N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DESSCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Théorèmes de point fixe de type krasnoselskii et applications

Présenté par: Benine Souad
HezlaIkram

Soutenu devant le jury composé de

Beloul Said	MCB	Rapporteur	Univ. d'El Oued
	MCB	Présidente	Univ. d'El Oued
	MAA	Examinatrice	Univ. d'El Oued

Année universitaire 2015 – 2016

Remerciements

Nous remercions en premier lieu le grand Dieu qui nous a donné le courage, la volonté, la force et la patience durant les moments difficiles pour accomplir ce travail.

Nous exprimons également nos profondes gratitudes et respectueuses reconnaissances au directeur de notre mémoir : Dr. **Said BELOUL** pour sa bonne volonté d'accepter nous encadrement. Nous lui réservons aussi notre respect absolu pour tout le temps qu'il a consacré pour nous diriger et permettre de mener à bien travail.

Nous adressons également nos remerciements à tout l'ensemble des membres de Jury pour le temps qu'il ont consacré pour apprécier ce travail. Tous nos enseignant du département de mathématique et informatique, ont aussi le métrite d'être remerciés pour leurs précieux aides et engagements pour nous donner les bases des sciences mathématique. De plus, Nous remercions nos maris **Laid HASSANI** et **Hacen AMMARI**, qui m'a aidé par tous les moyens et nous sauver toutes les conditions pour la réalisation de ce travail.

Merci à nos camarades de la promotion 2016 de Mathématiques et nos amis surtout **Saida NEFTIA** et **Heddi KADDOURI** pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de nos familles.

Nous remerciements les plus chaleureux sont aussi transmis pour tous ceux qui de prés ou de loin ont contribué à l'accomplissement de ce modeste travail.

Table des matières

Introduction générale **1**

1 Quelques éléments d'analyse fonctionnelle **3**

1.1 Distance sur un ensembles 3

1.2 Les espaces métriques 5

1.3 Les espaces normés 5

1.4 La convexité 6

1.5 Les espaces complets 7

1.6 Les espaces de Banach 8

1.7 Les applications contractantes 9

1.8 La compacité 11

1.8.1 Les espaces métriques compacts 11

1.8.2 Les parties compacts 12

1.8.3 Les applications compacts 12

1.9 Théorème d'Ascoli-Arzela 13

1.10 Point fixe 14

2 Théorème du point fixe de Krasnoselskii et ses généralisations **16**

2.1 Théorème de Krasnoselskii l'original 16

2.2 Théorème du point fixe de Krasnoselskii-Burton 18

2.2.1 La contraction large 18

2.2.2 La contraction separée 24

3 Applications **30**

3.1 L'existence, l'unicité et la stabilité d'une équation différentielle à retard . . 30

3.1.1 Transformation et inversion de l'équation 31
3.1.2 L'existence et l'unicité 33
3.1.3 La stabilité 41
3.2 L'existence et l'unicité d'une équation différence à retard et Solutions périodiques 43
3.2.1 Existence et l'unicité de la solution périodque 49

Conclusion générale et perspective **52**

Bibliographie **53**

Introduction générale

L'analyse est considérée comme l'un des sciences mathématiques, elle se développe dans ces dernière anné à cause de parmi de certains hypothèses et des théorèmes, pour nous important c'est le théories de point fixe. Ce dernier c'est un outil principal qui découvre l'existence de solution dans des différents types des équations surtout dans l'analyse non linéaire, ainsi, il a des différents application dans la topologie et dans les autres sciences comme la physique, la chimie, la biologie et l'économie ... etc.

La premiére apparition du point fixe commence dans le 19^{eme} siécle, il s'est employé pour trouver des solutions approximatives et successives et les l'existence d'une seule solution aux équations notamment les équations différentielles.

Le point fixe se semble en 1922 a Banach, qui repose essentiellement sur le principe de la contraction afin de résoudre les équations employant les intégrales et les algorithmes pour étudier l'approximation de ce point. Cette étude est appliqué dans l'espace métrique complet.

En 1930, Schauder améliore et géneralisé le problème d'existence et l'unicité de Brower et insiste sur l'application continue sur ensemble convexe et compacte par contre Brower qui étude seulement la compacité à cause de leur étude s'effectue sur la topologie .

Dans l'année 1955, Krasnoselskii a remarqué qu'il existe de difficulté pour l'intégration de certaines équations différentielle pour cela, il a méle entre le théorème de Banach et de Schauder, il a basé de décomposer l'application étudée aux deux, l'une est une contraction et l'autre est continue et compacte. Ce théorème est trés important pour trouver la solution de plusieurs équations intégrales et équation différentielle.

D'après long temps, le théorème de Krasnoselskii a resté un outil trés effective à l'étude de beaucoup des problèmes, il identifie certaines améliorations, telle que la notion de la contraction large due à Burton, ce dernier mathématicien a présenté un nouveau théorème a apparu sous le nom Krasnoselskii-Burton, qui remplace la condition de contraction de Krasnoselskii par une nouvelle notion, c'est la contraction large.

La généralisation du théorème de point fixe ne s'arréte pas, car l'introduisant de nouvelle notion sur la contraction qui rassemble tout les types précédents et qui s'appelle la contraction separée, cela nous dire qu'il y a changement sur le théorème de Krasnoselskii est nommé la contraction separée a la place de la contraction, malgré le développement des mathématique au fil du temps, mais le théorème de Krasnoselskii possède un rôle trés important pour solutions de plusieurs problèmes mathématiques.

Dans ce travail, on va étudier le théorème du point fixe de Krasnoselskii et certaines généralisations pour obtenir des résultats d'existence et l'unicité de la résolution de certaines équations, ainsi que sa stabilité, même avec l'étude de certaines hypothèses et les résultats qui leur sont liées.

Nous avons réparti ces idées qui formant ce mémoire, en trois chapitres :

Le premier chapitre contient un rappel sur certaines notations d'analyse, plusieurs définitions et propérités comme : les espaces métrique, les espaces complet, les espaces de Banach, la compacité et point fixe. Avec quelques théorèmes, le plus important est le théorème d'Ascoli- Arzela.

Le deuxième chapitre, on s'intéresse à présenter le théorème original de Krasnoselskii et sa preuve, ainsi que le théorème de Krasnoselskii-Burton, où la condition de contractivité a été remplacer par une autre plus faible qui s'appellée la contraction large, aussi nous présentons une autre généralisation récente due à Liu et Li, où les auteurs ont utilisé la contraction separée, qui est plus faible que la contraction large.

Dans le troisième chapitre, on va appliquer le théorème de Krasnoselskii et le théorème de Krasnoselskii-Burton pour :

1. Étudier l'existence, l'unicité et la stabilité de solution d'une équation différentielle à retard.
2. Prouver l'existence des solutions périodiques et l'unicité de solution d'une équation de différence à retard.

Chapitre 1

Quelques éléments d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, on présentera quelques définitions et théorèmes fondamentales, concernant : les espaces métriques, les espaces complets, les espaces de Banach, les application contractantes, la compacité, principe de Banach et théorème de d'Ascoli Arzéla. On Commence par rappeler quelques résultats généraux.

1.1 Distance sur un ensembles

Définition 1.1.1 *Soit E un ensemble non vide : on appelle distance (ou métrique) sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. $\forall x, y \in E, d(x, y) \geq 0$ *et* $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$ *(symétrique).*
3. $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, x)$ *(inégalite triangulaire).*

Exemple 1.1.1 $d(x, y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|, x, y \in E = \mathbb{R}^*$ *est une distance sur* $\mathbb{R}^*$ *car :*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow |\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}| = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow x = y.$
2. $d(x, y) = |\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}| =| (-1)(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}) |=| -1 || \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x} |= d(y, x).$
3. $d(x, z) =| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{z} |=| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} |\leq |\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}|+ | \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} | .$

   Donc $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. *Où* d *est une distance sur* $\mathbb{R}^*$.

Exemple 1.1.2 *Soit $\delta(x,y) = \ln(1+d(x,y))$, est une distance sur un ensemble non vide E, si d est distance sur E on a :*

1. $\delta(x,y) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+d(x,y)) = 0 \Leftrightarrow 1+d(x,y) = 1 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\delta(x,y) = \ln(1+d(x,y)) = \ln(1+d(y,x)) = \delta(y,x)$.
3. *comme d est une distance, alors*

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq d(x,y) + d(y,z) \\ &\Leftrightarrow 1+d(x,z) \leq 1+d(x,y)+d(y,z) \\ &\Leftrightarrow 1+d(x,z) \leq 1+d(x,y)+d(y,z)+d(x,y)d(y,z) \\ &\Leftrightarrow 1+d(x,z) \leq (1+d(x,y))(1+d(y,z)) \\ &\Leftrightarrow \ln(1+d(x,y)) \leq \ln(1+d(x,y))(1+d(y,z)) \\ &\Leftrightarrow \ln(1+d(x,y)) \leq \ln(1+d(x,y))(1+d(y,z)) \\ &\Leftrightarrow \ln(1+d(x,y)) \leq \ln(1+d(x,y)) + \ln(1+d(y,z)). \end{aligned}$$

Donc $\delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z)$, par conséquent δ est une distance.

Définition 1.1.2 *On dit que deux distances d_1, d_2 sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 0$ telles que :*

$$\alpha\ d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta\ d_1(x,y) \quad \text{pour tout} \quad x,y \in E.$$

Exemple 1.1.3 *Soit $(d_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille finie de p distances sur E_i. On pose*

$$E = \prod_{i=1}^{p} E_i,$$

on définit sur le produit cartésien $E \times E$ deux distances comme suit :

Pour tout $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ de E on pose

$$D_1(x,y) = \sup_{1\leq i\leq p} d_i(x_i, y_i).$$

$$D_2(x,y) = \sum_{i=1}^{p} d_i(x_i, y_i).$$

On a

$$\sup_{1\leq i\leq p} d_i(x_i,y_i) \leq \sum_{i=1}^{p} d_i(x_i,y_i) \leq p \sup_{1\leq i\leq p} d_i(x_i,y_i),$$

donc

$$D_1(x,y) \leq D_2(x,y) \leq pD_1(x,y).$$

Alors D_1 et D_2 sont équivalentes, telle que $\alpha = 1,\ \beta = p$.

1.2 Les espaces métriques

Définition 1.2.1 *[4]. On appelle espace métrique tout ensemble non vide E muni d'une distance d. Un tel espace sera noté dans la suite (E, d).*

Définition 1.2.2 *[13]. Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'un ensemble $S \subseteq E$ est fermé si et seulement si pour toute suite (x_n) de S qui converge dans E, alors sa limite appartient à S.*

1.3 Les espaces normés

Définition 1.3.1 *(**La norme**)[13]. Une norme sur un ensemble E est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $\forall x \in E, \| x \| \geq 0$ *et* $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(séparation).*
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E, \| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$, *où* $|\lambda|$ *désigne respectivement la valeur absolue si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou module si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*(homogénéité).*
3. $\forall x, y \in E, \| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *(inégalité du triangle).*

Exemple 1.3.1 $| \mathbb{K} |$ *est une norme sur l'espace (dimension 1)* $\mathbb{K}$ *sur* $\mathbb{K}$.

Définition 1.3.2 *On dit que deux normes $\|x\|_1, \|x\|_2$ sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux constantes réelles $\beta \geq \alpha \geq 0$ telles que*

$$\alpha \| x \|_1 \leq \| x \|_2 \leq \beta \| x \|_1 \ .$$

Pour tous $x, y \in E$.

Définition 1.3.3 *On appelle espace normée $(E, \|.\|)$ tout espace E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{R}$ muni d'une norme.*

Exemple 1.3.2 *L'espace $C([0, 1], \mathbb{R})$ on pose les normes :*

1. $\| f \|_\infty = \sup\limits_{t \in [0,1]} |f(t)|$. *(La norme la convergence uniforme).*
2. $\| f \|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

3. $\| f \|_2 = \sqrt{\int_0^1 [f(t)]^2 dt}$.

Définition 1.3.4 *Une partie A d'un espace normé $(E, \| \ . \ \|)$ est dite bornée s'il existe une constante $L < \infty$ telle que $\| x \| \leq L$ pour tout $x \in A$. Une fonction f est dite bornée si son image est une partie bornée de E.*

1.4 La convexité

L'ensemble convexe

Définition 1.4.1 *[7].Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}$ est dit convexe si pour tout $x, y \in C$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a*

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in \ C.$$

Exemple 1.4.1
1. *L'ensemble E ainsi que la partie vide sont convexes.*
2. *Les boules d'un espace normée sont convexes.*
3. *Tout sous ensemble dans l'espace $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est convexe, c'est à dire :*
   $M = \{x \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \| x \| \leq L\}$ est convexe, car :
   soit $x, y \in C$,
   $$\| \lambda x + (1 - \lambda) y \| \leq \lambda \| x \| + (1 - \lambda) \| y \| \leq \lambda L + (1 - \lambda) L \leq L.$$
   Donc l'ensemble M est convexe.

La fonction convexe

Définition 1.4.2 *[7]. Une fonction f d'un intervalle I de*
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite convexe lorsque, pour tous x et y de I et tout λ dans $[0, 1]$ on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Définition 1.4.3 ***(Épigraphe d'une fonction)*** *L'épigraphe d'une fonction est l'ensemble des points situés au-dessus de la courbe représentative de la fonction f, c'est à dire, l'ensemble de épigraphe M de fonction f est défini par*

$$M := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}, f(x) \leq y\}, \ \forall I \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.4.4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.*

1.5 Les espaces complets

Définition 1.5.1 ***(Suites de Cauchy)*** *On dit que la suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans l'espace métrique (E,d) est de Cauchy si*

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\ N_\varepsilon\in\mathbb{N},\ \forall n,m\in\mathbb{N}: n>m\geq N_\varepsilon\Rightarrow d(x_n,x_m)<\varepsilon.$$

On écrit alors :

$$\begin{array}{c} d(x_n,x_m)\longrightarrow 0 \\ n,m\to\infty. \end{array}$$

Exemple 1.5.1 *On munit l'ensemble $C([0,1],\mathbb{R})$ de la distance fondamentale d_1 et considére les suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :*

$$f_n(x)=min(n,(\frac{1}{\sqrt{x}}))=\begin{cases} n & si\ \ 0\leq x\leq\dfrac{1}{n^2}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & si\ \ \dfrac{1}{n^2}\leq x\leq 1, \end{cases}$$

soit $\varepsilon>0$. Pour tout n et m de $\mathbb{N}^*$, avec $n>m$, on écrit :

$$\begin{aligned} d_1(f_n,f_m) &= \textstyle\int_0^1|f_n(x)-f_m(x)|dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n^2}}(n-m)dx+\int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{m^2}}(\frac{1}{\sqrt{x}})-m)dx+\int_{\frac{1}{m^2}}^{1}(\frac{1}{\sqrt{x}})-(\frac{1}{\sqrt{x}})dx \\ &= (\frac{1}{n})-(\frac{m}{n^2})+2(\frac{1}{m}-\frac{1}{n})-m(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}) \\ &= \frac{1}{m}-\frac{1}{n} \\ &< \frac{1}{m}. \end{aligned}$$

Il en résulte qu'il suffit de prendre $N_\varepsilon=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ dans le critère de Cauchy.

