الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الوادي
كلية العلوم والتكنولوجيا

رقم الترتيب:
رقم التسلسل:

مذكرة تخرج لنيل شهادة

ماستر أكاديمي

مجال: علوم المادة

فرع: فيزياء

تخصص: فيزياء تطبيقية إشعاع و طاقة

من إعداد: الأشراف سعاد

الموضوع

النقـــل غـير العـــادي في البـلازمـــا

نوقشت يوم: 24 / 2013/06

أمام لجنة المناقشة المكونة من:

ضيف الله مصباح	أستاذ محـــاضر	رئيسا
دلمـــي ســـامية	أستاذ محـــاضر	ممتحنا
ضـــــو جمـــال	أستاذ تعليم عالي	ممتحنا
مفتاح محمد الطيب	أستاذ تعليم عالي	مؤطر

الموسم الجامعي 2013/2012

إهـــــــــــــــــــــداء

إلى

أعز ما في الوجود رمز الحنان ماما، ورمز العطاء بابا

أخواتي الغاليات

إخـــــــــوتي الأعزاء

جميع أفراد عائلتي خاصة زوجي بشير

كل من كان له فضـــل في تربيتي و تعليمي

أهدي هذا العمـــل

تشكـــــــرات

أتقدم أولا و آخرا بالشكر لله عز وجل الذي بنعمته تتم الصالحات، فله الحمد حتى يرضى وله الحمد إذا رضي وله الحمد بعد الرضا.

أتقدم بالشكر العميق إلى أستاذي الفاضل **مفتاح محمد الطيب** على منحي أفضل فرصة علمية بأن يكون مؤطرا لي، و على مساعداته العلمية الجبارة لإعداد هذه المذكرة.

أشكر الأستاذ ضيف الله مصباح على تكرمه بقبول ترؤس لجنة مناقشتي.

أتقدم أيضا بالشكر الجزيل للأستاذ اللبي ياسين على عطائه العلمي وكل التسهيلات التي لم يتأخر في تقديمها بكل عناء..

أشكر الأستاذة دلي سامية على قبولها عضو ممتحنا و المشاركة في لجنة تقييم هذه المذكرة.

أقدم كذلك تشكراتي إلى أعز صديقاتي عدائكة حنان ، و إلى كل من قدم لي يد العون.

الفهـــــرس

مقدمـــــة عامة

مقدمة عامة

بدأ ازدهار فيزياء البلازما منذ عام 1950 عندما برزت مسألة من أكثر مسائل الفيزياء المعاصرة جذبا وتعقيدا وهي تفاعل الاندماج النووي الحراري الذي أعطت بحوثه دفعة عظيمة للبحوث النظرية والتجريبية وللتقنيات . وقد ظهرت صعوبات عدة وذلك لان هذا الاندماج النووي يستدعي الحصول على بلازما كثيفة وحارة جدا لابد من احتباسها وحصرها ، كما لابد من مراقبة الاندماج والسيطرة عليه .

تعد البلازما أكثر الحالات انتشارا في الطبيعة ، فأكثر من 90 % من مادة الكون المشاهدة في حالة بلازما، ولاسيما الشمس التي تتألف من غازات متأينة في درجات حرارة عالية جداً ، كما توجد البلازما في أجواء الكواكب السيارة وما بين النجوم . أما على سطح الأرض فمن النادر أن توجد البلازما في الشروط الطبيعية الأرضية ولكنها توجد في اللهب وفي الانفجارات وموجات الصدم ، إذ يحدث التأين بارتفاع درجة الحرارة ، كما هو الأمر في مصابيح الإضاءة المتفلورة وفي الأقواس الكهربائية والبرق الجوي وقد توجد البلازما أيضا في الإلكترونيات وأنصاف النواقل ، ومن أهم تطبيقاتها تحقيق مفاعلات الاندماج النووي الحراري .

تعمل هذه المفاعلات بطريقة تؤدي إلى رفع درجة حرارة البلازما إلى درجة الاندماج النووي، وبما أن البلازما ذات درجة حرارة عالية جدا فإنه يجب جعلها تطفو وسط المفاعل دون أن تلامس أي من أجزائه عن طريق مغانط تحافظ على البلازما في مسار دائري، لكي لا تتسبب في برودته وانقطاع التفاعل الاندماجي حيث تدعى هذه البلازما ببلازما TOKAMAK حيث يتواجد في هذه البلازما النقل الغير عادي .

تتميز البلازما بظاهرة النقل حيث أن لها معاملات نقل تتحكم فيها منها السماحية الكهربائية و الناقلية والحركية .... وغيرها ، وعلى أساس هذه الظاهرة سنقوم بدراسة النقل في البلازما .

تتضمن هذه المذكرة أربعة فصول :

ففي الفصل الأول سنقدم مدخلا حول عموميات البلازما ، وذلك بإعطاء لمحة تاريخية عن البلازما ، وأهم تعاريفها ، بالإضافة إلى ذكر أمثلة عن أشكالها، وبعض خصائصها وأهم مقاديرها ،وفي الأخير نتحدث بإيجاز عن معالجتها .

أما في الفصل الثاني سنتحدث عن معادلة Liouville وأشكالها وكيفية استخراج معادلة Boltzmann منها، ومن ثم سنتحدث عن معادلة Vlasov وحلها ، آخذين بعين الاعتبار تحويل كل حدودها من الفضاء المباشر إلى الفضاء المعكوس ثم سنتطرق إلى كيفية حساب السماحية الكهربائية باستعمال معادلة Vlasov ، وعلاقة معاملات النقل الأخرى بها .

في الفصل الثالث سنقوم بكتابة معادلة Vlasov في حالة النقل العادي ، وكذلك في حالة النقل غير العادي حيث سنقوم بإدخال المشتق الكسري على هذه المعادلة ، ثم سنتطرق إلى كيفية حساب السماحية الكهربائية باستعمال هذه المعادلة مع اعتبار المشتق الكسري .بالإضافة إلى ذلك سنقوم بحساب السماحية الكهربائية باستعمال معادلة Vlasov في حالة التقريب من الرتبة صفر .

في الفصل الرابع سنقدم مدخلا يتناول أهمية معادلة بولتزمان للنقل ، وحساب السماحية الكهربائية من خلالها باستعمال التقريب من الرتبة واحد .

في النهاية نقدم خلاصة عامة ، نوجز فيها أهم النتائج التي تحصلنا عليها ، و الآفاق الممكنة لمواصلة البحث في الميدان .

الفصل الأول

عموميات حول البلازما

الفصل الأول

عموميات حول البلازما

1- لمحة تاريخية:

إذا ما دعونا الحالات الصلبة والسائلة والغازية بالحالات الثلاث للمادة ، فإن البلازما تكون الحالة الرابعة لها ، إن أول من اعتبر البلازما حالة رابعة للمادة هو الفيزيائي الانجليزي Sir William Crookes عام 1879. [2]

أدخل مصطلح " البلازما " الفيزياء عام 1928 من قبل الفيزيائي الأمريكي Dr. Irwing Langmuir في مقال له [2] ، كي يعبر عن المناطق المتساوية الكمون داخل أنابيب التفريغ الحاوية غازا مؤينا متعادلا كهربائيا. بعد ذلك استخدم هذا المصطلح بصفة خاصة في فيزياء الفلك للتعبير عن حالة مخففة للمادة ، تشبه الغاز ، إلا أنها مؤلفة من إلكترونات و أيونات موجبة ، بتناسب معين يجعل الوسط إجمالا متعادل كهربائيا [2].

2- تعاريف البلازما:

يوجد عدة تعاريف للبلازما سنذكر أهمها :

2-1- تعريف 1 : [1]

هي مزيج لعدد ضخم من مجموعتين متساويتين من الأجسام المشحونة أحدهما بالموجب والثانية بالسالب وهي ميالة إلى أن تكون معتدلة كهربائيا . يعني أن صافي شحنتها الكهربائية معدوم (بلازما متعادلة كهربائيا) .

2-2- تعريف 2 [1] :

البلازما حالة أخرى متميزة من حالات المادة (صلبة – سائلة – غازية) ، وهي غير مرئية، فبمجرد تسليط حرارة أو طاقة معينة عليها، تقتلع الالكترونات، أي يمكن وصفها بأنها غاز متأين تكون فيه الالكترونات حرة غير مرتبطة بالذرة أو الجزيء .

2-3- تعريف 3 [2] :

البلازما غاز متأين يحتوي عددا كافيا من الجسيمات المشحونة ، تحجب نفسها إلكتروستاتيكيا عند مسافات صغيرة ، مما يجعل هذا الغاز ناقل كهربائي ، أي يختلف عن الغاز العادي (عازل) .

3- أمثلة عن أشكال البلازما:

غالبا معظم المواد الموجودة في هذا الكون الفسيح توجد على شكل بلازما [2] ، إذ تمثل نسبة 99% من المادة الكونية.

و للبلازما شكلين :

3-1- بلازما طبيعية :

وهي نوعان في حد ذاتها :

■ بلازما طبيعية كونية :

تمثل النسبة الكبيرة في هذا الكون ، وهي مثل :

الشمس ، النجوم ، الرياح الشمسية ، سنديم المجرات ....

■ بلازما طبيعية أرضية :

تمثل نسبة أقل من سابقتها، لأنها تحدث على مستوى كوكب الأرض، وهي مثل : البرق ، الصواعق ، الشفق القطبي ،طبقة الأيونوسفير.........

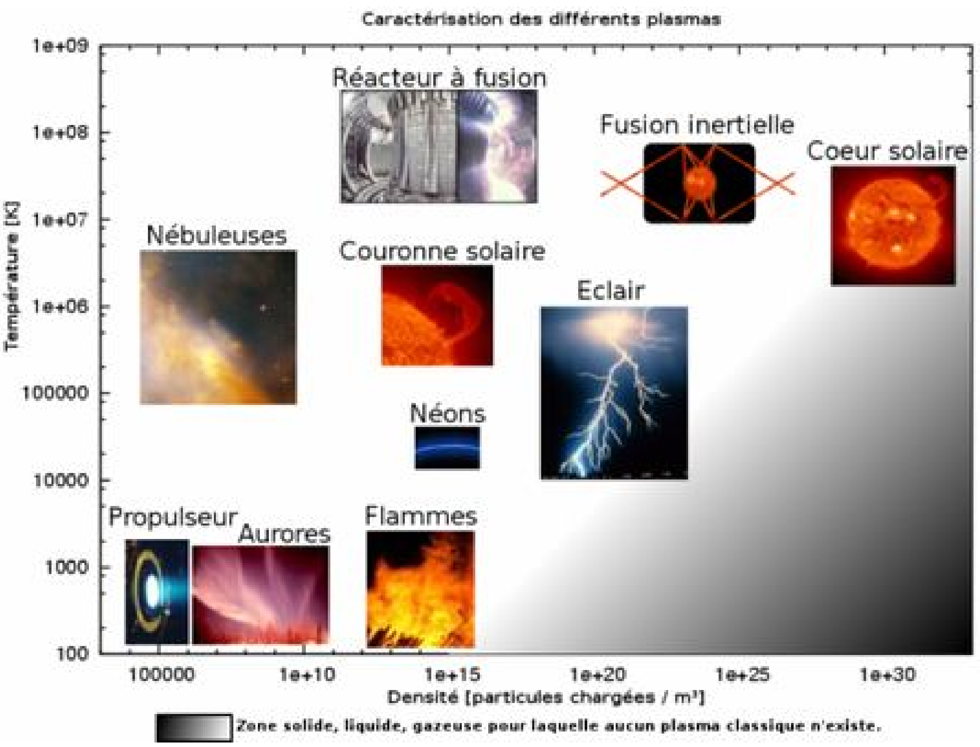
3-2- بلازما صناعية :

بما أن البلازما نادرة في محيطنا القريب ، لجأ الإنسان لتوليدها صناعيا ، وهي مثل : البلازما الموجودة في التلفاز مصابيح التألق (لمبات الفلوريسنت...) ، الاندماج النووي (Scylla, Tokamak....) ، حيث أن Tokamak هي نوع من أنواع المفاعل النووي والاندماجي وهي اختصار للجملة الروسية :

тороидальная камера в магнитных катушках

والتي تعني الغرفة الدائرية داخل مستحثات مغناطيسية ، تعمل هذه الطريقة عن رفع درجة حرارة البلازما إلى درجة الاندماج النووي وبما أن البلازما ذات درجة حرارة عالية جدا فإنه يجب فصلها وإبعادها وجعلها لا تلامس مكونات المفاعل وإلا أتلفته ويتسبب ذلك في برودته وانقطاع التفاعل الاندماجي .

يتم في المفاعلات المبنية على طريقة Tokamak جعل البلازما تطفو وسط المفاعل دون أن تلامس أي من أجزائه عن طريق مغناطيسيات تحافظ على البلازما في مسار دائري [1] .هذه البلازما تدعى ببلازما Tokamak وهي البلازما التي سنعتمدها في البحث .



الصورة (1-1) : نموذج مرئي يظهر أمثلة عن أنواع البلازما

4- خصائص البلازما:

للبلازما عدة خصائص تجعلها مختلفة عن بقية حالات المادة الأخرى ، وأهمها :

4-1- التوصيل الكهربائي :

تعتبر البلازما موصلا جيدا للكهرباء ، وهذا راجع لاحتوائها عددا كبيرا من الجسيمات المشحونة ، والتي تتحرك بحرية في الداخل ، هذه الحركة تؤدي إلى نشوء تيار كهربائي[1] .

4-2- حمل الذبذبات :

إحدى الصفات المهمة للبلازما قابليتها لحمل الذبذبات و بث الموجات ، ويمكن أن تحدث أنواع مختلفة من السلوك التذبذبي، إلا أن هذه الذبذبات قد تكون معقدة جدا بسبب الميزة غير الخطية للمعادلات الهايدروديناميكية لها [2] .

و سنذكر حالتين بسيطتين منها:

- الذبذبات الكهروستاتيكية:

يوجد نوعان محتملان لهذه الذبذبات، إ حداها عالية التردد تكون سريعة جدا يصعب على الأيونات الثقيلة تتبعها، وأخرى منخفضة التردد للأيونات البطيئة جدا، ولقد نوقشت من طرف Tonks and I. Langmuir لأول مرة[1].

- الذبذبات الهايدرومغناطيسية:

تمثل الموجات الهايدرومغناطيسية موجات حقيقية تنتشر في وسط موصل خاضع لتأثير حقل مغناطيسي ثابت . هذا السلوك تنبأ به لأول مرة Alfven عام 1942 وهو منسجم مع الصياغة الهايدرومغناطيسية للبلازما [1] .

