante

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x + na) = \frac{1}{a} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(m\omega_0) e^{im\omega_0 x}.$$

**1.1.3 L'inverse de la Transformation Fourier**

**Théorème 1.1.3.** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on définit alors formellement la transformée de Fourier et son inverse par [3] :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Soit  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , on obtient alors la formule de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{h(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\omega)\overline{\mathcal{F}(h)(\omega)} d\omega.$$

et la formule de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(f)(\omega)|^2 d\omega.$$

**1.1.3.1 Produit de convolution**

**Définition 1.1.5.** [7]

Pour  $f \in L^1(\mathbb{R})$  et  $h \in L^1(\mathbb{R})$  le produit de convolution de  $f$  et  $g$ , noté  $f \star h$ , est défini par :

$$f \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)h(u)du.$$

Alors,  $f \star h \in L^1(\mathbb{R})$  est défini presque partout et tel que :  $f \star h = h \star f$  : commutativité

$$\frac{d}{dt}(f \star h)(t) = \frac{df}{dt} \star h(t) = f \star \frac{dh}{dt}(t) : \text{dérivabilité} .$$

$f \star \delta_{t_0}(t) = f(t - t_0)$  : convolution avec une masse de Dirac en  $t_0$ . De plus, si l'on note  $g = f \star h$  alors :

$$\mathcal{F}(g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega)\mathcal{F}(h)(\omega)$$

Chaque composante fréquentielle  $e^{i\omega t}$  d'amplitude  $\mathcal{F}(f)(\omega)$  est en effet modulée par le filtre  $\mathcal{F}(h)(\omega)$ . Ainsi, décomposer une fonction comme une intégrale de fonctions sinusoidales complexes  $e^{i\omega t}$  permet de calculer directement la réponse d'un filtre  $Lf$  à partir de la donnée des coefficients  $\mathcal{F}(h)(\omega)$ .

**Remarque 1.1.8.** tous ces résultats pour le produit de convolution sont également valables pour l'extension de la transformée de Fourier à  $L^2(\mathbb{R})$  [6].

## 1.2 Rappel sur la transformation en Ondelettes

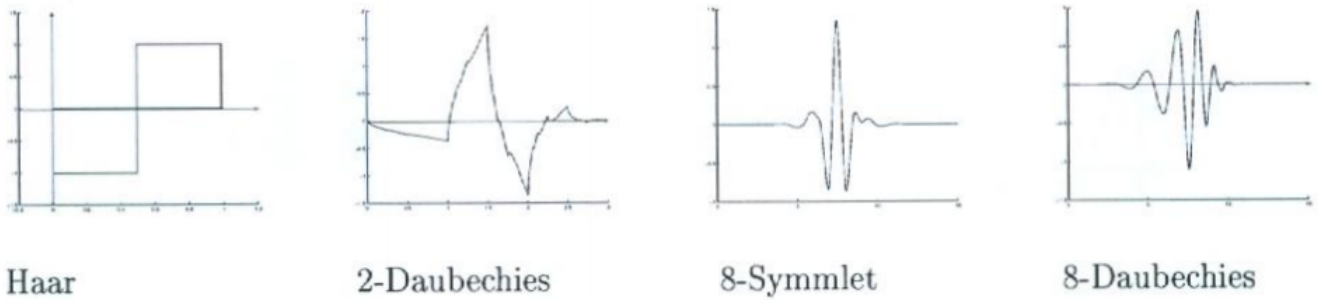
Bien que la transformée de Fourier ait obtenu un grand succès tout au long du XIX ième e siècle dans le domaine du traitement du signal, elle ne donne que des informations fréquentielles sur le signal, où on a la nécessité d'une analyse en temps et en fréquence. Pour cet effet, la transformée d'ondelette est conçue pour être adaptative, elle permet d'analyser un signal à l'aide d'une fonction (petite onde) bien localisée appelée ondelette, que l'on peut translater sur tout le signal et que l'on peut dilater. En fait, cette ondelette est apparue en 1909 par Alfréd Haar, qui l'a définie comme une fonction à deux courtes impulsions alternatives, et avec les travaux de Jean Morlet et Alex Grossmann en 1984, le mot (ondelette) est devenue des définitions mathématiques et la transformée d'ondelette a été adoptée comme une nouvelle transformation d'analyse des signaux [6].

**Définition 1.2.1.** [1] Une ondelette  $\psi$  est une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  vérifie la relation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0. \tag{1.20}$$

**Définition 1.2.2.** [6] Une ondelette est une fonction oscillante (ce qui explique le mot "onde") de moyenne nulle, appelée  $\psi$ , possédant un certain degré de régularité et dont le support est fini (ce qui explique le mot "ondelette", qui veut dire petite onde). Plusieurs exemples sont montrés dans la figure 4. L'ondelette  $\psi$  génère une famille d'ondelettes :

$$\left\{ \psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left( \frac{t-u}{s} \right) \right\}_{(u,s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+}. \tag{1.21}$$



**Figure 4.** Exemples d'ondelette  $\psi(t)$ .

où  $u$  est le paramètre du temps (délai) et  $s$  le paramètre d'échelle [6]. L'ondelette  $\psi_{u,s}$  est simplement l'ondelette  $\psi$  traduite de  $u$  et dilatée (contractée si  $s < 1$ ) par  $s$ . Par conséquent, quand l'échelle  $s$  augmente, la résolution augmente. Ceci veut dire que le support de la partie non-nulle de l'ondelette  $\psi$  augmente. Le coefficient multiplicateur  $\frac{1}{\sqrt{s}}$  permet d'avoir une formule de conservation de l'énergie du signal  $\left(\int |f(t)|^2 dt = \frac{2}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int |Wf(u, s)|^2 du \frac{ds}{s^2}\right)$  avec  $C_\psi$  et  $Wf(u, s)$  définis plus tard) [7]. De plus, il est habituellement supposé que la condition suivante est vérifiée :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{\|\Psi(\omega)\|^2}{\omega} d\omega < +\infty. \quad (1.22)$$

où  $\Psi$  est la transformée de Fourier de  $\psi$  [5].

Cette condition d'admissibilité impose pour les fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  que  $\psi(t)$  soit de moyenne nulle. On peut imposer en outre des conditions de régularité telles que des moments multiples nuls

$$\int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx = 0, \forall \ell = 0, \dots, N-1. \quad (1.23)$$

ce qui équivaut dans l'espace de Fourier à :

$$\hat{\psi}^{(\ell)}(0) = 0, \forall \ell = 0, \dots, N-1. \quad (1.24)$$

et donc des propriétés de décroissance et de convergence vers 0 à l'infini de  $\psi$  et de sa transformée de Fourier.

**Exemple 1.5.** [5] *L'ondelette de Haar, c'est la première et la plus simple des ondelette définie comme suit :*

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ -1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[, \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geq 1. \end{cases}$$

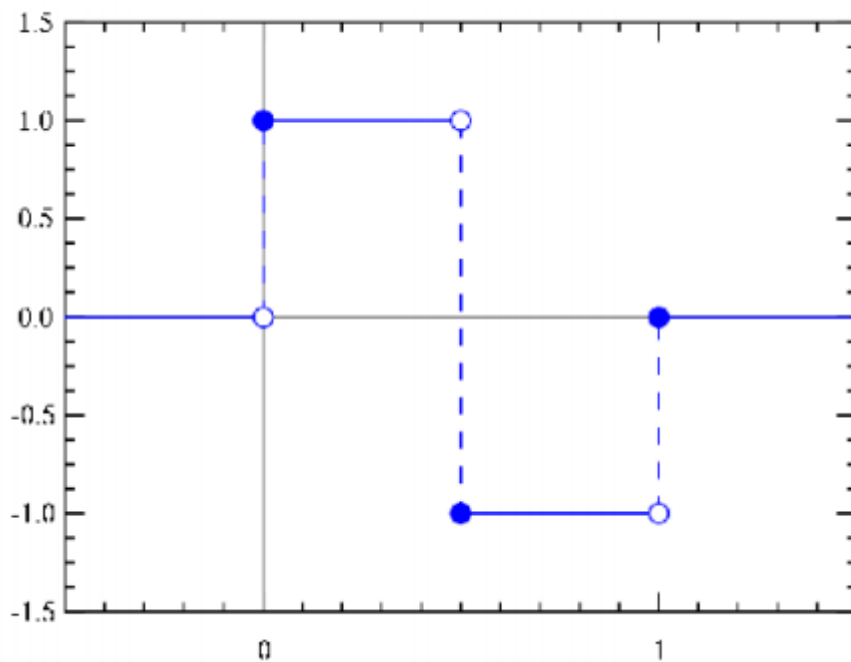


Figure 5 . L'ondelette de Haar.