Proposition 1.5.1 *Toute suite convergente d'un espace métrique (E,d) est de Cauchy : si $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)=a$, cela veut dire que :*

$$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N_\varepsilon\in\mathbb{N}:\ \forall\ n\geq N_\varepsilon\Rightarrow d(x_n,a)<\varepsilon,$$

et donc

$$pour\ tout\ n,m\geq\ N_{(\frac{\varepsilon}{2})}\ d(x_n,x_m)\leq d(x_n,a)+d(a,x_m)<(\frac{\varepsilon}{2})+(\frac{\varepsilon}{2})=\varepsilon.$$

Exemple 1.5.2 *Par contre il y a des suites de Cauchy qui ne convergent pas comme : dans l'espace* $]-1,+1[$ *la suite* $\{1-(\frac{1}{n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy, puisque la méme suite converge dans* $\mathbb{R}$ *vers* 1*, mais* $1 \notin]-1,+1[$.

Définition 1.5.2 *[13]. L'espace métrique* (E,d) *est dit complet si toute suite de Cauchy dans* E *est convergente (dans* E*).*

Exemple 1.5.3 *L'espace* $C([0,1],\mathbb{R})$ *muni de la norme* $\|\ .\ \|_1$ *n'est pas complet. Pour le voir, il suffit remarquer que la suite des fonctions continues*

$$f_n(t) = \begin{cases} 2^n t^n & si \quad t \in [0, \dfrac{1}{2}], \\ 1 & si \quad t \in [\dfrac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

est de Cauchy car :

$$\begin{aligned} \| f_n - f_m \| &= \int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt \\ &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{1+m} \right| . \end{aligned}$$

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente, sa limite* $f(t)$ *devrait étre nulle dans l'intervalle* $[0,\dfrac{1}{2}]$ *et égale à* 1 *dans l'intervalle* $[\dfrac{1}{2},1]$.

Exemple 1.5.4 *Si* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *est un intervalle fermé et borné, alors l'espace* $C^1([a,b])$ *est complet pour la norme* $\|\ .\ \|_{c^1}$ *définie par :* $\| f \|_{c^1} = \| f \|_\infty + \| f' \|_\infty$.

Preuve. Soit $f_n \to C^1([a,b])$ une suite de Cauchy pour $\|\ .\ \|_{c^1}$. Par définition de $\|\ .\ \|_{c^1}$, on voit que les deux suites f_n et f_n' sont uniformément de Cauchy. Ces deux suites sont donc uniformément convergentes il existe deux fonctions $f$et g telles que $f_n \to f$ uniformément et $f_n' \to g$ uniformément, on peut affirmer que f est de classe C^1 et $f' = g$. Ainsi, $f_n \to f$ uniformément et $f_n' \to f'$ uniformément, autrement dit f_n converge vers f pour $\|\ .\ \|_{c^1}$. ■

1.6 Les espaces de Banach

Définition 1.6.1 *[13]. On appelle espace de Banach, tout espace normé complet. Sur le corps* $\mathbb{K}$ *des réels ou des complexes* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$*, avec leur normes usuelles de Banach.*

Exemple 1.6.1 *L'espace $C = C([a,b],\mathbb{R})$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Le norme*

$$\| f \| = \max_{a \leq t \leq b} | f(t) |,$$

où $| \, . \, |$ est la norme dans $\mathbb{R}$, défini une norme rendant $(C, \| \, . \, \|)$ un espace de Banach.

1.7 Les applications contractantes

La continuité

Définition 1.7.1 *Soit deux espaces métriques (E, d_E) et (F, d_F) et f une application de E dans F. Soit a un point de E. On dira que f est continue en a si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \ \forall x \in E, d_E(x,a) < \alpha \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Si l'application f est continue en tout point a de E, on dit qu'elle est continue sur E ou, plus simplement, (continue).

Exemple 1.7.1 *Sur $E = \mathbb{K}$ muni de la norme $\| \, . \, \|_\infty$, les applications coordonnées sont continues.*

Preuve. Si $i \in \{1, 2, ...d\}$, alors $|x(i) - y(i)| \leq \| x - y \|_\infty$ pour tous $x, y \in \mathbb{K}$. Par conséquent, la i-éme application coordonnée est continue. ■ **La continuité uniforme**

Définition 1.7.2 *On dit que f uniformément continue sur E si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \ \forall x, x^{'} \in E, d_E(x, x^{'}) < \alpha \Rightarrow d_F(f(x), f(x^{'})) < \varepsilon.$$

$\alpha(\varepsilon)$ ne dépend pas de $x, x^{'}$.

Exemple 1.7.2 *$f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais ne pas uniformément continue.*

Application Lipschitzienne

Définition 1.7.3 *[7]. On dit qu'une fonction*
$f : (E, d_E) \rightarrow (F, d_F)$ est de Lipschitz (ou Lipschitzienne) de rapport $k > 0$ (ou k-Lipschitzienne), si elle satisfait :

$$\forall x, y \ \in E \ d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y).$$

Exemple 1.7.3 *Soit $E \subset (\mathbb{R}_+, |.|)$ et la fonction f définit par $f(x) = (\dfrac{x}{1+x})$ est Lipschitzienne car : $\forall x \in \mathbb{R}_+$*

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= \mid \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \mid \\
&= \mid \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)} \mid \\
&= \mid \frac{x + xy - y - yx}{(1+x)(1+y)} \mid \\
&= \frac{\mid x - y \mid}{(1+y)(1+x)} \\
&\leq \mid x - y \mid.
\end{aligned}$$

Donc f est $1-$ Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ donc, elle l'est aussi sur $\mathbb{R}$ (puisque f impaire).

Théorème 1.7.1 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors*

$$(f \textit{est Lipschitzienne sur } I) \Leftrightarrow (f^{'} \textit{est bornée sur } I).$$

Preuve. ($\Rightarrow$) Supposons f Lipschitzienne sur I alors il existe

$$k \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|,$$

c'est à dire

$$-k \leq (\frac{f(x) - f(y)}{|x - y|}) \leq k.$$

On déduit, par passage à la limite lorsque y tend vers x

$$-k \leq f^{'}(x) \leq k.$$

Ceci, quelque soit $x \in I$. Donc $f^{'}$ est bornée sur I.

($\Leftarrow$) Supposons $f^{'}$ est bornée sur I alors il existe

$$M \in \mathbb{R}_+^*, t \in I, |f^{'}(t)| \leq M.$$

D'après l'inigalité des croiassements finis appliquée à f sur ségement $[x, y]$

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|.$$

Donc f est $M-$ Lipschitzienne.

Évidemment, par contraposition on a pour f dérivable sur un intervalle I

(f est non Lipschitzienne sur I)$\Leftrightarrow$($f^{'}$ n'est pas bornée sur I). ■

Définition 1.7.4 *(**La contraction**) [12]. On dit qu'une fonction f est contraction si f est k-Lipschitzienne avec $0 < k < 1$.*

Exemple 1.7.4 *Soit $E = ([\frac{2}{3}, +\infty[, |.|)$, et f une fonction qui est définie de E dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$, alors f est une contraction.*

Preuve. $\forall x, y \in E$

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{2x+6}{3x+2} - \frac{2y+6}{3y+2} \right| \\ &= \left| \frac{14(y-x)}{(3x+2)(3y+2)} \right| \\ &\leq \frac{14}{16} \mid x - y \mid \\ &= \frac{7}{8} \mid x - y \mid. \end{aligned}$$

Donc $K = \frac{7}{8}$. ■

Exemple 1.7.5 *L'application $x \to \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais non Lipschitzienne.*

Remarque 1.7.1 *(f est une contraction)$\Rightarrow$ (f est Lipschitzienne)$\Rightarrow$(f est uniformément continue)$\Rightarrow$ (f est continue).*

La contractive

Définition 1.7.5 *On dit qu'une fonction $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ est contractive si elle satisfait :*

$$\forall x, y \in E, d_F(f(x), f(y)) < d_E(x, y).$$

Définition 1.7.6 *(**Les application non expansive**) [7]. On dit qu'une fonction f est non expansive si f est 1-lipschitzienne, c'est à dire*

$$\forall x, y \ \in E, d_F(f(x), f(y)) \leq d_E(x, y).$$

Remarque 1.7.2 *(f est une contraction)$\Rightarrow$ (f est contractive) $\Rightarrow$ (f est non expansive).*

1.8 La compacité

1.8.1 Les espaces métriques compacts

Définition 1.8.1 *[12]. Soit E un espace métrique. On dit que E est compact si toute suite de points de E possède une sous-suite convergente.*

1.8.2 Les parties compacts

Définition 1.8.2 *Une partie M d'un espace métrique (E, d) est dite compact si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de M admet une sous suite convergeant vers une limite appartenant à M.*

Exemple 1.8.1 *Toute partie fermeé et bornée de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est compact.*

Exemple 1.8.2 $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *est compact et*

$$\begin{aligned} f: \quad & [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \overline{\mathbb{R}}, \\ & x \longrightarrow f(x) = \arctan(x), \end{aligned}$$

si $x \in]\frac{-\pi}{2}, \ \frac{\pi}{2}[$ *on a* $f(\frac{-\pi}{2}) = -\infty, f(\frac{\pi}{2}) = +\infty$ *est continue. On a retrouve que $\overline{\mathbb{R}}$ est un compact pour la topologie usuelle.*

1.8.3 Les applications compacts

Définition 1.8.3 *(**Les ensembles relativement compact**) S est relativement compact si toute suite de E admet une sous suite convergent vers une limite appartenant à S. C'est à dire, si la fermeture de S est compact.*

Exemple 1.8.3 *Si on munit $C^1([0,1], \mathbb{R})$ par la norme $\|f\|_{c_1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, alors les bornées de $(C^1([0,1], \mathbb{R}), \| f \|_{c_1})$ sont relativement compact dans $C^0([0,1], \mathbb{R})$.*

Preuve. Soit E un bornée de $C^1([0,1], \mathbb{R}), E \to B_{f,c_1}(0, M)$. Comme la norme $\| f \|_\infty$ est majorée par la norme $\| f \|_{c_1}$ est clair qu'un bornée de $C^1([0,1], \mathbb{R})$ est ponctuellement relativement compact. ■

Définition 1.8.4 *(**Les applications compacts**) Soient E et F deux espaces normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $T \in L(E, F)$. On dit que T est un application compact si et seulement si une des trois propositions équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. *toute image d'un borné de E est relativement compact dans F.*
2. *$T(B_E(0,1))$est relativement compact dans F.*
3. *de toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E on peut extraire une sous suite telle que $(x_{n_k})_{k\in N}$ converge dans F quand $k \to \infty$.*

L'ensemble des applications compacts est noté $K(E, F)$.

Exemple 1.8.4 *Toute les applications de rang fini sont compacts.*

1.9 Théorème d'Ascoli-Arzela

Soit U un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f_n une suite de fonctions avec $f_n : U \to \mathbb{R}^P$, tel que $p \in \mathbb{R}$. Soit $| \, . \, |$ une norme quelconque $\mathbb{R}^p$.

Définition 1.9.1 *[8]. $\{f_n\}$ est uniformément bornée sur U s'il existe un $M > 0$ tel que $| f_n(t) | \leq M$ pour tout n et $t \in U$.*

Définition 1.9.2 *[8]. Soit $\{f_n\}$ est équicontinue si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $t_1, t_2 \in U$ et $| t_1 - t_2 | < \delta$, alors $| f_n(t_1) - f_n(t_2) | < \varepsilon$ pour tout n.*

Exemple 1.9.1 *$f_n(x) = \sin(\dfrac{x}{n})$ est équicontinue sur $\mathbb{R}$ (utilisez les accroissement finis).*

Exemple 1.9.2 *Soient $E = [0,1], F = \mathbb{R}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(t) = t^n$. Alors la suite f_n n'est pas équicontinue.*

Théorème 1.9.1 *(**Ascoli-Arzela**) [7]. f_n est une suite des fonctions réelles uniformément bornée et équicontinue définie sur un intervalle $[a,b]$, alors la suite admet une sous suite convergent uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction continue sur $[a,b]$.*

Exemple 1.9.3 *Considérons l'espace de Banach $C([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme du supremum $\| f \| = \max | f(t) |$, avec $| \, . \, |$ de $\mathbb{R}$. Étant données deux constantes positives α et β, l'ensemble*

$$L : \{f \in C([a,b],)/ \parallel f \parallel < \alpha, | f(u) - f(v) | < \beta \mid u - v \mid \},$$

est compact. C'est une conséquence du Théorème d'Ascoli.

Exemple 1.9.4 *Soit $g : ([0,1]) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, considérons l'équation intégrale*

$$u(t) \to \int_0^t g(s, u(s))ds, \; t \in [0,1],$$

alors l'opérateur de Hammerstein

$$G : C([0,1]) \to C([0,1])$$

$$u \to Gu,$$

tel que

$$Gu(t) = \int_0^t g(s, u(s))ds,$$

est compact.

Preuve. supposons l'ensemble $A = \{g \in C([0,1]), \| g \| \leq M\}$. Comme g est continue et borné alors

$$\begin{aligned} \mid Gu(t) \mid &= \mid \int_0^t g(s,u(s))ds \mid \\ &\leq \int_0^t \mid g(s,u(s)) \mid ds \\ &\leq M \int_0^t ds = Mt \leq M, \ \forall t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Donc G est borné. Maintenant On va montrer que G est équiciontinue. On a

$$\begin{aligned} \mid Gu(t_1) - Gu(t_2) \mid &\leq \int_0^{t_1} \mid g(s,u(s)) - \int_0^{t_2} g(s,u(s)) \mid ds \\ &\leq M \int_{t_1}^{t_2} ds \\ &\leq M \mid t_2 - t_1 \mid . \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{M}$ tel que, pour tout $t_1, t_2 \in [0,1] : \mid t_2 - t_1 \mid \leq \delta$ alors

$$\mid Gu(t_1) - Gu(t_2) \mid \leq M\delta \leq \varepsilon,$$

d'où l'équicontinuité de G.