4-3- حصر البلازما [2]:

هي إحدى أهم خصائص البلازما، ولقد اهتم العلماء كثيرا بتطوير تقنية حصر البلازما هذا بسبب الحاجة الكبيرة للبلازما، إذ تعتبر هذه الأخيرة مفتاح التفاعلات النووية داخل مفاعلات الاندماج، يوجد عدة تقنيات لهذه الخاصية كالحصر العطالي و الحصر بمجال مغناطيسي.

فمثلا مبدأ تقنية الحصر بمجال مغناطيسي هو حصر البلازما داخل مجال مغناطيسي بحيث لا تلمس جسيمات البلازما (الكترونات و أيونات) أي جدار مادي ، لأن درجة حرارتها تسبب انصهار مادة المفاعل النووي، ولقد طورت عدة أجهزة تعتمد على هذا المبدأ مثل : Scyllac, Scylla, Alcator Tokamak,

5- مقادير البلازما:

5-1- طول ديباي [2] :

إن التفاعلات الجماعية هي السائدة في البلازما، و هذه التفاعلات لا تُظهر خاصتها الجماعية إلا بعد مسافة حرجة تسمى نصف قطر ديباي Debye، ويمكن فهم هذه المسافة بتصور شحنة موجبة تحيط بها إلكترونات تخضع لقوتين متعاكستين:قوة التجاذب الكولوني التي تؤثر بها الشحنة الموجبة وقوة أخرى سببها التهيج الحراري، ويضمن التوازُن بين هاتين القوتين عدم الاتحاد بين الشحنات الموجبة والسالبة في البلازما.

وتتحدد في هذه الحالة مسافة حرجة تتعلق بدرجة الحرارة وكثافة الإلكترونات؛ وتتكون في هذه الحالة سحابة من الإلكترونات حول كل أيون، وتقوم بدور حاجز كهروستاتيكي في وجه الشحنات الموجودة

خارج كل سحابة، في حين تخضع الإلكترونات دون هذه المسافة لقوة جذب الأيون وتتفاعل معه تفاعلات متبادلة ثنائية.

يعطى طول ديباي بالعلاقة :

$$\lambda_d = \sqrt{\frac{K_B T_e}{4\pi n_e}} \quad (SI) \quad = 6{,}9\sqrt{\frac{T_e}{n_e}} \quad (cgs)$$

5-2- درجة التأين [1]:

يكون الغاز في الحالة العادية عازلا كهربائيا، لكن بمجرد أن نطبق عليه حقلا كهربائيا شديدا يتحول هذا الغاز لناقل كهربائي، لأنه أصبح غازا مؤينا، وبذلك تعرف درجة التأين بأنها كمية الذرات التي كسبت أو خسرت الكترونات، وتعطى بالعلاقة:

$$\alpha = \frac{n}{n + n_0}$$

n : هي كثافة الالكترونات أو الأيونات

n_0 : هي كثافة الذرات غير المتأينة (المتعادلة)

يمكن أن نقسم الغاز المتأين الى قسمين حسب درجة التأين :

- غاز ضعيف التأين من أجل $10^{-4} > \alpha$.
- غاز شديد التأين من أجل $10^{-4} < \alpha$.

5-3- تردد البلازما [1]:

إن للتفاعلات الجماعية دورا مهما في وجود اهتزازات في البلازما، فعند انزياح جسيماتها المشحونة سلباً (الإلكترونات مثلاً) من وضع توازنها، تصبح الشحنة الموجبة هي الغالبة مما يؤدي إلى نشوء حقل كهربائي داخلي يحاول إعادة هذه الجسيمات المشحونة إلى وضع توازنها، ولكن هذه الجسيمات تتجاوز هذا الوضع ، فيؤدي ذلك إلى حدوث اهتزازات في البلازما بتردد w_{pe}، يدعى التردد الالكتروني للبلازما يعطى بالعلاقة:

$$w_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0\, m_e}}$$

حيث : m_e كتلة الإلكترون.

ϵ_0 : السماحية.

n_e : كثافة الإلكترونات .

أما في حالة انزياح جسيماتها المشحونة إيجابا (الأيونات مثلاً) من وضع توازنها، فيحدث نفس الشيء لكن بتردد w_{pi} يدعى التردد الأيوني للبلازما يعطى بالعلاقة:

$$w_{pi} = \sqrt{\frac{n_i Z^2 e^2}{\varepsilon_0 m_i}}$$

حيث :

m_i : كتلة الأيون.

n_i : كثافة الأيونات .

5-4- نصف قطر الكرة الأيونية [1]:

يسمى في عدة منشورات بنصف قطر Wigner-seitz ، وهو المسافة المتوسطة بين أيونين، يعطى r_i بالعلاقة :

$$r_i = \left(\frac{3}{4\pi n_i}\right)^{1/3}$$

5-5- نصف قطر الكرة الإلكترونية :

هو المسافة المتوسطة بين إلكترونين، يعطى r_e بالعلاقة :

$$r_e = \left(\frac{3}{4\pi n_e}\right)^{1/3}$$

5-6- معامل التزاوج [1]:

عرف معامل التزاوج للبلازما من طرف Ichimaru. وهو يمثل النسبة بين الطاقة الكامنة المتوسطة و الطاقة الحركية المتوسطة.

فمن أجل الأيونات يكون :

$$\Gamma_{ii} = \frac{Z^2 e^2}{kT r_i}$$

و للإلكترونات يكون :

$$\Gamma_{ee} = \frac{e^2}{kT r_e}$$

أما للإلكترونات و الأيونات :

$$\Gamma_{ei} = \frac{Z^2 e^2}{kT r_{ei}}$$

حيث : $r_{ei} = \frac{r_e + r_i}{2}$

إن معامل التزاوج مهم جدا لمعرفة مدى التزاوج بين جسيمات البلازما، فإذا كان$1 \ll \Gamma$ البلازما تكون ضعيفة التزاوج، أما إذا كان $\Gamma \geq 1$ تكون البلازما شديدة التزاوج .

5-7- زمن التصادم [1] :

ويسمى أيضا بالمدة الحرة وهو المدة التي يقضيها جسم (قذيفة) قبل أن يصدم جسما من الهدف و رمزه τ تعطى عبارته كالتالي :

$$\tau = \frac{1}{\upsilon}$$

حيث :

υ : تواتر التصادم

5-8- المسير الحر [1]:

هو المسافة التي يقطعها جسم (قذيفة) قبل أن يتصادم بجسم من الهدف ورمزه ℓ وتعطى عبارته كالتالي :

$$\ell = \tau . v$$

حيث:

v : سرعة الجسم (القذيفة) .

6- معالجة البلازما:

من المستحيل معالجة البلازما على نحو كاف معالجة عينية خالصة، و عليه يكون من الضروري استخدام ما يعرف اصطلاحا بالنظرية الحركية لمعالجتها، إذ يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار الحركات الذاتية للأيونات و الإلكترونات و تصادماتها مع جسيمات أخرى عند حل معادلة النقل لبولتزمان . عموما فإن حل هذه المعادلة ليس سهلا، إلا للحالات التي يجوز فيها إهمال بعض الحدود منها [1] .

توجد ثلاث صياغات تقريبية توفر لنا النظرة الهامة لما يحدث داخل البلازما (9)هي :

- نظرية التوازن - نظرية المدار – المعالجة الهايدرومغناطيسية .

الفصل الثاني

حساب السماحية الكهربائية
من معادلة Vlasov

الفصل الثاني

حساب السماحية الكهربائية من معادلة Vlasov

1. مدخـــــل :

بصورة عامة ، هدف النظرية الحركية هو إيجاد معادلة التطور- المعادلة الحركية- لدالة التوزيع للجزيء ، يوجد عدة معادلات حركية كل واحدة منها تكون متعلقة بنظام فيزيائي خاص بها ، الشكل المحدد لهذه المعادلات يتعلق بنوع النظام (غاز ، صلب ، سائل ، بلازما) ، ومن المعادلات الحركية التي تعالج النقل في البلازما : معادلة Liouville و معادلة Boltzmann و معادلة Vlasov.

2. معـــادلـــة Liouville [3]:

فيزيائيا معادلة Liouville تقول أن الكثافة بجوار أي نقطة ما متحركة من الفضاء الطوري هي ثابتة على طول مسار هذه النقطة الفضائية . وبالتالي يمكن لنقطة من هذا الفضاء أن تسلك سلوك المائع الغير قابل للانضغاط . دعا Gibbs هذه الظاهرة بمبدأ انحفاظ الكثافة في فضاء الطور . بعبارة أخرى فإنه إذا كانت p,q هما إحداثيات لنقطة في فضاء الطور عند الزمن t ، علما أنه في اللحظة t_0 كانت (p_0,q_0) إذا معادلة Liouville تتضمن إلى :

$$f(p,q;t)=f(p_0,q_0;t_0)$$

لأن معادلات الحركة ، يجب أن نعتبر فيها أن النقطة (p,q) كدالة للنقطة الابتدائية (p_0,q_0) والزمن المنقضي t ، هذا يعني :

$$p=p(p_0,q_0,t)$$

$$q=q(p_0,q_0,t)$$

تعطى معادلة Liouville بالشكل التالي :

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{\partial f}{\partial p_j}\right).\dot{p}_j+\sum_{j=1}^{l}\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}\right).\dot{q}_j=0 \qquad (I)$$

حيث أن : $j=0,1,2,.....,l$

f : دالة التوزيع .

p_j : العزوم المعممة .

q_j : الإحداثيات المعممة .

$\dot{q}_j$: السرعة المعممة .

وتعطى علاقتي $\dot{q}_j$ و $\dot{p}_j$ كالتالي :

$$\dot{p}_j=-\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad \text{و} \qquad \dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j}$$

حيث أن :

H : الهاميلتونيان و تعطى معادلته كالتالي :

$$H(p_1,...,p_N;q_1,...,q_N)=\sum_{j=1}^{N}p_j.\dot{q}_j-\ell(\dot{q}_1,...,\dot{q}_N;q_1,...,q_N)$$

حيث :

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

L : دالة Lagrange .

بما أن $f=f(p,q,t)$ ، المعادلة المكافئة هي :

$$\frac{\partial f}{\partial t}=0 \qquad (II)$$

حيث تتم المفاضلة على طول مسارات فضاء الطور ويسمى هذا التعبير بنظرية Liouville هذه النظرية يمكن فقط أن تعرب عن دالة توزيع التوازن من خلال هذه الدوال الرياضية للإحداثيات شبة اللحظية التي تكون محفوظة أثناء الحركة من النظام الفرعي المغلق ، وتسمى

هذه الدوال بتكاملات الحركة ، وبذلك فإن دوال توزيع التوازن في حد ذاتها جزءا لا يتجزأ من الحركة .

كما أن دالة التوزيع المتوازنة لنظامين فرعيين مغلقين تساوي إلى ناتج دوال توزيع هذه الأنظمة الفرعية ، لوغاريتم دالة التوزيع يمثل جزءا لا يتجزأ من الحركة المضافة

ومن المعروف جيدا من الميكانيك أن هناك فقط سبع تكاملات مستقلة عن الحركة واحدة من هذه التكاملات هي الطاقة للنظام الفرعي .

3. معادلة التطور BBGKY [4] :

نعتبر مائع مكون من عدد كبير N من الجزيئات المتجانسة داخل إناء ذو حجم V ، هذا النظام يمكن وصفه مجهريا بواسطة الميكانيك الكلاسيكي . الحالة الكبرى لهذا النظام مميزة بدالة تدعى كثافة الاحتمال :

$$f^N(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N,\vec{p}_1,\vec{p}_2,...,\vec{p}_N)$$

في فضاء الطور المكون من $6N$ بعد ($3N$ منها متغيرة مع الموضع ، و $3N$ متغيرة مع كمية الحركة) ، يمكن لأن نقول أن : $f^N(\vec{r}^N,\vec{p}^N)d\vec{r}^N\vec{p}^N$ هي احتمال من أجل اللحظة t ، إحدى الجزيئات متواجدة في النقطة $\vec{r}_1$ مع الدفع $\vec{p}_1$ ، و أخرى متواجدة في النقطة $\vec{r}_2$ مع الدفع $\vec{p}_2$ ...... إلخ .

من الواضح أن هذه الاحتمالات هي موحدة لكل لحظة t بمعنى :

$$\int f^N(\vec{r}^N,\vec{p}^N)d\vec{r}^N d\vec{p}^N = 1$$

تطور الكثافة f_N بدلالة الزمن تعطى من خلال معادلة Liouville الكلاسيكية :

$$\frac{df^N}{dt} = \{H, f^N\}$$

يدعى الرمز $\{H, f^N\}$ بـ le crochet de poisson إذا هو معرف كالتالي :

$$\{A,B\} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{dA}{dr_i}.\frac{dB}{dp_i} - \frac{dB}{dr_i}.\frac{dA}{dp_i}\right)$$

معادلة Liouville تمثل عدم التغير في دالة التوزيع لعدة جزيئات تحت تغير الزمن ، هذا يعني أن المشتق الكلي بالنسبة للزمن يكون يساوي الصفر :

$$\frac{df^N}{dt} = 0$$

وبوضوح أكثر نستعمل مشتقات f^N للحظة t :

$$\frac{\partial f^N}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3N}\frac{dr_i}{dt}.\frac{df^N}{dr_i}+\sum_{i=1}^{3N}\frac{dp_i}{dt}.\frac{df^N}{dp_i}=0$$

والتي تكتب على الشكل التالي :

$$\frac{df^N}{dt}=-iLf^N$$

أين تكون : $L.=i\{H,.\}$

الحل النهائي لهذه المعادلة يكون على النحو التالي :

$$f^N\left(r^N,p^N,t\right)=\exp(-iLt).f^N\left(r^N,p^N,0\right)$$

حيث أن : $f^N\left(r^N,p^N,0\right)$ هي كثافة الاحتمال عند اللحظة $t=0$ ، بمعنى أن كثافة الاحتمال تكون عند التوازن الترموديناميكي .