**Exemple 1.6.** [5] Soit une gaussienne  $G(x) = e^{-\pi x^2}$ , ses dérivées  $G^{(n)}$  ( $n \geq 1$ ) sont des ondelettes à  $n$  moments nuls.

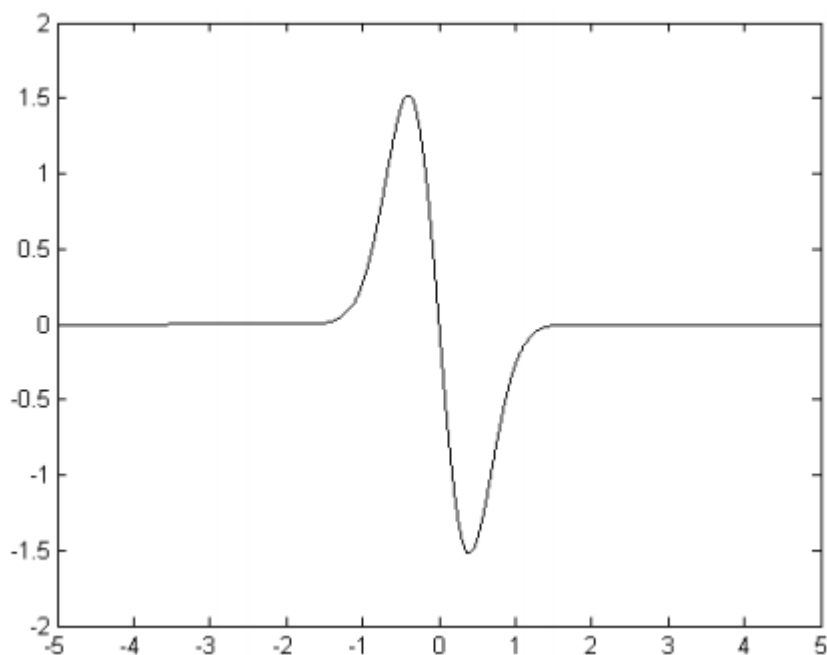


Figure 6. La première dérivée de G.

**Proposition 1.2.1.** [6] Soit  $\psi$  une ondelette de  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ , alors la condition :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} |x\psi(x)|dx < +\infty.$$

équivalent à

$$C_{\psi} < +\infty.$$

### 1.2.1 La transformée en ondelettes continue

**Définition 1.2.3.** Analyser une fonction de carré sommable en ondelettes consiste à calculer l'ensemble de ses produits scalaires avec les ondelettes de la famille [2]. Les nombres obtenus sont appelés coefficients d'ondelettes, et l'opération associant à une fonction ses coefficients d'ondelettes est appelée transformée en ondelettes .

La Transformée en Ondelette continue (TOC) d'une fonction  $f$  est définie comme [3] :

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\bar{\psi}_{a,b}(\tau)d\tau \text{ avec } a > 0. \tag{1.25}$$

où :

$$\psi_{a,b}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{\tau - b}{a}\right). \tag{1.26}$$

représente une famille de fonctions,  $\psi_{a,b}$ , appelée ondelette analysante dérivant toutes d'une fonction  $\Psi$ .  $a$  est le paramètre d'échelle,  $b$  est le paramètre de position ou de translation et  $\bar{\psi}_{a,b}$  est le complexe conjugué de  $\psi_{a,b}$ .

**Proposition 1.2.2.** [6] Considérons une ondelette  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ . Alors pour toute  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , on a La formule de conservation d'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |Wf(x, a)|^2 dx \frac{da}{a^2}.$$

La formule d'inversion :

$$f(x) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(y, a) \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{x - y}{a}\right) dy \frac{da}{a^2}.$$

cette égalité est dans  $L^2(\mathbb{R})$ .

Plus de détail et des propriétés sur la transformée continue en ondelette, on peut les trouver dans [3].

# Chapitre 2

## Analyse Multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

L'analyse multirésolution (AMR) est une notion mathématique apparue depuis 1985 par Stéphane Mallat et Yves Meyer. Cette notion a été considéré comme un outil à extraire des bases orthonormées d'ondelettes, dont le signal peut être représenté par une limite de ses approximations à différents niveaux ou à des échelles successives. En effet, l'analyse multirésolution a donné le soutien au développement de théorie des signaux tel que, la plupart des algorithmes de traitement du signal et de l'image se basent basiquement sur la décomposition en ondelettes, citons par exemple l'algorithme de Mallat pour la compression d'un signal (voir [8]), et celui de Donoho (voir [10]). Dans ce chapitre, nous allons savoir le concept et les propriétés principales de l'analyse multirésolution.

### 2.1 Définitions et quelques exemples

Dans cette section on va donner la définition et quelques exemples de (AMR).

#### 2.1.1 Analyse multirésolution

**Définition 2.1.1.** [10] *Une analyse multirésolution est un partitionnement de l'espace des fonctions de  $L^2(\mathbb{R})$  par une famille croissante  $(V_j \subset V_{j+1})$  de sous-espaces vectoriels  $V_j$  emboîtés les uns dans les autres tels que le passage de l'un à l'autre soit le résultat d'un changement d'échelle. Ces sous-espaces sont appelés des espaces d'approximation à l'échelle  $(j; j \in \mathbb{Z})$  et vérifient les propriétés suivantes :*

a)

$$\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}). \quad (2.1)$$

b)

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0. \quad (2.2)$$

c) Les espaces sont attachés entre eux tel que le passage de l'un à l'autre soit le résultat d'un changement d'échelle (Zoom) . comme le cas dyadique on aura

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}. \quad (2.3)$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_0 \iff f(x - k) \in V_0. \quad (2.4)$$

d) Il y a une fonction  $\theta_0 \in V_0$  telle que  $\theta_0 = \{\theta(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$  construit une base de Riesz de  $V_0$  .

Rappelons la définition de la base de Riesz.

**Définition 2.1.2.** [10] Une suite  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  d'éléments indépendants d'un espace de Hilbert  $H$ , constituent une base de Riesz de  $H$ , si les propriétés suivantes sont satisfaites :

i) L'ensemble de combinaisons linéaires finies de  $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est dense dans  $H$ . i.e.

$$\left\{ \sum_{k \in K} \alpha_k e_k, |K| < +\infty \text{ et } \alpha_k \in \mathbb{C} \right\}. \quad (2.5)$$

est dense dans  $H$ .

ii) Il existe deux constantes  $A$  et  $B$  avec  $B > A > 0$ , telle que : Pour toute suite finie  $\{\alpha_k\}_{k \in K}$ , on a ;

$$A \left( \sum_{k \in K} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{k \in K} \alpha_k e_k \right\|_H \leq B \left( \sum_{k \in K} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.6)$$

**Définition 2.1.3.** Une analyse multirésolution est dite  $r$ -régulière ( $r \in \mathbb{N}$ ), si l'on peut choisir la fonction  $\theta$  soit  $r$ -régulière. i.e.

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0; \forall 0 \leq k \leq r, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$|\theta^{(k)}(x)| \leq C_m (1 + |x|)^{-m}.$$

Dans toute la suite, on utilise l'expression (une analyse multirésolution régulière) au lieu de l'analyse multirésolution 0-régulière.

