N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ D'ELOUED

FACULTÉ DESSCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Présenté par: Beggas Samia
Ben Ali Marwa
Sahraoui Djehed

Thème

La fonction Gamma et ses applications

Devant le jury composé de:

Mr. MEDAKHEL Hamza	MC (B) Univ. El-Oued	Président
Mr. GASBA Messaoud	MA (B) Univ. El-Oued	examinateur
Mr. BEN ALI Brahim	MA (A) Univ. El-Oued	Rapporteur

Année universitaire 2013 – 2014

Remerciements

Nous tenons à remercier vivement Monsieur BEN ALI BRAHIM enseignant-chercheur au département de Mathématiques pour avoir accepté diriger ce travail, pour sa gentillesse, son dévouement et ses précieux conseils.

Nous remerçions également nos parents pour leur soutien moral et matériel durant la période de préparation et à tous les amis et proches qui nous ont aidé à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

Introduction générale

La théorie des fonctions spéciales trouve ses origines dans les travaux d'Euler, Gauss, Laplace, Jacobi, Riemann et Tchebychev. Elle est depuis une longue date une discipline des mathématiques, qui s'est profondément enracinée en analyse mathématique, en théorie des fonctions d'une variable complexe, en théorie des représentations des groupes, en physique théorique et mathématique, et qui, de par ses liens avec ces branches, possède un vaste champ d'applications. Les propriétés des fonctions spéciales ont fait l'objet de travaux fondamentaux. Les fonctions spéciales sont toutes considérées comme des solutions particulières de l'équation différentielle d'un certain type apparaissant dans de nombreux problèmes de physique théorique et de mathématique. Grace à une généralisation assez évidente de la formule de Rodrigues pour les polynômes de Legendre, on a pu trouver une représentation intégrale unique pour toutes les fonctions spéciales. Ceci a permis de développer d'une façon naturelle et assez concise les principaux faits de la théorie des fonctions sphériques, cylindriques et hypergéométriques, faits dont l'étude nécessitait bien plus de temps et d'efforts. La connaissance des fonctions spéciales est indispensable à la bonne intelligence de nombreuses questions capitales de la physique théorique et de la physique mathématique. D'autre part, à l'époque ou les méthodes numériques s'implantent de plus en plus dans la pratique et le rôle du calcul numérique dans l'expérience ne cesse de croitre, nous assistons au renouveau d'intérêt pour les fonctions spéciales. Ce regain tient à deux circonstances. Premièrement, on est souvent amené, en construisant le modèle mathématique d'un phénomène physique et en recherchant à préciser l'importance relative des différents effets en jeu, à simplifier le problème initial dans la but d'obtenir la solution sous forme analytique se prêtant facilement à l'analyse. Deuxièmement, le problème simplifié facilite le choix d'un algorithme de calcul fiable et économique, bien adapté à la résolution sur l'ordinateur des problèmes complexes. Or il arrive rarement qu'un tel problème se réduise à des fonctions élémentaires. Les fonctions spéciales les plus usitées sont celles que l'on réunit sous le terme de fonctions spéciales de la physique mathématique: les polynômes orthogonaux classiques (polynômes de Jacobi, de Laguerre, d'Hermite etc...), les fonctions sphériques, cylindriques, hypergéométriques. La théorie de ces fonctions et leurs différentes applications font l'objet de nombreux ouvrages de fond. Malheureusement, les autres de ces ouvrages se servent d'un appareil mathématique extrêmement encombrant, ainsi que de toute une série d'artifices particuliers. Le besoin d'une théorie des fonctions spéciales bâtie autour d'une idée maitresse, générale et suffisamment simple, se faisait donc sentir depuis longtemps. La plupart de ces fonctions spéciales sont définies en utilisant la fonction de Euler $\Gamma(x)$. La fonction Gamma joue aussi en théorie des nombres, en théorie des probabilités et en théorie des représentations des groupes.

Dans ce mémoire nous allons présenter, un ensemble de concepts ayant trait aux fonctions spéciales les plus courantes de l'analyse mathématique. Pour chacune d'elles, nous allons d'abord exposer brièvement leurs définitions dans l'ensemble $\mathbb{R}$ avec quelques importantes propriétés. Par la suite, nous allons dégager les formules clefs et les différentes représentations de ces fonctions avant d'aborder leurs prolongements analytiques dans le domaine complexe.

Au premier chapitre, on rassemble quelques notions sur les fonctions spéciales telles que la fonction de Bessel et le polynôme de Legendre et enfin la fonction Bêta.

Au deuxième chapitre, nous introduisons la fonction Gamma, définie sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Ses propriétés, sa convergence, et sa dérivée logarithmique sont également abordées.

Enfin, au troisième chapitre, nous présentons quelques applications de fonction Gamma au calcul des intégrales sphériques et répétées de Dirichlet, l'intégration et la dérivation d'ordre quelconque. On clôture ce mémoire par une conclusion.

Notations et conventions

Γ	La fonction Gamma.
$B(u,v)$	La fonction Bêta.
$\ln$	Le logarithme Nébérien.
J_n	La fonction de Bessel.
$H_m^{(1,2)}$	La fonction de Hankel.
$I_m(x)$	La fonction de Bessel modifiée.
$K_m(x)$	La fonction de Bessel modifiée.
γ	La constante d'Euler.
$\triangle$	Le Laplacien.
Ψ	La dérivée logarithmique de la fonction Γ.
Y_m	La fonction de Neumann.
$\mathbb{R}$	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{C}$	L'ensemble des nombres complexes.
$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
∂	La dérivée partielle.
$Q_n(x)$	Fonction de deusiêmes espèce pour les polynômes orthogonaux classiques.
$p_n(x)$	Polynômes de lagender.

Chapitre 1

Préliminaire sur les fonctions spéciales

Les fonctions spéciales font leur apparition dans de nombreuse problèmes de la Physique et de la Physique mathématique, tels que la conduction de la chaleur, l'interaction rayonnement de matière, la propagation d'ondes électromagnétiques et sonores, la théorie des réacteurs nucléaires, celle de la structure des étoiles...