من خلال كثافة الاحتمال f^N ، نعرف مجموعة من دوال التوزيع لـ n جزيء حيث أن $(n\le N)$ ، والتي تمثل كثافة احتمال وجود n جزيء في اللحظة t، (بشكل مستقل عن $(N-n)$ جزيء الباقية) في المواضع $\vec{r}_i=1,2.......,n$ والدفع $\vec{p}_i=1,2.......,n$

$$\begin{aligned}
f^N\left(r^n,p^n,t\right)&=f^n\left(\vec{r}_1,....,\vec{r}_n,\vec{p}_1,....,\vec{p}_n\right)\\
&=\frac{N!}{(n-n)!}\int...\int f^N\left(r^N,p^N\right)dr^{(N-n)}.dp^{(N-n)}\\
&=\frac{N!}{(n-n)!}\int...\int f^N\left(r^N,p^N\right)d\vec{r}_{n+1}.d\vec{r}_{n+2}....d\vec{r}_N;d\vec{p}_{n+1}.d\vec{p}_{n+2}....d\vec{p}_N
\end{aligned}$$

إستنظام هذه الدالة ، يكون كالتالي :

$$\frac{1}{n!}\int...\int f^N\left(r^N,p^N\right)d\vec{r}_1.d\vec{r}_2....d\vec{r}_n;d\vec{p}_1.d\vec{p}_2....d\vec{p}_n=\frac{N!}{n!(N-n)!}$$

حيث أن : $\frac{N!}{(N-n)!}$ هو عدد الطرق المختلفة لاختيار n جزيء من مجموع N جزيء ، و لدينا أيضا :

$$\int f^{n+1}.d\vec{r}_{n+1}d\vec{p}_{n+1}=(N-n)f^n$$

والذي هو عبارة عن مجموع معادلات مزدوجة . معرفة $f^1\left(r_{n+1},p_{n+1}\right)$ مشروطة بمعرفة $f^2\left(r_{n+1},p_{n+1}\right)$ ، و أيضا $f^2\left(r_{n+1},p_{n+1}\right)$ من خلال $f^3\left(r_{n+1},p_{n+1}\right)$ ...إلخ .

هذا ما يدعى بـالتسلسل الهرمي BBGKY ويعني :

B: Bogolioubov , B: Born , G: Green , K: Kirkwood , Y: Yvon

والهدف من هذه الطريقة هو حساب دالة التوزيع للجسيمات وفق المواضع و العزوم الخطية اللحظية .

في الحالة الأكثر أهمية أين تكون $n=1$ هي معادلة التطور لـ $f^1(\vec{r}_1,\vec{p}_1,t)$ والتي تدخل في دالة التطور لـ $f^2(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{p}_1,\vec{p}_2,t)$ إذا :

$$\left[\frac{d}{dt}+\frac{\vec{p}_1}{m}\frac{d}{d\vec{r}_1}+F_1(r)\frac{d}{d\vec{p}_1}\right]f_1(\vec{r}_1,\vec{p}_1,t)=\int\frac{d}{dr_1}U(\vec{r}_1-\vec{r}_2).\frac{d}{dp_1}f_1(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{p}_1,\vec{p}_2,t)d\vec{r}_1d\vec{r}_2d\vec{p}_1d\vec{p}_2$$

هذا التسلسل الهرمي لـ BBGKY متعلق بأسمائهم المذكورة سابقا .

وهي جميعا تكافئ معادلة Liouville .

ملاحظة :

في حالة التوازن الترموديناميكي كثافة الاحتمال لا يجب أن تعتمد مباشرة على الزمن ، ويرمز لها بـ $f_0^N(r^N,p^N)$.

كثافة الاحتمال من أجل N جزيء متجانس تعطى بالعبارة التالية :

$$f_0^N(r^N,p^N)=\frac{1}{N!}\frac{1}{Z_N(V,t)}\exp\{-\beta H_N(r^N,p^N,V)\}$$

حيث :

$$Z_N(V,t)=\frac{1}{N!}\int\ldots\int\exp\{-\beta H_N(r^N,p^N,V)\}dr^N dp^N$$

4. معادلة بولتزمان Boltzmann [4]:

معادلة بولتزمان (1872) هي معادلة تكاملية تفاضلية للنظرية الحركية ، وهي تصف تطور غاز ذو كثافة ضعيفة في حالة غير متزنة ، وعلى وجه الخصوص تسمح هذه المعادلة بدراسة تقهقر الغاز من حالة الاتزان المحلي نحو حالة الاتزان الشامل الذي يوصف بتوزيع Maxwell للسرعات .

أول حل صحيح لهذه المعادلة تحصل عليه العالم Ukai (1970) من أجل نموذج التفاعلات بين الكريات الصلدة و ذلك عند الاقتراب من حالة التوازن فقط .

وتكتب معادلة Boltzmann كالتالي :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}_r+\frac{F}{m}\vec{\nabla}_v\right)f(\vec{r},\vec{v},t)=\left(\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}\right)_{coll}$$

حيث أن الطرف الثاني من المعادلة يسمى حد التصادم

5. استنباط معادلة Boltzmann من معادلة Liouville :

1.5. حل معادلة Liouville :

لدينا من معادلة Liouville :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H , f\} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}.\frac{\partial f}{\partial q_j}\right) - \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial H}{\partial q_j}.\frac{\partial f}{\partial p_j}\right) = 0$$

لدينا :

$$\vec{v} = \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \vec{\nabla}_{p_i} H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_x}, \frac{\partial H}{\partial p_y}, \frac{\partial H}{\partial p_z}\right) \qquad (*)$$

حيث أن : الهاميلتونيان H هو :

$$H = E_c(\vec{p}) + E_p(q)$$

و $E_c(\vec{p})$: هي الطاقة الحركية .

$E_p(q)$: هي الطاقة الكامنة .

$$\vec{F}_i = \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\vec{\nabla}_{q_i} H = -\left(\frac{\partial H}{\partial x_i}, \frac{\partial H}{\partial y_i}, \frac{\partial H}{\partial z_i}\right)$$

حيث أن : $\vec{F}_i$ هي القوة المطبقة على الجسيم n .

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{\text{int}}$$

ومنه فإن :

$$\vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_{j \neq i}^{N} F_{ij}$$

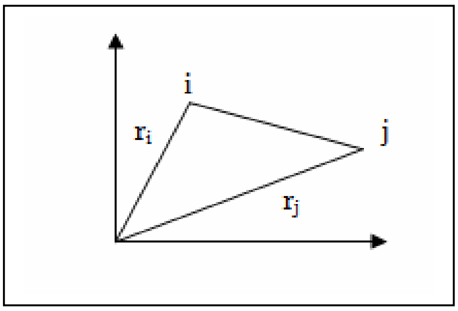
حيث أن :

$$-\vec{\nabla}_{q_i} H = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{\text{int}}$$

$$-\vec{\nabla}_{q_i} H = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i}^{N} F_{ij}$$

ومنه :

$$-\vec{\nabla}_{q_i} H = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i}^{N} F_{ij}\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right) \qquad (**)$$



الشكل (1.2) : رسم توضيحي خاص بالمعادلة رقم (**)

ومنه فإن معادلة Liouville تصبح كالتالي :

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i.\vec{\nabla}_{r_i}f+\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i.\vec{\nabla}_{v_i}f=0$$

2.5. كتابة معادلة Boltzmann من معادلة Liouville :

إذا اعتبارنا أن التصادمات تكون ثنائية (تفاعلات ثنائي) لا نحتاج إلى معرفة $f(\vec{q}_1,...,\vec{q}_N,\vec{p}_1,...,\vec{p}_N,t)$ ، نكتفي بدوال التوزيع المختزلة :

لجسيم $f^{(1)}(q_1,\vec{p}_1,t)$ أو لجسيمين $f^{(2)}(q_1,\vec{p}_1;q_2,\vec{p}_2,t)$

نعرف دالة التوزيع لجسيم واحد كالتالي :

$$f^{(1)}(\vec{r}_1,\vec{p}_2,t)=\frac{1}{(N-1)!}\int f(\vec{r}_1,\vec{p}_1,....,\vec{r}_N,\vec{p}_N,t)d\Omega_2 d\Omega_3....d\Omega_N$$

مع هذا التعريف لدينا :

$$d\Omega_i=\frac{d\vec{r}_i.d\vec{p}_i}{h^3}$$

$$\frac{1}{N!}.\frac{1}{h^{3N}}\int f(\vec{r}_1,\vec{p}_1,....,\vec{r}_N,\vec{p}_N,t)dp_N dr_N=1$$

$$\frac{1}{N!}\int f d\Omega_2 d\Omega_3....d\Omega_N=1$$

نظم دالة التوزيع

ودالة التوزيع لجسيمين تعطى كالتالي :

$$f^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{p}_1;\vec{r}_2,\vec{p}_2,t)=\frac{1}{(N-2)!}\int f d\Omega_3 d\Omega_4....d\Omega_N$$

حيث أن :

$$\int f^{(2)} d\Omega_2 = (N-1) f^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{p}_1, t)$$

إذا أردنا أن نطبق معادلة التطور من أجل $f^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \vec{r}_2, \vec{p}_2, t)$ يجب أن نكتب معادلة Liouville و نكامل على $\Omega_3\Omega_4,.....,\Omega_N$:

$$\frac{\partial f^{(2)}}{\partial t} + \vec{v}_1\vec{\nabla}_{r_1} f^{(2)} + \vec{v}_2\vec{\nabla}_{r_2} f^{(2)} + \left(\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12}\right)\vec{\nabla}_{P_1} f^{(2)} + \left(\vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21}\right)\vec{\nabla}_{P_2} f^{(2)}$$
$$+ \int \left(\vec{F}_{13}\vec{\nabla}_{P_1} f^{(3)} + \vec{F}_{23}\vec{\nabla}_{P_2} f^{(3)}\right) d\Omega_3 = 0$$

جملة معادلات التطور التي تتحكم في $f^{(1)}, f^{(2)},.....,f^{(N)}$ تسمى

La Hierarchie de BBGKY

المعادلة الحركية لـ Boltzmann تكون باستخدام هذه الطريقة كالتالي :

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \vec{v}_1\vec{\nabla}_{r_1} f^{(1)} + \vec{F}_1^{ext}\vec{\nabla}_{p_1} f^{(1)} + \int \vec{F}_{12}\vec{\nabla}_{p_1} f^{(2)} d\Omega_2 = 0$$

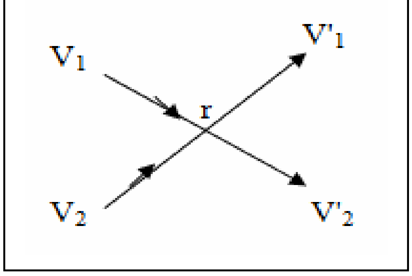
دالة التوزيع للجسيم $f^{(1)}$ تتعلق بـ $f^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{p}_1; \vec{r}_2, \vec{p}_2, t)$ و $f^{(2)}$ تتعلق بـ $f^{(3)}$ وهكذا .

تتطلب فرضية Boltzmann معادلة التطور لدالة التوزيع للجسيم $f^{(1)}(\vec{r}, \vec{p}, t)$ تكتب كما يلي :

$$\frac{\partial f^{(1)}(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}_r f^{(1)}(\vec{r}, \vec{p}, t) + \vec{F}^{ext}\vec{\nabla}_p f^{(1)}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$$

حيث أن حد التصادم $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$ يكون كالتالي :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = \int d\vec{p}_2 \int d\Omega.\sigma(\Omega)\left|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right|\left(f_1' f_2 - f_1 f_2'\right)$$



الشكل (2.2) : رسم يوضح السرعات في حد التصادم

حيث أن :

$\sigma(\Omega)$: مقطع التصادم والذي يعرف على أنه المقطع الذي يبديه جسم من الهدف لجسم من القذيفة .

Ω : الزاوية الصلبة حيث أن تتعلق بالزاويتين θ,φ $\Omega(\theta,\varphi)$.

و $f_2 = f(\vec{r},\vec{p}_2,t)$ ، $f_1 = f(\vec{r},\vec{p}_1,t) \equiv f^{(1)}(\vec{r},\vec{p}_1,t)$

و $f_2^{'} = f(\vec{r},\vec{p}_2^{'},t)$ ، $f_1^{'} = f(\vec{r},\vec{p}_1^{'},t)$

6. التطور في دالة التوزيع [5] :

يمكن تطبيق معادلة التطور لـ $f(\vec{r},\vec{v},t)$ باستخدام براهين موازنة (نظام BBGKY) .

نفرض أن الغاز مغلق في علبة حجمها V . الحقل الخارجي (الجاذبية أو الحقل الكهرومغناطيسي) ، يمكن أن يؤثر على الجزيئات. توصف حركة هذه الجزيئات بين التصادمات بالميكانيك الكلاسيكي .

التطور في دالة التوزيع يكون في الحالتين التاليتين :

1.6.في غياب التصادم :

في غياب التصادم فإن القوة المطبقة على الجزيئات تكون مختصرة في القوة الخارجية $\vec{F}$. في حالة الجزيئات ذات الشحنة q في وجود حقل كهربائي ومغناطيسي خارجيين $E(r,t)$ و $H(r,t)$. دالة التوزيع للجزيء تخضع لمعادلة التطور :

$$\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}_r.f(\vec{r},\vec{v},t) + F.\vec{\nabla}_v f(\vec{r},\vec{v},t) = 0$$

هذه المعادلة متجانسة مع معادلة Liouville للنظام المختزل لجسيم وحيد ، تترجم انحفاظ الكثافة في الفضاء .

2.6.في وجود التصادم :

في وجود التصادم الكثافة في الفضاء غير محفوظة . نكتب معادلة التطور لدالة التوزيع على النحو التالي :

$$\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}_r.f(\vec{r},\vec{v},t) + F.\vec{\nabla}_v f(\vec{r},\vec{v},t) = \left(\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}\right)_{coll}$$

الطرف الثاني من المعادلة $\left(\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}\right)_{coll}$ يمثل حد التصادم على تطور f .

7. توزيعات التوازن [5] :

☒ توزيع التوازن الكلي :

توزيع التوازن الكلي f_0 هو حل مستقل عن الزمن لمعادلة Boltzmann $\left(\partial f_0 / \partial t = 0 \right)$. التوازن المجهري الكلي هو التوازن الترموديناميكي . بفرض أن الغاز في حالة توازن يعطي قيم جد معروفة للكثافة n جسيم بالنسبة لسرعته المتوسطة u ودرجة الحرارة T .

☒ توزيع التوازن المحلي :

التكامل على التصادم لمعادلة بولتزمان ملغى من أجل توزيع التوازن الكلي $f_0(p)$. وملغى أيضا من أجل كل توزيع التوازن المحلي يعطى من الشكل :

$$f^{(0)}(r,p,t) = n(r,t)\left[2\pi mkT(r,t)\right]^{-3/2} \exp\left[-\frac{\left|p - mu(r,t)\right|^2}{2mkT(r,t)} \right]$$

التوزيعات في هذه المعادلة تدعى بتوزيع Maxwell-Boltzmann المحلي ، المتغيرات للكثافة المحلية $n(r,t)$ للجزيئات ، هما السرعة المتوسطة المحلية $u(r,t)$ و درجة الحرارة المحلية $T(r,t)$ ، حيث أنها دوال بطيئة التغير لـ r و t .