**Exemple 2.1.** [9]

La fonction  $\theta = \mathbf{1}_{[0,1]}$  et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par :

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} f|_{\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]} = c^{te} \right\}.$$

**Exemple 2.2.** [9]

La fonction  $\theta$  définie par :

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par :

$$V_j = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} f|_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}] [= P_k]} \\ \text{où } P_k \text{ est un polynôme de degré 1} \end{array} \right\}.$$

[10]

**Exemple 2.3.** (Spline d'ordre  $m$ ) La fonction  $\theta$  définie par :

$$\theta = \mathbf{1}_{[0,1[} * \mathbf{1}_{[0,1[} * \dots * \mathbf{1}_{[0,1[} ((m + 1) \text{ convolutions}).$$

et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par :

$$V_j = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^{m-1}(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} f|_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}] [= P_m]} \\ \text{où } P_m \text{ est un polynôme de degré } m \end{array} \right\}.$$

**Lemme 2.1.1.** Soit  $v$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ . Alors, la suite  $\{v(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée si et seulement si :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{v}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

**Lemme 2.1.2.** Soit  $\theta$  une fonction régulière, alors la série :  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2$  de classe  $C^\infty$  sur  $[0, 2\pi]$  et on a :

$$\frac{d^\ell}{d\omega^\ell} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{d^\ell}{d\omega^\ell} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2, \forall \omega \in [0, 2\pi].$$

et

$$\sup_{\omega \in [0, 2\pi]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(\omega + 2k\pi)|^2 < \infty.$$

**Démonstration du lemme 2.1.1 :** Remarquons d'abord que Pour tout  $k, \ell \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$\int_{\mathbb{R}} v(x - k)v(x - \ell)dx = \delta_{k,\ell} \Leftrightarrow \forall k, \int_{\mathbb{R}} v(x)v(x - k)dx = \delta_{0,k}.$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}} v(x-k)v(x-\ell)dx = \delta_{k,\ell} \Leftrightarrow q(k) = \delta_{0,k}.$$

où  $q = v * \tilde{v}$ ,  $\tilde{v}(x) = v(-x)$ . D'après la formule de sommation de Poisson, les coefficients de Fourier de la série  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{q}(\omega + 2k\pi)$  sont  $\{q(-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , ainsi :  $\{v(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est orthonormée si et seulement si

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{v}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

**Définition 2.1.4.** on appelle fonction d'échelle la fonction  $\varphi$  telle que  $\varphi_0 = \{\varphi(-k), k \in \mathbb{Z}\}$  construit une base orthonormée de  $V_0$ .

**Remarque 2.1.1.** la condition (d) garantit qu'on peut extraire une fonction d'échelle .

**Convention :** Nous supposons que toutes les fonctions d'échelle de la définition (2.1.4) sont fonctions réelles avec

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt = \hat{\varphi}(0) = 1.$$

**Exemple 2.4.** La fonction  $\theta$  définie dans l'exemple (2.1) est une base orthonormée de  $V_0$  car Pour tout  $f \in V_0$ , on a

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)\chi_{[k, k+1[}.$$

et

$$\hat{\varphi}(\omega) = \begin{cases} \frac{i}{\omega} (e^{-i\omega} - 1) & \text{si } \omega \neq 0. \\ 1 & \text{si } \omega = 0. \end{cases}$$

**Exemple 2.5.** Dans l'exemple (2.2) la fonction  $\theta$  est une base de Riesz de  $V_0$  mais elle n'est pas une base orthonormée.

**Exemple 2.6. (Analyse Multirésolution de Haar)**

Les sous espaces  $V_j$  de Haar forme d'une analyse multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ . Ces espaces sont imbriquée, et les espaces  $V_j$  satisfaits de la densité et des propriétés de séparation donnée dans définition 2.1.1.

**Proposition 2.1.1.** Soit  $\varphi$  une fonction d'échelle de  $C^r(\mathbb{R})$  à support compact. Alors,  $\varphi$  est  $r$ -régulière.

**Démonstration de la proposition 2.1.1 :**

Posons

$$\text{supp } \varphi \subset [-K, K], K > 0 \text{ et .}$$

$$\|\varphi^{(k)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = M_k, \forall 0 \leq k \leq r.$$

il vient :

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq C_{m,k}(1 + |x|)^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq k \leq r.$$

où  $C_{m,k} = M_k(1 + K)^m$ . Si on a posé  $C_m = \sup_{0 \leq k \leq r} C_{m,k}$ , on trouve que

$$|\varphi^{(k)}(x)| \leq C_m(1 + |x|)^{-m} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \forall 0 \leq k \leq r.$$

et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

La proposition suivante montre qu'on peut obtenir une base orthonormée de  $V_j$  à partir d'une fonction d'échelle.

**Proposition 2.1.2.** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution et  $\varphi$  une fonction d'échelle associée à  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ . Alors, la suite  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_j$ , où*

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k). \quad (2.8)$$

### Démonstration de la proposition 2.1.2

Pour tout  $k, m \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,m} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 2^j \varphi(2^j x - k) \overline{\varphi(2^j x - m)} dx.$$

En faisant le changement de variable ( $y = 2^j x$ ), il vient :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,m} \rangle &= \langle \varphi_{0,k}, \varphi_{0,m} \rangle \\ &= \delta_{k,m}. \end{aligned}$$

d'où  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  sont éléments orthonormés de  $V_j$ . D'autre part, Pour tout  $f \in V_j$ , la fonction

$D_{2^{-j}} f \in V_0$  et :

$$D_{2^{-j}} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(2^{-j} x) \overline{\varphi(x - k)} dx \right) \varphi(\cdot - k).$$

d'où

$$D_{2^j} D_{2^{-j}} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} = f.$$

donc,  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  engendre  $V_j$ . Par conséquent, la suite  $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $V_j$ .

**Remarque 2.1.2.** *L'approximation d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  au niveau  $j$  est obtenue par la projection orthogonale de  $f$  sur  $V_j$ . Ceci peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}.$$

**Corollaire 2.1.1.** *Soit  $\varphi$  une fonction d'échelle associée à une analyse multirésolution  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ . Alors, il existe une suite des coefficients  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  appelées réponsesimpulsionnelles, telle que*

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k).$$

**Démonstration du corollaire 2.1.1**

On a d'abord,  $V_0 \subset V_1$ . D'après la proposition précédente,

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle \sqrt{2} \varphi(2x - k), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc, il suffit de prendre

$$h_k = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

**Proposition 2.1.3.** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière, alors les réponsesimpulsionnelles  $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  vérifiant :*

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \\ |h_k| \leq C_m (1 + |k|)^{-m}. \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.4.** *La suite  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est croissante si et seulement sil existe une fonction  $H_0 \in L^2_{2\pi\text{-per}}$  vérifiant*

$$\hat{\varphi}(\xi) = H_0 \left( \frac{\xi}{2} \right) \hat{\varphi} \left( \frac{\xi}{2} \right) \quad p.p. \quad (2.9)$$

**Corollaire 2.1.2.** *Soit  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  telle que  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une famille orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . Alors toute fonction  $H_0 \in L^2_{2\pi\text{-per}}$  satisfaisant à la condition (2.9) vérifie*

$$|H_0(\xi)|^2 + |H_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad p.p. \quad (2.10)$$

**Démonstration.** En utilisant (2.7), (2.9) et que  $H_0$  est  $2\pi$ -périodique, on obtient que pour

presque tout  $\xi$ ,

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2\xi + 2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H_0(\xi + k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + k\pi)|^2 \\
 &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} |H_0(\xi + 2p\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + 2p\pi)|^2 + \sum_{q \in \mathbb{Z}} |H_0(\xi + (2q+1)\pi)|^2 |\hat{\varphi}(\xi + (2q+1)\pi)|^2 \\
 &= |H_0(\xi)|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + 2p\pi)|^2 + |H_0(\xi + \pi)|^2 \sum_{q \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + \pi + 2q\pi)|^2 \\
 &= |H_0(\xi)|^2 + |H_0(\xi + \pi)|^2
 \end{aligned}$$

**Théorème 2.1.1.** *Une fonction  $H_0$  engendre une analyse multirésolution régulière si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes :*

$P_1)$   $H_0$  est  $2\pi$ -périodique et régulière.

$P_2)$   $H_0(0) = 1$ .

$P_3)$   $|H_0(\omega)|^2 + |H_0(\omega + \pi)|^2 = 1, \forall \omega \in \mathbb{R}$ .