D'après le théorème d'Ascoli-Arzéla, G est compact dans A . ■

1.10 Point fixe

Définition 1.10.1 *On dit que a point fixe pour une application f si*

$$f(a) = a.$$

Exemple 1.10.1 *Soit g une fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :*

$$g(x) = 1 + 2x.$$

On chercher les points fixes de g

$$g(x) = x \Leftrightarrow 1 + 2x = x \Leftrightarrow x = -1.$$

Alors g admet un seul point fixe dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.10.2 *Soit* h *une fonction définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par :*

$$h(x) = x + \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

On chercher les points fixes de h

$$h(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{2} - \arctan x = x \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \arctan x = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \arctan x.$$

Ce qui est impossible car la fonction tan n'est pas définit à $\frac{\pi}{2}$. *Alors* h *n'a pas de point fixe dans* $\mathbb{R}$.

Théorème 1.10.1 ***(principe de Banach)****[8].On dit le principe de Banach si toutes contractions dans un espace métrique complet, admet un point fixe unique.*

Remarque 1.10.1 *Toute contraction est continue. D'ailleurs, il existe des applications qui sont pas continues mais admettent un point fixe.*

Exemple 1.10.3 *Soit* f *une fonction définie par :*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x > 0, \\ 0 & si \quad x \leq 0, \end{cases}$$

1 *est un point fixe, mais* f *n'est pas continue.*

Chapitre 2

Théorème du point fixe de Krasnoselskii et ses généralisations

Dans ce chapitre on va céter le théorème du point fixe de Krasnoselskii et sa preuve, ainsi que, deux généralisations récentes, le premièr due à Burton [5] elle a basé sur la notion de la contraction large, en temps que la deuxième basée sur la concept de la contraction seprée due à [1].

2.1 Théorème de Krasnoselskii l'original

Théorème 2.1.1 *(**Schauder**) Soient M un sous ensemble convexe d'un espace de Banach S et $A : M \to S$ une application compacte. Alors A possède un point fixe.*

Preuve. Voir [12]. ■

Dans la preuve du théorème de Krasnoselskii, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.1.1 *Si $(S, \| \cdot \|)$ est un espace normé, $M \subset S$ et $B : M \to S$ une application contractante, alors $(I - B)$ est un homéomorphisme de M sur $(I - B)M$.*

Preuve. Il est clair que $I - B$ est continue. Comme B est une contraction, c'est à dire :

$$\| Bx - By \| \leq \alpha \| x - y \| .$$

Alors pour tout $x, y \in M, x \neq y$

$$\begin{aligned} \| (I-B)x-(I-B)y \| &= \| (x-y)-(Bx-By) \| \\ &\geq \| (x-y) \| - \| (Bx-By) \| \\ &\geq \| x-y \| -\alpha \| x-y \| \\ &\geq (1-\alpha) \| x-y \| . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Où $\alpha \in (0,1)$. Ceci montre que $(I-B)^{-1}$ existe et est continue puisque, on suppose

$$A=(I-B)x, Z=(I-B)y \Rightarrow x=(I-B)^{-1}A, y=(I-B)^{-1}Z.$$

Utilisant (2.1) on trouve :

$$(1-\alpha) \| x-y \| \leq \| A-Z \|,$$

remplaçont les valeurs de x et y dans la dernière équation on obtient

$$(1-\alpha) \| (I-B)^{-1}A-(I-B)^{-1}Z \| \leq \| A-Z \| .$$

D'où

$$\| (I-B)^{-1}A-(I-B)^{-1}Z \| \leq \frac{1}{1-\alpha} \| A-Z \| .$$

Donc la continuté. ■

Théorème 2.1.2 *(**Krasnoselskii**)[4]. Soit $(S, \| \, . \, \|)$ un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe, fermée et bornée de S. On suppose $A, B : M \to S$ sont deux applications satisfaisant :*

1. *$Ax + By \in M, \forall x, y \in M$.*
2. *A est continue et AM est contenu dans un ensemble compact.*
3. *B est une contraction de constante $\alpha < 1$.*
   Alors il existes

$$x^* \in M, Ax^* + Bx^* = x^*.$$

Preuve. Pour chaque $y \in M$ fixé, l'équation

$$z = Bz + Ay,$$

possède une solution unique $z \in M$, puisque $z = Bz + Ay$ définit une contraction de M dans lui même. Ainsi, $z := (I - B)^{-1}Ay$ est un élément de M. Par le lemme (2.1.1), l'application $(I - B)^{-1}A$ est continue et compact de M dans M. D'après le Théorème de Schauder, $(I - B)^{-1}A$ possède un point fixe y dans M. ■

Remarque 2.1.1 *Dans le théorème (2.1.2) si $A = 0$, alors ce théorème coïncide avec le principe de l'application contractante de Banach et si $B = 0$, alors il coïncide avec le théorème de Schauder.*

2.2 Théorème du point fixe de Krasnoselskii-Burton

2.2.1 La contraction large

Définition 2.2.1 *[5] Soient (S, d) un espace métrique et $B : S \to S$, on dit que B est une contraction large si pour tout $\varphi, \psi \in S$ avec $\varphi \neq \psi$, alors $d(B\varphi, B\psi) < d(\varphi, \psi)$ et si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon) < 1$ tel que*

$$[\varphi, \psi \in S, d(\varphi, \psi) \geq \varepsilon] \Rightarrow d(B\varphi, B\psi) \leq \delta(\varepsilon)d(\varphi, \psi).$$

Exemple 2.2.1 *Si $\|.\|$ est la norme du supremum et si*

$$M := \{\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \varphi \in C, \|\varphi\| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}\}.$$

Alors l'application $(B\varphi)(t) := \varphi(t) - \varphi^3(t)$, est une contraction large sur M.

Preuve. Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, et pour φ, ψ de M évaluées en t,

$$\begin{aligned} |B\varphi(t) - B\psi(t)| &= |\varphi(t) - \varphi^3(t) - \psi(t) + \psi^3(t)| \\ &= |\varphi(t) - \psi(t)|\, |1 - (\varphi^2(t) + \varphi(t)\psi(t) + \psi^2(t))|. \end{aligned}$$

Or,

$$| \varphi(t) - \psi(t) |^2 = \varphi^2(t) - 2\varphi(t)\psi(t) + \psi^2(t) \leq 2(\varphi^2(t) + \psi^2(t)),$$

et comme $\varphi^2(t) + \psi^2(t) < 1$, on obtient

$$\begin{aligned} |B\varphi(t) - B\psi(t)| &= |\varphi(t) - \psi(t)| \left[1 - (\varphi^2(t) + \psi^2(t)) + |\varphi(t)\psi(t)|\right] \\ &\leq \mid \varphi(t) - \psi(t) \mid \left[1 - (\varphi^2(t) + \psi^2(t)) + \frac{\varphi^2(t) + \psi^2(t)}{2}\right] \\ &\leq \mid \varphi(t) - \psi(t) \mid \left[1 - \frac{\varphi^2(t) + \psi^2(t)}{2}\right]. \end{aligned}$$

Cette dernière majoration montre que B est ponctuellement (simplement) une contraction large. Mais l'application B reste une contraction large pour la norme du supremum. En effet, soit $\varepsilon \in (0,1)$ un nombre donné et soient $\varphi, \psi \in M$ avec $\| \varphi - \psi \| \geq \varepsilon$.

a) Supposons que pour un certain t on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \mid \varphi(t) - \psi(t) \mid .$$

Alors

$$(\frac{\varepsilon}{2})^2 \leq \mid \varphi(t) - \psi(t) \mid^2 \leq 2(\varphi^2(t) + \psi^2(t)).$$

D'où

$$\varphi^2(t) + \psi^2(t) \geq \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Pour de tels t on a

$$\begin{aligned} |B\varphi(t) - B\psi(t)| &\leq |\varphi(t) - \psi(t)| \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right] \\ &\leq ||\varphi(t) - \psi(t)|| \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right]. \end{aligned}$$

b) Supposons que pour certains t on a

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$|B\varphi(t) - B\psi(t)| \leq \frac{1}{2}|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \frac{1}{2}||\varphi - \psi||.$$

Par conséquent, on obtient pour tout t,

$$||B\varphi - B\psi|| \leq max\left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right] \parallel \varphi - \psi \parallel .$$

Donc B est un contraction large dans M, avec $\delta = \max\left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right]$. ■

Exemple 2.2.2 *Si* $\|.\|$ *est la norme du supremum et si*

$$M_{5^{\frac{-1}{4}}} := \{\varphi : \varphi \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \parallel \varphi \parallel \leq 5^{\frac{-1}{4}}\},$$

et $h(u) = u^5$, *alors l'application* $H(x(u)) = x(u) - h(x(u))$ *est une contraction large sur* $M_{5^{\frac{-1}{4}}}$.

Preuve. Pour tout a et b sont des nombres réels on a

$$0 \leq (a+b)^4 = a^4 + b^4 + ab(4a^2 + 6ab + 4b^2),$$

d'autre part

$$-ab(a^2 + ab + b^2) \leq \frac{a^4 + b^4}{4} + \frac{a^2b^2}{2} \leq \frac{a^4 + b^4}{2}.$$

Si $x, y \in M_{5^{\frac{-1}{4}}}$ avec $x \neq y$, alors $[x(t)]^4 + [y(t)]^4 < 1$. On obtient

$$\begin{aligned} \mid H(u) - H(v) \mid &\leq \mid u - v \mid\mid 1 - (\frac{u^5 - v^5}{u - v}) \mid \\ &= \mid u - v \mid [1 - u^4 - v^4 - uv(u^2 + uv + v^2)] \\ &\leq \mid u - v \mid [1 - \frac{(u^4 + v^4)}{2}] \leq \mid u - v \mid, \end{aligned}$$

tel que on utilisons la notation $u = x(t), v = y(t)$.

Cette dernière majoration montre que H est ponctuellement (simplement) une contraction large. Mais l'application H reste une contraction large pour la norme du supremum. En effet, soit $\varepsilon \in (0, 1)$ un nombre donné et soient $x, y \in M_{5^{\frac{-1}{4}}}$ avec $\parallel x - y \parallel \geq \varepsilon$.

a) Supposons que pour un certain $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \mid x(t) - y(t) \mid .$$

Alors

$$(\frac{\varepsilon}{2})^4 \leq \mid x(t) - y(t) \mid^4 \leq 8(x(t)^4 + y(t)^4),$$

d'où

$$(x(t)^4 + y(t)^4) \geq \frac{\varepsilon^4}{2^7}.$$

Pour de tels t on a

$$| H(u) - H(v) | \leq | u - v |,$$

donc

$$| H(u) - H(v) | \leq | x(t) - y(t) | (1 - \frac{\varepsilon^4}{2^8}).$$

b) Supposons que pour un certain $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \geq | x(t) - y(t) | .$$

On a

$$| H(u) - H(v) | \leq | u - v |,$$

alors

$$| H(u) - H(v) | \leq \frac{1}{2} | x(t) - y(t) | \leq \frac{1}{2} \parallel x - y \parallel .$$

Par conséquent, pour tout t,

$$| H(x(t)) - H(y(t)) | \leq \max\{1 - \frac{\varepsilon^4}{2^8}, \frac{1}{2}\} \parallel x - y \parallel .$$

Alors, H est contraction large dans $M_{5^{\frac{-1}{4}}}$ avec $\delta = \max\{1 - \frac{\varepsilon^4}{2^8}, \frac{1}{2}\}$. ■

Théorème 2.2.1 *(**Burton**)[5]. Soit (S, d) un espace métrique complet et soit*

$$B : S \to S,$$

une contraction large. On suppose qu'il existe $x \in S$ et $L > 0$ tel que

$$d(x, B^n x) \leq L, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Alors B admet un point fixe unique dans S.

Preuve. Soit $x \in S$ et engendrons la suite $\{B^n x\}_{n\geq 1}$, de toute évidence si cette suite est de Cauchy. Alors la limite sera un point fixe pour B.
Supposons alors que $\{B^n x\}_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy, alors

$$\exists\, \varepsilon > 0, \text{ tel que pour } N_K \in \mathbb{N},\ \exists\, n_K, m_K \geq N_K \text{ avec } m_K \geq n_K \text{ et } d(B^{m_K} x, B^{n_K} x) \geq \varepsilon.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq \ & d(B^{m_K}x, B^{n_K}x) \ \leq d(B^{m_K-1}x, B^{n_K-1}x)\\ \leq \ & \quad \cdots \quad \leq d(B^{m_K-n_K}x, x).\end{aligned}$$

Comme B est une contraction large, alors pour tout $\varepsilon > 0$ tels que

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq \ & d(B^{m_K}x, B^{n_K}x) \ \leq \delta d(B^{m_K-1}x, B^{n_K-1}x)\\ \leq \ & \quad \cdots \quad \leq \delta^{n_K} d(B^{m_K-n_K}x, x) \leq \delta^{n_K} L.\end{aligned}$$

Alors on a

$$\varepsilon \leq \delta^{n_K} d(B^{m_K-n_K}x, x) \leq \delta^{n_K} L \Rightarrow \varepsilon \leq \delta^{n_K} L.$$

mais $\delta < 1$, en faisant $n \to \infty$, on obtient $\varepsilon \leq 0$, qui est une contradiction. D'où la conclusion. ■

Lemme 2.2.1 *Si $(S, \| \, . \, \|)$ est un espace normé, si $M \subset S$ et $B : M \to S$ une contraction large, alors $(I - B)$ est un homéomorphisme de M dans $(I - B)M$.*

Preuve. Clairement, $I - B$ est continue. D'autre part, pour tout $x, y \in M$ avec $x \neq y$, on voit que

$$\begin{aligned}\| (I - B)x - (I - B)y \| &= \| (x - y) - (Bx - By) \|\\ &\geq \| x - y \| - \| Bx - By \|\\ &> \| x - y \| - \| x - y \| = 0.\end{aligned}$$