توزيع التوازن المحلي $f^{(0)}$ ليس له حل في معادلة Boltzmann حيث :

$$\left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} \right)_{coll} = 0$$

لكن :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}_r + \frac{F}{m}\vec{\nabla}_v \right) f^{(0)}(\vec{r},\vec{p},t) \neq 0$$

8. معادلة Vlasov:

معادلة Vlasov هي المعادلة التفاضلية التي تصف تطور دالة التوزيع بالنسبة للزمن لبلازما تتكون من جسيمات مشحونة بتفاعل طويل(بعيد) المدى . و اقترحت هذه المعادلة لوصف البلازما من طرف العالم Anatoly Vlasov في عام 1938.

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = -\vec{v}_1.\vec{\nabla}_{r_1}.f^{(1)}(r,v,t) + (\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_1^{\text{int}}).\vec{\nabla}_{v_1} f^{(1)}(r,v,t)$$

1.8.كيفية الحصول على معادلة Vlasov :

جملة معادلات التطور التي تحكم $f^{(1)}, f^{(2)},.....f^{(N)}$ تدعى بالتسلسل BBGKY

يأخذ التقريب من أجل أنظمة ذات الكثافة الضعيفة :

$$f^{(2)}(r_1,v_1,r_2,v_2,t) = f^{(1)}(r_1,v_1,t).f^{(1)}(r_2,v_2,t)$$

بتعويض هذا التقريب في عبارة معادلة التطور لـ $f^{(1)}$ مع التصادم نجد :

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \vec{v}_1.\vec{\nabla}_{r_1}.f^{(1)}(r_1,v_1,t) + \vec{F}_1^{ext}.\vec{\nabla}_{v_1}.f^{(1)} + \int \vec{F}_{12}.\vec{\nabla}_{v_1}.\left(f^{(1)}(r_1,v_1,t).f^{(1)}(r_2,v_2,t)\right)d\Omega_2 = 0$$

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} + \vec{v}_1.\vec{\nabla}_{r_1}.f^{(1)}(r_1,v_1,t) + \vec{F}_1^{ext}.\vec{\nabla}_{v_1}.f^{(1)} + \vec{\nabla}_{v_1} f^{(1)}(r_1,v_1,t).\left(\int \vec{F}_{12}.f^{(1)}(r_2,v_2,t)\right)d\Omega_2 = 0$$

$$< F_{12} >= F_1^{\text{int}}$$

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = -\vec{v}_1.\vec{\nabla}_{r_1}.f^{(1)} + \vec{F}_1^{ext}.\vec{\nabla}_{v_1}.f^{(1)} + \vec{F}_1^{\text{int}}.\vec{\nabla}_{v_1} f^{(1)}$$

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = -\vec{v}_1.\vec{\nabla}_{r_1}.f^{(1)} + (\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_1^{\text{int}}).\vec{\nabla}_{v_1} f^{(1)}$$

في الحالة العامة :

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = -\vec{v}_1.\vec{\nabla}_{r_1}.f^{(1)}(r,v,t) + (\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_1^{\text{int}}).\vec{\nabla}_{v_1} f^{(1)}(r,v,t)$$

2.8. حل معادلة Vlasov:

باعتبار أن القوة الوحيدة الموجودة في البلازما هي القوة الكهربائية فقط وهي ناتجة عن شحنات كهربائية من البلازما و القوة الخارجية معدومة .

$$\vec{F}_1^{ext} = \vec{0}$$
$$\vec{F}^{\text{int}} = q.\vec{E}$$

نعلم أن :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$$
$$\vec{F}^{\text{int}} = (-\vec{\nabla}\Phi).q$$

معادلة Vlasov تصبح من الشكل :

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = -\vec{v}\vec{\nabla}_r.f^{(1)}(r,\vec{v},t) + \vec{F}^{\text{int}}\vec{\nabla}_v.f^{(1)}(r,\vec{v},t)$$
$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = -\vec{v}\vec{\nabla}_r.f^{(1)}(r,\vec{v},t) - (\frac{q}{m}\vec{E})\vec{\nabla}_v.f^{(1)}(r,\vec{v},t)$$

ومنه :

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t} = -\vec{v}\vec{\nabla}_r.f^{(1)}(r,\vec{v},t) + \frac{q}{m}(\vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t))\vec{\nabla}_v.f^{(1)}(r,\vec{v},t) \qquad (1.2)$$

من معادلة Poisson لدينا :

$$\vec{\nabla}.\vec{E} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla}.\Phi) = -\vec{\Delta}\Phi$$
$$\vec{\nabla}.\vec{E} = -\vec{\Delta}\Phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$
$$\vec{\nabla}.\vec{E} = 4\pi q\int f^{(1)}(r,\vec{v},t)dv$$

هذه المعادلات مكتوبة في نظام CGS

نفرض أن :

$$f^{(1)}(r,\vec{v},t) = n_0\varphi_0(\vec{v}) + \delta f^{(1)}(r,\vec{v},t) \qquad (*)$$

حيث : $\delta f << n_0\varphi_0(\vec{v})$

n_0 : عدد الشحنة الكهربائية بالنسبة للحجم .

φ_0 : توزيع Maxwell للسرعة .

f : دالة التوزيع .

نعوض المعادلة (*) في معادلة التطور (1.2) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[n_0\varphi_0(\vec{v}) + \delta f^{(1)}(r,\vec{v},t)\right] = -\vec{v}\vec{\nabla}_r.\left[n_0\varphi_0(\vec{v}) + \delta f^{(1)}(r,\vec{v},t)\right] \qquad (2.2)$$
$$+\frac{q}{m}(\vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t))\vec{\nabla}_v.\left[n_0\varphi_0(\vec{v}) + \delta f^{(1)}(r,\vec{v},t)\right]$$

حيث أن : $\frac{\partial}{\partial t}[n_0\varphi_0(\vec{v})]=0$ و $\vec{\nabla}_r[n_0\varphi_0(\vec{v})]=0$ و $\vec{\nabla}_v\left[\delta f^{(1)}(r,\vec{v},t)\right]=0$

لأن : $\delta f << n_0\varphi_0$

تصبح المعادلة (2.2) كالتالي :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\delta f^{(1)}(r,\vec{v},t)\right]=-\vec{v}\vec{\nabla}_r.\delta f^{(1)}(r,\vec{v},t)+\frac{q}{m}(\vec{\nabla}_r\Phi(\vec{r},t))\vec{\nabla}_v.n_0\varphi_0(\vec{v}) \quad (3.2)$$

1.2.8. التحويل بين الفضاء المباشر و الفضاء المعكوس :

هناك نوعان من التحويل وذلك باستعمال تحويل فوريي على الموضع r و تحويل لابلاس على الزمن t وهذين النوعين هما :

أ- التحويل من الفضاء المباشر إلى الفضاء المعكوس :

يكون التحويل في هذه الحالة كالتالي :

لدالة التوزيع $\delta f^{(1)}(\vec{k},\vec{v},z)$:

$$\delta f^{(1)}(\vec{k},\vec{v},z)=\int_\Omega e^{-i\vec{k}.r}dr.\int e^{iz.t}dt.\delta f^{(1)}(r,\vec{v},t)$$

وللكمون $\Phi(\vec{k},z)$:

$$\Phi(\vec{k},z)=\int_\Omega e^{-i\vec{k}.r}dr.\int e^{iz.t}dt.\Phi(\vec{r},t)$$

سنعتمد هذا التحويل في حسابنا لأن عبارتي دالة التوزيع والكمون مكتوبتان في حالة الفضاء المباشر وسنقوم بتحويلهما إلى الفضاء المعكوس .

ب- التحويل من الفضاء المعكوس إلى الفضاء المباشر :

تكون دالة التوزيع كالتالي :

$$\delta f^{(1)}(\vec{r},\vec{v},t)=\int_k e^{i\vec{k}.r}dk.\frac{1}{2\pi}\int_\gamma e^{-iz.t}dz.\delta f^{(1)}(\vec{k},\vec{v},z)$$

والكمون :

$$\Phi(\vec{r},t)=\int_k e^{i\vec{k}.r}dk.\frac{1}{2\pi}\int_\gamma e^{-iz.t}dz.\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z)$$

2.2.8. الحصول على حساب السماحية الكهربائية باستعمال معادلة Vlasov :

باستخدام التحويل الأول على كل الحدود الموجودة في المعادلة (3.2) نجد :

الحد الأول :

$$\int_0^\infty e^{iz.t}dt\left[\frac{\partial}{\partial t}\delta f^{(1)}(r,\vec{v},t)\right]=\delta f^{(1)}.e^{iz.t}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty e^{iz.t}dt\,\delta f^{(1)}=-\delta f^{(1)}(\vec{k},\vec{v},0)-iz.\delta\hat{f}^{(1)}(\vec{r},\vec{v},z)$$

ومنه نجد :

$$\int_\Omega e^{-i\vec{k}.r}dr.\left[-\delta f^{(1)}(\vec{r},\vec{v},0)-iz.\delta\hat{f}^{(1)}(\vec{r},\vec{v},z)\right]=-\delta f^{(1)}(\vec{k},\vec{v},0)-iz.\delta\hat{\hat{f}}^{(1)}(\vec{k},\vec{v},z)......(a)$$

الحد الثاني :

$$\int_0^\infty e^{iz.t}dt\left[-\vec{v}\vec{\nabla}_r.\delta f^{(1)}(r,\vec{v},t)\right]=-\vec{v}\vec{\nabla}_r.\delta\hat{f}^{(1)}(\vec{r},\vec{v},z)$$

$$\int_\Omega e^{-i\vec{k}.r}dr.\left[-\vec{v}\vec{\nabla}_r.\delta\hat{f}^{(1)}(\vec{r},\vec{v},z)\right]=-\delta\hat{f}^{(1)}.e^{i\vec{k}.r}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\left(-i\vec{k}\right)e^{i\vec{k}.r}dr.\left[-\vec{v}\vec{\nabla}_r.\delta\hat{f}^{(1)}(\vec{r},\vec{v},z)\right]$$

حيث :

$$-\delta\hat{f}^{(1)}.e^{i\vec{k}.r}\Big|_0^\infty=\infty$$

ومنه :

$$\int_\Omega e^{-i\vec{k}.r}dr.\left[-\vec{v}\vec{\nabla}_r.\delta\hat{f}^{(1)}(\vec{r},\vec{v},z)\right]=(-i\vec{k})\vec{v}.\delta\hat{\hat{f}}^{(1)}(\vec{k},\vec{v},z)......(b)$$

الحد الثالث :

$$\int_0^\infty e^{iz.t}dt(\vec{\nabla}_r\Phi(\vec{r},t))=\vec{\nabla}_r\hat{\Phi}(\vec{r},z)$$

$$\int_\Omega e^{-i\vec{k}.r}dr.\left[\vec{\nabla}_r\hat{\Phi}(\vec{r},z)\right]=\hat{\Phi}(\vec{r},z).e^{i\vec{k}.r}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty\left(-i\vec{k}\right)e^{i\vec{k}.r}dr.\left[\vec{\nabla}_r\hat{\Phi}(\vec{r},z)\right]$$

حيث أن :

$$\hat{\Phi}(\vec{r},z).e^{i\vec{k}.r}\Big|_0^\infty=\infty$$

ومنه :

$$\int_\Omega e^{-i\vec{k}.r}dr.\vec{\nabla}_r\hat{\Phi}(\vec{r},z)=i\vec{k}.\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z)......(c)$$

بعد حساب تحويلات فوريي على كل حدود المعادلة (3.2) نعوض المعادلات (a) , (b) و (c) فيها نجد :

$$-\delta f^{(1)}(\vec{k},\vec{v},0)-iz.\delta\hat{\hat{f}}^{(1)}(\vec{k},\vec{v},z)=(-i\vec{k}).\vec{v}\,\delta\hat{\hat{f}}^{(1)}(\vec{k},\vec{v},z)+\frac{q}{m}.n_0\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_v\varphi_0(\vec{v})$$

ومنه :

$$\left[-iz.+i\vec{k}.\vec{v}\right]\delta\hat{\hat{f}}^{(1)}(\vec{k},\vec{v},z)=\frac{q}{m}.n_0\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_v\varphi_0(\vec{v})+\delta f^{(1)}(\vec{k},\vec{v},0)$$

إذا :

$$\delta\hat{\hat{f}}^{(1)}(\vec{k},\vec{v},z)=\frac{\delta f^{(1)}(\vec{k},\vec{v},0)}{\left[-iz.+i\vec{k}.\vec{v}\right]}+\frac{\frac{q}{m}.n_0\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).\vec{k}\vec{\nabla}_v\varphi_0(\vec{v})}{\left[-z.+\vec{k}.\vec{v}\right]} \qquad (4.2)$$

9. استنبـــــــاط السمـــــاحية الكهربائية :

لدينا عبارة الكمون تعطى كالتالي :

$$\vec{\Delta}\Phi(\vec{r},t)=-4\pi q\int f^{(1)}(\vec{r},\vec{v},t)dv \qquad (5.2)$$

نعوض قيمة $f^{(1)}(\vec{r},\vec{v},t)$ الموجودة في المعادلة (*) نجد :

$$\vec{\Delta}\Phi(\vec{r},t)=-4\pi q\int\left[n_0\varphi_0(\vec{v})+\delta f^{(1)}(\vec{r},\vec{v},t)\right]dv \qquad (6.2)$$

نحول طرفي المعادلة (6.2) باستعمال تحويل Fourier وتحويل Laplace نجد :

$$\int_\Omega e^{-i\vec{k}.r}dr.\int e^{iz.t}dt.\vec{\Delta}\Phi(\vec{r},t)=-4\pi q\int_\Omega e^{-i\vec{k}.r}dr.\int e^{iz.t}dt.\int\left[n_0\varphi_0(\vec{v})+\delta f^{(1)}(\vec{r},\vec{v},t)\right]dv$$

ومنه :

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{-i\vec{k}.r}dr.\int e^{iz.t}dt.\vec{\Delta}\Phi(\vec{r},t)&=-4\pi q\int_\Omega e^{-i\vec{k}.r}dr.\int e^{iz.t}dt.\int n_0\varphi_0(\vec{v})\\&-4\pi q\int_\Omega e^{-i\vec{k}.r}dr.\int_0^\infty e^{iz.t}\int\delta f^{(1)}(\vec{r},\vec{v},t)dv\end{aligned} \qquad (7.2)$$