$P_4)$  Il existe un compact  $K$  congru à  $P = [-\pi, \pi], 0 \in \text{intérieure}(K)$ , tel que

$$\forall \omega \in K, \forall j \geq 1; H_0(2^{-j}\omega) \neq 0.$$

**Définition 2.1.5.** *Un compact est dit congru à  $P = [-\pi, \pi]$  modulo  $2\pi$  si et seulement si*

$$\forall \omega \in P, \exists ! \zeta \in K, \text{ tel que } : (\omega - \zeta) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Une propriété immédiate de  $K$  est alors le fait que si  $f$  est dans  $L^1_{loc}$  et  $2\pi$ -périodique, alors

$$\int_K f = \int_P f.$$

La démonstration de ce théorème nécessite le lemme suivant :

**Lemme 2.1.3.** *Sous les hypothèses du théorème ci-dessus et nous posons :*

$$h_k(\omega) = \prod_{j=1}^k H_0(2^{-j}\omega) \chi_{2^k K}.$$

et

$$M_k(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\omega| > 2^k \pi, \\ \prod_{j=1}^k M(2^{-j}\omega) & \text{si } |\omega| \leq 2^k \pi \end{cases}$$

où  $M(\omega) = |H_0(\omega)|^2$ . Alors,  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  :

$$I_k^n = \int_{\mathbb{R}} |h_k(\omega)|^2 e^{in\omega} d\omega = \int_{\mathbb{R}} M_k(\omega) e^{in\omega} d\omega = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases}$$

**Proposition 2.1.5.** *Soit  $\varphi$  une ondelette père et  $H_0 \in L^2_{2\pi- \text{per}}$  satisfaisant à la condition (2.10).*

*Alors, en posant*

$$H_1(\xi) = \overline{H_0(\xi + \pi)} e^{-i\xi}. \quad (2.11)$$

$$\hat{\psi}(\xi) = H_1\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \quad (2.12)$$

*on obtient que la fonction  $\psi$  (qui se retrouve à partir de  $\hat{\psi}$  par transformée de Fourier inverse) est une ondelette mère.*

**Démonstration.** D'abord,  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une famille orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . Pour le vérifier, il faut voir que

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1 \quad \text{p.p. } \xi.$$

Par définition de  $\hat{\psi}$  et de  $H_1$ , la somme de gauche est égale à

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H_1\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \right|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| H_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi + k\pi\right) \right|^2 \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \right|^2.$$

En sommant sur les indices pairs puis sur les indices impairs et en utilisant que  $H_0$  est  $2\pi$ -périodique, on voit qu'elle est aussi égale à

$$\left| H_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right) \right|^2 + \left| H_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 \sum_{q \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + \pi + 2q\pi\right) \right|^2.$$

Puisque la fonction  $\varphi$  vérifie la condition (2.7), on en déduit que pour presque tout  $\xi$ , cette quantité est aussi égale à

$$\left| H_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right|^2 + \left| H_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2.$$

qui égale à 1 pour presque tout  $\xi$ .

Montrons maintenant que les fonctions  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  appartiennent à  $W_0$  c'est-à-dire au supplémentaire orthogonal de  $V_0$  dans  $V_1$ . D'abord, on voit avec la définition de  $\hat{\psi}$  que  $\psi \in V_1$  (cf. caractérisation de l'espace  $\hat{V}_1$ ). Il s'en suit que pour tout entier  $k$ ,  $\psi_{0,k} \in V_1$  car

$$\widehat{\psi_{0,k}}(\xi) = e^{-ik\xi} \hat{\psi}(\xi).$$

Ensuite il faut montrer que les  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  sont orthogonales à  $V_0$ . Puisque  $(\varphi_{0,l})_{l \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_0$ , il suffit de montrer que les  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  sont orthogonales aux  $(\varphi_{0,l})_{l \in \mathbb{Z}}$ . Posons  $g = \varphi * \tilde{\psi}$  où  $\tilde{\psi}(x) = \overline{\psi(-x)}$ . On calcule sa transformée de Fourier :

$$\hat{g} = \hat{\varphi} \hat{\psi} = \hat{\varphi} \overline{\hat{\psi}}.$$

Puisque  $\varphi$  et  $\psi$  sont de carré intégrable,  $\hat{g}$  est intégrable et on peut donc lui appliquer la formule sommatoire de Poisson : la série

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(\xi + 2k\pi).$$

converge pour presque tout  $\xi$  et définit une fonction  $S(\xi)$  de  $L^1_{2\pi\text{-per}}$  dont les coefficients de Fourier sont donnés par

$$c_k(S) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{g}](-k) = g(-k).$$

Dans ces conditions, on a les équivalences suivantes :

Les  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  sont orthogonales aux  $(\varphi_{0,l})_{l \in \mathbb{Z}}$

$$\iff \forall k, l \in \mathbb{Z}, \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-k) \overline{\psi(x-l)} dx = 0$$

$$\iff \forall k \in \mathbb{Z}, \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \overline{\psi(x-k)} dx = 0.$$

$$\iff \forall k \in \mathbb{Z}, \varphi * \tilde{\psi}(k) = 0$$

$$\iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{g}(\xi + 2k\pi) = 0 \quad \text{p.p. } \xi$$

$$\iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)} = 0 \quad \text{p.p. } \xi$$

on obtient que pour presque tout  $\xi$ ,

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{\psi}(\xi + 2k\pi)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) H_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) H_1\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \right|^2 H_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{H_1\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)} \\ &= H_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{H_1\left(\frac{\xi}{2}\right)} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right) \right|^2 \\ &+ H_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{H_1\left(\frac{\xi}{2}\right)} + H_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{H_1\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \\ &= H_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \exp\left(i\frac{\xi}{2}\right) H_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) + H_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \exp\left(i\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)\right) H_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \exp\left(i\frac{\xi}{2}\right) H_0\left(\frac{\xi}{2}\right) H_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) - \exp\left(i\frac{\xi}{2}\right) H_0\left(\frac{\xi}{2}\right) H_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ce qui prouve bien que les  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  sont orthogonales aux  $(\varphi_{0,l})_{l \in \mathbb{Z}}$ . Pour finir, il faut montrer que les fonctions  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forment une base hilbertienne de  $W_0$ . Il faut montrer que toute fonction

$f \in W_0$  se décompose en

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi(x - k) \quad \text{où} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty.$$

ou encore, après transformée de Fourier, qu'on a

$$\hat{f}(\xi) = \nu(\xi) \hat{\psi}(\xi).$$

où  $\nu \in L^2_{2\pi\text{-per}}$ . Fixons donc  $f \in W_0$ . On va s'inspirer du raisonnement effectué ci-dessus pour montrer que les  $\psi_{0,k}$  sont dans  $W_0$  afin de traduire exactement l'appartenance de  $f$  à  $W_0$  sur la forme de sa transformée de Fourier. D'abord, puisque  $f \in V_1$ , il existe une fonction  $H \in L^2_{2\pi\text{-per}}$  telle que

$$\hat{f}(\xi) = H\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad \text{p.p. } \xi.$$

En posant  $h = \varphi * \tilde{f}$ , et en utilisant la formule sommatoire de Poisson avec  $\hat{h}$ , on obtient que l'orthogonalité de  $f$  à  $V_0$  se traduit par

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{f}(\xi + 2k\pi)} = 0 \quad \text{p.p. } \xi.$$

où la série de gauche converge absolument pour presque tout  $\xi$ . D'autre part, on a aussi pour presque tout  $\xi$

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(\xi + 2k\pi) \overline{\hat{f}(\xi + 2k\pi)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) H_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) H\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \right|^2 H_0\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right) \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)} \\ &= H_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{m\left(\frac{\xi}{2}\right)} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + 2p\pi\right) \right|^2 \\ & \quad + H_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2} + \pi + 2q\pi\right) \right|^2 \\ & \quad + H_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{H\left(\frac{\xi}{2}\right)} + H_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \overline{H\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)}. \end{aligned}$$

En passant aux conjugués et en posant  $\zeta = \frac{\xi}{2}$ , on obtient

$$H(\zeta) \overline{H_0(\zeta)} + H(\zeta + \pi) \overline{H_0(\zeta + \pi)} = 0 \quad \text{p.p. } \zeta.$$

On voit aussi que pour presque tout  $\zeta$ , au plus l'un des deux nombres  $H_0(\zeta)$  et  $H_0(\zeta + \pi)$  est nul.