Par conséquence $(I - B)$ est injective et donc $(I - B)^{-1}$ existe.
Si $(I - B)^{-1}$ n'était pas continue, alors $\exists \ (I - B)y$ et $(I - B)x_n \to (I - B)y$ mais x_n ne converge pas vers y. Or, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Rightarrow \varepsilon \geq \| (I - B)x_n - (I - B)y \| \geq \| x_n - y \| - \| Bx_n - By \|, \tag{2.2}$$

comme $\{x_n\}$ ne converge pas vers y, alors $\exists \ \varepsilon_0 > 0$ et $\{x_{n_k}\}_k$, tel que $\|x_{n_k} - y\| \geq \varepsilon_0$ et comme B est une contraction large, alors

$$\exists \ \delta < 1, \| Bx_{n_k} - By \| \leq \delta \| x_{n_k} - y \| .$$

En utilisant (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq \| (I-B)x_{n_k} - (I-B)y \| \\
&\geq \| x_{n_k} - y \| - \| Bx_{n_k} - By \| \\
&\geq \| x_{n_k} - y \| - \delta \| x_{n_k} - y \| \\
&= (1-\delta) \| x_{n_k} - y \| \\
&\geq (1-\delta)\varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Mais ε_0 est fixé, $\delta < 1$, par conséquent on aura une contradiction lorsque $\varepsilon \to 0$. D'où $I - B$ est bien un homéomorphisme. ■

Théorème 2.2.2 *(**Krasnoselskii-Burton**)[3]. Soit $(S, \|.\|)$ un espace de Banach, et soit M une partie non vide, convexe, bornée et fermée de S. Soient $A, B : M \to M$ sont deux applications telles que*

1. *$Ax + By \in M, \forall x, y \in M$.*
2. *A est continue et AM est contenu dans un compact.*
3. *B est une contraction large.*

Alors il existe x^* dans M vérfiant

$$Ax^* + Bx^* = x^*.$$

Preuve. Pour chaque $y \in M$ fixé, l'application

$$Hz = Bz + Ay,$$

est une contraction large sur M possèdant un point fixe unique z (comme M est bornée, l'existence du nombre L du Théorème (2.2.1) est assurée). Donc $z = Bz + Ay$ possède une solution unique. D'après le Lemme (2.2.1) l'application

$$Py := (I - B)^{-1}Ay,$$

est continue de M dans M. Mais, AM est contenu dans une sous ensemble compact de M et $(I-B)^{-1}$ est continue de AM dans M, il est alors bien connu que $(I-B)^{-1}AM$ est contenu dans un sous ensemble compact de M. Selon le Théorème de Schauder, il existe un point fixe $x^* = (I - B)^{-1}Ax^*$, c'est à dire :

$$Ax^* + Bx^* = x^*.$$

■

Remarque 2.2.1 *Si dans le théorème (2.2.2) $A = 0$ alors, nous obtenons la théorème (2.2.1).*

2.2.2 La contraction separée

Définition 2.2.2 *[1]. Soit (S, d) un espace métrique, l'application f de S dans S , on dit que l'application f est une contraction separée s'il existe deux fonctions $\varphi, \psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifient :*

1. *$\psi(0) = 0, \psi$ est strictement croissante.*
2. *$\forall\ x, y \in S, d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$.*
3. *$\psi(r) \leq r - \varphi(r)$, pour $r > 0$.*

Exemple 2.2.3 *Soit $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction définie par :*

$$f(t, x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{\sin^2(t)}{4}.$$

Soit $X = C(R, [0, 1])$ et $B : X \to X$ définie par : $(Bx)(t) = f(t, x(t))$. Il est facile de vérifier que l'application B est une contraction separée.

Preuve. En effet, pour tout $x, y \in X$ et chaque $t \in \mathbb{R}$, on a

$$|x(t) - y(t)| \leq x(t) + y(t),$$

et

$$|x(t) - y(t)|^2 = x^2(t) + y^2(t) - 2x(t)y(t) \leq 2(x^2(t) + y^2(t)).$$

Par un calcul direct on obtient

$$\begin{aligned} |Bx(t) - By(t)| &= |x(t) - \frac{x^4(t)}{4} - y(t) - \frac{y^4(t)}{4}| \\ &= |x(t) - y(t)||1 - \frac{x(t) + y(t)}{4}(x^2(t) + y^2(t))| \\ &\leq |x(t) - y(t)|(1 - \frac{|x(t) - y(t)|^3}{8}). \end{aligned}$$

Soit $\varphi(r) = r(1 - \frac{r^3}{8})$. Puis $\varphi(.)$ est une fonction décroissante sur $[0, 1]$. Ainsi que

$$|Bx(t) - By(t)| \leq\parallel x - y \parallel (1 - \frac{\parallel x - y \parallel^3}{8}).$$

Alors

$$\| Bx - By \| \leq \| x - y \| \, (1 - \frac{\| x - y \|^3}{8}) = \varphi(\| x - y \|).$$

Prenez $\psi(r) = r - \varphi(r) = \dfrac{r^4}{8} > 0$. D'après la défintion (2.2.2), alors B est une contraction separée. ∎

Exemple 2.2.4 *Soit* $f : [0, \frac{1}{\sqrt{2}}] \to [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ *une fonction est définie par :*

$$f(x) = x - x^3,$$

et on prend la distance $d(d(x;y) \in \mathbb{R}^+, d(x,y) = \mid x - y \mid)$. *Alors* f *est une contraction separée.*

Preuve. On a trouvé $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\varphi(r) = \begin{cases} r(1 - \frac{r^2}{4}) & \text{si} \quad r < 1, \\ \frac{3}{4} r & \text{si} \quad r \geq 1, \end{cases}$$

et $\psi(r) = r - \varphi(r)$. Nous pouvons observer que φ est continue dans $[0, +\infty), \varphi(0) = 0$ et $\varphi(r) < r$, pour tout $r \in [0, +\infty)$.

D'autre part, pour chaque $t \in \mathbb{R}$ et pour x, y de $\mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} \mid f(x) - f(y)| &= |x - x^3 - y + y^3| \\ &= |x - y| \, |1 - (x^2 + xy + y^2)|. \end{aligned}$$

Or,

$$\mid x - y \mid^2 = x^2(t) - 2xy + y^2(t) \leq 2(x^2(t) + y^2(t)),$$

et comme $x^2 + y^2 < 1$, on obtient

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x - y| \left[1 - (x^2 + y^2) + |xy|\right] \\ &\leq \mid x - y \mid \left[1 - (x^2 + y^2) + \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \\ &\leq \mid x - y \mid \left[1 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right] \\ &\leq \mid x - y \mid \left[1 - \frac{x^2 + y^2}{4}\right]. \end{aligned}$$

Soit $\varphi(r) = r(1 - \frac{r^2}{4})$, puis $\varphi(.)$ est une fonction décroissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Ainsi

$$|f(x) - f(y)| \leq \| x - y \| \, (1 - \frac{\| x - y \|}{4}) = \varphi(\| x - y \|).$$

D'autre part, comme $x^2 + y^2 > 1$, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq | x - y | \left[1 - \frac{x^2 + y^2}{4}\right].$$

On obtient

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4} \mid x - y \mid .$$

Soit $\varphi(r) = \frac{3}{4} r$. Puis $\varphi(.)$ est une fonction décroissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Donc,

$$\| f(x) - f(y) \| \leq \frac{3}{4} \| x - y \| = \varphi(\| x - y \|).$$

Alors f est un contraction separée. ■

Lemme 2.2.2 *Si f est une contraction large, alors f est une contraction separée.*

Preuve. On suppose f est une contraction large, d'après la définition (2.2.1), on voit que $\delta(.)$ est décroissante, et donc, on définit les fonctions φ et ψ par :

$$\varphi(r) = \delta(\frac{r}{2})r, \;\; \psi(r) = r - \varphi(r), r > 0,$$

où $\delta(\frac{r}{2}) < 1$ donné par la définition (2.2.2), pour tout $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon \leq d(x, y) \leq 2\varepsilon$, il est facile de voir que $d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y))$. D'autre part, puisque $1 - \delta(\frac{r}{2})$ est croissante, cela implique que ψ est strictement croissante. ■

Exemple 2.2.5 *On considére la fonction $f(x) = \frac{x^2}{1 + x}, x \in X = [0, +\infty)$. Alors f est une contraction separée, mais n'est pas une contraction large.*

Preuve. En effet, soit

$$\varphi(d(x, y)) = \begin{cases} \dfrac{d(x, y)[n^2 + 2n + (n + 1)d(x, y)]}{(n + 1)^2 + (n + 1)d(x, y)}, & n - 1 < min\{x, y\} \leq n, n = 1, 2, ... \\ \\ \dfrac{d(x, y)[3 + 2d(x, y)]}{4 + 2d(x, y)}, & min\{x, y\} = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\psi(d(x,y)) = \begin{cases} \dfrac{d(x,y)}{(n+1)^2+(n+1)d(x,y)}, & n-1 < min\{x,y\} \leq n, n = 1,2,... \\ \\ \dfrac{d(x,y)}{4+2d(x,y)}, & min\{x,y\} = 0. \end{cases}$$

Pour tout $x, y \in X$ et $y > x$, si $x = 0$, alors

$$d(f(0), f(y)) = f(y) = \frac{y^2}{1+y} \leq \frac{y(3+2y)}{4+2y} = \varphi(d(0,y)).$$

Si $x \neq 0$. Donc il existe $n_0 > 0$ tel que $n_0 - 1 < x \leq n_0$. Alors $y = x + d(x,y)$.

par un calcul direct, on obtient

$$d(f(x), f(y)) = f(y) - f(x) \leq \frac{d(x,y)[n_0^2 + 2n_0 + (n_0+1)d(x,y)]}{(n_0+1)^2 + (n_0+1)d(x,y)} = \varphi(d(x,y)).$$

Par la défintion (2.2.2), f est une contraction separée.

D'ailleurs, si f est une contraction large, alors pour tout $\delta > 0$, il existe $k \in (0,1)$ tel que

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y), \forall d(x,y) \geq \delta.$$

Mais pour $x > max\{\delta, \dfrac{K}{1-k}\}$, on a

$$d(f(x), f(0)) = \frac{x^2}{1+x} = \frac{x}{1+x} d(x,0) > kd(x,0).$$

Donc, f n'est pas une contraction large. ∎

Remarque 2.2.2 *(f est une contraction) $\Rightarrow$ (f est une contraction large) $\Rightarrow$ (f est une contraction separé) $\Rightarrow$ (f est non expansive).*

Lemme 2.2.3 *Soit $(X, \| . \|)$ un espace normé. Si $S \subset X$ et f est contraction separée, alors $(I - f)$ est une homéomorphisme de S dans $(I - f)S$.*

Preuve. Il est clair, que $(I - f)$ est continue. De plus, pour tout $x, y \in S$ avec $x \neq y$, on a

$$\begin{aligned} \| (I-f)x - (I-f)y \| &\geq \| x - y \| - \| f(x) - f(y) \| \\ &\geq \| x - y \| - \varphi(\| x - y \|) \\ &\geq \psi(\| x - y \|) > 0. \end{aligned}$$

Alors $(I-f)$ est injective et donc $(I-f)^{-1}$ existe.

Supposons que $(I-f)^{-1}$ est discontinus, alors il existe $(I-f)y$ et $(I-f)x_n \to (I-f)y$, mais il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $\{x_{n_k}\}$ avec $\|y - x_{n_k}\| \geq \varepsilon_0$, donc pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $n_k > N$, on a

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\geq \| (I-f)x_n - (I-f)y \| \\
&\geq \| x_{n_k} - y \| - \| f(x_{n_k}) - f(y) \| \\
&\geq \| x_{n_k} - y \| - \varphi(\| x_{n_k} - y \|) \\
&\geq \psi(\| x_{n_k} - y \|) \\
&\geq \psi(\varepsilon_0) > 0.
\end{aligned}$$

qui est une contradiction, comme $\varepsilon \to 0$, par conséquent $(I-f)^{-1}$ est continue. ■

Théorème 2.2.3 *[11]. Soit (S,d) un espace métrique complet, si $f : S \to S$ est une contraction separée, alors f admet un point fixe unique dans S.*

Preuve.

1. **L'existence de point fixe :**

   Pour tout donnée $x_0 \in S, \{x_n\} = f^n(x_0), n = 1, 2, ...$ La suit reélle $\{a_n\}$ est définiée par :

   $$a_n = d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)).$$

   Il est clair,

   $$0 \leq a_{n+1} \leq \varphi(a_n) < a_n \leq \varphi(a_{n-1}),\ \forall n > 0.$$

   D'après ça, on voit que les deux $\{a_n\}$ et $\{\varphi(a_n)\}$ sont des suites, positives, décroissantes et $\lim\limits_{n\to\infty}(\varphi(a_n) - a_n) = 0$, soit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, on a

   $$\psi(a) \leq \psi(a_n) \leq (a_n - \varphi(a_n)) \to 0.$$

   Alors $a = 0$. Puisque $\varphi(r) < r$, pour $r > 0$, supposons que, pour $\varepsilon > 0$ fixé, $\varepsilon^* = \sup\limits_{0\leq r\leq\varepsilon} \varphi(r) < r$, maintenant on va choisir N suffisamment grand tel que

   $$\{a_N\} \leq \varepsilon - \varepsilon^*.$$

   Pour prouver que la suite $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, on prouve l'ensemble $\{x|d(x, x_N) \leq \varepsilon\}$ est invariant par f, besoin

   $$\begin{aligned}
   d(f(x), x_N) &\leq d(f(x), f(x_N)) + d(f(x_N), x_N) \leq a_N + \varphi(d(x, x_N)) \\
   &\leq \varepsilon^* + \varepsilon - \varepsilon^* = \varepsilon.
   \end{aligned}$$

Cela montre que, l'ensemble est invariant par f, donc la suite $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, soit $\lim_{n\to\infty} x_n = x^* \in S$, on a

$$f(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*.$$

C'est dire, x^* est un point fixe de f.

2. **l'unicité de point fixe :**

Supposons qu'il existe deux point fixe x et y. Comme f est une contraction separée on a

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)).$$

Mais x et y sont deux points fixes, alors

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y) \leq \varphi(d(x, y)) \leq d(x, y).$$

En comparant ces deux expressions, on obtient immédiatement à une contradiction, d'où l'unicité. ■

Théorème 2.2.4 *[10]. Soit M un sous ensemble convexe, bornée, fermé et non vide d'espace de Banach $(X, \| \,.\, \|)$, soient A et B deux applications de M sur X telles que*

1. $x, y \in M \Rightarrow Ax + By \in M$.