بحساب التكامل بالتجزئة مرتين على الحد الأول من المعادلة (7.2) نجد :

$$-k^2\int_\Omega e^{i\vec{k}.r}dr\int e^{iz.t}dt.\vec{\Delta}\Phi(\vec{r},t)=0-4\pi q\int dv\,\delta\hat{\hat{f}}^{(1)}(\vec{k},\vec{v},z)$$

ومنه :

$$k^2\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z)=4\pi q\int dv\,\delta\hat{\hat{f}}^{(1)}(\vec{k},\vec{v},z) \qquad (8.2)$$

بتعويض المعادلة (4.2) في المعادلة (8.2) نجد :

$$k^2\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z) = 4\pi q\int dv.\left[\frac{\frac{q}{m}.n_0\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_v\varphi_0(\vec{v}) + \delta f^{(1)}(\vec{k},\vec{v},0)}{\left[-iz.+i\vec{k}.\vec{v}\right]}\right]$$

$$k^2\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z) = 4\pi q\int dv.\frac{\frac{q}{m}.n_0\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_v\varphi_0(\vec{v})}{\left[-iz.+i\vec{k}.\vec{v}\right]} + 4\pi q\int dv.\frac{\delta f^{(1)}(\vec{k},\vec{v},0)}{\left[-iz.+i\vec{k}.\vec{v}\right]}$$

ومنه :

$$\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z)\left[1-\frac{4\pi q}{k^2}\int dv.\frac{\frac{q}{m}.n_0.\vec{k}\vec{\nabla}_v\varphi_0(\vec{v})}{\left[\vec{k}.\vec{v}-z\right]}\right] = \frac{4\pi q}{k^2}\int dv.\frac{\delta f^{(1)}(\vec{k},\vec{v},0)}{\left[-iz.+i\vec{k}.\vec{v}\right]}$$

إذا :

$$\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z)\left[1-\frac{4\pi n_0 q^2}{m}\frac{1}{k^2}\int dv.\frac{\vec{k}\vec{\nabla}_v\varphi_0(\vec{v})}{\left[\vec{k}.\vec{v}-z\right]}\right] = \frac{4\pi q}{k^2}\int dv.\frac{\delta f^{(1)}(\vec{k},\vec{v},0)}{\left[-iz.+i\vec{k}.\vec{v}\right]} \qquad (9.2)$$

حيث :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z) = 1-\frac{4\pi n_0 q^2}{m}\frac{1}{k^2}\int dv.\frac{\vec{k}\vec{\nabla}_v\varphi_0(\vec{v})}{\left[\vec{k}.\vec{v}-z\right]}$$

وتعرف $\vec{\varepsilon}(\vec{k},z)$ بالسماحية الكهربائية للبلازما .

إذا تكون المعادلة النهائية لها كالتالي :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z) = 1-\frac{\omega_p^2}{k^2}\int dv.\frac{\vec{k}\vec{\nabla}_v\varphi_0(\vec{v})}{\left[\vec{k}.\vec{v}-z\right]} \qquad (10.2)$$

حيث :

ω_p : يمثل تواتر البلازما.

$$\omega_p = \left[\frac{4\pi n_0 q^2}{m}\right]^{1/2}$$

10. علاقة الناقلية الكهربائية بالسماحية الكهربائية :

الناقلية الكهربائية هي خاصية من خصائص المادة ، تتمثل قدرتها في نقل الشحنات المتحركة من مكان إلى آخر . وتعطى علاقة السماحية الكهربائية بدلالة الناقلية الكهربائية كالتالي :

$$\varepsilon(\omega)=\frac{1+4\pi i\sigma(\omega)}{\omega}$$

حيث :

$\sigma(\omega)$: الناقلية الكهربائية .

الفصل الثالث

حساب السماحية الكهربائية باستعمال معادلة Vlasov و إدخال المشتق الكسري

الفصل الثالث

حساب السماحية الكهربائية باستعمال معادلة Vlasov وإدخال المشتق الكسري

1. مدخـــــل

في هذا الفصل سوف نقوم بمعالجة السماحية الكهربائية في حالة بلازما TOKAMAK خاضعة للنقل الغير عادي ، وذلك باستعمال معادلة VLASOV وإدخال المشتق الكسري عليها ، وكذلك سنقوم بحساب السماحية باستعمال التقريب من الرتبة صفر . وسنعتمد في هذا الحساب على المراجع [6] و [7] و [8] .

2. كتابة معادلة Vlasov في حالة النقل العادي

نكتب أولا معادلة Vlasov في حالة النقل العادي ، مع عدم الأخذ بعين الاعتبار القوة الداخلية الناتجة عن الحقل الضعيف المحليّ(بدون الحقل الخارجي) .

$$\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t} = -\vec{v}.\vec{\nabla}_r f(\vec{r},\vec{v},t) + \frac{q}{m}\left[\vec{\nabla}_r.\Phi(\vec{r},t)\right]\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v}) \qquad (1.3)$$

بحيث :

$F_M(\vec{v})$: هي توزيع ماكسويل Maxwell للسرعات.

بتطبيق التحويلين : تحويل " fourier " لمتغير الفضاء (r) ، و تحويل " Laplace" لمتغير الزمن (t) المناسبين لكلا حدي المعادلة ويعطى بالشكل :

$$\hat{\hat{f}}(\vec{k},z) = \int e^{i\vec{k}.r} dr^3 \int e^{iz.t} f(\vec{r},t) dt$$

الحد الأول من المعادلة يكون تحويله كالتالي :

$$\int e^{i\vec{k}.r} dr^3 \int \frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t} e^{iz.t} dt = f.e^{i\vec{k}.r}\Big|_0^\infty - iz.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)$$

ومنه :

$$\int e^{i\vec{k}.r}dr^3\int\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}e^{iz.t}dt=-\hat{f}(\vec{r},\vec{v},0)-iz.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) \qquad (2.3)$$

و الحد الثاني يكون كالتالي :

$$\int e^{i\vec{k}.r}dr^3\int\vec{\nabla}_r f(\vec{r},\vec{v},t)e^{iz.t}dt=f.e^{i\vec{k}.r}\Big|_0^\infty-i\vec{k}.\int f.e^{i\vec{k}.r}dr=-i\vec{k}.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) \qquad (3.3)$$

أما الحد الثالث :

$$\int e^{i\vec{k}.r}dr^3\int\left[\vec{\nabla}_r\Phi(\vec{r},t)\right]e^{iz.t}dt=i\vec{k}.\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z) \qquad (4.3)$$

نعوض المعادلات (2.3) و (3.3) و (4.3) في (1.3) نجد :

$$-\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)-iz.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)=(-i\vec{k}).\vec{v}\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)+\frac{q}{m}\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})$$

$$\Rightarrow i\left[\vec{k}.\vec{v}-z\right]\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)=\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)+\frac{q}{m}\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})$$

ومنه :

$$\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)=\frac{\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)}{i\left[\vec{k}.\vec{v}-z\right]}+\frac{\frac{q}{m}\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left[\vec{k}.\vec{v}-z\right]} \qquad (5.3)$$

3. كتابة معادلة Vlasov باستعمال المشتق الكسري

باستعمال المشتق الكسري والذي يكون معرفا بالشكل التالي :

$$\vec{\nabla}^\alpha.f=\int e^{i\vec{p}.r}|\vec{p}|^\alpha f(\vec{p},\vec{v},t)d\vec{p}$$

تكتب المعادلة (1.3) كالتالي :

$$\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}=-\vec{v}.\vec{\nabla}^\alpha.f(\vec{r},\vec{v},t)+\frac{q}{m}\left[\vec{\nabla}_r.\Phi(\vec{r},t)\right]\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v}) \qquad (6.3)$$

وتسمى المعادلة (6.3) بالمعادلة الكسرية لـ Vlasov .

بكتابة المعادلة (6.3) مع اعتبار تحويل Fourier و Laplace و المشتق الكسري نجد :

$$-\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)-iz.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)=-\vec{v}\int e^{i\vec{k}.r}dr\int\vec{\nabla}^\alpha f(\vec{r},\vec{v},t)e^{iz.t}dt+\frac{q}{m}\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v}) \qquad (7.3)$$

نقوم بحساب التكامل الموجود في الحد الأول من الطرف الثاني من المعادلة (7.3) :

$$-\vec{v}\int e^{i\vec{k}.r}dr\int \vec{\nabla}^{\alpha} f(\vec{r},\vec{v},t)e^{iz.t}dt = -\vec{v}\int e^{i\vec{k}.r}dr\vec{\nabla}^{\alpha}\hat{f}(\vec{r},\vec{v},z)$$

نعوض عبارة $\nabla^{\alpha}.f$ نجد :

$$-\vec{v}\int e^{i\vec{k}.r}dr\int \vec{\nabla}^{\alpha} f(\vec{r},\vec{v},t)e^{iz.t}dt = -\vec{v}\int e^{i\vec{k}.r}dr\int e^{i\vec{p}..r}\left|\vec{p}\right|^{\alpha}\hat{f}(\vec{p},\vec{v},z)d\vec{p}$$

ومنه نجد :

$$-\vec{v}\int e^{i\vec{k}.r}dr\int \vec{\nabla}^{\alpha} f(\vec{r},\vec{v},t)e^{iz.t}dt = -\vec{v}\int\left|\vec{p}\right|^{\alpha}\hat{f}(\vec{p},\vec{v},z)d\vec{p}\int dr.e^{i(\vec{k}+\vec{p}).r}$$

حيث :

$$\int dr.e^{i(\vec{k}+\vec{p}).r} = \delta\left(\vec{k}+\vec{p}\right)$$

إذا تصبح النتيجة كالتالي :

$$-\vec{v}\int e^{i\vec{k}.r}dr\int \vec{\nabla}^{\alpha} f(\vec{r},\vec{v},t)e^{iz.t}dt = -\vec{v}\int\left|\vec{p}\right|^{\alpha}\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z).\delta\left(\vec{k}+\vec{p}\right)d\vec{p}$$

بوضع : $\vec{p}=\vec{k}$ تصبح النتيجة النهائية كالتالي :

$$-\vec{v}\int e^{i\vec{k}.r}dr\int \vec{\nabla}^{\alpha} f(\vec{r},\vec{v},t)e^{iz.t}dt = -\vec{v}\int\left|\vec{p}\right|^{\alpha}\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z).\delta\left(\vec{k}+\vec{p}\right)d\vec{p} = -\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha}.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)....(*)$$

نعوض المعادلة (*) في المعادلة (7.3) نجد :

$$-\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0) - iz.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) = -\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha}.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) + \frac{q}{m}\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_{v}F_{M}(\vec{v})$$

ومنه :

$$\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right).\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) = \hat{f}(\vec{k},\vec{v},0) + \frac{q}{m}\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_{v}F_{M}(\vec{v})$$

إذا :

$$\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) = \frac{\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)} + \frac{\frac{q}{m}\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_{v}F_{M}(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)} \qquad (8.3)$$

4. كيفية حساب السماحية باستعمال معادلة Vlasov والمشتق الكسري

من الفصل الثاني لدينا المعادلة (5.2) و (8.2) على التوالي كالتالي :

$$\vec{\Delta}\Phi(\vec{r},t) = -4\pi q\int f(\vec{r},\vec{v},t)dv$$

تصبح المعادلة (8.2) :

$$k^2\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z) = 4\pi q\int dv\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) \qquad (8.2)$$

نعوض المعادلة (8.3) في المعادلة (8.2) نجد :

$$k^2\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z) = 4\pi q\int dv\left[\frac{\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha}-iz\right)} + \frac{\frac{q}{m}\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha}-iz\right)}\right]$$

$$\Rightarrow k^2\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z) = 4\pi q\int dv\frac{\frac{q}{m}\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha}-iz\right)} + 4\pi q\int dv\frac{\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha}-iz\right)}$$

ومنه :

$$\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z) = \frac{4\pi q}{k^2}\int dv\frac{\frac{q}{m}\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).i\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha}-iz\right)} + \frac{4\pi q}{k^2}\int dv\frac{\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha}-iz\right)}$$

إذا :

$$\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).\left[1-\frac{4\pi q}{k^2}\int dv\frac{\frac{iq}{m}\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha}-iz\right)}\right] = \frac{4\pi q}{k^2}\int dv\frac{\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha}-iz\right)} \qquad (9.3)$$

إذا تكتب عبارة السماحية الكهربائية بإستعمال المشتق الكسري من الشكل :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z) = 1-\frac{4\pi q}{k^2}\int dv\frac{\frac{iq}{m}\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha}-iz\right)}$$

ومنه :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z) = 1-\frac{4\pi iq^2}{mk^2}\int dv\frac{\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha}-iz\right)} \qquad (10.3)$$

شعاع الموجة $\vec{k}$ يوازي المحور $\vec{z}$ ($\vec{z} \quad \backslash\backslash \quad \vec{k}$) إذا :

$$dv = v^2 \sin\theta d\theta d\varphi dv$$

وعبارة توزيع Maxwell للسرعات تكتب بالشكل التالي :

$$F_M(\vec{v}) = n_0\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

يصبح التكامل الموجود في المعادلة (10.3) كالتالي :

$$\int dv \frac{\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)} = \int \frac{v^2 \sin\theta d\theta d\varphi dv.\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)}$$

ومنه :

$$\int \frac{v^2 \sin\theta d\theta d\varphi dv.\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int \frac{v^2 \sin\theta d\theta dv.\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)} \qquad (11.3)$$

حيث نقوم بالحسابات التالية :

$$F_M(\vec{v}) = n_0\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

بحساب المشتق لتوزيع ماكسويل للسرعات يكون كالتالي :

$$\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v}) = n_0\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} . \frac{-2m\vec{v}}{2K_B T} . e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} = n_0\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} . \frac{-m\vec{v}}{K_B T} . e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}$$

ولدينا :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

نعوض القيم المحسوبة في المعادلة (11.3) فنجد :

$$\int dv \frac{\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)} = \int \frac{v^2 \sin\theta d\theta d\varphi dv.\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)}$$

ومنه :

$$\int dv \frac{\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)} = \frac{-2\pi m n_0}{K_B T}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} . \int \frac{v^2 \sin\theta d\theta dv..\vec{k}.\vec{v}.e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)}$$