On peut donc poser

$$\lambda(\zeta) = \begin{cases} -\frac{H(\zeta+\pi)}{H_0(\zeta)} & \text{si } H_0(\zeta) \neq 0 \\ \frac{H(\zeta)}{H_0(\zeta+\pi)} & \text{si } H_0(\zeta + \pi) \neq 0. \end{cases}$$

de sorte que

$$H(\zeta) = \lambda(\zeta) \overline{H_0(\zeta + \pi)} \text{ p.p. } \zeta.$$

Puisque  $H$  et  $H_0$  sont  $2\pi$ -périodiques, on obtient que  $\lambda$  l'est aussi et qu'elle vérifie de plus

$$\lambda(\zeta) + \lambda(\zeta + \pi) = 0 \quad \text{p.p. } \zeta.$$

En multipliant par  $e^{i\zeta}$ , il vient

$$e^{i\zeta} \lambda(\zeta) - e^{i\zeta+i\pi} \lambda(\zeta + \pi) = 0 \quad \text{p.p. } \zeta.$$

ou encore en remplaçant  $\zeta$  par  $\frac{\xi}{2}$ ,

$$\exp\left(i\frac{\xi}{2}\right) \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) = \exp\left(i\frac{\xi+2\pi}{2}\right) \lambda\left(\frac{\xi+2\pi}{2}\right) \text{ p.p. } \xi.$$

ce qui exprime que la fonction

$$\nu(\xi) = \exp\left(i\frac{\xi}{2}\right) \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

est  $2\pi$ -périodique. En remplaçant dans l'expression de la transformée de Fourier de  $f$ , il en résulte que pour presque tout  $\xi$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) \overline{H_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \nu(\xi) \exp\left(-i\frac{\xi}{2}\right) \overline{H_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \nu(\xi) \hat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Reste à voir que  $\int_0^{2\pi} |\nu(\xi)|^2 d\xi < \infty$ . On sait que  $H \in L^2_{2\pi\text{-per}}$  donc

$$\int_0^{2\pi} |m(\zeta)|^2 d\zeta < \infty.$$

Mais d'autre part,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |H(\zeta)|^2 d\zeta &= \int_0^{2\pi} |\lambda(\zeta)|^2 |H_0(\zeta + \pi)|^2 d\zeta \\ &= \int_0^\pi (|\lambda(\zeta)|^2 |H_0(\zeta + \pi)|^2 + |\lambda(\zeta + \pi)|^2 |H_0(\zeta)|^2) d\zeta \\ &= \int_0^\pi |\lambda(\zeta)|^2 (|H_0(\zeta)|^2 + |H_0(\zeta + \pi)|^2) d\zeta \\ &= \int_0^\pi |\lambda(\zeta)|^2 d\zeta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left| \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 d\xi \\ &= 2 \int_0^{2\pi} |\nu(\xi)|^2 d\xi.\end{aligned}$$

où dans la troisième égalité, on a utilisé que  $\lambda(\zeta)$  et  $\lambda(\zeta + \pi)$  ont même module car on a vu que

$$\lambda(\zeta) + \lambda(\zeta + \pi) = 0 \quad \text{p.p. } \zeta.$$

Finalement,

$$\hat{f}(\xi) = \nu(\xi)\hat{\psi}(\xi) \quad \text{p.p. } \xi.$$

avec  $\nu \in L^2_{2\pi\text{-per}}$ , ce qui montre bien que  $f \in W_0$  et achève la preuve.

# Chapitre 3

## Construction des ondelettes

L'objectif de ce chapitre est de présenter un outil récent de l'analyse mathématique : la théorie des ondelettes. On donnera d'abord l'idée générale de la construction et les résultats fondamentaux de la théorie. On présentera ensuite quelques procédés pratiques de construction d'ondelettes et plusieurs des exemples de bases d'ondelettes.

### 3.1 La construction dans le cas général

Au départ, on choisit une fonction  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ , telle que les translatées

$$\varphi_{0,k} : x \mapsto \varphi(x - k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

forment un système orthonormé de  $L^2(\mathbb{R})$  [14]. On note  $V_0$  le sous-espace fermé qu'elles engendrent

$$V_0 = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{0,k}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty \right\}.$$

Pour nous aider à comprendre la situation qui va suivre, introduisons pour tout entier  $j$  l'opérateur de dilatation  $\Delta_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  qui à une fonction  $f$  associe la fonction  $x \mapsto 2^{j/2} f(2^j x)$ . On voit que  $\Delta_j$  est une bijection linéaire isométrique (changement de variable) de réciproque  $\Delta_{-j}$ . Plus précisément, c'est un automorphisme de l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  et en particulier  $\Delta_j$  conserve le produit scalaire.

Dans ces conditions, pour tout entier  $j$ , on note  $V_j$  l'image de  $V_0$  par l'application  $\Delta_j$ , qui est donc un sous-espace fermé de  $L^2(\mathbb{R})$ , et on introduit les translatées-dilatées  $\varphi_{j,k} = \Delta_j(\varphi_{0,k})$  de la fonction  $\varphi$  :

$$\varphi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2} \varphi(2^j x - k). \quad (3.1)$$

Par construction  $\Delta_j$  réalise un isomorphisme canonique de  $V_0$  sur  $V_j$ . Puisque  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $V_0$ , on en déduit que les fonctions  $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  forme une base hilbertienne de  $V_j$ . Ainsi :

$$V_j = \Delta_j(V_0) = \{h \in L^2(\mathbb{R}) \mid \exists f \in V_0, h(x) = f(2^j x) p \cdot p\}. \quad (3.2)$$

Pour reprendre la même construction que dans le paragraphe précédent, il faudra que la fonction  $\varphi$  soit choisie de telle sorte que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_j \subset V_{j+1}. \quad (3.3)$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}) \quad (3.4)$$

Une telle fonction  $\varphi$  est appelée une **ondelette père** et la suite des sous-espaces fermés  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  est alors appelée un filtre multirésolution de  $L^2(\mathbb{R})$ . Remarquons au passage qu'à l'aide des applications  $\Delta_j$ , on voit que la première condition est vérifiée si et seulement si  $V_0 \subset V_1$ .

Pour tout entier  $j$ , on définit ensuite  $W_j$  comme étant le supplémentaire orthogonal de  $V_j$  dans  $V_{j+1}$ . On a alors pour tout  $N \geq 1$ ,

$$V_N = V_0 \oplus \left( \bigoplus_{j=0}^{N-1} W_j \right).$$

Puisque  $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ , on obtient que le sous-espace vectoriel engendré par  $V_0$  et les  $W_j (j \geq 0)$  l'est aussi. On a donc une décomposition en somme hilbertienne :

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \left( \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} W_j} \right).$$

Si pour tout entier  $j$ ,  $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  désigne une base hilbertienne de  $W_j$ , on obtient alors que les fonctions  $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}, (\psi_{j,k})_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}}$  forment une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R})$  : toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se décompose en

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_{0,k} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}. \quad (3.5)$$

où la convergence des séries a lieu dans  $L^2(\mathbb{R})$ . L'écriture précédente est alors appelée **développement multirésolution** de  $f$ .

De plus, si la fonction  $\psi$  est choisie de telle sorte que pour tout entier  $j$ , les fonctions translatées-dilatées

$$\psi_{j,k} : x \mapsto 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

forment une base de  $W_j$ , on dit que  $\psi$  est une ondelette mère, et l'écriture (3.5) est appelée développement de  $f$  en ondelettes. Remarquons au passage que la condition précédente est vérifiée dès que  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base hilbertienne de  $W_0$ . En effet, on a vu que  $V_j$  était l'image de  $V_0$  par  $\Delta_j$ . Par conservation du produit scalaire, on en déduit  $W_j = \Delta_j(W_0)$ . Mais la définition des translatées dilatées de  $\psi$  peut aussi s'écrire  $\psi_{j,k} = \Delta_j(\psi_{0,k})$ . Ainsi, le fait que  $(\psi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  soit une base de  $W_0$  implique que pour tout entier  $j$ ,  $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base de  $W_j$ . En fait, toute propriété relative à la structure hilbertienne qui est valable dans  $V_0$  se transmet aux sous-espaces dilatés  $V_j$ . Enfin, dans l'écriture (3.5), chaque entier  $j$  correspond à un niveau de résolution. C'est pourquoi l'expression "niveau de résolution  $j$ " fera référence à l'espace  $W_j$  ou plus généralement aux fonctions  $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$  et aux coefficients  $(\beta_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ .

Les coefficients de développement en ondelettes se retrouvent bien sur par les formules

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \langle f, \varphi_{0,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi_{0,k}(x)} dx, \\ \beta_{j,k} &= \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx. \end{aligned}$$

La partie

$$f - p_{V_0}(f) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j,k} \psi_{j,k}.$$

est appelée partie homogène du développement de  $f$ . On voit que les coefficients du développement en ondelettes ne sont affectés que par le comportement de  $f$  sur le support de la fonction avec laquelle on prend le produit scalaire. Ainsi, le développement en ondelettes ne se contente pas d'analyser la fonction suivant différents niveaux de résolution, il permet aussi d'en faire ressortir des détails locaux!