2. A est continue et AM est contenue dans un sous ensemble compact de M.

3. B est une contraction separée.

Alors, il existe $y \in M$, tel que $y = Ay + By$.

Preuve. Pour tout $y \in X$ donnée, l'application $TZ = BZ + Ay$, est une contraction separée sur M, alors l'équation $Z = BZ + Ay$ de l'inconnue Z admet une solution unique Z dans M. Par le lemme (2.2.1)

$$Ly := (I - B)^{-1} Ay,$$

est une application continue de M dans M. Puisque AM est contenue dans sous ensemble compact de M et $(I - B)^{-1}$ est une application continue de AM sur M, on voit que $(I - B)^{-1}AM$ est contenue dans une sous ensemble de M, par le théorème de Schauder, il existe une point fixe $y = (I - B)^{-1}Ay$ où $y = By + Ay$. ■

Remarque 2.2.3 *Si dans le théorème (2.2.4) $A = 0$ alors, nous obtenons la théorème (2.2.3).*

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution d'une équation différentielle à retard et l'existence et l'unicité des solutions périodiques pour l' une équation de différence à retard, en utilisant le théorème de Krasnoselskii et Krasnoselskii-Burton.

3.1 L'existence, l'unicité et la stabilité d'une équation différentielle à retard

Définition 3.1.1 *[8]. Une équation différentielle à retard est une équation différentielle dont la dérivée par rapport au temps présent de la solution dépend d'une donnée (de cette solution) sur un temps postérieurs.*

Dans cette section, on va étudier l'existence, l'unicité et la stabilité de l'équation suivante :

$$x'(t) = -a(t)h(x(t)) + c(t)x'(t - r(t)) + b(t)G(x(t), x(t - r(t))), t \geq 0. \tag{3.1}$$

En remarquant que l'équation (3.1) est totalement non linéaire en x. La présence du terme $a(t)h(x(t))$ rend difficile l'application de variation des paramétres. Pour cela, nous rajoutons aux deux membres de l'équation un terme linéaire $a(t)x(t)$ pour transformer l'équation avant son intégration.

3.1.1 Transformation et inversion de l'équation

Considérons l'équation différentielle (3.1) avec une condition initiale :

$$x(t) = \psi(t), t \in [m_0, 0],$$

où

$$\psi \in C[m_0, 0] \text{ et } m_0 = \inf\{t - r(t) : t \geq 0\}.$$

Supposons aussi $a, b \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, avec $a(t) \geq 0, c \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à ses arguments. Avec $h(0) = 0$ et $r \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tel que

$$r'(t) \neq 1, \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.2}$$

De plus, considérons que $G(x, y)$ est continue et Lipschitzienne par rapport à x et y, c'est à dire, il existe des constantes positives K_1 et K_2, telles que,

$$| G(x, y) - G(z, w) | \leq K_1 \parallel x - z \parallel + K_2 \parallel y - w \parallel \quad \text{et} \quad G(0, 0) = 0.$$

Lemme 3.1.1 *[3]. Supposons que la condition (3.2) est vérifiée. Alors $x(t)$ est une solution de (3.1) si et seulement si*

$$\begin{aligned} x(t) &= [\psi(0) - \frac{c(0)}{1 - r'(0)}\psi(-r(0))]e^{-\int_0^t a(u)du} \qquad (3.3)\\ &+ \int_0^t a(s)(Hx)(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\ &+ \frac{c(t)}{1 - r'(t)}x(t - r(t)) - \int_s^t \mu(s)x(s - r(s))e^{-\int_0^t a(u)du}ds \\ &+ \int_0^t b(s)G(x(s), x(s - r(s)))e^{-\int_s^t a(u)du}ds, \end{aligned}$$

où

$$\mu(t) = \frac{(c'(t) + a(t)c(t))(1 - r'(t)) + c(t)r''(t)}{(1 - r'(t))^2}, \tag{3.4}$$

et

$$(Hx)(t) = x(t) - h(x(t)). \tag{3.5}$$

Preuve. Soit $x(t)$ est une solution de (3.1). Premiérement, réécrivons (3.1) sous la forme suivante

$$x'(t) + a(t)x(t) = a(t)x(t) - a(t)h(x(t)) + c(t)x'(t - r(t)) + b(t)G(x(t), x(t - r(t))).$$

Multiplions les deux membres de l'équation par $e^{\int_0^t a(u)du}$ et puis en intégrant de 0 à t. On obtient,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t x'(t)e^{-\int_0^s a(u)du}ds + \int_0^t a(t)x(t)e^{-\int_0^s a(u)du}ds \\
&= \int_0^t a(s)(Hx)(s)e^{-\int_0^s a(u)du}ds + \int_0^t c(s)x'(s-r(s))e^{\int_0^s a(u)du}ds \\
&+ \int_0^t b(s)G(x(s), x(s-r(s)))e^{-\int_0^s a(u)du}ds,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\int_0^t x'(t)e^{-\int_0^s a(u)du}ds + x(t)e^{-\int_0^s a(u)du} \mid_0^t - \int_0^t x'(t)e^{\int_0^s a(u)du}ds \\
&= \int_0^t a(s)(Hx)(s)e^{-\int_0^s a(u)du}ds + \int_0^t c(s)x'(s-r(s))e^{-\int_0^s a(u)du}ds \\
&+ \int_0^t b(s)G(x(s), x(s-r(s)))e^{-\int_0^s a(u)du}ds,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
&x(t)e^{-\int_0^t a(u)du} - x(0) \\
&= \int_0^t a(s)(Hx)(s)e^{-\int_0^s a(u)du}ds + \int_0^t c(s)x'(s-r(s))e^{-\int_0^s a(u)du}ds \\
&+ \int_0^t b(s)G(x(s), x(s-r(s)))e^{-\int_0^s a(u)du}ds.
\end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'équation ci-dessus par $e^{-\int_0^t a(u)du}$, on obtient

$$\begin{aligned}
x(t) &= \psi(0)e^{-\int_0^t a(u)du} + \int_0^t a(s)(Hx)(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds \qquad (3.6)\\
&+ \int_0^t c(s)x'(s-r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds + \int_0^t b(s)G(x(s), x(s-r(s)))e^{-\int_s^t a(u)du}ds.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\int_0^t c(s)x'(s-r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds = \int_0^t \frac{c(s)}{(1-r'(s))}(1-r'(s))x'(s-r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds.$$

En effectuant une intégration par partie avec

$$U = \frac{c(s)}{(1-r'(s))}e^{-\int_s^t a(u)du},\ dV = (1-r'(s))x'(s-r(s)),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^t c(s)x'(s-r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
&= \frac{c(t)}{(1-r'(t))}x(t-r(t)) - \frac{c(0)}{(1-r'(0))}\psi(-r(0))e^{-\int_0^t a(u)du} \\
&- \int_0^t \mu(s)x(s-r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

où $\mu(s)$ est donnée par l'expression (3.4). Alors la substitution de (3.7) dans (3.6) achéeve la démonstration. ■

3.1.2 L'existence et l'unicité

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution, il faudra choisir un espace qui contient la solution et suitable d'appliquer le théorème de Krasnoselskii-Burton pour cela, soit S un sous ensemble de l'espace $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ muni de la norme supermum $\| \, . \, \|$ borné, et soit $\varphi : [m_0,\infty) \to \mathbb{R}$ et $L > 0$, pour tout $t \in [m_0,\infty)$ on définit l'ensemble :

$$S_\psi := \{\varphi \in S, \varphi \text{ est Lipschitzienne, } \mid \varphi(t) \mid \leq L, \varphi(t) = \psi(t) \text{ si } t \in [m_0, 0]\}.$$

Il est clair S_ψ est convexe, borné et fermé avec $\| \, . \, \|$. Pour $\varphi \in S_\psi$ et $t \geq 0$, définissons les applications A, B et C sur S_ψ par :

$$\begin{aligned}(A\varphi)(t) \quad &:= \quad \frac{c(t)}{1-r'(t)}\varphi(t-r(t)) + \int_0^t b(s)G(\varphi(s),\varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\ &- \quad \int_0^t \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$(B\varphi)(t) := [\psi(0) - \frac{c(0)}{1-r'(0)}\psi(-r(0))]e^{-\int_0^t a(u)du} + \int_0^t a(s)(H\varphi)(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds, \tag{3.9}$$

et

$$(C\varphi)(t) := (A\varphi)(t) + (B\varphi)(t).$$

On dit $x(t)$ est une solution (3.1) si et seulement si C possède un point fixe φ dans l'espace S_ψ, et

$$\begin{cases} x(t,0,\psi) = \varphi(t) & \text{pour} \quad t \geq 0, \\ x(t,0,\psi) = \psi(t) & \text{sur} \quad [m_0, 0]. \end{cases}$$

Soit

$$\alpha(t) = \frac{c(t)}{1-r'(t)},$$

et supposons qu'il existe des constantes $k_1, k_2, k_3 > 0$, telles que pour $0 \leq t_1 < t_2$, on a

$$\mid \int_{t_1}^{t_2} a(u)du \mid \leq k_1 \mid t_2 - t_1 \mid, \tag{3.10}$$

$$\mid r(t_2) - r(t_1) \mid \leq k_2 \mid t_2 - t_1 \mid, \tag{3.11}$$

et

$$\mid \alpha(t_2) - \alpha(t_1) \mid \leq k_3 \mid t_2 - t_1 \mid, \tag{3.12}$$

supposons aussi les conditions suivantes pour $t \geq 0$

$$| \mu(t) | \leq \delta a(t), \tag{3.13}$$

$$(K_1 + K_2) | b(t) | \leq \beta a(t), \tag{3.14}$$

$$\sup_{t \geq 0} | \alpha(t) | = \alpha_0, \tag{3.15}$$

de plus

$$J(\alpha_0 + \beta + \delta) < 1, \tag{3.16}$$

$$max(| H(-L) |, | H(L) | \leq \frac{2L}{J}, \tag{3.17}$$

où α, β, δ et J sont constantes avec $J > 3$. On va choisir $\gamma > 0$ assez petit de sort que

$$(1 + | \frac{c(0)}{1 - r'(0)} |)\gamma + \frac{3L}{J} \leq L. \tag{3.18}$$

Si $\varepsilon = L$ et si $\| \psi \| < \gamma$, alors la solution satisfaisant $x(t, 0, \psi) < \varepsilon$.

On suppose aussi

$$t - r(t) \to \infty \text{ lorsque } t \to \infty \text{ et } \int_0^t a(u)du \to \infty \text{ pour } t \to \infty, \tag{3.19}$$

$$\alpha(t) \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty, \tag{3.20}$$

$$\frac{\mu(t)}{a(t)} \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty, \tag{3.21}$$

et

$$\frac{b(t)}{a(t)} \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty. \tag{3.22}$$

Dans le lemme suivant on va montrer que l'application H donnée par (3.5) est une contraction large sur S_ψ. Pour cela, on suppose les hypothèses suivantes sont vérifiées pour la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$(H_1) h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $[-L, L]$ et différentiable sur $(-L, L)$.

(H_2) h est strictement croissante sur $[-L, L]$.

(H_3) $\sup_{t \in (-L, L)} h'(t) \leq 1$.

Lemme 3.1.2 *Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant $(H_1) - (H_3)$. Alors l'application H est une contraction large sur l'ensemble S_ψ.*

Preuve. Soit $\varphi, \phi \in S_\psi$ avec $\varphi \neq \phi$. Alors $\phi(t) \neq \varphi(t)$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$. On dénote l'ensemble de tels point par $D(\phi, \varphi)$, c'est à dire

$$D(\phi, \varphi) = \{t \in \mathbb{R} : \phi(t) \neq \varphi(t)\}.$$

Pour tout $t \in D(\phi, \varphi)$, on a

$$\begin{aligned} |\,(H\phi)(t) - H\varphi(t)\,| &= |\,\phi(t) - h(\phi(t)) - \varphi(t) + h(\varphi(t))\,| \\ &= |\,\phi(t) - \varphi(t)\,||\,1 - (\frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)})\,|\,. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Comme h est une fonction strictement croissante, alors :

$$\frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)} > 0, \quad \text{pour tout } t \in D(\phi, \varphi). \tag{3.24}$$

Pour tout $t \in D(\phi, \varphi)$ fixé, définissons l'intervalle $U_t \subset [-L, L]$ par

$$U_t = \begin{cases} (\varphi(t), \phi(t)) & \text{si} \quad \phi(t) > \phi(t), \\ (\phi(t), \varphi(t)) & \text{si} \quad \phi(t) < \varphi(t). \end{cases}$$

Le théorème des accroissements finis implique que pour chaque t fixé dans $D(\phi, \varphi)$, il existe un nombre réel $c_t \in U_t$ tel que

$$\frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)} = h'(c_t),$$

par (H_2) et (H_3), on trouve :

$$\begin{aligned} 0 \leq \inf_{u \in (-L,L)} h'(u) &\leq \inf_{u \in U_t} h'(u) \leq h'(c_t) \\ &\leq \sup_{u \in U_t} h'(u) \leq \sup_{u \in (-L,L)} h'(u) \leq 1. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Ainsi, par(3.23) et (3.25), on obtient

$$|\,(H\phi)(t) - (H\varphi)(t)\,| \leq |\,1 - \inf_{u \in (-L,L)} h'(u)\,||\,\phi(t) - \varphi(t)\,|, \tag{3.26}$$

pour tout $t \in D(\phi, \varphi)$. Alors par (H_3), on a

$$\|\, H\phi - H\varphi \,\| \leq \|\, \phi - \varphi \,\|\,.$$

Ceci montre bien que H est une contraction large pour la norme du supremum. En effet, soit $\varepsilon \in (0,1)$ un nombre donné et supposons que φ et ϕ sont deux fonctions dans S_ψ vérifiant

$$\varepsilon \leq \sup_{t\in D(\phi,\varphi)} \mid \phi(t) - \varphi(t) \mid = \parallel \phi(t) - \varphi(t) \parallel .$$

a) Supposons que pour certain $t \in D(\phi, \varphi)$, on a

$$\mid \phi(t) - \varphi(t) \mid \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, à partir (3.25) et (2.26), on obtient

$$\mid (H\phi)(t) - (H\varphi)(t) \mid \leq \mid \varphi(t) - \varphi(t) \mid \leq \frac{1}{2} \parallel \phi - \varphi \parallel . \tag{3.27}$$