Dans la pratique, les fonctions spéciales interviennent généralement comme solutions d'équations différentielles: il est donne tout naturel, en se plaçant sur le point de vue de la Physique mathématique, de déduire leurs propriétés directement à partir des équations différentielles qui constituent la définition mathématique du problème posé.

1.1 Fonction de Bessel

En mathématiques, et plus précisément en analyse, les fonction de Bessel, découvertes par le mathématicien suisse Daniel Bernouli, portent le nom du mathématicien allemand Friedrich Bessel. Bessel développa l'analyse de ces fonctions en 1817 dans le cadre de ses études du mouvement des planètes induit par l'interaction gravitationnelle, généralisant les découvertes antérieures de Bernouli. Ces fonctions sont des solution canoniques $Y\left(x\right)$ de l'équation différentielle de Bessel: [6]

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-\alpha^2\right)y=0. \tag{1.1.1}$$

1.1.1 Modélisation dans un domaine circulaire

Divers phénomènes physiques portant sur le disque

$$D = \left\{ \ f(x;y) \ \in \ \mathbb{R}^2; \ x^2+y^2 \leq a, a \ \in \ \mathbb{R}_+ \right\} \tag{1.1.2}$$

comme le déplacement vertical u d'une membrane circulaire ou la propagation de la chaleur u dans un disque, sont modélisés par une équation aux dérivées partielles portant sur la fonction $u(x;y;t)$; $(x;y) \epsilon D$; $t \in \mathbb{R}$ décrivant l'évolution temporelle de l'observable u

$$\frac{-1}{2}\triangle u(x,y,t) = i\hbar\frac{\partial u}{\partial t} + C(x,y)u(x,y,t) \tag{1.1.3}$$

avec une condition sur le bord

$$\partial D = \left\{ f(x;y) \ \in \ \mathbb{R}^2; x^2+y^2 = a \ \right\} \tag{1.1.4}$$

par exemple la condition dite de Dirichlet

$$u(x;y;t) = 0; \qquad (x;y) \in \partial D. \tag{1.1.5}$$

Dans l'équation (1.1.3), $A;B$ sont des constantes et le laplacien $\triangle$ est l'opérateur différentiel $\triangle = \partial_x^2 + \partial_y^2$ en coordonnées cartésiennes, soit

$$\triangle = r^{-1}\partial_r\left(r\partial_r\right) + r^{-2}\partial_\varphi^2 \tag{1.1.6}$$

en coordonnées polaires $(r;\ \varphi)$ avec $(x = rcos\varphi;\ y = rsin\varphi)$.

Les solutions de l'équation (1.1.3) du type $R(r)\ \Phi(\varphi)\ T(t)$, telle que

$$T(t) = \exp(-iEt/\hbar), \qquad \Phi(\varphi) = \exp(in\varphi)$$

vérifient

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{rR} + \frac{\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi r^2} - C(r,\varphi) = -2\frac{i\hbar\frac{dT}{dt}}{T}. \tag{1.1.7}$$

Les variables r; φ; T étant indépendantes, les membres de l'équation précédente sont constants, soit E, d'où les deux équations

$$\frac{i\hbar\frac{dT}{dt}}{T} = -2E \tag{1.1.8}$$

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{rR}+\frac{\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi r^2}=-2E\Leftrightarrow r^2\left[\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{rR}+2E\right]=-\frac{\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}}{\Phi} \tag{1.1.9}$$

$$r^2\left[\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{r}+2ER\right]=LR\ \Leftrightarrow\frac{\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)}{r}+2ER=\frac{LR}{r^2}, \tag{1.1.10}$$

pour $L=n^2$ l'équation (1.1.10) s'écris

$$\frac{d^2R}{dr^2}+r^{-1}\frac{dR}{dr}+\left(2E-n^2r^{-2}\right)R=0 \tag{1.1.11}$$

soit pour la fonction $y(r)=R(r/\sqrt{K})$ l'équation différentielle (1.1.11) s'écris

$$y''+t^{-1}y'+\left(1-n^2t^{-2}\right)y=0 \tag{1.1.12}$$

l'équation (1.1.12) est dite équation de Bessel d'ordre n.

Pour n entier, la fonction de Bessel J_n est définie par une série et est solution de équation différentielle (1.1.12).

Définition 1.1.1 *Soit n entier, la série*

$$J_n(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k} \tag{1.1.13}$$

est absolument convergente pour $t\in\mathbb{C}$ et est solution de l'équation différentielle (1.1.12) pour $t\in\mathbb{R}$. La fonction J_n est appelée fonction de Bessel de première espèce d'ordre n.

Proposition 1.1.1 *Les fonctions de Bessel J_n; $n\geq 1$ vérifient les relations de récurrence J*

$$J_{n-1}(t)+J_{n+1}(t)=\frac{2n}{t}J_n(r) \tag{1.1.14}$$

$$J_{n-1}(t)-J_{n+1}(t)=2J_n'(t) \tag{1.1.15}$$

de plus, $J_0'=-J_1$.