**Remarque 3.1.1.** *Le fait d'avoir pris le sous-espace  $V_0$  comme "espace de référence" est tout à fait arbitraire. En effet, on voit que pour un entier  $n_0 \in \mathbb{Z}$  fixé,  $\bigcup V_n$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$  si et seulement si  $V_{n_0} \oplus \bigoplus_{j \geq n_0} W_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$  (*car pour tout  $n > n_0$ ,  $V_n = V_{n_0} \oplus W_{n_0} \oplus W_{n_0+1} \oplus \dots \oplus W_{n-1}$* ). De plus, comme la suite des  $V_n$  croissante avec  $n$ , on a pour tous entiers  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $\bigcup V_n$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\bigcup_n V_n$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ . 1 L'indice de départ n'a donc aucune importance : si  $n_0$  et  $n_1$  sont deux entiers relatifs quelconques,  $\bigcup V_n$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$  si et seulement si  $V_{n_1} \oplus \bigoplus_{j > n_1} W_j$  est dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ .*

C'est pourquoi dans la construction, sans perte de généralité, on cherchera les conditions pour que  $\bigcup_{n \geq 0} V_n$  soit dense dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Ces conditions garantiront alors le développement en ondelettes d'une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  quelconque, et ce en commençant à partir de n'importe quel niveau de résolution :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{n_0, k} \varphi_{n_0, k} + \sum_{j \geq n_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j, k} \psi_{j, k}.$$

Au passage, remarquons qu'il n'est en fait pas nécessaire de faire appel à un sous-espace de référence : en effet, il est possible de montrer (sous les mêmes hypothèses) que le sous-espace  $\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$  est aussi dense dans  $L^2(\mathbb{R})$  et par conséquent, toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R})$  se décompose sous la forme

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_{j, k} \psi_{j, k}.$$

**En résumé**, on peut énoncer le principe général de construction suivant :

1. Choisir une ondelette père, c'est-à-dire une fonction  $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$  telle que

$$(\varphi_{0, k})_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est une famille orthonormée de } L^2(\mathbb{R}). \quad (3.6)$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad V_j \subset V_{j+1}. \quad (3.7)$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}). \quad (3.8)$$

2. Choisir une ondelette mère, c'est-à-dire une fonction  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  telle que

$$(\psi_{0, k})_{k \in \mathbb{Z}} \text{ est une base hilbertienne de } W_0. \quad (3.9)$$

### **Théorème 3.1.1. (Mallat, Meyer)**

Etant donnée une analyse multirésolution régulière. Alors, il existe une ondelette  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  telle que si l'on introduit les fonctions  $\psi_{j, k}$  définie par :

$$\psi_{j, k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (3.10)$$

la famille  $\{\psi_{j, k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . Par conséquent, pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , il existe une unique décomposition :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j, k} \psi_{j, k}. \quad (3.11)$$

où  $d_{j, k} = \langle f, \psi_{j, k} \rangle$ .

Donnons d'abord les deux lemmes suivants :

**Lemme 3.1.1.** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution. Alors, on a les propriétés suivantes :*

i). *Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , il existe un sous-espace de  $V_{j+1}$  notée  $W_j$ , tel que*

$$V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j.$$

ii)  $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} W_k$ .

iii) *Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on a  $f \in W_j$  si et seulement si  $D_2 f \in W_{j+1}$ .*

iv) *Pour tout  $f \in W_0$  et  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $f(\cdot - k) \in W_0$ .*

**Lemme 3.1.2.** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière. On définit  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  par :*

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sqrt{2} \varphi(2x - k), \quad g_k = (-1)^k h_{1-k}. \quad (3.12)$$

*Alors, la suite  $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_0$ .*

### Démonstration du théorème 3.1.1

D'après le lemme 3.1.2  $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $W_0$ , ensuite nous utilisons le lemme

3.1.1, on trouve que la suite  $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  est une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Notons que  $\psi$  n'est pas unique, il existe une autre ondelette  $\psi_0$  associée à  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  définie par :

$$\psi_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-k} h_{1-k} \sqrt{2} \varphi(2x - k).$$

dont,  $\hat{\psi}_0(\omega) = G_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$  où  $G_0(\omega) = e^{-i\omega} \overline{H(\omega + \pi)}$ .

**Théorème 3.1.2.** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution régulière. Alors, les éléments  $\{g_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  vérifient :*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |g_k|^2 = 1.$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k = 0,$$

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k g_{k-2n} = \delta_{0,n} \forall n \in \mathbb{Z}.$$

**Théorème 3.1.3.** *Soit  $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$  une analyse multirésolution et  $\varphi, \psi$  la fonction d'échelle et l'ondelette associées. On pose :*

$$c_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle, \quad d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$$

$$a_k = h_{-k}, \quad b_k = (-1)^k h_{k+1}.$$

pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}$  et  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_{\ell-2k} c_{j+1,\ell}. \\ d_{j,k} &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^\ell h_{1-\ell+2k} c_{j+1,\ell}. \\ c_{j,k} &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} a_{2\ell-k} c_{j-1,\ell} + b_{2\ell-k} d_{j-1,\ell}. \end{aligned}$$

**Théorème 3.1.4.** Soit  $\psi$  une ondelette à  $N$  moments nuls telle que  $\text{supp } \psi \subset I, I$  est un intervalle. Pour tout  $f \in C^N(\mathbb{R})$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$|d_{j,k}| \leq C 2^{-j(N+\frac{1}{2})}, d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle.$$

pour tout  $j, k \in \mathbb{Z}$ .

**Démonstration du théorème 3.1.4 :**

Pour montrer cette majoration il nous suffit d'appliquer la formule de Taylor à la fonction  $f$  autour du centre de l'ondelette  $\psi_{j,k}$ . Si on a posé  $x_0 = \frac{k}{2^j}$ , on trouve que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\ell!} f^{(\ell)}\left(\frac{k}{2^j}\right) \left(x - \frac{k}{2^j}\right)^\ell + \frac{1}{N!} f^{(N)}(y_0) \left(x - \frac{k}{2^j}\right)^N \\ &= \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\ell! 2^{j\ell}} f^{(\ell)}\left(\frac{k}{2^j}\right) (2^j x - k)^\ell + \frac{1}{N! 2^{jN}} f^{(N)}(y_0) (2^j x - k)^N. \end{aligned}$$

Quand on a fait le produit scalaire de  $f$  avec  $\psi_{j,k}$ , la somme de termes polynômiaux disparaît, et il ne reste que

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \frac{1}{N! 2^{jN}} \int_{\mathbb{R}} f^{(N)}(y_0) (2^j x - k)^N 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) dx.$$

En faisant le changement de variable ( $y = 2^j x - k$ ), on obtient :

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \frac{1}{N! 2^{j(N+\frac{1}{2})}} \int_I f^{(N)}(y_1) y^N \psi(y) dy.$$

Si on a posé :  $I = [-K, K], K > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \left| \int_I f^{(N)}(y_1) y^N \psi(y) dy \right| &\leq \sup_{x \in I} |f^{(N)}(x)| \int_I |y|^N |\psi(y)| dy \\ &\leq \sup_{x \in I} |f^{(N)}(x)| \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} K^N \sqrt{2K} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|d_{j,k}| \leq C 2^{-j(N+\frac{1}{2})}.$$

où  $C = \frac{K^N \sqrt{2K}}{N!} \sup_{x \in I} |f^{(N)}(x)|$ .

**Théorème 3.1.5.** *Etant donnée une analyse multirésolution régulière et  $\psi$  l'ondelette associée.*

*Alors, les trois propositions suivantes sont équivalentes :*

i) *L'ondelette  $\psi$  a  $N$  moment nuls.*

ii)  $\hat{\psi}^{(\ell)}(0) = 0, \forall \ell = 0, \dots, N - 1.$

iii)  $H^{(\ell)}(\pi) = 0, \forall \ell = 0, \dots, N - 1.$

**Démonstration du théorème 3.1.5 :**

i)  $\Rightarrow$  ii) Supposons que

$$\int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx = 0, \forall \ell = 0, \dots, N - 1.$$

D'après la formule :

$$\hat{\psi}^{(\ell)}(\omega) = (-i)^\ell \int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) e^{-i\omega x} dx, \forall \ell = 0, \dots, N - 1.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^{(\ell)}(0) &= (-i)^\ell \int_{\mathbb{R}} x^\ell \psi(x) dx \\ &= 0, \forall \ell = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

ii)  $\Rightarrow$  iii) Par récurrence :

Pour  $n = 0, H(\pi) = 0$ , vérifiée. Pour  $n = 1$ , on a

$$\hat{\psi}^{(1)}(0) = \frac{1}{2} \hat{\varphi}(0) H^{(1)}(\pi) + \left[ \left( e^{i(\pi - \frac{\omega}{2})} \hat{\varphi} \left( \frac{\omega}{2} \right) \right)^{(1)} \right]_{\omega=0} H(\pi) = 0.$$