حيث أن :

$$\vec{k}.\vec{v} = k.v.\cos\theta$$

بالتعويض نجد :

$$\int \frac{v^2 \sin\theta d\theta d\varphi dv.\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)} = \frac{-2\pi m n_0}{K_B T}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}.\int \frac{v^2 \sin\theta d\theta dv.k.v.\cos\theta.e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)}$$

$$= \frac{2\pi m n_0 k}{K_B T}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}.\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}.\int_0^{\pi} \frac{-\sin\theta.\cos\theta d\theta}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)}$$

ومنه :

$$\int dv \frac{\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)} = \frac{2\pi m n_0 k}{K_B T}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}.\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}}.\int_0^{\pi} \frac{-\sin\theta.\cos\theta d\theta}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)} \qquad (12.3)$$

نقوم بتعويض المعادلة (12.3) في المعادلة (10.3) فنجد :

$$\varepsilon(\vec{k},z) = 1 - \frac{4\pi i q^2}{mk^2}\int dv \frac{\vec{k}\vec{\nabla}_v F_M(\vec{v})}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)} = 1 - \frac{4\pi i q^2}{mk^2}\left[\frac{2\pi m n_0 k}{K_B T}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}.\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} dv.\int_0^{\pi} \frac{-\sin\theta.\cos\theta d\theta}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)}\right]$$

يصبح لدينا :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z) = 1 - \frac{8\pi^2 i q^2 n_0}{K_B T.k}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} dv.\int_0^{\pi} \frac{-\sin\theta.\cos\theta d\theta}{\left(\vec{v}\left|\vec{k}\right|^{\alpha} - iz\right)}$$

ومنه :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z) = 1 - \frac{8\pi^2 i q^2 n_0}{K_B T.k}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_BT}} dv.\int_0^{\pi} \frac{-\sin\theta.\cos\theta d\theta}{\left(\vec{k}^{\alpha-1}.\vec{k}.\vec{v}.-iz\right)}$$

إذا :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z)=1-\frac{8\pi^2 iq^2 n_0}{K_B T.k}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}dv.\int_0^{\pi}\frac{-\sin\theta.\cos\theta d\theta}{\left(\vec{k}^{\alpha-1}.\vec{k}.\vec{v}.-iz\right)}$$

ومنه :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z)=1-\frac{8\pi^2 iq^2 n_0}{K_B T.k}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}dv.\int_0^{\pi}\frac{-\sin\theta.\cos\theta d\theta}{\left(k^{\alpha}.v.\cos\theta-iz\right)}$$

إذا تصبح النتيجة كالتالي :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z)=1-\frac{8\pi^2 iq^2 n_0}{K_B T.k^{\alpha+1}}\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty} v^2.e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}dv.\int_0^{\pi}\frac{-\sin\theta.\cos\theta d\theta}{\left(\cos\theta-\frac{iz}{k^{\alpha}.v}\right)}$$

لدينا :

$$\beta=\frac{1}{K_B T}$$

بالتعويض نجد :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z)=1-\frac{8\pi^2 iq^2 n_0}{k^{\alpha+1}}\beta\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty} v^2.e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}dv.\int_0^{\pi}\frac{-\sin\theta.\cos\theta d\theta}{\left(\cos\theta-\frac{iz}{k^{\alpha}.v}\right)} \qquad (13.3)$$

حيث : z : التواتر ، و $\vec{k}$: هو معكوس الموضع في الفضاء العكسي .

بحساب التكامل الثاني في المعادلة (13.3) نجد نتيجته كالتالي :

$$\int_0^{\pi}\frac{-\sin\theta.\cos\theta d\theta}{\left(\cos\theta-\frac{iz}{k^{\alpha}.v}\right)}=2+\frac{iz}{k^{\alpha}.v}\log\frac{1-\frac{iz}{k^{\alpha}.v}}{1+\frac{iz}{k^{\alpha}.v}}$$

إذا :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z)=1-\frac{8\pi^2 iq^2 n_0}{k^{\alpha+1}}\beta\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}}.\int_0^{\infty} v^2.e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}}dv.\left[2+\frac{iz}{k^{\alpha}.v}\log\frac{1-\frac{iz}{k^{\alpha}.v}}{1+\frac{iz}{k^{\alpha}.v}}\right] \qquad (14.3)$$

ومنه :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z) = 1 - i\frac{16\pi^2 q^2 n_0}{k^{\alpha+1}}\beta\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} . \int_0^\infty v^2 . e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$

$$+\frac{8\pi^2 q^2 n_0 z}{k^{2\alpha+1}}\beta\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} . \int_0^\infty v . e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv . \left[\log\frac{\left(k^\alpha . v - iz\right)}{\left(k^\alpha . v + iz\right)}\right] \qquad (15.3)$$

ومنه :

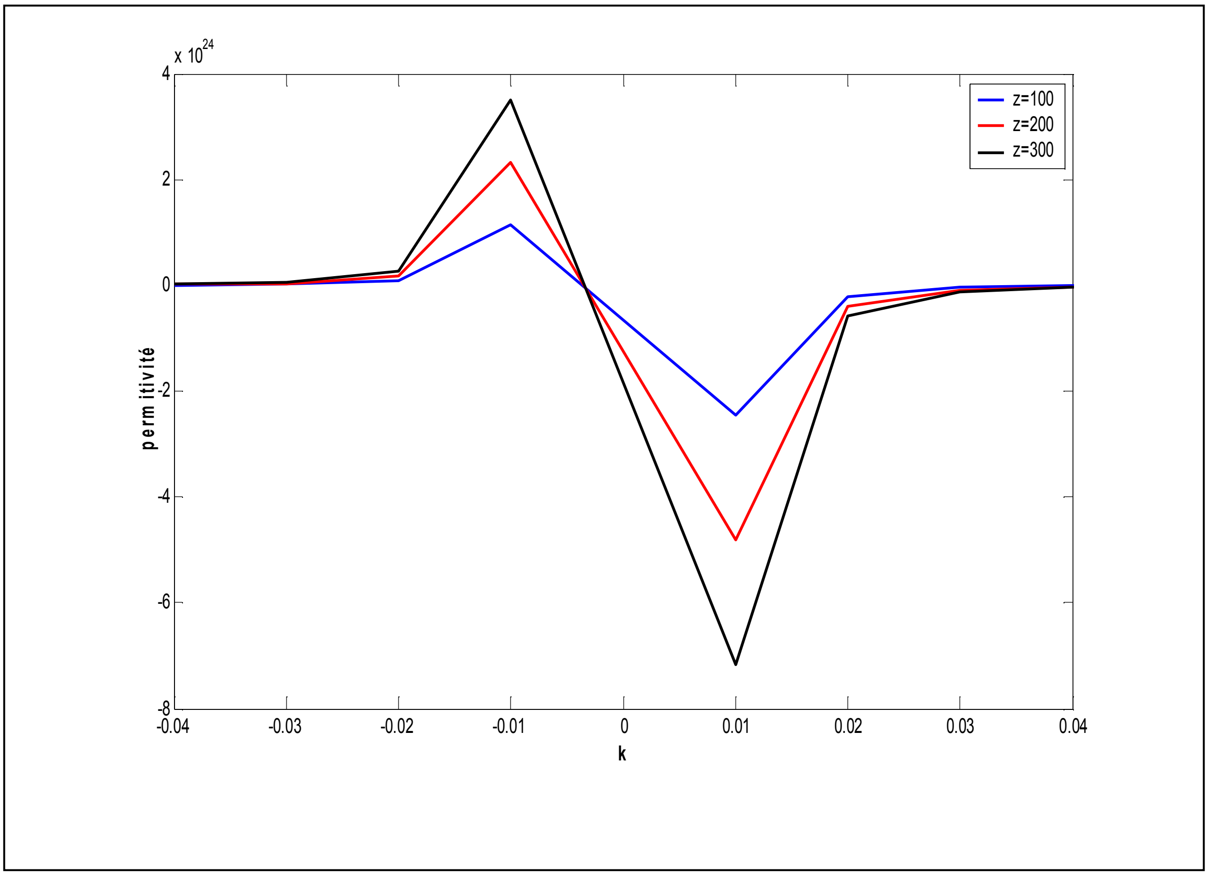
$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z) = 1 - i\frac{16\pi^2 q^2 n_0}{k^{\alpha+1}}\beta\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} . \int_0^\infty v^2 . e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$

$$+\frac{8\pi^2 q^2 n_0 z}{k^{2\alpha+1}}\beta\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} . \int_0^\infty v . e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv . \left(-2i\theta\right) \qquad (16.3)$$

بحساب التكامل الأول في المعادلة (16.3) تصبح كالتالي :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z) = 1 - i\frac{4\pi q^2 n_0}{k^{\alpha+1}}\beta + \frac{8\pi^2 q^2 n_0 z}{k^{2\alpha+1}}\beta\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} . \int_0^\infty v . e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} . \left(-2i\theta\right) dv \qquad (17.3)$$

حيث أن : $\theta = arctg\left(\frac{z}{k^\alpha . v}\right)$



الشكل (1.3) : منحنى بياني للجزء التخيلي للسماحية الكهربائية بدلالة K

5. حساب العمدة θ

حسب عبارة العمدة θ تكون لدينا ثلاث حالات حسب قيم Z و k^{α} وهي :

1. في حالة Z يكون حقيقي و k^{α} تخيلي حيث :

$$k = |k|.e^{i\Psi+2in\pi}$$

حيث :

$$\frac{1}{k^{\alpha}} = k^{-\alpha} = |k|^{-\alpha}.e^{-i\alpha\Psi-2in\pi} = |k|^{-\alpha}.[\cos(\alpha\Psi+2\alpha n\pi)+i\sin(\alpha\Psi+2\alpha n\pi)]$$

إذا تصبح علاقة θ كالتالي :

$$\theta = arctg\left(\frac{z}{v}.\left\{|k|^{-\alpha}.[\cos(\alpha\Psi+2\alpha n\pi)+i\sin(\alpha\Psi+2\alpha n\pi)]\right\}\right)$$

2. في حالة k^{α} حقيقي و Z تخيلي حيث :

$$z = \omega_1 + i\omega_2$$

حيث أن :

ω_1: الجزء الحقيقي للعدد المركب Z .

ω_2: الجزء التخيلي للعدد المركب Z .

إذا تصبح علاقة θ كالتالي :

$$\theta = arctg\left(\frac{(\omega_1+i\omega_2)}{k^{\alpha}.v}\right)$$

3. في حالة Z و k^{α} تخيليين حيث :

$$z = \omega_1 + i\omega_2$$

$$k^{-\alpha} = |k|^{-\alpha}.[\cos(\alpha\Psi+2\alpha n\pi)+i\sin(\alpha\Psi+2\alpha n\pi)]$$

إذا تصبح علاقة θ كالتالي :

$$\theta = arctg\left(\frac{(\omega_1+i\omega_2)}{v}.\left\{|k|^{-\alpha}.[\cos(\alpha\Psi+2\alpha n\pi)+i\sin(\alpha\Psi+2\alpha n\pi)]\right\}\right)$$

وبالتالي فإن علاقة العمدة θ تتغير بتغير الفرضيات حسب Z و k^{α} ، وكذا المعادلة (17.3) الخاصة بالسماحية الكهربائية .

6. حساب السماحية الكهربائية باستعمال التقريب من الرتبة صفر :

1.6. التقريب من الرتبة صفر [4]:

في التقريب ذو الرتبة الأدنى ، من الطبيعي أن نفترض أن الغاز المؤين (البلازما) يخضع لتوزيع Maxwell-Boltzmann المحلي ، مع تغير طفيف في درجة الحرارة والكثافة . حيث تكتب دالة التوزيع في هذه الحالة كالتالي :

$$f(\vec{r},\vec{v},t) = n(\vec{r},t).\varphi_0(\vec{v})$$

2.6. حساب السماحية الكهربائية باستعمال هذا التقريب :

نذكر بمعادلة Vlasov المعادلة (1.3) :

$$\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t} = -\vec{v}.\vec{\nabla}_r f(\vec{r},\vec{v},t) + \frac{q}{m}\left[\vec{\nabla}_r.\Phi(\vec{r},t)\right]\vec{\nabla}_v f(\vec{r},\vec{v},t) \qquad (1.3)$$

باستعمال التقريب من الرتبة (0) تكتب دالة التوزيع $f(\vec{r},\vec{v},t)$ كالتالي :

$$f(\vec{r},\vec{v},t) = n(\vec{r},t).\varphi_0(\vec{v}) \qquad (18.3)$$

نعوض المعادلة (18.3) في المعادلة (1.3) نجد :

$$\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t} = -\vec{v}.\vec{\nabla}_r f(\vec{r},\vec{v},t) + \frac{q}{m}\vec{\nabla}_v \varphi_0(\vec{v})\left[\vec{\nabla}_r.\Phi(\vec{r},t)\right]n(\vec{r},t) \qquad (19.3)$$

باستعمال تحويل Laplace على الزمن t :

$$\int_0^\infty \frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}.e^{iz.t}\,dt = f(\vec{r},\vec{v},t).e^{iz.t}\Big|_0^\infty - iz\int_0^\infty f(\vec{r},\vec{v},t).e^{iz.t}\,dt$$

ومنه :

$$\int_0^\infty \frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}.e^{iz.t}\,dt = -f(\vec{r},\vec{v},0) - iz.\hat{f}(\vec{r},\vec{v},z) \qquad (20.3)$$

نعوض المعادلة (20.3) في المعادلة (19.3) نجد :

$$-f(\vec{r},\vec{v},0) - iz.\hat{f}(\vec{r},\vec{v},z) = -\vec{v}.\vec{\nabla}_r f(\vec{r},\vec{v},z) + \frac{q}{m}\vec{\nabla}_v \varphi_0(\vec{v})\int_0^\infty e^{iz.t}\,dt.\left[\vec{\nabla}_r.\Phi(\vec{r},t)\right]n(\vec{r},t) \qquad (21.3)$$

علاقة الكثافة $n(\vec{r},t)$ تعطى كالتالي :

$$n(\vec{r},t) = n_0 . e^{\frac{\Phi(\vec{r},t)}{k_B T}}$$

ونعوضها في المعادلة (21.3) نجد :

$$- f(\vec{r},\vec{v},0) - iz.\hat{f}(\vec{r},\vec{v},z) = -\vec{v}.\vec{\nabla}_r f(\vec{r},\vec{v},z) + \frac{n_0 . q}{m}\vec{\nabla}_v \varphi_0(\vec{v})\int_0^\infty e^{iz.t} . e^{\frac{\Phi(\vec{r},t)}{k_B T}} dt \qquad (22.3)$$

باستعمال تحويل Fourier على الموضع r :

$$\int\left[- f(\vec{r},\vec{v},0) - iz.\hat{f}(\vec{r},\vec{v},z)\right]e^{i\vec{k}.r}dr = -\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0) - iz.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) \qquad (23.3)$$