Comme h est continue et strictement croissante, la fonction $h(u + \frac{\varepsilon}{2}) - h(u)$ atteint son minimum sur l'intervalle fermé et borné $[-L, L]$, c'est à dire est compact.

b) On Suppose que pour certain $t \in D(\phi, \varphi)$ on a

$$\frac{\varepsilon}{2} \leq \mid \phi(t) - \varphi(t) \mid .$$

Alors, par les hypothèses (H_2) et (H_3), on conclut que

$$1 \geq \frac{h(\phi(t)) - h(\varphi(t))}{\phi(t) - \varphi(t)} > \lambda,$$

où

$$\lambda := \frac{1}{2L} \min\{h(u + \frac{\varepsilon}{2}) - h(u)/u \in [-L, L]\} > 0.$$

Par conséquent, l'expression (3.23) on en déduit

$$\mid (H\phi)(t) - (H\varphi)(t) \mid \leq (1 - \lambda) \parallel \phi(t) - \varphi(t) \parallel . \tag{3.28}$$

De (3.27) et (3.28) on conclut que pour tout t

$$\mid (H\phi)(t) - (H\varphi)(t) \mid \leq \eta \parallel \phi(t) - \varphi(t) \parallel,$$

où

$$\eta = \max\{\frac{1}{2}, 1 - \lambda\} < 1.$$

■

Lemme 3.1.3 *[1]. Si H est une contraction large sur S_ψ, alors B est aussi sur S_ψ.*

Preuve. Pour montrer que B est une contraction large sur S_ψ ayant un point fixe unique, on sait depuis le lemme (3.1.2) que $(H\varphi) = \varphi - h(\varphi)$ est une contraction large en intégrale. Ainsi, pour ε de la preuve de lemme(3.1.2), on a trouvé $\eta < 1$ tel que

$$\begin{aligned} \mid (B\varphi)(t) - (B\phi)(t) \mid &\leq \int_0^t a(s) \mid (H\varphi)(s) - (H\phi)(s) \mid e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\leq \eta \int_0^t a(s) \parallel \varphi - \phi \parallel e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\leq \eta \parallel \varphi - \phi \parallel . \end{aligned}$$

D'où B est une contraction large sur S_ψ. ■

Lemme 3.1.4 *Supposons que les hypothèses (3.13)-(3.17) et (3.19) sont vérifiées. Pour A, B définies dans (3.8) et (3.9), si $\varphi \in S_\psi$, alors $\mid (A\varphi)(t) \mid \leq \frac{L}{J} < L$, et $\mid (B\varphi)(t) \mid \leq L$.*

Preuve. On va utilisons les conditions (3.13)-(3.16) et l'expression (3.8) de l'application A on obtient

$$\begin{aligned} \mid (A\varphi)(t) \mid &\leq \mid \frac{c(t)}{1-r'(t)} \varphi(t - r(t)) \mid + \int_0^t \mid b(s) \mid\mid G(\varphi(s), \varphi(s - r(s))) \mid e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &+ \int_0^t \mid \mu(s) \mid\mid \varphi(s - r(s)) \mid e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\leq \alpha_0 L + \int_0^t (K_1 + K_2) \mid b(s) \mid L e^{-\int_s^t a(u)du} ds + L \int_0^t \mid \mu(s) \mid e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\leq L\{\alpha_0 + \int_0^t \beta a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \int_0^t \delta a(s) \delta e^{-\int_s^t a(u)du} ds\} \\ &\leq L(\alpha_0 + \beta + \delta) \leq \frac{L}{J} < L. \end{aligned}$$

Alors AS_ψ est borné par L.

Pour prouver $\mid (B\varphi)(t) \mid \leq L$, on va utiliser la condition (3.17) et l'expression (3.9) on obtient

$$\begin{aligned} \mid B\varphi(t) \mid &\leq \mid \psi(0) - \frac{c(0)}{1-r'(0)} \psi(-r(0)) \mid e^{-\int_s^t a(u)du} + \int_0^t \mid a(s)(H\varphi)(s) \mid e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\leq (1 + \mid \frac{c(0)}{1-r'(0)} \mid) \mid \psi \mid e^{-\int_s^t a(u)du} + \frac{2L}{J} \int_0^t \mid a(s) \mid e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\leq L(1 + \mid \frac{c(0)}{1-r'(0)} \mid) + \frac{2L}{J} \leq L. \end{aligned}$$

Alors BS_ψ est bornée par L. ■

Lemme 3.1.5 *Si les hypothèses (3.13)-(3.17) et (3.19) sont vérifies. Pour A, B définies dans (3.8) et (3.9), si $\forall \varphi, \phi \in S_\psi$, alors*

$$\mid B\varphi + A\phi \mid < L.$$

Preuve. En utilisant les définitions (3.8),(3.9), puis en appliquant (3.13)-(3.17) on trouve :

$$\begin{aligned}
\mid (B\varphi)(t) + (A\phi)(t) &\leq (1+\mid \frac{c(0)}{1-r'(0)} \mid) \parallel \psi \parallel e^{-\int_0^t a(u)du} + \alpha_0 L \\
&+ L\int_0^t \mid \mu(s) \mid e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
&+ \int_0^t (K_1+K_2) \mid b(s) \mid L e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \frac{2L}{J}\int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} \\
&\leq (1+\mid \frac{c(0)}{1-r'(0)} \mid) \parallel \psi \parallel + (\alpha_0+\beta+\delta)L + \frac{2L}{J} \\
&\leq (1+\mid \frac{c(0)}{1-r'(0)} \mid) \parallel \psi \parallel + \frac{L}{J} + \frac{2L}{J}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si en choisissant une fonction initiale ψ avec une amplitude assez réduite, disant $\parallel \psi \parallel < \gamma$, alors, de l'inégalité précédente et faisant référence à (3.18), on obtient

$$\mid (B\varphi)(t) + (A\phi)(t) \mid \leq (1 + (\mid \frac{c(0)}{1-r'(0)} \mid)\gamma + \frac{3L}{J} \leq L.$$

■

Lemme 3.1.6 *Sous les hypothèses (3.10)-(3.16) et (3.20)-(3.22) sont vérifiés. Alors l'application A définie par (3.8) est continue et compacte sur S_ψ.*

Preuve. Soit $\varphi, \phi \in S_\psi$, alors

$$\begin{aligned}
\mid (A\varphi)(t) - (A\phi)(t) \mid &\leq \{\alpha_0 \mid \varphi(t-r(t)) - \phi(t-r(t)) \mid \\
&+ \mid \int_0^t b(s)[G(\varphi(s),\varphi(s-r(s))) - G(\phi(s),\phi(s-r(s)))] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \mid \\
&+ \mid \int_0^t \mu(s)[\varphi(s-r(s)) - \phi(s-r(s))] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \mid\} \\
&\leq \alpha_0 \parallel \varphi - \phi \parallel + \int_0^t (K_1+K_2) \mid b(s) \mid\parallel \varphi-\phi \parallel e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
&+ \parallel \varphi - \phi \parallel \int_0^t \mid \mu(s) \mid e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
&\leq (\alpha_0+\beta+\delta) \parallel \varphi - \phi \parallel \int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
&\leq (\alpha_0+\beta+\delta) \parallel \varphi - \phi \parallel \leq \frac{1}{J} \parallel \varphi - \phi \parallel .
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Définisons $\eta = \varepsilon J$. Alors pour $\parallel \varphi - \phi \parallel \leq \eta$, on obtient

$$\parallel A\varphi - A\phi \parallel \leq \frac{1}{J} \parallel \varphi - \phi \parallel \leq \varepsilon.$$

Alors A est continue.

Maintenant, on va montrer A est compact. Soient $\varphi \in S_\psi$ et $0 \leq t_1 < t_2$. Alors

$$\mid (A\varphi)(t_2) - (A\varphi)(t_1) \mid \quad \leq \mid \frac{c(t_2)}{1-r'(t_2)} \varphi(t_2) - r(t_2)) - \frac{c(t_1)}{1-r'(t_1)} \varphi(t_1 - r(t_1)) \mid$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad | \int_0^{t_2} \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds \\
&- \quad \int_0^{t_1} \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}ds \ | \\
&+ \quad | \int_0^{t_2} b(s)G\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds \\
&- \quad \int_0^{t_1} b(s)G\varphi(s-r(s))e^{\int_s^{t_1} a(u)du}ds \ | \, .
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Par les hypothèses (3.11)-(3.12), on obtient

$$\begin{aligned}
& \quad | \alpha(t_2)\varphi(t_2-r(t_2)) - \alpha(t_1)\varphi(t_1-r(t_1)) \ | \\
&= \ | \alpha(t_2)\varphi(t_2-r(t_2)) + \alpha(t_2)\varphi(t_1-r(t_1)) - \alpha(t_2)\varphi(t_1-r(t_1)) - \alpha(t_1)\varphi(t_1-r(t_1)) \ | \\
&\leq \ | \alpha(t_2) \ || \ \varphi(t_2-r(t_2)) - \varphi(t_1-r(t_1)) + | \ \alpha(t_2)-\alpha(t_1) \ || \ \varphi(t_2-r(t_2)) - \varphi(t_1-r(t_1)) \ | \\
&\leq \ \alpha_0 k \ | \ (t_2-t_1) - (r(t_2)-r(t_1)) \ | + Lk_3 \ | \ t_2-t_1 \ | \\
&\leq \ (\alpha_0 k + \alpha_0 k k_2 + Lk_3) \ | \ t_2-t_1 \ |,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

où k est constant de Lipschitz pour φ. Par les hypothèses (3.10) et (3.13) on obtient

$$\begin{aligned}
& \quad | \int_0^{t_2} \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds - \int_0^{t_1} \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}ds \ | \\
&= \ | \int_0^{t_1} \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}(e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du} - 1)ds + \int_{t_1}^{t_2} \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds \ | \\
&\leq \ L \ | \ (e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du} - 1) \ | \int_0^{t_1} \delta a(s)e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} + L\int_{t_1}^{t_2} | \ \mu(s) \ | \ e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds \\
&\leq \ L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + L\int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}d(\int_{t_1}^{s} | \ \mu(v) \ | \ dv) \\
&\leq \ L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + L\{[e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} \int_{t_1}^{s} | \ \mu(v) \ | \ dv]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} a(s)e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} \int_{t_1}^{s} | \ \mu(v) \ | \ dvds\} \\
&\leq \ L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + L\int_{t_1}^{t_2} | \ \mu \ | \ ds(1 + \int_{t_1}^{t_2} a(s)e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds) \\
&\leq \ L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + 2L\int_{t_1}^{t_2} | \ \mu \ | \ ds \qquad (3.31) \\
&\leq \ L\delta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + 2L\delta\int_{t_1}^{t_2} a(s)ds \\
&\leq \ 3L\delta k_1 \ | \ t_2-t_1 \ | \, .
\end{aligned}$$

De même, par (3.10) et (3.14) nous déduisons

$$| \int_0^{t_2} b(s)G(\varphi(s),\varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds - \int_0^{t_1} b(s)G(\varphi(s),\varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}ds \ |$$

$$\begin{aligned}
&= \mid \int_0^{t_1} b(s)G(\varphi(s),\varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}(e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du}-1)ds \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} b(s)G(\varphi(s),\varphi(s-r(s)))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds \mid \\
&\leq L \mid e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du}-1 \mid \int_0^{t_1} \beta a(s)e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} + (K_1+K_2)L\int_{t_1}^{t_2} \mid b(s) \mid e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds \\
&\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + (K_1+K_2)L\int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}d(\int_{t_1}^{s} \mid b(v) \mid dv) \\
&\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + (K_1+K_2)L\{[e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}\int_{t_1}^{s} \mid b(v) \mid dv]_{t_1}^{t_2} \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} a(s)e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}\int_{t_1}^{s} \mid b(v) \mid dvds\} \\
&\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + (K_1+K_2)L\int_{t_1}^{t_2} \mid b(s) \mid ds(1+\int_{t_1}^{t_2} a(s)e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds) \\
&\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + 2(K_1+K_2)L\int_{t_1}^{t_2} \mid b(s) \mid ds \\
&\leq L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + 2L\beta\int_{t_1}^{t_2} a(s)ds \\
&\leq 3L\beta k_1 \mid t_1-t_2 \mid .
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ainsi, en remplaçant (3.30)-(3.32) dans (3.29) on obtient

$$\begin{aligned}
\mid A\varphi(t_2)-A\varphi(t_1) \mid &\leq (\alpha_0 k + \alpha_0 k k_2 + Lk_3) \mid t_2-t_1 \mid + 3L\delta k_1 \mid t_2-t_1 \mid + 3L\beta k_1 \mid t_2-t_1 \mid \\
&\leq K \mid t_2-t_1 \mid .
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Pour une certaine constante $K > 0$. Ceci montre que $A\varphi$ est lipschitzienne si φ et AS_ψ est équicontinue. Aussi, on remarquons que pour une fonction arbitraire $\varphi \in S_\psi$ on aura

$$\begin{aligned}
\mid A\varphi(t) \mid &\leq \mid \frac{c(t)}{1-r'(t)}\varphi(t-r(t)) \mid \\
&+ \int_0^t \mid b(s) \mid\mid G(\varphi(s),\varphi(s-r(s))) \mid e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
&+ \int_0^t \mid \mu(s)\varphi(s-r(s)) \mid e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
&\leq L \mid \alpha(t) \mid + (N_1+N_2)L\int_0^t a(s)[\frac{\mid b(s) \mid}{a(s)}]e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
&+ L\int_0^t a(s)[\frac{\mid \mu(s) \mid}{a(s)}]e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
&:= q(t).
\end{aligned}$$

En raison de (3.20) et (3.22) et en adaptant une méthode analogue à celle utilisée pour l'application A on voit que $q(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$. Par le Théorème d'Ascoli-Arzelà conclut que l'ensemble AS_ψ réside dans un ensemble compact. ■

Théorème 3.1.1 *[3]. Soit $L > 0$. Supposons que les conditions $(H_1) - (H_3)$, (3.2) et (3.20)-(3.22) sont satisfaites. Si ψ est une fonction initiale assez petite alors il existe une solution $x(t, 0, \psi)$ pour (3.1) satisfaisant $\mid x(t, 0, \psi) \mid \leq L$.*