Donc,  $H^{(1)}(\pi) = 0$  On suppose que la relation est vérifiée pour  $0, 1, \dots, n - 1. (n \leq N - 1)$  et on la prouvera pour  $n$ . Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^{(n)}(\omega) &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \left( H \left( \pi - \frac{\omega}{2} \right) \right)^{(\ell)} \left( e^{i(\pi - \frac{\omega}{2})} \hat{\varphi} \left( \frac{\omega}{2} \right) \right)^{(n-\ell)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} \left( H \left( \pi - \frac{\omega}{2} \right) \right)^{(\ell)} \left( e^{i(\pi - \frac{\omega}{2})} \hat{\varphi} \left( \frac{\omega}{2} \right) \right)^{(n-\ell)} \\ &\quad + \left( H \left( \pi - \frac{\omega}{2} \right) \right)^{(n)} e^{i(\pi - \frac{\omega}{2})} \hat{\varphi} \left( \frac{\omega}{2} \right) \end{aligned}$$

Pour  $\omega = 0$ , d'après l'hypothèse de récurrence la somme disparaît et il ne reste que

$$0 = \hat{\psi}^{(n)}(0) = - \left( -\frac{1}{2} \right)^n H^{(n)}(\pi) \hat{\varphi}(0).$$

Il vient :

$$H^{(n)}(\pi) = 0$$

On en déduit que,

$$H^{(\ell)}(\pi) = 0, \forall \ell = 0, \dots, N - 1.$$

Réciproquement, pour démontrer que *iii*) implique *ii*) et *ii*) implique *i*) il suffit d'utiliser les expressions de  $\hat{\psi}^{(\ell)}$  et  $H^{(\ell)}$ .

**Corollaire 3.1.1.** *Sous les conditions du théorème précédent, on suppose que  $\psi$  a  $N$  moments nuls. Alors, la fonction d'échelle  $\varphi$  vérifie la condition de Strang-Fix :*

$$\hat{\varphi}^{(\ell)}(2k\pi) = 0, \forall \ell = 0, \dots, N - 1 \text{ et } k \in \mathbb{Z}^*$$

**Théorème 3.1.6.** *Soit  $(V_j)_j$  une analyse multirésolution régulière. On suppose que la condition de Strang-Fix vérifiée, alors*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} k^\ell \varphi(x - k) = q_\ell(x), \forall \ell = 0, \dots, N - 1,$$

où  $q_\ell$  est polynôme de degré exactement  $\ell$ .

On a besoin du lemme :

**Lemme 3.1.3.** *Sous les conditions du théorème ci-dessus, on a l'égalité suivante :*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (x - k)^\ell \varphi(x - k) = M_\ell = \int_{\mathbb{R}} x^\ell \varphi(x) dx, \forall \ell = 0, \dots, N - 1.$$

## 3.2 Exemples[13]

### Exemple 1 : LES B-SPLINES

Les B-splines sont des ondelettes construites à partir d'une base de Riesz. Posons

$$g_1 = \chi_{[0,1]}.$$

puis

$$\forall N \geq 1, \quad g_N = g_1^{*N}.$$

On peut calculer explicitement la transformée de Fourier de  $g_N$  :

$$g_N(\xi) = \left( \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \right)^N = \left( e^{-i\xi/2} \frac{\sin \frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^N.$$

On a donc

$$|\hat{g}_N(\xi + 2k\pi)|^2 = \left| \frac{\sin\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)}{\frac{\xi}{2} + k\pi} \right|^{2N}.$$

En utilisant diverses minoration et majoration sur la fonction  $\frac{\sin(\xi)}{\xi}$ , on montre alors l'existence de deux constantes  $A, B > 0$  telles que

$$A \leq \Gamma(\xi)^2 \leq B.$$

La proposition permet d'en conclure que pour tout  $N \geq 1$ , la fonction  $g_N$  engendre une base de Riesz. Avec le procédé donné, on en déduit pour tout  $N \geq 1$  un candidat  $\varphi_N$  d'ondelette père. Par exemple, pour  $N = 1$ , on retrouve l'ondelette de Haar.

Pour  $N = 2$ , on a

$$\hat{g}_2(\xi) = e^{-i\xi} \left( \frac{\sin\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^2.$$

Il est alors possible de calculer explicitement la fonction de superposition :

$$\Gamma(\xi)^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\sin\left(\frac{\xi}{2} + k\pi\right)}{\frac{\xi}{2} + k\pi} \right|^4 = \frac{2 + \cos \xi}{3}.$$

On en déduit l'expression de la transformée de Fourier de  $\varphi_2$  :

$$\hat{\varphi}_2(\xi) = \sqrt{\frac{3}{2 + \cos \xi}} e^{-i\xi} \left( \frac{\sin\frac{\xi}{2}}{\frac{\xi}{2}} \right)^2 = \sqrt{\frac{3}{2 + \cos \xi}} \hat{g}_2(\xi).$$

A noter que l'on peut ensuite revenir au domaine temporel pour "décomposer  $\varphi_2$  dans la base de Riesz  $(g_2(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ " : il suffit pour cela d'écrire sous forme d'une série de Fourier :

$$\sqrt{\frac{3}{2 + \cos \xi}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi}.$$

La dernière expression de la transformée de Fourier de  $\varphi_2$  se lit alors dans le domaine temporel sous la forme :

$$\varphi_2(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k g_2(x - k).$$

A partir de la fonction  $\hat{\varphi}_2$ , on peut alors calculer les fonctions  $m_0$  et  $m_1$  correspondantes :

$$\begin{aligned} m_0(\xi) &= \frac{\hat{\varphi}_2(2\xi)}{\hat{\varphi}_2(\xi)} = e^{-i\xi} \left( \cos \frac{\xi}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{2 + \cos \xi}{2 + \cos 2\xi}} \\ m_1(\xi) &= \overline{m_0(\xi + \pi)} e^{-i\xi} = \left( \sin \frac{\xi}{2} \right)^2 \sqrt{\frac{2 - \cos \xi}{2 + \cos 2\xi}}. \end{aligned}$$

d'où l'expression de la transformée de Fourier de la fonction  $\psi_2$  associée à  $\varphi_2$  :

$$\hat{\psi}_2(\xi) = m_1 \left( \frac{\xi}{2} \right) \hat{\varphi} \left( \frac{\xi}{2} \right) = \frac{\sin^4 \left( \frac{\xi}{4} \right)}{\left( \frac{\xi}{4} \right)^2} \sqrt{\frac{2 - \cos \frac{\xi}{2}}{2 + \cos \xi}} \sqrt{\frac{3}{2 + \cos \frac{\xi}{2}}} e^{-i\frac{\xi}{2}}.$$

On s'aperçoit que  $m_0$  appartient bien à  $L^2_{2\pi\text{-per}}$ . Ainsi, on a bien défini une ondelette père  $\varphi_2$ . Elle est appelée ondelette père de Battle-Lemarié. On peut voir qu'elle est paire, affine par morceaux, et de support  $\mathbb{R}$  tout entier. On peut aussi montrer que l'ondelette mère  $\psi_2$  est symétrique par rapport au point  $x = \frac{1}{2}$ , affine par morceaux et de support  $\mathbb{R}$  tout entier.

### Excmple 2. ONDELETTES DE DAUBECHIES

On va s'intéresser dans cet exemple à des fonctions  $m_0$  de la forme

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi).$$

où  $N$  est un entier  $\geq 1$  et  $\mathcal{L}(\xi)$  un polynôme trigonométrique. On va alors chercher les conditions sur  $\mathcal{L}$  qui font que  $m_0$  vérifie les hypothèses du Théoreme 2.1.1 .