ومنه نعوض المعادلة (23.3) في المعادلة (22.3) نجد :

$$\begin{aligned} &-\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0) - iz.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) = -\vec{v}.\left\{ f.e^{i\vec{k}.r}\Big|_\Omega - \int_\Omega i\vec{k}.e^{i\vec{k}.r}\hat{f}(\vec{r},\vec{v},z)\right\} \\ &+\frac{n_0 q}{m}\vec{\nabla}_v.\varphi_0(\vec{v})\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}\vec{\nabla}_r.e^{\frac{\Phi(\vec{r},t)}{k_B T}}dr \end{aligned} \qquad (24.3)$$

ومنه :

$$\begin{aligned} &-\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0) - iz.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) - i\vec{k}.\vec{v}\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) = \\ &= \frac{n_0 q}{m}\vec{\nabla}_v.\varphi_0(\vec{v})\int_0^\infty e^{iz.t}dt.\left\{ e^{\frac{\Phi(\vec{r},t)}{k_B T}}.e^{i\vec{k}.r}\Bigg|_\Omega - i\vec{k}\int_\Omega e^{i\vec{k}.r}.e^{\frac{\Phi(\vec{r},t)}{k_B T}}dr\right\} \end{aligned} \qquad (25.3)$$

حيث أن :

$$e^{\frac{\Phi(\vec{r},t)}{k_B T}}.e^{i\vec{k}.r}\Bigg|_\Omega = \infty$$

إذا تصبح المعادلة رقم (25.3) كالتالي :

$$- \hat{f}(\vec{k},\vec{v},0) - iz.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) - i\vec{k}.\vec{v}\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) = -i\vec{k}\frac{n_0 q}{m}\vec{\nabla}_v.\varphi_0(\vec{v})\int_0^\infty e^{iz.t}dt.\hat{n}(\vec{k},t)$$

ومنه :

$$-\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)-iz.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)-i\vec{k}.\vec{v}\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)=-i\vec{k}\frac{n_0 q}{m}\vec{\nabla}_v.\varphi_0(\vec{v}).\hat{n}(\vec{k},z) \qquad (26.3)$$

3.6. الكثافة المحلية [5] :

دالة التوزيع للجزيء تتيح الوصول إلى الكثافة المحلية حيث أن تكامل دالة التوزيع على كمية الحركة هي الكثافة المحلية وتعطى بالعلاقة التالية :

$$n(\vec{r},t)=\int f(\vec{r},\vec{v},t)dv$$

حيث أن :

$$\hat{n}(\vec{r},z)=\int \hat{f}(\vec{r},\vec{v},z)dv$$

ومنه فإن :

$$\hat{\hat{n}}(\vec{k},z)=\int \hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)dv \qquad (**)$$

4.6. استنباط السماحية باستعمال التقريب من الرتبة صفر :

نعوض المعادلة (**) في المعادلة (26.3) نجد :

$$-\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)-iz.\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)-i\vec{k}.\vec{v}\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)=-i\vec{k}\frac{n_0 q}{m}\vec{\nabla}_v.\varphi_0(\vec{v}).\int \hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)dv$$

ومنه :

$$-i(z+\vec{k}.\vec{v})\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)=\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)-i\vec{k}\frac{n_0 q}{m}\vec{v}.\varphi_0(\vec{v}).\int \hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)dv \qquad (27.3)$$

إذا :

$$\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)=-\frac{\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)}{i(z+\vec{k}.\vec{v})}+\frac{\vec{k}\frac{n_0 q}{m}\vec{v}.\varphi_0(\vec{v})}{(z+\vec{k}.\vec{v})}.\int \hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)dv \qquad (28.3)$$

ندخل التكامل على طرفي المعادلة (28.3) نجد :

$$\int \hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)dv=-\int \frac{\hat{f}(\vec{k},\vec{v},0)}{i(z+\vec{k}.\vec{v})}dv+\int \frac{\vec{k}\frac{n_0 q}{m}\vec{v}.\varphi_0(\vec{v})}{(z+\vec{k}.\vec{v})}dv.\int \hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)dv \qquad (29.3)$$

نضع :

$$I = \int \hat{\hat{f}}\left(\vec{k},\vec{v},z\right)dv = \hat{n}\left(\vec{k},z\right)$$

إذا تصبح المعادلة (29.3) كالتالي :

$$I\left(1-\frac{q}{m}\int\frac{n_0\vec{k}.\vec{v}.\varphi_0(\vec{v})}{(z+\vec{k}.\vec{v})}dv\right) = -\int\frac{\hat{f}\left(\vec{k},\vec{v},0\right)}{i(z+\vec{k}.\vec{v})}dv$$

ومنه :

$$\hat{n}\left(\vec{k},z\right)\left(1-\frac{q}{m}\int\frac{n_0\vec{k}.\vec{v}.\varphi_0(\vec{v})}{(z+\vec{k}.\vec{v})}dv\right) = -\int\frac{\hat{f}\left(\vec{k},\vec{v},0\right)}{i(z+\vec{k}.\vec{v})}dv \qquad (30.3)$$

إذا :

$$\hat{n}\left(\vec{k},z\right) = \frac{-\int\frac{\hat{f}\left(\vec{k},\vec{v},0\right)}{i(z+\vec{k}.\vec{v})}dv}{\left(1-\frac{q}{m}\int\frac{n_0\vec{k}.\vec{v}.\varphi_0(\vec{v})}{(z+\vec{k}.\vec{v})}dv\right)} \qquad (30.3)$$

بتعويض المعادلة (**) في المعادلة (30.3) نجد :

$$\int \hat{\hat{f}}\left(\vec{k},\vec{v},z\right)dv = \frac{-\int\frac{\hat{f}\left(\vec{k},\vec{v},0\right)}{i(z+\vec{k}.\vec{v})}dv}{\left(1-\frac{q}{m}\int\frac{n_0\vec{k}.\vec{v}.\varphi_0(\vec{v})}{(z+\vec{k}.\vec{v})}dv\right)} \qquad (31.3)$$

ومنه :

$$\hat{\hat{f}}\left(\vec{k},\vec{v},z\right) = \frac{-\frac{\hat{f}\left(\vec{k},\vec{v},0\right)}{i(z+\vec{k}.\vec{v})}}{\left(1-\frac{q}{m}\int\frac{n_0\vec{k}.\vec{v}.\varphi_0(\vec{v})}{(z+\vec{k}.\vec{v})}dv\right)} \qquad (32.3)$$

ولذلك فإن عبارة السماحية الكهربائية هي :

$$\varepsilon\left(\vec{k},z\right)=1-\frac{q}{m}\int\frac{n_0\vec{k}.\vec{v}.\varphi_0\left(\vec{v}\right)}{\left(z+\vec{k}.\vec{v}\right)}dv=1-\frac{q}{m}\int\frac{\vec{k}.\vec{\nabla}_V.F_M\left(\vec{v}\right)}{\left(z+\vec{k}.\vec{v}\right)}dv \qquad (32.3)$$

حيث أن :

$$F_M\left(\vec{v}\right)=n_0.\varphi_0\left(\vec{v}\right)$$

وهي نفس النتيجة المتحصل عليها في الفصل الثاني ، لذلك سنلجأ في الفصل القادم إلى التقريب من الرتبة (1)

الفصل الرابع

حساب السماحية الكهربائية باستعمال التقريب من الرتبة واحد

الفصل الرابع

حساب السماحية الكهربائية باستعمال التقريب من الرتبة واحد

1. مدخل :

تعتبر معادلة بولتزمان للنقل أداة قوية لتحليل ظواهر النقل داخل الأنظمة التي تتضمن تدرجات الكثافة ودرجة الحرارة . نطبق المعادلة لتحليل التيارات العامة داخل النظام ، كما يناقش الانتشار الحراري الناجم عنه . استخدام معادلة Vlasov و استعمال التقريب من الرتبة (0) في الفصل السابق لم يعطي نتائج جديدة بل وجدنا نتائج تحصلنا عليها في الفصل الثاني ، لذلك في هذا الفصل سنعتمد في حسابنا على معادلة Boltzmann أي باعتبار حد التصادم ، وسنقوم بحساب السماحية الكهربائية باستعمال التقريب من الرتبة (1) .

2. التقريب من الرتبة واحد [4] :

نعطي تقدير للخطأ الناتج عن التقريب من الدرجة صفر، ولتكن $f(\vec{r},\vec{v},t)$ دالة التوزيع ، تكتب كالتالي :

$$g(\vec{r},\vec{v},t) = f(\vec{r},\vec{v},t) - f_0(\vec{r},\vec{v},t) \qquad (1.4)$$

حيث أن :

g : التصحيح .

f_0 : التقريب من الرتبة صفر .

3. كتابة معادلة Boltzmann باستعمال التقريب من الرتبة واحد :

باستعمال معادلة بولتزمان Boltzmann للحساب في هذا التقريب وهي كالتالي :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}_r+\frac{F}{m}\vec{\nabla}_v\right)f(\vec{r},\vec{v},t)=\left(\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}\right)_{coll} \qquad (2.4)$$

باستعمال التقريب من الرتبة (1) تكتب دالة التوزيع $f(\vec{r},\vec{v},t)$ على النحو التالي :

$$f(\vec{r},\vec{v},t)=f_0(\vec{r},\vec{v},t)+g(\vec{r},\vec{v},t) \qquad (3.4)$$

$$\Rightarrow g(\vec{r},\vec{v},t)=f(\vec{r},\vec{v},t)-f_0(\vec{r},\vec{v},t)$$

لدينا :

$$\left(\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}\right)_{coll}=-\frac{f(\vec{r},\vec{v},t)-f_0(\vec{r},\vec{v},t)}{\tau}=-\frac{g(\vec{r},\vec{v},t)}{\tau} \qquad (4.4)$$

حيث أن : τ هو زمن التصادم ويعرف أيضا بالمدة الحرة .

بتعويض المعادلة (3.4) في المعادلة (2.4) نجد :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}_r+\frac{F}{m}\vec{\nabla}_v\right).\left(f_0(\vec{r},\vec{v},t)+g(\vec{r},\vec{v},t)\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(f_0(\vec{r},\vec{v},t)+g(\vec{r},\vec{v},t)\right)\right)_{coll} \qquad (5.4)$$

نضع :

$$\ell=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}_r+\frac{F}{m}\vec{\nabla}_v\right)$$

إذا تصبح المعادلة (5.4) كالتالي :

$$\ell.\left(f_0(\vec{r},\vec{v},t)+g(\vec{r},\vec{v},t)\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(f_0(\vec{r},\vec{v},t)+g(\vec{r},\vec{v},t)\right)\right)_{coll}$$

ومنه :

$$\ell.f_0(\vec{r},\vec{v},t)+\ell.g(\vec{r},\vec{v},t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(f_0(\vec{r},\vec{v},t)+g(\vec{r},\vec{v},t)\right)\right)_{coll} \qquad (6.4)$$

نفترض أن $g \prec\prec f_0$ يمكننا إهمال g في الجهة اليسرى من المعادلة (6.4) ونفترض أيضا أن f_0 يتغير بمقدار مهم (معتبر) (أي من نفس الرتبة) فقط عندما يتغير $|r|$ بدلالة المسافة L [4] .

$$\ell.f_0(\vec{r},\vec{v},t)=\left(\frac{\partial g(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}\right)_{coll}=-\frac{g(\vec{r},\vec{v},t)}{\tau} \qquad (7.4)$$

لدينا :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}_r+\frac{F}{m}\vec{\nabla}_v\right).f_0(\vec{r},\vec{v},t)=-\frac{g(\vec{r},\vec{v},t)}{\tau} \qquad (8.4)$$

ومنه :

$$g(\vec{r},\vec{v},t)=-\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}_r+\frac{F}{m}\vec{\nabla}_v\right).f_0(\vec{r},\vec{v},t) \qquad (9.4)$$

نعوض المعادلة (9.4) في المعادلة (3.4) نجد :

$$f(\vec{r},\vec{v},t)=f_0(\vec{r},\vec{v},t)+g(\vec{r},\vec{v},t)=f_0(\vec{r},\vec{v},t)-\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}_r+\frac{F}{m}\vec{\nabla}_v\right).f_0(\vec{r},\vec{v},t) \qquad (10.4)$$

ومنه :

$$f(\vec{r},\vec{v},t)=\left[1-\tau\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}.\vec{\nabla}_r+\frac{F}{m}\vec{\nabla}_v\right)\right].f_0(\vec{r},\vec{v},t) \qquad (11.4)$$

حيث : $\vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t)=\frac{F}{m}$

4. حساب السماحية الكهربائية باستخدام التقريب من الرتبة واحد

لدينا المعادلة (**) من الفصل الثالث تعطى :

$$\hat{n}(\vec{k},z)=\int\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)dv \qquad (**)$$

ومنه تصبح المعادلة (**) كالتالي :

$$\hat{\hat{n}}(\vec{k},z)=\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr.\int dv f(\vec{r},\vec{v},t)$$

ومنه :

$$\hat{\hat{n}}(\vec{k},z)=\int dv\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr.f(\vec{r},\vec{v},t) \qquad (12.4)$$

المعادلة (11.4) تصبح كالتالي :

$$f(\vec{r},\vec{v},t)=f_0(\vec{r},\vec{v},t)-\tau\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}-\tau\vec{v}.\vec{\nabla}_r.f_0(\vec{r},\vec{v},t)-\tau\left[\vec{\nabla}.\Phi(\vec{r},t)\right]\vec{\nabla}_v f_0(\vec{r},\vec{v},t) \qquad (13.4)$$

نطبق المعادلة (12.4) على المعادلة (13.4) ونحسب كل حد على لوحده نجد :

$$\int dv\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr.f_0(\vec{r},\vec{v},t)=\int dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z) \qquad (d)$$

ثم

$$\tau\int dv\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr.\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}=\tau\int dv.\left(-\hat{f}_0(\vec{k},\vec{v},0)-iz.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)\right) \qquad (e)$$

و

$$\tau\int dv.\vec{v}\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr.\left[\vec{\nabla}_r.f_0(\vec{r},\vec{v},t)\right]=-i\tau\int \vec{k}.\vec{v}dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z) \qquad (f)$$

أما الحد الأخير من المعادلة (13.4) سيكون حسابه في الملحق (2) وتعطى النتيجة كالتالي :

$$\tau\int dv.\vec{\nabla}_v\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr.\left[\left(\vec{\nabla}.\Phi(\vec{r},t)\right).f_0(\vec{r},\vec{v},t)\right]=i\tau\vec{k}.\vec{v}.\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z) \qquad (g)$$