Théorème 1.1.1 *La famille des fonctions de Bessel (J_n) $n\geq 0$ est caractérisée par l'une des deux présentations suivantes*

1. *Les J_n sont donnés par la fonction génératrice*

$$J(x,t)=\exp((x-1/x)/2)=J_0(t)+\sum_{n=1}^{+\infty}J_n(t)\left[x+\left(-x^{-1}\right)\right],\qquad t>0 \tag{1.1.16}$$

2. *La fonction J_n est donnée par la série entière (1.1.13). De plus, la suite (J_n) $n \geq 0$ vérifie la relation de récurrence*

$$tJ_{n-1}(t) = 2nJ_n(r) - tJ_{n+1}(t) \tag{1.1.17}$$

La fonction J_n a comme équivalents aux bornes de l'intervalle $(0; +\infty)$

$$J_n(t) \sim_{t\to 0} \frac{t^n}{2^n n!}, \qquad J_n(t) \sim_{t\to +\infty} \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \cos\left(t - \frac{1}{2}n\pi - \frac{\pi}{4}\right) \tag{1.1.18}$$

Remarque 1.1.1 *Pour $t \in \mathbb{R}$ et en prenant la variable θ telle que $x = e^{i\theta}$, la relation (1.1.16) s'écrit comme un développement en série de Fourier*

$$e^{it\sin\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t)\, e^{in\theta}, \qquad \theta \in \mathbb{R} \tag{1.1.19}$$

Ainsi

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{it\sin\theta - in\theta} d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t\sin\theta - n\theta)\, d\theta \tag{1.1.20}$$

d'après (1.1.20) on a

$$J_{-n}(t) = J_n(-t), \qquad et \quad J_n(-t) = (-1)^n J_n(t), \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{1.1.21}$$

lorsque n non entier égal à ν la fonction $J_{-\nu}$ est une solution de l'équation (1.1.12), et linéairement indépendante à J_ν.

Proposition 1.1.2 *Soit ν un réel, l'équation différentielle (1.1.12) est*

$$y'' + t^{-1}y' + \left(1 - \nu^2 t^{-2}\right) y = 0 \tag{1.1.22}$$

a deux solutions linéairement indépendantes J_ν, Y_ν. Cette seconde est appelée la fonction de Bessel de deuxième espèce. Elles sont définies par

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k} \tag{1.1.23}$$

$$Y_\nu(t) = \frac{J_\nu(t)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(t)}{\sin\nu\pi} \tag{1.1.24}$$

et leurs développements asymptotiques sont

$$J_\nu(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\cos\left(t - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad et\ Y_\nu(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(\sin\left(t - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad t \to +\infty \tag{1.1.25}$$

Définition 1.1.2 *Soit l'équation différentielle*

$$y'' + t^{-1}y' - \left(1 + \nu^2 t^{-2}\right) y = 0 \tag{1.1.26}$$

Les solutions de cette équation sont appelées fonctions de Bessel modifiées. La solution finie à l'origine et notée $I_\nu(t)$, et la seconde solution notée $K_\nu(t)$. Ces fonctions sont reliées par la relation

$$K_\nu(t) = \frac{\pi\left(I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)\right)}{2\sin\nu\pi} \tag{1.1.27}$$

1.1.2 Propriétés

1. Les fonctions $I_\nu(t)$ et $K_\nu(t)$ vérifions les relations de récurrence (1.1.14), (1.1.15), (1.1.21).

2. Si nous prenons l'argument des fonctions de Bessel $J_\nu(t)$ et $H_\nu^{(1)}(t)$ imaginaire, nous obtenons $J_\nu(it) = i^\nu I_\nu(t)$, $K_\nu(t) = \frac{\pi i}{2}(i)^\nu H_\nu^{(1)}(it)$

   ou la fonction $H_\nu^{(1)}(t)$ s'appel fonction de Hankel ou fonction de Bessel de troisième espèce, ainsi la fonction $H_\nu^{(2)}(t)$ est la fonction de Hankel, elle sont définit par

   $$H_\nu^{(1)}(t) = J_\nu(t) + iY_\nu(t), \qquad H_\nu^{(2)}(t) = J_\nu(t) - iY_\nu(t)$$

3. Les woranskiannes des fonctions de Bessel précédente

   $$W\left(J_\nu(t), Y_\nu(t)\right) = 2/\pi t, \qquad W\left(I_\nu(t), K_\nu(t)\right) = 2/t, \qquad W\left(H_\nu^{(1)}(t), H_{\nu\nu}^{(2)}(t)\right) = -4i/\pi t.$$

4. Les expansions asymptotiques, m entier positive

$$\lim_{t\to 0} I_m(t) \to \frac{x^m}{2^m \Gamma(m+1)} \tag{1.1.28}$$

$$\lim_{t\to 0} K_m(t) \to \left\{ \begin{array}{c} -\left[\ln\left(\frac{t}{2}\right) + \gamma\right], m = 0, \\ \frac{\Gamma(m)}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^m, m \neq 0, \end{array} \right\} \tag{1.1.29}$$

$$\text{et} \quad \lim_{x\to\infty} I_m(t) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^t \left[1 + 0\left(\frac{1}{t}\right)\right], \tag{1.1.30}$$

$$\lim_{x\to\infty} K_m(t) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-t} \left[1 + 0\left(\frac{1}{x}\right)\right] \tag{1.1.31}$$

$$H_m^{(1)}(t) \to_{t\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left[i\left(t - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{1.1.32}$$

$$H_m^{(2)}(t) \to_{t\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\left[-i\left(t - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{1.1.33}$$

1.2 Les Polynômes de Legendre

1.2.1 Définition

L'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables est connue sous le nom "équation de Legendre" [7].

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \tag{1.2.1}$$

Ses solutions sont appelées " fonctions de Legendre". Si n est nul ou entier positif, ces fonctions sont appelées "Polynômes de Legendre ". Nos proposition serons limités à ce seul cas.

Remarque 1.2.1 *En Conduction de la chaleur, on rencontre l'équation de Legendre dans les problèmes sphériques à deux dimensions sous la forme*

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dy}{d\theta}\right) + n(n+1)y = 0 \tag{1.2.2}$$

- Nous ne traitons pas ce cas. Mais, en conduction de la chaleur dans les problèmes sphériques à trois dimensions, on rencontre les "Polynômes associés de Legendre " qui satisfont l'équation différentielle

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0 \tag{1.2.3}$$

La solution de l'équation de Legendre (obtenable par la méthode des séries de puissance) s'écrit

$$y = \alpha_0 p_n(x) + \alpha_1 Q_n(x) \quad \text{où} \quad p_n(x) \;\; et \;\; Q_n(x)$$

sont respectivement les Polynômes de Legendre de $1^{ére}$ et de $2^{ème}$ espèces de degré n.