Preuve. Du lemmes (3.1.4) et (3.1.6) on a A est bornée par L, Lipschitzienne donc, A envoie S_ψ dans S_ψ. De lemme (3.1.5) et (3.15), on a pour des fonctions arbitraires

$$\varphi, \phi \in S_\psi, \; B\varphi + A\psi \in S_\psi,$$

car $B\varphi$ et $A\psi$ sont Lipschitziennes, $A\phi + B\varphi$ bornées par L. De lemme (3.1.6), on a démontré que A est continue et AS_ψ réside dans un ensemble compact. Ainsi, toutes les conditions du Théorème (2.2.2) sont satisfaites. Par conséquent, il existe une solution pour (3.1) vérifiant $\mid x(t, 0, \psi) \mid \leq L$. ■

3.1.3 La stabilité

Définition 3.1.2 *[15]. La solution triviale $x = 0$ de (3.1) est dite stable en $t = 0$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\psi : [m_0, 0] \to (-\delta, \delta) \Rightarrow \mid x(t) \mid < \varepsilon \quad \textit{pour } t \geq m_0.$$

Définition 3.1.3 *[15]. La solution triviale $x = 0$ de (3.1) est dite asymptotiquement stable si elle est stable en $t = 0$ et si il existe $\delta > 0$ tel que pour toute les fonctions continue $\psi : [m_0, 0] \to (-\delta, \delta)$, la solution $x(t)$ avec $x(t) = \psi(t)$ converge vers 0 comme $t \to \infty$.*

Théorème 3.1.2 *[3]. Si toutes les conditions du Théorème (3.1.1) sont vérifiées, alors la solution zéro de (3.1) est stable.*

Preuve. On va démontrer la stabilité de la solution zéro en $t_0 = 0$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$ un nombre tel que $0 < \varepsilon < L$. Maintenant, on va construire un sous-ensemble de S_ψ en ajoutant la condition $\varphi(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$, donc pour tout $t \in [m_0, \infty)$ soit :

$$M_\psi := \{\varphi \in S_\psi, \mid \varphi(t) \mid \leq \varepsilon, \varphi(t) = \psi(t) \quad \text{si } t \in [m_0, 0] \text{ et } \varphi(t) \to 0 \text{ si } t \to \infty\}.$$

Définissons A, B sur M_ψ, comme dans (3.8), (3.9). On vérifie aisément que, si $\varphi \in M_\psi$ alors $\mid (A\varphi)(t) \mid \leq \varepsilon$ et que B est une contraction large sur M_ψ, on vérifie que pour

$$\varphi, \phi \in M_\psi, \mid (B\varphi)(t) + (A\phi)(t) \mid \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \mid (B\varphi)(t) \mid < \varepsilon.$$

M_ψ est équicontinue. AM_ψ réside dans un sous ensemble compact de M_ψ. Aussi, l'application $A : M_\psi \to M_\psi$ est continue. De plus, pour A, B définies dans (3.8) et (3.9) on va montrer

$$(A\varphi)(t) \to 0 \ \text{ et } (B\varphi)(t) \to 0 \text{ si } t \to \infty.$$

Soit $\varphi \in S_\psi$ un élément fixé. On démontre que $(A\varphi)(t) \to 0$ si $t \to \infty$. Il est clair que, due aux conditions $t - r(t) \to \infty$ si $t \to \infty$ de (3.19) et (3.15), le premier terme sur le coté droit de A tends vers 0 lorsque $t \to \infty$.
C'est à dire

$$\mid \frac{c(t)}{1 - r'(t)} \varphi(t - r(t)) \mid \leq \alpha_0 \mid \varphi(t - r(t)) \mid \to 0 \ \text{ quand } t \to \infty.$$

Il reste à montrer que les deux autres termes intégraux de A tendent vers 0 lorsque $t \to \infty$. Vers cela, soit $\varepsilon > 0$. Il existe T tel que $\mid \varphi(t - r(t)) \mid < \varepsilon$ pour $t \geq T$. Alors on a

$$\begin{aligned}
&\mid \int_0^t \mu(s)\varphi(s - r(s)) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \mid \\
&\leq \int_0^T \mid \mu(s)\varphi(s - r(s)) \mid e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \int_T^t \mid \mu(s)\varphi(s - r(s)) \mid e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
&\leq L e^{-\int_T^t a(u)du} \int_0^T \mid \mu(s) \mid e^{-\int_s^T a(u)du} ds + \varepsilon \int_T^t \mid \mu(s) \mid e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
&\leq L\delta e^{-\int_T^t a(u)du} + \varepsilon\delta.
\end{aligned}$$

Le terme $L\delta e^{-\int_T^t a(u)du}$ est, lorsque $t \to \infty$, arbitrairement petit due à la condition (3.19). Le terme intégral restant de A converge vers zéro par une procédure similaire.
Pour prouver que $(B\varphi)(t) \to 0$ si $t \to \infty$ où B définie par (3.9). Il est clair que le terme

$$[\psi(0) - \frac{c(0)}{1 - r'(0)} \psi(-r(0))] e^{-\int_s^t a(u)du} \to 0, \quad \text{car} \quad e^{-\int_s^t a(u)du} \to 0 \ \text{ quand } t \to \infty.$$

Pour le deuxième terme, on a

$$\frac{d}{ds}(e^{-\int_s^t a(u)du}) = a(s) e^{-\int_s^t a(u)du},$$

alors

$$\int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} = [e^{-\int_s^t a(u)du}]_0^t = 1 - e^{-\int_0^t a(u)du} \leq 1,$$

et par (3.17) on obtient

$$\int_0^t a(s)(H\varphi)(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds \leq \frac{2L}{J},$$

pour $\frac{2L}{J}$ est suffisamment petit, le terme

$$\int_0^t a(s)(H\varphi)(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds \to 0 \quad \text{quand } t \to \infty.$$

Alors B tend vers zero si t tend vers l'infinie.

D'après le théorème (3.1.2) les conditions du théorème (2.2.2) sont vérifiées sur M_ψ, par suite il existe un point fixe qui résoud (3.1) et qui appartient à M_ψ, donc la solution de (3.1) est stable. ■

3.2 L'existence et l'unicité d'une équation différence à retard et Solutions périodiques

Définition 3.2.1 *[9] Une équation de différence est une équation dans laquelle la quantité inconnue est une fonction f, satisfaisant*

$$x(t+1) - x(t) = f(x),$$

Dans la notation plus mathématique

$$\Delta x = f(x).$$

Définition 3.2.2 *une matrice $A(.)$ est dite non singuliére s'elle est inversible. Par conséquent, un système des équations représenté par une matrice non singuliére admet de solution unique, car on peut l'inverser.*

Définition 3.2.3 *[9]. si la matrice $A(.)$ est périodique de période T, est non critique par rapport á T, si elle n'est pas de solution périodique de période T, sauf la solution triviale $x = 0$.*

Dans cette application, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution périodique de l'équation suivant :

$$\Delta x(n) = A(n)x(n-\tau), \tag{3.34}$$

l'équation (3.34) est appellée une équation de différence neutre non linéaire à retard.
où $A(.)$ est une matrice de $\mathbb{R}^{s\times s}$ non singulier et τ est une constant positive. De plus Δ est la différence entre $x(n+1)$ et $x(n)$, c'est à dire

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n),$$

pour toute suite $\{x(n), n = 0, 1, 2, ...\}$. Ainsi, on définit la application E sous la forme suivante :

$$Ex(n) = x(n+1).$$

Supposons il existe une matrice $G(n)$ non singulier de classe $s \times s$ telle que

$$\Delta x(n) = G(n)x(n) - \Delta_n \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k) + [A(n) - G(n-\tau)]x(n-\tau). \tag{3.35}$$

Lemme 3.2.1 *[14]. l'équation (3.34) est équivalente à l'équation (3.35).*

Preuve. En prenant la différence par rapport à n du terme de sommation dans (3.35) on obtient

$$\Delta_n \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k) = G(n)x(n) - G(n-\tau)x(n-\tau). \tag{3.36}$$

La substitution (3.36) dans (3.35) donne

$$\begin{aligned} \Delta x(n) &= G(n)x(n) - G(n)x(n) - G(n-\tau)x(n-\tau) + [A(n) - G(n-\tau)]x(n-\tau) \\ &= A(n)x(n-\tau). \end{aligned}$$

■

Maintenant, pour $T \geq 1$, on définit l'ensemble

$$P_T = \{x(n+T) = x(n)\}.$$

Où P_T l'ensemble de toutes les suites $\{x(n), n = 0, 1, 2, ...\}$ de s-vecteur, périodique de période T. De plus $(P_T, \| \,.\, \|)$ est un espace de Banach muni de la norme supremum

$$\| x(.) \| = \max_{n\in[0,T-1]} |x(n)|,$$

oú $|\,.\,|$ noté la norme de l'infini pour $x \in \mathbb{R}^s$, en suite on définit la norme de A par :

$$|A| = \max_{1\leq i\leq s} \sum_{j=1}^{s} |a_{ij}|.$$

Où A est une matrice $s \times s$ reél.

Soit la systéme linéaire

$$\Delta x(n) = G(n)x(n), \tag{3.37}$$

Supposons (3.37) est non critique. Il est clair la matrice fondamentale de (3.37) vérifié les propriétés suivantes :

1. $det\ \Phi(n) \neq 0$.
2. Il existe une matrice constant B telle que
$$\Phi(n - T + 1) = \Phi(n + 1)B^{-T}.$$
3. Le système (3.37) est non critique si et seulement si $det\ (I - \Phi(n)) \neq 0$.

De plus, supposons

$$A(n + T) = A(n),\ G(n + T) = G(n). \tag{3.38}$$

Lemme 3.2.2 *Pour les fonctions y(n) et z(n) de la variable réelle n, on a*

$$\Delta(y(n)z(n)) \;=\; Ey(n)\Delta z(n) + [\Delta y(n)]z(n). \tag{3.39}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\Delta(y(n)z(n)) &= y(n+1)z(n+1) - y(n)z(n)\\ &= y(n+1)z(n+1) - y(n+1)z(n) + y(n+1)z(n) - y(n)z(n)\\ &= y(n+1)[z(n+1) - z(n)] + [y(n+1) - y(n)]z(n)\\ &= Ey(n)\Delta z(n) + [\Delta y(n)]z(n).\end{aligned}$$

■

Lemme 3.2.3 *supposons (3.38) est vérifié et* $\Phi(0) = I$. *Si* $x(n) \in P_T$ *alors x(n) est une solution de (3.34) si et seulement si*

$$\begin{aligned}x(n) &= \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k)\\ &+ \Phi(n)(\Phi^{-1}(T) - I)^{-1}\sum_{u=n}^{n+T-1}[A(u)x(u-\tau) - G(u)\sum_{k=n-\tau}^{u-1} G(k)x(k)\\ &- G(u-\tau)x(u-\tau)].\end{aligned} \tag{3.40}$$

Preuve. Soit $x \in P_T$ une solution de (3.34) et $\Phi(n)$ est une matrice fondamentale de solutions pour (3.35). Réécrire l'équation (3.34) comme suit :

$$\begin{aligned}\Delta[x(n) + \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k)] &= G(n)[x(n) \sum_{K=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k) \\ &- G(n) \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k) + A(n)x(n-\tau) \\ &- G(n-\tau)x(n-\tau).\end{aligned}$$

Puisque $\Phi(n)\Phi^{-1}(n) = I$, il en résulte de lemme (3.2.2)

$$\begin{aligned}0 &= \Delta(\Phi(n)\Phi^{-1}(n)) = \Phi(n+1)\Delta\Phi^{-1}(n) + [\Delta\Phi(n)]\Phi^{-1}(n) \\ &= \Phi(n+1)\Delta\Phi^{-1}(n) + [G(n)\Phi(n)]\Phi^{-1}(n) \\ &= \Phi(n+1)\Delta\Phi^{-1}(n) + G(n).\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\Delta\Phi^{-1}(n) = -\Phi^{-1}(n+1)G(n).$$

Si $x(n)$ est une solution de (3.34) avec $x(0) = x_0$, alors

$$\begin{aligned}&\Delta[\Phi^{-1}(n)(x(n) + \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k))] \\ &= \Phi^{-1}(n+1)\Delta(x(n) + \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k)) \\ &+[\Delta\Phi^{-1}(n)][x(n) + \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k)] \\ &= \Phi^{-1}(n+1)[G(n)x(n) + \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k)] \\ &-G(n) \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k) + A(n)x(n-\tau) - G(n-\tau)x(n-\tau)] \\ &-[\Phi^{-1}(n+1)G(n)][x(n) + \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(uk)x(k)] \\ &= \Phi^{-1}(n+1)[A(n)x(n-\tau) - G(n) \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k) \\ &-G(n-\tau)x(n-\tau)].\end{aligned}$$

La sommation de l'équation ci-dessus de 0 á $n-1$ donne

$$x(n) \;=\; -\sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k) + \Phi(n)(x_0 + \sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k))$$

$$-\Phi(n) + \sum_{u=0}^{n-1} \Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau) - G(u) \sum_{k=u-\tau}^{u-1} G(k)x(k)$$
$$-G(u-\tau)x(u-\tau)]. \tag{3.41}$$

Puisque $x(T) = x_0 = x(0)$, en utilisant (3.41) on obtient

$$x(0) + \sum_{k=-\tau}^{-1} G(k)x(k)$$
$$= (I - \Phi(T))^{-1} \sum_{u=0}^{T-1} \Phi(T)\Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau) - G(u) \sum_{k=u-\tau}^{u-1} G(k)x(k)$$
$$-G(u-\tau)x(u-\tau)]. \tag{3.42}$$

La substitution de (3.42) dans (3.41) donne

$$\begin{aligned} x(n) &= -\sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k) \\ &+\Phi(n)(I-\Phi(T))^{-1} \sum_{u=0}^{T-1} \Phi(T)\Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau) - G(u) \sum_{k=u-\tau}^{u-1} G(k)x(k) \\ &+G(u-\tau)x(u-\tau)] \\ &+\Phi(n) \sum_{u=0}^{n-1} \Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau) - G(u) \sum_{k=u-\tau}^{u-1} G(k)x(k) \\ &+G(u-\tau)x(u-\tau)]. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Maintenant, on va montrer que (3.43) est équivalent á (3.40), de puisque

$$(I - \Phi(T))^{-1} = (\Phi(T)(\Phi(T)^{-1} - I))^{-1} = (\Phi^{-1}(T) - I)^{-1}\Phi^{-1}(T).$$