بتعويض المعادلات (d) ، (e) ، (f) و (g) في المعادلة (12.4) نجد :

$$\begin{aligned}\hat{\hat{n}}(\vec{k},z)&=\int dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)-\tau\int dv.\left(-\hat{f}_0(\vec{k},\vec{v},0)-iz.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)\right)\\&+i\tau\int \vec{k}.\vec{v}dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)-i\tau\vec{k}.\vec{v}.\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)\end{aligned} \qquad (14.4)$$

و باستخدام المعادلة (**) في المعادلة (14.4) نجد :

$$\begin{aligned}\hat{\hat{n}}(\vec{k},z)&=\hat{\hat{n}}_0(\vec{k},z)+iz\tau.\hat{\hat{n}}_0(\vec{k},z)+i\tau\int \vec{k}.\vec{v}dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)+\tau\int dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},0)\\&-i\tau\vec{k}.\vec{v}.\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)\end{aligned}$$

ومنه :

$$\begin{aligned}\hat{\hat{n}}(\vec{k},z)&=(1+iz\tau).\hat{\hat{n}}_0(\vec{k},z)+i\tau\int \vec{k}.\vec{v}dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)+\tau\int dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},0)\\&-i\tau\vec{k}.\vec{v}.\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)\end{aligned} \qquad (15.4)$$

لدينا :

$$\hat{\hat{n}}(\vec{k},z)=\int \hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)dv$$

ومنه فإن المعادلة (15.4) تصبح كالتالي :

$$\begin{aligned}\int \hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z)dv&=(1+iz\tau)\int \hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)dv+i\tau\int \vec{k}.\vec{v}dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)+\tau\int dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},0)\\&-i\tau\vec{k}.\vec{v}.\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)\end{aligned} \qquad (16.4)$$

باستخدام عبارة الكمون الموجودة في الفصل الثاني ، المعادلة (8.2) وهي :

$$k^2\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z) = 4\pi q\int dv\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) \qquad (8.2)$$

نجد :

$$\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z) = \frac{4\pi q}{k^2}\int dv\hat{\hat{f}}(\vec{k},\vec{v},z) \qquad (17.4)$$

منه نعوض المعادلة (16.4) في المعادلة (17.4) نجد :

$$\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z) = \frac{4\pi q}{k^2}\begin{bmatrix}(1+iz\tau)\int\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)dv + i\tau\int\vec{k}.\vec{v}dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z) + \tau\int dv.\hat{f}_0(\vec{k},\vec{v},0)\\ -i\tau\vec{k}.\vec{v}.\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z).\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)\end{bmatrix}$$

ومنه :

$$\hat{\hat{\Phi}}(\vec{k},z)\left[1+\frac{4\pi q}{k^2}\left(i\tau\vec{k}.\vec{v}.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)\right)\right]$$
$$=\frac{4\pi q}{k^2}\left[(1+iz\tau)\int\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)dv + i\tau\int\vec{k}.\vec{v}dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z) + \tau\int dv.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},0)\right]$$

ومنه فإن علاقة السماحية الكهربائية باستخدام التقريب من الرتبة واحد تكون كالتالي :

$$\varepsilon(\vec{k},z) = 1+\frac{4\pi q}{k^2}\left(i\tau\vec{k}.\vec{v}.\hat{\hat{f}}_0(\vec{k},\vec{v},z)\right) \qquad (18.4)$$

ومنه فإن التقريب من الرتبة واحد أعطى نتائج جديدة فيما يخص بالسماحية الكهربائية (المعادلة (18.4)) .

الخلاصة العامة

الخلاصة العامة

لقد قمنا أولا بتقديم عرض موجز للإشكالية التي بنينا على أساسها هذا البحث ، إذ تحدثنا عن الدور المهم لمعادلات الحركة لـ Boltzmann و Vlasov في حالة النقل الغير عادي في حالة بلازما TOKAMAK وذلك داخل كرة ديباي أين يوجد الفعل الفردي للشحنات في هذه البلازما ، ومدى استعمالها في التعرف على معاملات النقل وعلاقتها ببعضها البعض .

قمنا كذلك بعرض موجز لبعض المفاهيم الأساسية حول البلازما ، إذ تطرقنا إلى بعض التعارف المهمة لها ، وأمثلة عن أشكالها ، وبعض خصائصها وأهم مقاديرها ، ومعالجتها .

تحدثنا كذلك عن معادلة Liouville وأشكالها وكيفية استخراج معادلة Boltzmann منها ومن ثم إلى معادلة Vlasov ، وخصصنا العمل حول هذه الأخيرة في حساب السماحية الكهربائية ، حيث قمنا أولا بحل معادلة Vlasov ، وحولنا كل حدودها إلى الفضاء المعكوس ، ثم تحصلنا على العبارة النهائية للسماحية الكهربائية من خلال معادلة Vlasov ، وتطرقنا إلى علاقتها بالناقلية الكهربائية.

تحدثنا أيضا على حساب السماحية الكهربائية في حالة النقل العادي وذلك بعدم الأخذ بعين الاعتبار القوة الداخلية الناتجة عن الحقل الضعيف المحلي ، وباشرنا الحساب بإدخال المشتق الكسري في معادلة Vlasov ، ثم حسبنا السماحية الكهربائية ، آخذين بعين الاعتبار المشتق الكسري وتحصلنا على النتيجة النهائية للسماحية في حالة النقل الغير عادي ، هذه النتيجة عولجت عدديا باستخدام البرمجة بلغة الماتلاب ، ولاحظنا أن المنحنى يتعلق بثابت المشتق الكسري ، قمنا كذلك باستخدام التقريب من الرتبة صفر وإدخاله على معادلة Vlasov دون استعمال المشتق الكسري ، وتحصلنا على نتائج ليست جديدة مقارنة بنتائج سابقة كما في الفصل الثاني .

لقد أجرينا حساب للسماحية الكهربائية باستخدام التقريب من الرتبة واحد وذلك ، باستعمال معادلة Boltzmann وباعتبار التصادم ، حيث تحصلنا على نتائج جديدة .

قـائمة المراجــع

المراجع

[1] J.L. Delcroix et A . Bers: physique des plasmas I+II Inter Edition / CNRS Editions (1994) .

[2] H.R. Griem : plasma spectroscopy Mc Graw Hill (1964)

[3] Mc Donald Quarrie : statistical mechanics , Viva Books private Limited, (2008).

[4] K. Huang : statistical mechanics. John Wiley and Sons (1963).

[5] N. Pottier. Physique statistique hors d'équilibre, EDP Science/CNRS Editions, paris –France-(2007).

[6] K.B. Oldham and J. spanier, the fractional calculus, Academic press (1974).

[7] V. E. Tarasov: fractional statistical mechanics, Chaos 16 , 033108(2006)

[8] V. E. Tartasov : LIOUVILLE and BOGOLIUBOV equation with fractional derivatives, Mod . Phys . Lett. B, 21,237 (2007)

الملاحق

الملحـــــــــق 1 :

في هذا الملحق سنقوم بعرض كيفية حساب المعادلة (16.3) والحصول على المعادلة (17.3) في الفصل الثالث :

لدينا المعادلة (16.3) وهي :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z) = 1 - i\frac{16\pi^2 q^2 n_0}{k^{\alpha+1}}\beta\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} . \int_0^\infty v^2 . e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv$$
$$+ \frac{8\pi^2 q^2 n_0 z}{k^{2\alpha+1}}\beta\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} . \int_0^\infty v . e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} dv . \left[\log\frac{(k^\alpha . v - iz)}{(k^\alpha . v + iz)}\right]$$

لدينا :

$$\log\frac{(k^\alpha . v - iz)}{(k^\alpha . v + iz)} = \log\frac{z^*}{z}$$

حيث :

$$z = k^\alpha . v + iz = |z| . e^{i\theta}$$

و

$$z^* = k^\alpha . v - iz = |z| . e^{-i\theta}$$

ومنه :

$$\log\frac{(k^\alpha . v - iz)}{(k^\alpha . v + iz)} = \log\frac{z^*}{z} = \log\frac{|z| . e^{-i\theta}}{|z| . e^{i\theta}} = \log e^{-2i\theta} = -2i\theta$$

حيث أن :

$$tg\theta = \frac{z}{k^\alpha . v}$$

إذا :

$$\theta = arctg\left(\frac{z}{k^\alpha . v}\right)$$

ومنه تصبح المعادلة رقم **(16.3)** **المعادلة رقم (17.3)** :

$$\vec{\varepsilon}(\vec{k},z)=1-i\frac{4\pi q^{2}n_{0}}{k^{\alpha+1}}\beta+\frac{8\pi^{2}q^{2}n_{0}z}{k^{2\alpha+1}}\beta\left(\frac{m}{2\pi k_{B}T}\right)^{\frac{3}{2}}.\int_{0}^{\infty}v.e^{-\frac{mv^{2}}{2k_{B}T}}.\left(-2i\theta\right)dv$$

الملحـــــــــق 2 :

في هذا الملحق سنقوم بحساب الحد الأخير من المعادلة (13.4) حيث سيتم تحويله من الفضاء المباشر إلى الفضاء المعكوس .

المعادلة (13.4) تعطى كالتالي :

$$f(\vec{r},\vec{v},t)=f_0(\vec{r},\vec{v},t)-\tau\frac{\partial f_0(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial t}-\tau\vec{v}.\vec{\nabla}_r.f_0(\vec{r},\vec{v},t)-\tau\left[\vec{\nabla}.\Phi(\vec{r},t)\right]\vec{\nabla}_v f_0(\vec{r},\vec{v},t) \quad (13.4)$$

يحسب الحد الأخير من المعادلة (13.4) سيكون حسابه كالتالي :

$$\begin{aligned}&\tau\int dv.\vec{\nabla}_v\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr.\left[\left(\vec{\nabla}.\Phi(\vec{r},t)\right).f_0(\vec{r},\vec{v},t)\right]\\ &=\tau\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr\left(\vec{\nabla}.\Phi(\vec{r},t)\right)\left[\int dv\vec{\nabla}_v.f_0(\vec{r},\vec{v},t)\right]\\ &=\tau\left(\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr\left(\vec{\nabla}.\Phi(\vec{r},t)\right)\right).\left\{\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr\left[\int dv\vec{\nabla}_v.f_0(\vec{r},\vec{v},t)\right]\right\}\end{aligned}$$

ومنه تصبح العلاقة كالتالي :

$$\tau\int dv.\vec{\nabla}_v\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr.\left[\left(\vec{\nabla}.\Phi(\vec{r},t)\right).f_0(\vec{r},\vec{v},t)\right]=\tau.I.J$$

حيث: $I=\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr\left(\vec{\nabla}.\Phi(\vec{r},t)\right)$ و $J=\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr\left[\int dv\vec{\nabla}_v.f_0(\vec{r},\vec{v},t)\right]$

نقوم بحساب التكاملين I و J إذا :

$$I=\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr\left(\vec{\nabla}.\Phi(\vec{r},t)\right)=i\vec{k}.\hat{\vec{\Phi}}(\vec{k},z)$$

اذا :

$$I=i\vec{k}.\hat{\vec{\Phi}}(\vec{k},z)$$

و لدينا : $J=\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr\left[\int dv\vec{\nabla}_v.f_0(\vec{r},\vec{v},t)\right]$

حيث أن : $\int dv\vec{\nabla}_v.f_0(\vec{r},\vec{v},t)=\vec{v}.f_0(\vec{r},\vec{v},t)$

ومنه فإن :

$$J=\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr\left[\int dv\vec{\nabla}_v.f_0(\vec{r},\vec{v},t)\right]=\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr\left[\vec{v}.f_0(\vec{r},\vec{v},t)\right]$$

$$J=\vec{v}.\hat{\hat{f}}_0\left(\vec{k},\vec{v},z\right)$$

إذا بتعويض نتيجتي التكاملين I و J نجد :

$$\tau\int dv.\vec{\nabla}_v\int e^{iz.t}dt\int e^{i\vec{k}.r}dr.\left[\left(\vec{\nabla}.\Phi(\vec{r},t)\right).f_0(\vec{r},\vec{v},t)\right]=i\tau\vec{k}.\vec{v}.\hat{\hat{\Phi}}\left(\vec{k},z\right).\hat{\hat{f}}_0\left(\vec{k},\vec{v},z\right)\qquad(g)$$

ملخــــــــــص

لقد تم في هذا العمل حساب السماحية الكهربائية من معادلة فلاسوف ، وعلاقة باقي معاملات النقل بالسماحية الكهربائية ، ثم كتبنا هذه المعادلة في حالة النقل العادي وأدخلنا عليها المشتق الكسري ثم تحصلنا على معادلة جديدة للسماحية الكهربائية باستعمال هذا المشتق ، ثم تطرقنا إلى حسابها باستعمال التقريب من الرتبة صفر ، لكن هذا التقريب لم يعطي نتائج جديدة بل أعطى نفس النتائج السابقة كالتي وجدناها في الفصل الثاني ، لذلك لجأنا إلى حسابها باستعمال التقريب من الرتبة واحد وذلك من خلال معادلة بولتزمان ، وقد أبدى ذلك نتائج مقبولة .

الكلمات المفتاحية : معادلة فلاسوف، معادلة بولتزمان، المشتق الكسري، السماحية الكهربائية، البلازما.

Résumé

Dans ce travail, on a calculé le permittivité électrique à partir de l'équation de Vlasov et la relation de la permittivité électrique avec les autres coefficients de transport. Puis on a écrit cette équation dans le cas à le dérivé fractionnaire. Après on a obtenu une nouvelle équation de la permittivité électrique, en utilisant cette dérivé , puis, on obtenu les mêmes résultats que cette retrouver dans la chapitre deux , C'est pour cela, on l'a calculé avec l'approximation du d'ordre un à travers l'équation de Boltzmann qui a donné des résultats nouveaux acceptables.

Mots Clés: équation de Vlasov, équation de Boltzmann, dérivé fractionnaire, permittivité électrique, plasma.

abstract

In this work , electrical permittivity has been calculated by Vlasov equation as wel as its relationship with transport . Then we considered this equation by introducing the fractional derivative , after that we get a new equation for the electrical permittivity using this derivative . Consequently , we compute it using zero order approximation , but this approximation didn't give new results . But gave the ones as we have found in the second chapiter .So, we compute using first-order approximation using Boltzmann equation which led to acceptables results .

Key words: Vlasov equation, Boltzmann equation, Fractionnal derivative, Electric permittivity, plasma.