1.2.2 Propriétés

Développements en séries de puissance des polynômes de Legendre [3]

$$p_n(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1.3.5...(n-1)}{2.4.6...n} \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + ... \right] \quad (1.2.4)$$

si n est pair et supérieur ou égal à 2

$$p_n(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1.3.5...n}{2.4.6...(n-1)} \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{4!}x^5 + ... \right] \quad (1.2.5)$$

si n est impair et supérieur ou égal à 3.

Les six premiers de ces polynômes sont

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1 & p_1(x) &= x \\ p_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & p_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3\pi) \\ p_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & p_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^2 - 70x^3 + 15x) \\ &\vdots \\ &\vdots \\ (n+1)p_{n+1}(x) + np_{n-1}(x) &= (2n+1)xp_n(x) & n &= 1, 2, 3.... \\ p_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^2 \right] & & \text{formule de Legendre} \end{aligned}$$

$$\frac{dp_{n+1}(x)}{dx} + \frac{dp_{n-1}(x)}{dx} = (2n+1)p_n(x) \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

$$Q_n(x) = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1.3.5...n}{2.4.6...(n-1)} \left[x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 + ... \right]$$

si n est pair et supérieur ou égal à 2.

$$Q_n(x) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2.4.6...(n-1)}{1.3.5...n} \left[1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 + ... \right]$$

si n est impair et supérieur ou égal à 3.

$$\begin{aligned}
Q_0(x) &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \qquad \text{si } |x|<1 \text{ et } |x|>1 \\
Q_1(x) &= Q_0(x)p_1(x)-1 \\
Q_2(x) &= Q_1(x)p_2(x)-\frac{3}{2}x \\
Q_3(x) &= Q_2(x)p_3(x)-\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{3} \\
&\vdots \\
&\vdots \\
Q_n(x) &= Q_{n-1}(x)p_n(x)-\frac{2n-1}{xn}p_{n-1}(x)-\frac{2n-5}{3(n-1)}p_{n-3}(x)-...
\end{aligned}$$

$|Q_n(\pm 1)| \to \infty$ si bien que, pour $-1 \le x \le 1$, la fonction $Q_n(x)$ ne présente pas de signification physique (le coefficient α_1 est nul).

1.2.3 Orthogonalité des polynômes de Legendre

A partir de l'équation de Legendre, on montre sans peine que

$$f(x)=\sum_{n=0} E_n p_n(x) \qquad \text{pour } -1\le x\le +1 \Rightarrow E_n=\frac{\int_{-1}^{+1} f(x)p_n(x)dx}{\int_{-1}^{+1} p_n^2(x)dx} \tag{1.2.6}$$

Calculons les coefficients E_n

$$\int_{-1}^{+1} f(x)p_n(x)dx=\frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{+1} f(x)\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)dx \tag{1.2.7}$$

Si $f(x)$ et ses n premières dérivées sont continues dans l'intervalle $[-1,+1]$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} f(x)p_n(x)dx &= \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!}\int_{-1}^{+1}\left(x^2-1\right)^n\frac{d^n f(x)}{dx^n}dx \\
&= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{+1}\left(1-x^2\right)^n\frac{d^n f(x)}{dx^n}dx
\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Le cas $f(x)=p_n(x)$ peut être traité simplement, en utilisant la relation $\frac{d^n p_n(x)}{dx^n}=\frac{(2n)!}{2^n n!}$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{+1} p_n^2(x)dx &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\int_{-1}^{+1}\left(1-x^2\right)^n dx=\frac{2}{2n+1} \\
E_n &= \frac{2}{2n+1}\int_{-1}^{+1} f(x)p_n(x)dx
\end{aligned}$$

Donc les coefficients sont

$$E_n = \frac{2n+1}{2^{n+1}n!}\int_{-1}^{+1}\left(1-x^2\right)^n \frac{d^n f(x)}{dx^n}dx \tag{1.2.9}$$

s'écrit alors en remarquant que (1.2.9) ne peut être utilisée que si $f(x)$ et ses n premières dérivées sont continues dans l'intervalle $[-1,+1]$.

On remarquera que $p_n(x)$ est une fonction de paire de x si n est pair et impaire de x si n est impair c-à-d

$$\begin{aligned} E_n &= (2n+1)\int_0^1 f(x)p_n(x)dx \qquad n \text{ pair} \qquad (1.2.10)\\ E_n &= (2n+1)\int_0^1 f(x)p_n(x)dx \qquad n \text{ impair} \end{aligned}$$

1.3 La fonction $B(u,v)$

La fonction Bêta est en même temps une des plus importantes fonctions spéciales. La connaissance de ses propriétés est essentielle pour l'étude des autres fonctions spéciales.

En outre, beaucoup d'intégrales rencontrées en Analyse se laissent exprimer à l'aide de la fonction Gamma. En particulier, les fonctions Gamma permettent d'exprimer l'intégrale qui définit une fonction appelée fonction Bêta.

1.3.1 Définition de la fonction $B(u,v)$

La fonction Bêta $B(u,v)$ est définie par l'expression [1]

$$B(u,v) = \int_0^1 (1-t)^{v-1}t^{u-1}dt, \quad \operatorname{Re} u > 0, \quad \operatorname{Re} v > 0. \tag{1.3.1}$$

On montre que $B(u,v)$ est fonction analytique de chacune des variable u, v pour $\operatorname{Re} v > 0$, $\operatorname{Re} u > 0$.