Alors, les équations (3.43) de vient

$$\begin{aligned} x(n) &= -\sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k) + \Phi(n)(\Phi(T)^{-1} - I)^{-1} \textstyle\sum_{u=0}^{T-1} \Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau) \\ &+G(u) \sum_{k=u-\tau}^{u-1} G(k)x(k) - G(u-\tau)x(n-\tau)] \\ &+\Phi(n) \sum_{u=0}^{n-1} \Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau) - G(u) \sum_{k=u-\tau}^{u-1} G(k)x(k)) - G(u-\tau)x(u-\tau) \\ &= -\sum_{k=u-\tau}^{u-1} G((k)x(k)) + \Phi(n)(\Phi^{-1}(T) - I)^{-1} \Big\{ \sum_{u=0}^{T-1} \Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau) \\ &-G(u) \textstyle\sum_{k=u-\tau}^{u-1} G(k)x(k) - G(u-\tau)x(u-\tau)] \Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{k=u-\tau}^{u-1} G(k)x(k) \\
&+\Phi(n)(\Phi^{-1}(T)-I)^{-1}\{\sum_{u=0}^{T-1}\Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau)-G(u)\sum_{k=u-\tau}^{u-1}G(k)x(k) \\
&-G(u-\tau)x(u-\tau)]\} \\
&+\sum_{u=0}^{n-1}\Phi^{-1}(T)\Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau)-G(u)\sum_{k=u-\tau}^{u-1}G(k)x(k)-G(u-\tau)x(u-\tau)]\}.
\end{aligned}$$

Si on pose $u=s-T$, d'expression ci-dessus donne

$$\begin{aligned}
x(n) &= -\sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)x(k) \\
&+ \Phi(n)(\Phi^{-1}(T)-I)^{-1}\{\sum_{u=n}^{T-1}\Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau)-G(u)\sum_{k=u-\tau}^{u-1}G(k)x(k) \\
&- G(u-\tau)x(u-\tau)] \\
&+ \sum_{s=T}^{n+T-1}\Phi^{-1}(T)\Phi^{-1}(s-T+1)[A(s-T)x(s-T-\tau) \\
&- G(s-T)\sum_{k=s-T-\tau}^{s-T-1}G(k)x(k)-G(s-T-\tau)x(s-T-\tau)]\}. \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

par la propriété (2) on a

$$\Phi(n-T+1)=\Phi(n+1)B^{-T} \text{ et } \Phi^{-1}(T)\Phi^{-1}(s-T+1)=\Phi^{-1}(s+1).$$

Par conséquent, l'équation (3.44) on obtient

$$\begin{aligned}
x(n) &= -\sum_{k=n-\tau(n)}^{n-1} G(k)x(k) \\
&+\Phi(n)(\Phi(T)^{-1}-I)^{-1}\{\sum_{u=n}^{T-1}\Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau)-G(u)\sum_{k=u-\tau}^{u-1}G(k)x(k) \\
&-G(u-\tau)x(u-\tau)] \\
&+\sum_{u=T}^{n+T-1}\Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau)-G(u)\sum_{k=u-\tau}^{u-1}G(k)x(k) \\
&-G(u-\tau)x(u-\tau)] \\
&= \sum_{k=u-\tau}^{u-1} G(k)x(k) \\
&+\Phi(n)(\Phi^{-1}(T)-I)^{-1}\sum_{u=n}^{n+T-1}\Phi^{-1}(u+1)[A(u)x(u-\tau)-G(u)\sum_{k=u-\tau}^{u-1}G(k)x(k) \\
&-G(u-\tau)x(u-\tau)].
\end{aligned}$$

■

3.2.1 Existence et l'unicité de la solution périodque

Dans cette section, On va appliqué le théorème du point fixe de Krasnoselskii pour montrer l'existence de (3.34). l'application obtient est la somme de deux applications, une est compacte et l'autre est une contraction. Pour cela, on définit l'application H par :

$$\begin{aligned}(H\varphi)(n) &= \sum_{u=n-\tau}^{n-1} G(k)\varphi(k) \\ &+ \Phi(n)(\Phi^{-1}(T)-I)^{-1}\sum_{u=n}^{n+T-1}\Phi^{-1}(u+1)[A(u)\varphi(u-\tau) \\ &- G(u)\sum_{k=u-\tau}^{u-1} G(k)\varphi(k) - G(u-\tau)\varphi(u-\tau)]. \qquad (3.45)\end{aligned}$$

Il est clair que $H : P_T \to P_T$, par la façan dont il a été construit dans lemme (3.23). Maintenant, on définit $C, B : P_T \to P_T$ par :

$$(B\varphi)(n) = -\sum_{k=n-\tau}^{n-1} G(k)\varphi(k). \qquad (3.46)$$

$$\begin{aligned}(C\varphi)(n) &= \Phi(n)(\Phi^{-1}(T)-I)^{-1}\sum_{u=n}^{n+T-1}\Phi^{-1}(u+1)[A(u)\varphi(u-\tau) \\ &-G(u)\sum_{k=u-\tau}^{u-1} G(k)\varphi(k) - G(u-\tau)\varphi(u-\tau)]. \qquad (3.47)\end{aligned}$$

Il résulte de (3.46) et (3.47) pour que $(H\varphi)(n) = (C\varphi)(n) + (B\varphi)(n)$.

Lemme 3.2.4 *Supposons les hypothèses de lemme (3.2.3) sont vérifiées. Si C est définie par (3.47), alors C est continue et l'image de C est contenue dans un ensemble compact.*

Preuve. Soit J est une constante positive. On définit l'ensemble

$$S = \{\varphi \in P_T : \| \varphi \| \leq J\}.$$

Soit $\varphi, \psi \in P_T$. Donnant un $\varepsilon > 0$, et on pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{N}$ où

$$N = rT(| A | + | G |^2 \tau + | G |),$$

et

$$r = \max_{n\in[0,T]}\left(\max_{n\leq u\leq n+T-1} | [\Phi(u+1)(\Phi^{-1}(T)-I)\Phi^{-1}(n)]^{-1} |\right). \qquad (3.48)$$

Maintenant pour $\| \varphi - \psi \| < \delta$, on obtient

$$\begin{aligned} \| C\varphi(.) - C\psi(.) \| &\leq r\sum_{u=0}^{T-1}[\mid A \mid \| \varphi - \psi \| + \mid G \mid^2 \tau \| \varphi - \psi \| + \mid G \mid \| \varphi - \psi \| \\ &\leq N \| \varphi - \psi \| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors C est continue.

En suite, nous montrons que l'image de C est contenu dans un ensemble compact. Il est clair, S est une sous ensemble de $\mathbb{R}$ qui est fermé et borné, alors compact. D'où C est continue dans φ est contenu donc un ensemble compact. Par conséquent $C(S)$ est compact. ■

Lemme 3.2.5 *Supposons que*

$$\mid G \mid \tau < 1,$$

alors B est une contraction. Et $\| B\varphi \| \leq J$.

Preuve. Soit B défini par (3.46). Alors pour $\varphi, \psi \in P_T$, on a

$$\begin{aligned} \| B\varphi(.) - B\psi(.) \| &= \max_{n\in[0,T-1]} \mid B\varphi(n) - B\psi(n) \mid \\ &\leq \tau \mid G \mid \| \varphi - \psi \| . \end{aligned}$$

Donc B est contraction.

En suit, on prouve que B est borné

$$\begin{aligned} \| B\varphi \| &= \max_{n\in[0,T-1]} \mid B\varphi(n) \mid \\ &\leq \tau \mid G \mid \| \varphi \| \\ &\leq \| \varphi \| \leq J. \end{aligned}$$

D' où B est borné par J. ■

Théorème 3.2.1 *[14]. Supposons que les hypothèses des lemmes (3.2.4), (3.2.5) et l'équation (3.38) sont vérifiés. Soit r donné par (3.48). De plus, soit γ une constante positive et inférieur à J satisfait*

$$rT[\mid A \mid + \mid G \mid^2 + \mid G \mid]\gamma + \tau \mid G \mid \gamma \leq \gamma. \tag{3.49}$$

Alors l'équation (3.34) admet une solution de T-périodique unique dans S.

Preuve. Maintenant, on va montrer que $\parallel C\varphi \parallel \leq J$.

$$\begin{aligned}
\parallel C\varphi \parallel &\leq (rT[\mid A \mid + \mid G \mid^2 + \mid G \mid]) \parallel \varphi \parallel \\
&\leq rT[\mid A \mid + \mid G \mid^2 + \mid G \mid]\gamma \\
&\leq \gamma \\
&\leq J.
\end{aligned}$$

D'autr part, d'après le lemme (3.2.4), C est continue et CS est contenu dans un ensemble compact. En outre, du lemme (3.2.5), l'application B est une contraction et remarquons que $B : P_T \to P_T$. En suite, on montre que si $\varphi, \psi \in S$, on a $\parallel C\varphi + B\psi \parallel \leq \gamma$. Soit $\varphi, \psi \in S$ avec $\parallel \varphi \parallel, \parallel \psi \parallel \leq \gamma$. Alors

$$\begin{aligned}
\parallel C\varphi + B\psi \parallel &\leq r\sum_{u=0}^{T-1}[|A| \parallel \varphi \parallel |A\tau \mid G \mid^2 \parallel \varphi \parallel + \mid G \mid \parallel \varphi \parallel] + \sum_{k=n-\tau}^{n-1} \mid G \mid \parallel \psi \parallel \\
&\leq rT[\mid A \mid + \mid G \mid^2 + \mid G \mid]\gamma + \tau \mid G \mid \gamma \leq \gamma.
\end{aligned}$$

Clairement, toutes les hypothèses du théorème de Krasnoselskii sont satisfaites. Alors, il existe un point fixe $z \in S$ tel que $z = Bz + Cz$.
D'après le lemme (3.2.3) ce point fixe est une solution de (3.34). Par conséquent (3.34) admet une solution de T-périodique.
Pour l'unicité, l'équation (3.49)implique :

$$rT[\mid A \mid + \mid G \mid^2 + \mid G \mid] + \tau \mid G \mid < 1.$$

soit l'application H donnée par (3.45). Pour $\varphi, \psi \in P_T$, on obtient

$$\parallel H\varphi(.) - H\psi(.) \parallel \leq (rT[\mid A \mid + \mid G \mid^2 + \mid G \mid] + \tau \mid G \mid) \parallel \varphi - \psi \parallel \leq \parallel \varphi - \psi \parallel .$$

Par l'application de principe de contraction, l'équation (3.35) admet une solution de T-périodique unique. ■

Conclusion générale et perspectives

La théorie du point fixe c'est l'un des outils intéressantes en mathématique et qui découvre l'existence des solutions dans des différents types des équations, particulièrement dans l'analyse non linéaire.

Dans ce mémoire, nous avons essayé d'apporter aux mains des futurs étudiants se prêtant à se former en le théorème du point fixe contemporaine, un exposé concis groupant l' essentiel le théorème du point fixe de Krasnoselskii et généralisation leur rôles pour trouver la solution de certains problèmes mathématiques et des autres. En particulier nous intéressons à l'étude de le théorème du point fixe de Krasnoselskii tout en lui attribuant l'aspect pratique.

En premier lieu, nous avons rappelé quelques définitions de base, puis nous avons présenté certaines propriétés importantes concernant notre travail.

Le deuxième point, a fait l'objet le théorème du point fixe de Krasnoselskii, qui est le centre d'intérêt de notre mémoire, un cas spécial, nous avons mis l'accent nouvelles notions comme la contraction large et separée, et l'existence de ces notions dans le théorème de Krasnoselskii.

A la fin, nous avons appliqué ce théorème en un problème d'équations différentielles et les équations de différence à retard pour l'existence, l'unicité et parfois la stabilité.

Jusqu'à maintenant, le développement de ce théorème est persiste, donc on va voir des autres notions et leurs rôles à la théorie du point fixe tel que les applications non expansives ou pseudocontractives, qu'il est mis en recherche.

Finalement, nous souhaitons à notre étudiants la continuité du recherche dans cet objet et essayez de le développer et devenir plus généralisé pour solution des plusieurs problèmes scientifiques.

Bibliographie

[1] M. Adivar, M. N. Islam and Y. N. Raffoul, *Separate contraction and existence of periodic solutions intotally nonlinear delay differential equations*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, (2012), 1-13.

[2] A. Ardjouni, A. Djoudi, *Existence and positivity of solutions for totally nonulinear neutral periodic differential equation*, Misk. Mathe. Notes, 14 (2013), 757-768.

[3] A. Ardjouni, I. Derrardjia and A. Djoudi, *Stability in totally nonulinear neutral differntial equations with variable delay*, Acta Math. Univ. Comenianae, (2014), 119-134.

[4] T. A. Burton, *A fixed-point theorem of Krasnoselskii*, Dept of Maths, Southern Illinois University Carbondale, IL 62901, U.S.A. ,1997.

[5] T. A. Burton, *Integral equation implicit functions and fixed points*, Proceedings of the Amer Math Soc, August 1996.

[6] T. A. Burton, *Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations*, Depat of Maths Southern Illinois University Carbondale, Illinois, 1985.

[7] S. Carl, S.Heikkila *Fixed point theory in ordered sets and applications*, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.

[8] I. Derrardjia, *Existence et stabilité par le théorème de point fixe de Krasnoselskii-Burton pour certaines équations différentielles fonctionnelles à retard*, Doctorat (LMD) en Mathématiques, U. Annaba, 2014.

[9] S.Elaydi, *An introduction to difference equations third edition*, Springer Science+Business Media, Inc. 2005.

[10] Y. Liu and Z.Li, *Krasnoselskii type fixed point theorems and applications*, Proc of Amer Math Soc, Volume 136, Number 4, 2008, 1213-1220.

[11] Y. Liu , Z. Li, *Schaefer type theorem and periodic solutions of evolution equations*, J. Math. Anal. Appl. 316. 2006, 237-255.

[12] M. Marel, *la topologie des espaces métriques*, Elsev Scie publ B.V.1988.

[13] F. Paulin, *Topologie, analyse et calcul différentiel*, Cours de 3^{eme} année maths ENS, 2008-2009.

[14] E.Yankson, *Existence and uniqueness of periodic solutions for a system of difference equations with finity delay*, Elect.J. Math.Anal.Appl, J.2015, 193-201.

[15] T. Yoshizawa, *Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions*, Springer-Verlag New York- Heidelberg-Berlin, 1975 .