On doit faire la remarque importante suivante : le carré du module d'un polynôme trigonométrique est un polynôme en  $\cos(\xi)$ . Par conséquent, la fonction

$$M_0(\xi) = |m_0(\xi)|^2.$$

est un polynôme en  $\cos(\xi)$ . De la même manière

$$Q(\xi) = |\mathcal{L}(\xi)|^2.$$

est un polynôme en  $\cos(\xi)$ . On en déduit

$$M_0(\xi) = \left( \cos^2 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right)^N Q(\xi).$$

Puisque

$$\sin^2 \left( \frac{\xi}{2} \right) = \frac{1 - \cos \xi}{2}.$$

on peut écrire  $Q(\xi)$  sous la forme d'un polynôme en  $\sin^2 \left( \frac{\xi}{2} \right)$ . Ainsi.

$$M_0(\xi) = \left( \cos^2 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right)^N P \left( \sin^2 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right).$$

où  $P$  est un polynôme. Posant  $y = \sin^2 \left( \frac{\xi}{2} \right)$ , la relation s'écrit

$$(1 - y)^N P(y) + y^N P(1 - y) = 1 \quad \text{p.p. } y \in [0, 1].$$

En particulier, l'égalité est valable au moins pour une infinité dénombrable de valeurs de  $y$ , et on obtient donc une égalité formelle entre polynômes. Ingrid Daubechies a résolu cette équation en  $P$ . La fonction  $\mathcal{L}(\xi)$  se retrouve alors comme étant une "racine carrée" de  $P \left( \sin^2 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right)$  :

$$|\mathcal{L}(\xi)|^2 = P \left( \sin^2 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la technique donnée pour obtenir une ondelette père  $\varphi$ .

Les ondelettes construites à l'aide de ce procédé sont appelées ondelettes de Daubechies. On notera ces bases d'ondelettes  $D(2N)$  ou  $Db(2N)$ . L'ondelette  $D2$  est exactement l'ondelette de Haar. Les ondelettes de Daubechies vérifient les propriétés suivantes :

1.  $\text{Supp } \varphi \subset [0, 2N - 1]$ .
2.  $\text{Supp } \psi \subset [-N + 1, N]$ .
3.  $\forall l = 0, \dots, N - 1, \int_{\mathbb{R}} \psi(x)x^l dx = 0$ .
4. Dès que  $N \geq 2$ , les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  sont hölderiennes d'indice  $\lambda_N N$  avec  $\lambda_N \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, 2$ .

### Exemple 3. COIFLETTES

Un inconvénient du procédé élaboré par Ingrid Daubechies est qu'il ne permet pas a priori de garantir l'annulation de certains moments de l'ondelette père. Ce type de phénomène aboutit à des propriétés d'approximation intéressantes. C'est pourquoi on introduit maintenant les coiflettes.

Pour construire une coiflette, on cherche  $m_0$  sous la forme

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\xi).$$

où  $\mathcal{L}(\xi)$  est un polynôme trigonométrique ; et on impose les conditions

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx &= 1, \\ \int_{\mathbb{R}} x^l \varphi(x) dx &= 0 \quad \forall l = 1, \dots, N - 1, \\ \int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx &= 0 \quad \forall l = 0, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

qui équivalent à

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(0) &= 1, \\ \hat{\varphi}^{(l)}(0) &= 0 \quad \forall l = 1, \dots, N - 1 \\ \hat{\psi}^{(l)}(0) &= 0 \quad \forall l = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

En imposant ces dernières conditions et les hypothèses du Théoreme 2.1.1 , on peut montrer que la fonction  $m_0$  s'écrit

$$m_0(\xi) = 1 + (1 - e^{-i\xi})^N S(\xi).$$

où  $S(\xi)$  est un polynôme trigonométrique. Ingrid Daubechies a montré que pour  $N = 2K$ ,  $m_0$  est de la forme

$$m_0(\xi) = \left( \frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^{2K} P_1(\xi).$$

où

$$P_1(\xi) = \sum_{k=0}^{K-1} C_{K-1+k}^k \left( \sin^2 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right)^k + \left( \sin^2 \left( \frac{\xi}{2} \right) \right)^K F(\xi).$$

avec  $F(\xi)$  polynôme trigonométrique.

Les ondelettes construites à l'aide de ce procédé sont appelées coiffettes. On les note  $CK$ . Elles vérifient les propriétés suivantes :

1.  $\text{Supp } \varphi \subset [-2K, 4K - 1]$ .
2.  $\text{Supp } \psi \subset [-4K + 1, 2K]$ .
3.  $\int_{\mathbb{R}} x^l \varphi(x) dx = 0 \quad \forall l = 1, \dots, 2K - 1$ .
4.  $\int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx = 0 \quad \forall l = 0, \dots, 2K - 1$ .
5.  $\varphi$  n'est jamais paire.

## Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté d'une part, un rappel sur l'analyse de Fourier et la transformée en ondelettes telle que, les définitions, les propriétés et des exemples. D'une autre part, nous avons introduit l'aspect théorique d'analyse multirésolution (AMR) et quelques propriétés de sa fonction d'échelle et aussi les deux théorèmes standards de construction d'une AMR et d'une base d'ondelettes.

Enfin, nous pouvons adopter la théorie d'ondelettes comme un outil très important pour plusieurs disciplines

# Bibliographie

- [1] Charles C, Some wavelet applications to signal and image processing. PhD Thesis. FUNDP, 2003.
- [2] Donoho D.L., Coifman R.R. Translation-invariant denoising, Wavelets and Statistics, A. Antoniadis and G. Oppenheim, Springer-Verlag, 1995,.
- [3] Mallat S, A wavelet tour of signal processing. Academic Press, 1988.
- [4] Strang G, Wavelet transforms versus Fourier transforms. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 1993, 28 :288-305.
- [5] Jean-Pierre Antoine, Romain Murenzi, Pierre Vandergheynst, Two-Dimensional Wavelets and their Relatives, 2008 :36-39.
- [6] Roger Ceshi, Jean-Luc Gautier , Analyse de Fourier, 17-18.
- [7] Stéphane Mallat, Une exploration des signaux en ondelettes, Éditions de l'École polytechnique, 2000 :81-85.
- [8] Albert. Cohen, Ondelettes, analyses multirésolutions et autres miroirs en quadrature ; Annales de l'institut Poincaré, Analyse non linéaire, Vol. 7 , 1990.
- [9] Ali N. AKANSU, Richard A. Haddad, Multiresolution signal decomposition, second edition, Academic Press 2001.
- [10] Torrèsani, B. . Analyse continue par ondelettes, Savoir actuels - Interéditions/CNRS éditions 1995. ,36-38.
- [11] W. Härdle, G. Kerkycharian, D. Picard, A. Tsybakov : Wavelets, Approximation, and Statistical Applications, Lecture Notes in Statistics, Springer, 1998.
- [12] Albert. Cohen, Numerical analysis of wavelet methods, North Holland, Elsevier 2003.
- [13] Albert. Boggess, Francis J. Narcowich, A first course in wavelets with Fourier analysis, second edition, John Wiley et Sons, Inc. Hoboken, New Jersey 2009.

## ملخص

هذه المذكرة تخص دراسة الجزء النظري لأسس الموجات. نبدأها بلمحة حول تحليل فورييه و التحويلة الموجية، حيث نقدم سلاسل فورييه، تحويلة فورييه، تعريف الموجة، التحويلة الموجية و خصائصها الأساسية. بعد ذلك، نقدم التحليل متعدد الحلول و بعض خصائص دالته الدرجية، و كذلك نظرية ألبرت كوهان لتشكيل التحليل متعدد الحلول. أخيراً، نبرهن نظرية ماير لتكوين أساس موجي مرفقة بأمثلة تطبيقية.

**الكلمات المفتاحية:** تحليل فورييه، التحليل متعدد الحلول، موجات دوبيشيز، موجات كوفمان.

## Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude de la partie théorique des bases d'ondelettes. On commence par un survol sur l'analyse de Fourier et la transformée en ondelettes, où on introduit la série de Fourier, la transformée de Fourier, la définition d'une ondelette, la transformée en ondelette et leur propriétés principales. Ensuite, on introduit l'analyse multirésolution et quelques propriétés de sa fonction d'échelle, aussi le théorème standard d'Albert Cohen pour la construction de cette notion AMR. Finalement, on démontre le théorème de Meyer pour la construction d'une base d'ondelettes associé par des exemples pratiques.

**Mots-clés:** Analyse de Fourier, ondelette, analyse multirésolution, ondelette de Daubechies, ondelette de Coifman.

## Abstract

This work is devoted to the study of the theoretical part of wavelets bases. We begin with an overview of a Fourier analysis and wavelet transform , where we introduce the Fourier series, Fourier transform, wavelet definition, wavelet transform and their principal properties. Then, we introduce the multiresolution analysis and some properties of its scaling function, also the standard theorem of Albert Cohen for constructing this AMR notion. Finally, we demonstrate the Meyer theorem to construct a wavelet basis associated by practical examples.

**Keywords:** Fourier analysis, wavelet, multiresolution analysis, Daubechies wavelet, Coifman wavelet.