La fonction Bêta se laisse exprimer à l'aide de la fonction Γ. A cet effet, il suffit de calculer par deux procédés l'intégrale

$$I(u,v) = \int\int e^{-(\xi^2+\eta^2)}\xi^{2u-1}\eta^{2v-1}d\xi d\eta \tag{1.3.2}$$

dans laquelle l'intégration s'étend au domaine $\xi > 0$, $\eta > 0$. D'une part

$$I(u,v) = I(u)I(v). \tag{1.3.3}$$

$$\text{où} \qquad I(u) = \int_0^\infty e^{-\xi^2}\xi^{2u-1}d\xi = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t}t^{u-1}dt = \frac{1}{2}\Gamma(u). \tag{1.3.4}$$

D'autre part, on obtient en passant dans l'expression de $I(u,v)$ aux coordonnées polaires $\xi = r\cos\varphi$, $\eta = r\sin\varphi$

$$\begin{aligned} I(u,v) &= \int_0^\infty e^{-r^2}r2^{u-+2v+1}dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2u-1}\varphi\sin^{2v-1}\varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\Gamma(u+v)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2u-1}\varphi\sin^{2v-1}\varphi d\varphi. \end{aligned} \tag{1.3.5}$$

L'intégrale suivant la variable φ peut être exprimée à l'aide de la fonction Bêta $B(u,v)$ en faisant le changement $\cos^2\varphi = t$

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2u-1}\varphi\sin^{2v-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}B(u,v). \tag{1.3.6}$$

Des deux expressions de $I(u,v)$, on tire finalement

$$B(u,v) = \frac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}. \tag{1.3.7}$$

où $\Gamma(x)$ s'appelle fonction Gamma (qui l'ont étudier à deuxième chapitre).

1.3.2 Propriétés

La fonction Bêta est symétrique

$$B(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt, \quad \operatorname{Re}u > 0, \ \operatorname{Re}v > 0. \tag{1.3.8}$$

En posant $x = 1-t$, on a

$$B(u,v) = B(v,u). \tag{1.3.9}$$

On peut obtenir d'autres expressions simples de la fonction Bêta

1. Posons $x = y/a$; à $x = 1$ correspond $y = a$ et (1.3.8) devient

$$B(u,v) = \int_0^a \left(\frac{y}{a}\right)^{u-1}\left(1-\frac{y}{a}\right)^{v-1}\frac{dy}{a} = \frac{1}{a^{u+v-1}}\int_0^a y^{u-1}(a-y)^{v-1}dy. \tag{1.3.10}$$

2. Pour obtenir la forme trigonométrique de la fonction Bêta, posons

$x = \sin^2\theta \Rightarrow dx = 2\sin\theta\cos\theta d\theta$, $(1-t) = 1-\sin^2\theta = \cos^2\theta, t = 1$ correspond à $\theta = \pi/2$.

En substituant dans (1.3.8) on a

$$B(u,v) = \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2\theta\right)^{u-1} \left(\cos^2\theta\right)^{v-1} 2\sin\theta\cos\theta d\theta \tag{1.3.11}$$

ou

$$B(u,v) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2u-1} (\cos\theta)^{2v-1} d\theta. \tag{1.3.12}$$

3. Posons $t = y/(1+y)$; pour $t = 0$ $y = 0$ et pour $t = 1$ $y = +\infty$; $dt = \frac{dy}{(1+y)^2}$.

   En substituant dans (1.3.8) on obtient

$$B(u,v) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{u-1} \left(1 - \frac{y}{1+y}\right)^{v-1} \frac{dy}{(1+y)^2} \tag{1.3.13}$$

ou

$$B(u,v) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{u-1}}{(1+y)^{u+v}} dy. \tag{1.3.14}$$

1.3.3 Quelques relations fonctionnelles

La forme de relations fonctionnelles pour la fonction Bêta

$$B(z,1) = 1/z, \tag{1.3.15}$$

$$B(z,1-z) = \pi/\sin\pi z, \tag{1.3.16}$$

$$2^{2z-1}B(z,z) = B(z,1/2). \tag{1.3.17}$$

Les relations (1.3.15) à (1.3.17) se laissent établir par calcul direct de l'intégrale (1.3.1) pour la fonction $B(u,v)$. Il vient

$$B(z,1) = \int_0^1 t^{z-1} dt = \frac{1}{z}, \tag{1.3.18}$$

et l'on rétrouve (1.3.15).

Pour la relation (1.3.16), prenons dans (1.3.1) $u = z$ et $v = 1 - z$

$$B(z,1-z) = \int_0^1 \left(\frac{t}{1-t}\right)^{z-1} \frac{dt}{1-t}, \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1. \tag{1.3.19}$$

Faisons le changement $s = t/(1-t)$. Il vient alors

$$B(z,1-z) = \int_0^{\infty} \frac{s^{z-1}}{1+s} ds. \tag{1.3.20}$$

Chapitre 2

Fonctions Gamma

Parmi les transcendantes nouvelles que les progrès et les besoins de L'analyse moderne ont successivement introduites dans la science, Il n'en est peut-être pas de plus remarquable que la fonction ordinairement désignée sous le nom d'intégrale Eulérienne de $2^{éme}$ espèce, ou de fonction Gamma.

Les belles propriétés dont elle jouit, aux nombreuses applications dont elle est susceptible dans différentes question d'analyse, mais la multiplicité même de ces travaux en rende longue et parfois assez pénible, et il est peut-être utile de présenter dans un exposé rigoureux, les principes fondamentaux de la théorie et les résultats les plus intéressants des recherches faites sur ce suit. Tel est le but des propositions.

2.1 Définition de la fonction $\Gamma(\alpha)$ pour α réel

Quand dans une intégrale définie relative à une certaine variable, la fonction sous le signe intégrale contient une quantité dont la valeur constante pendant l'intégration, reste néanmoins arbitraire, on peut considérer l'intégrale définie comme une fonction de cette quantité. Ainsi, α étant supposé réel et positif, L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$, est une fonction de α, que nous désignerons par la lettre Γ, et nous poserons

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx \qquad \alpha > 0. \tag{2.1.1}$$

Remarque 2.1.1 *La fonction Γ d'Euler est une fonction qui prolonge la factorielle aux valeurs réelles et complexes* [4].

2.2 Convergence de la fonction $\Gamma(\alpha)$

Proposition 2.2.1 $\Gamma(\alpha)$ *est une fonction finie et déterminée. Nous allons faire voir que pour toute valeur finie de $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha)$ est fini et déterminé. Pour cela décomposons l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, x^{\alpha-1}dx$, en trois parties comme suit* [4]

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\varepsilon} e^{-x}x^{\alpha-1}dx + \int_{\varepsilon}^{n} e^{-x}x^{\alpha-1}dx + \int_n^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx, \tag{2.2.1}$$

Preuve. Considérons l'intégrale $\int_0^{\varepsilon} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$, pour $\alpha < 1$. Pour x$\rightarrow 0$, $e^{-x} \rightarrow 1$; et la fonction sous intégrale sera de l'ordre $x^{\alpha-1}$ pour $x \rightarrow 0$, et $\int_0^{\varepsilon} x^{\alpha-1}dx$ existera pour les mêmes valeurs de α pour lesquelles existe l'intégrale $\int_0^{\varepsilon} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$. Cependant

$$\int_0^{\varepsilon} x^{\alpha-1}dx = \lim_{\delta\rightarrow 0}\int_{\delta}^{\varepsilon} x^{\alpha-1}dx = \lim_{\delta\rightarrow 0} \left.\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\right|_{\delta}^{\varepsilon} dx = \frac{1}{\alpha}\lim_{\delta\rightarrow 0}\left(\varepsilon^{\alpha} - \delta^{\alpha}\right).$$

On peut remarque: si $\alpha > 0$, $\delta^{\alpha} \rightarrow 0$ et l'intégrale existera.

La seconde intégrale $\int_{\varepsilon}^{n} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$, les limites étant finies, et la différentielle ne devenant jamais infinie entre les limites, est finie et déterminée.

Reste la $3^{éme}$, pour $x \geq n$, $e^{x} > x^{\alpha+1}$, ou $e^{-x} < \frac{1}{x^{\alpha+1}}$. Cependant

$$\int_n^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx < \int_n^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x^{\alpha+1}}\, dx = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \tag{2.2.2}$$

$$0 < \int_n^{+\infty} e^{-x}x^{\alpha-1}dx < \frac{1}{n} \tag{2.2.3}$$

Je puis prendre n assez grand pour que l'intégrale devienne inférieure à toute limite donnée. Ainsi, nous aurons:

$$\int_{\varepsilon}^{n} e^{-x}x^{\alpha-1}dx < \Gamma(\alpha) < \int_{\varepsilon}^{n} e^{-x}x^{\alpha-1}dx + \frac{\varepsilon^{\alpha}}{\alpha} + \frac{1}{n}. \tag{2.2.4}$$

La somme $\frac{\varepsilon^{\alpha}}{\alpha}+\frac{1}{n}$ pouvant devenir aussi petite qu'on le voudra, en prenant ε et $\frac{1}{n}$ suffisamment petits, il en résulte que l'on peut toujours fixer deux limites finies et déterminées, aussi rapprochées qu'on le voudra, entre lesquelles se trouve compris $\Gamma(\alpha)$.

$\Gamma(\alpha)$ est donc fini et déterminé, pour toute valeur finie de $\alpha > 0$.

Il est évident de plus que cette fonction est toujours positive, puisque la différentielle $e^{-x}x^{\alpha-1}$ l'est toujours, et de plus, comme cette différentielle n'est jamais nulle x étant compris entre ε et n, il en résulte que la fonction $\Gamma(\alpha) \neq 0$. ■

Proposition 2.2.2 *L'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$, devient infinie, si $\alpha \leq 0$.*

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx;$$

nous avons mis pour condition que α devait être fini et plus grand que 0, il est en effet très facile de prouver que cette intégrale devient infinie pour $\alpha \leq 0$ [4].

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx=\int_0^{x_1}\frac{e^{-x}}{x}dx+\int_{x_1}^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx \tag{2.2.5}$$

Preuve. Considérons l'intégrale $\int_0^{x_1} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$, pour $\alpha < 1$, pour $x \longrightarrow 0$, $e^{-x} \longrightarrow 1$ et la fonction sous intégrale sera de l'ordre $x^{\alpha-1}$pour $x \longrightarrow 0$, et $\int\limits_0^{x_1} x^{\alpha-1}dx$ existera pour les mêmes valeurs de α pour lesquelles existe l'intégrale $\int_0^{x_1} e^{-x}x^{\alpha-1}dx$. Cependant

$$\int\limits_0^{x_1} x^{\alpha-1}dx=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int\limits_{\varepsilon}^{x_1} x^{\alpha-1}dx=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left.\frac{x^{\alpha}}{\alpha}\right|_{\varepsilon}^{x_1}=\frac{1}{\alpha}\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left(x_1^{\alpha}-\varepsilon^{\alpha}\right)$$

On peut remarquer que: si $\alpha < 0$, $\varepsilon^{\alpha} \longrightarrow \infty$ donc

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx=\infty,$$

et si $\alpha = 0$, on aura

$$\int\limits_0^{x_1} x^{-1}dx=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int\limits_{\varepsilon}^{x_1}\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\ln x|_{\varepsilon}^{x_1}=\infty$$

donc

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx=\infty$$

■

C'est-à-dire que l'intégrale n'existe pas, si $\alpha \leq 0$. Donc $\Gamma(\alpha)$ n'est pas converge.

2.3 La Fonction Factorielle

Calculons les valeurs des intégrales suivantes, pour $\alpha > 0$ [8]

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{2.3.1}$$

en prouver par récurrence, pour $n = 1$

$$\int_0^\infty x e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha^2}, \qquad \text{est vérifier}$$

on suppose que cette équation est vérifier par n

$$\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

et nous prouvons que vérifier pour $n+1$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{n+1} e^{-\alpha x} dx &= \left[-\frac{1}{\alpha} x^{n+1} e^{-\alpha x}\right]_0^\infty + \frac{n+1}{\alpha} \int_0^\infty x^n e^{-\alpha x} dx \\ &= \frac{(n+1)}{\alpha} . \frac{n!}{\alpha^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{\alpha^{n+2}}\end{aligned}$$

Pour $\alpha = 1$ on a

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! \qquad n = 1, 2, 3... \tag{2.3.2}$$

On a ainsi défini une intégrale dont la valeur est $n!$ pour n entier positif. On peut utiliser (2.3.2) pour donner une signification à 0!, en effet

$$0! = \int_0^\infty e^{-x} dx = \left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

2.3.1 Fonction Gamma et relation récursive

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ représentons $\Gamma(x+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^x dy = \left[-y^x e^{-y}\right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{x-1} dy, \tag{2.3.3}$$

où

$$u = y^x, \; du = x y^{x-1} dy, \qquad \text{d'ou} \qquad dv = e^{-y} dy, \; v = -e^{-y}$$

or

$$\lim_{x \to +\infty} y^x e^{-y} = \lim_{x \to +\infty} \frac{y^x}{e^y} = 0$$

par conséquent

$$\Gamma(x+1) = x\int_0^{+\infty} e^{-y}y^{x-1}dy = x\Gamma(x) \tag{2.3.4}$$

par exemple, on a

$$\Gamma(2.5) = 1.5\Gamma(1.5), \quad \Gamma(3.5) = 2.5\Gamma(2.5) = (2.5)(3.5)\Gamma(1.5),$$

et ainsi de celle suite.

2.4 Propriétés de la fonction Γ

1. Autre forme de la fonction Γ. – On peut transformer l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$, en une autre, en posant $e^{-x} = y$ d'où $e^{-x}dx = -dy$, $x = \log\frac{1}{y}$, et pour $x \in [0,\infty[$ correspondant à $y \in [0,1]$, on aura immédiatement [4]

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx = \int_0^1 (\log\frac{1}{y})^{\alpha-1}dy. \tag{2.4.1}$$

Et par conséquent, on peut poser indifféremment

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx = \int_0^1 (\log\frac{1}{y})^{\alpha-1}dy. \tag{2.4.2}$$

2. Les valeurs particulière de $\Gamma(1)$ et de $\Gamma(2)$ sont les valeurs de $\Gamma(\alpha)$ pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$, s'obtiennent facilement, car si l'on remplace ces deux valeurs dans (2.4.2), il vient

$$\Gamma(1) = \int_0^1 dy = 1, \text{ et } \Gamma(2) = -\int_0^1 \log y dy = 1 \Rightarrow \Gamma(1) = \Gamma(2)$$

3. Montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ [1]

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{1/2-1}dx$$

posons

$$x = z^2 \Leftrightarrow x^{1/2} = z, \text{ et } \quad dz = 1/2x^{1/2}dx$$

donc

$$\Gamma(1/2) = 2\int_0^{+\infty} e^{-z^2}dz$$

pour calculer cette intégrale posons

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz$$

on peut écrire que

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

d'où

$$A^2 = \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

le facteur $e^{-z^2} dz$ est une constante qu'on peut inclue dons l'intégrale

$$A^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(t^2+z^2)} dt dz$$

le calcul est plus simple à réaliser si l'on utilise les coordonnées polaire.

On connaît que: $r = \sqrt{t^2 + z^2}$ et l'élément de surface est égale à $r dr d\theta$. Donc

$$A^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{-\infty} e^u du$$

où

$$u = -r^2, \qquad du = -2r dr,$$

$$A^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \, [e^u]_0^{-\infty} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{4},$$

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = 2A = \sqrt{\pi}.$$

4.

$$\Gamma(p) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)(p+2)(p+3)...(p+n)} \tag{2.4.3}$$

cette formule est utilisée pour le calcul approximatif de la fonction Gamma. Pour la démonstration, considérons la fonction

$$f(n,p) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx \tag{2.4.4}$$

On peut montrer que $\lim_{n \to +\infty} f(n,p) = \Gamma(p)$, c-à-d

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} f(n,p) &= \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx \\
&= \lim_{n \to +\infty} \int_0^n \left[\left(1 + \frac{x}{-n}\right)^{-\frac{n}{x}}\right]^{-x} x^{p-1} dx \\
&= \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx = \Gamma(p).
\end{aligned}$$

D'autre part, en intégrant par parties, on obtient une autre expression de $f(n,p)$ sous la forme

$$f(n,p) = \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{p-1}dx = \left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \frac{x^p}{p}\right]_0^n + \frac{1}{p}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx,$$

Posons

$$\begin{aligned} u &= \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \;\Rightarrow\; du = n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\left(\frac{-1}{n}\right)dx \\ dv &= x^{p-1}dx, \;\Rightarrow\; v = \frac{x^p}{p}. \end{aligned}$$

On obtient l'expression

$$f(n,p) = \frac{1}{p}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx$$

En l'intégrant par parties encore une fois après la considération

$$u = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad dv = x^p dx$$

d'où

$$du = n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\left(\frac{-1}{n}\right)dx \;;\; v = \frac{x^p}{p}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{1}{p}\left[\left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^n + \frac{n-1}{n(p+1)}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{p+1}dx\right] \\ &= \frac{n\,(n-1)}{n^2p(p+1)}\int_0^n x\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{p+1}dx \end{aligned}$$

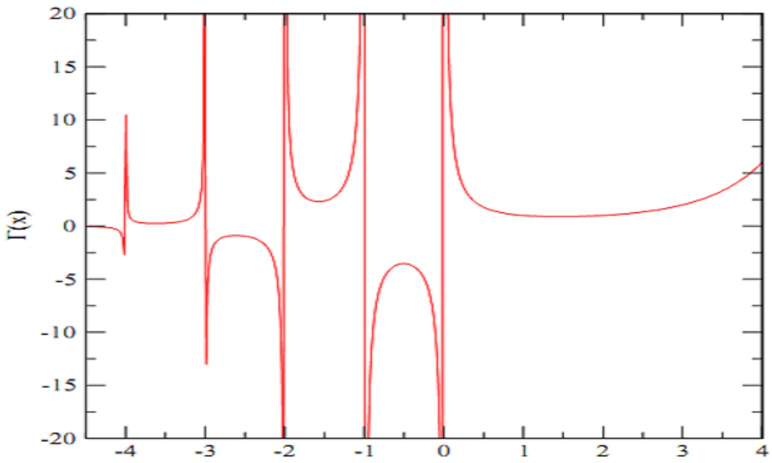
en suit de cette manière, après intégration par parties n fois, on obtient

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)...\,[n-(n-1)]}{n^np(p+1)(p+2)...\,[p+(n-1)]}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-n} x^{p+n-1}dx \\ &= \frac{n!}{n^np(p+1)(p+2)...(p+n-1)}\left[\frac{x^{p+n}}{n+p}\right]_0^n \\ &= \frac{n^{n+p}n!}{n^np(p+1)(p+2)...(p+n)} \\ &= \frac{n^pn!}{p(p+1)(p+2)...(p+n)}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^p}{p(p+1)(p+2)(p+3)...(p+n)} = \Gamma(p).$$

5. La courbe représentative de la fonction $y = \Gamma(x)$ est donnée sur la figure 2.1 [5]



la figure2.1

6. Calcul la fonction $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$, sachant $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

   on a [1]

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)...\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

   ce qui donne

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)...3.1}{2^n}\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi} \tag{2.4.5}$$

   et

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n-1)(2n-3)\times ... \times 3\times 1}\sqrt{\pi} = (-1)^n \frac{2^{2n}n!}{(2n)!}\sqrt{\pi}. \tag{2.4.6}$$

2.5 Définition de la fonction $\Gamma(z)$ pour z complexe

Pour commencer nous cherchons à prolonger $\Gamma(z)$ considérée comme un produit infini. Pour cela nous substituons tout simplement la variable z (complexe) à la variable x (réelle). La définition la plus commode pour opérer ce prolongement est celle de Weierstrass [3]

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}. \tag{2.5.1}$$

Si l'on considère l'expression $|\log(1+z/n) - z/n|$, où le $\log a$ sa détermination principale, et si on la développe, on trouve

$$\left|\ln\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right| = \left|-\frac{1}{2}\frac{z^2}{n^2}+\frac{1}{3}\frac{z^3}{n^3}...\right|.$$

On voit que pour $n > N$ fixé, cette quantité est moindre que

$$\frac{|z^2|}{n^2}\left[1+\left|\frac{z}{n}\right|+\left|\frac{z^2}{n^2}\right|+...\right]$$

ou encore que

$$\frac{1}{4}\frac{N^2}{n^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...\right) = \frac{1}{4}\frac{N^2}{n^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{N^2}{n^2}.$$

N est ici un entier tel que $|z| \leq \frac{1}{2}N$.

Or la série

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{N^2}{n^2}$$

converge, et la série

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\left\{\log\left(1+\frac{z}{n}\right)-\frac{z}{n}\right\}$$

est une série de fonctions analytiques, qui converge absolument et uniformément; sa somme est donc, elle-même, analytique. Il en est de même pour le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right],$$

qui est une fonction analytique pour $|z| \leq \frac{1}{2}N$; mais N étant n'importe quel entier, elle est analytique dans tout le plan. Donc on pose

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right].$$

La fonction $\Gamma(z)$ est elle-même analytique sauf aux points $0, -1, -2, ..., -n, ...$ qu'elle admet pour pôles simples. Au voisinage de $-n$, on a, comme on l'a déjà vu pour z réel

$$(z+n)\,\Gamma(z) \sim \frac{(-1)^n}{n!}.$$

De même que pour z réel, on montre que le définition précédente est équivalente à celles de Gauβ et d'Euler.

Si p désigne un nombre entier positif et si $|z| < p$, la série $log(1 + z/n) - z/n$, où $n > p$, est convergente et il en est ainsi pour toute série obtenue en dérivant un nombre k arbitraire de fois le général, puisque

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{z+n}\right| \leq \frac{p}{n(n-p)} \quad et \quad \left|\frac{1}{(z+n)^k}\right| \leq \frac{1}{(n-p)^k}$$

si $n > p$ et $k > 1$. $\Gamma(z)$ est donc indéfiniment dérivable en tous les points du plan complexe distincts des entiers négatifs et de zéro. On obtient facilement les formules suivantes

$$(1-z)\left(1+\frac{1}{2}z\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)\left(1+\frac{1}{4}z\right)... = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+\frac{1}{2}z)\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}z)}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right] = \frac{e^{\gamma z}\Gamma(1+z)}{\Gamma(1+z-x)}.$$

2.5.1 Formules des compléments

La formule des compléments démontrée pour x réel est valable dans le plan complexe. La définition (2.5.1) de $\Gamma(z)$ donne en effet immédiatement [3]

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{1}{z^2}\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right]^{-1} \times \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}\right]^{-1}$$

et le développement eulérien de $\sin z$

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{z}{n\pi}\right)e^{-z/n\pi}\right]\left[\left(1+\frac{z}{n\pi}\right)e^{-z/n\pi}\right]$$

montre aussitôt que

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = \frac{-\pi}{z\sin\pi z} \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}. \tag{2.5.2}$$

Comme $\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$, on a

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}. \tag{2.5.3}$$

En particulier

$$\Gamma(it)\Gamma(-it) = \frac{i\pi}{t\sin\pi it} = \frac{\pi}{t\,\mathrm{sh}\,\pi t}.$$

Si t est réel, on a aussi $\Gamma(-it) = \overline{\Gamma(it)}$. On déduit de même de (2.5.2) que

$$\Gamma(\frac{1}{2}+it)\Gamma(\frac{1}{2}-it) = \frac{\pi}{\sin(\frac{1}{2}\pi+\pi it)} = \frac{\pi}{\mathrm{ch}\,\pi t}.$$

On a aussi

$$\Gamma(\frac{1}{2}+it)=\overline{\Gamma(\frac{1}{2}-it)},$$

d'où l'on déduit, pour $t\in\mathbb{R}-\{0\}$

$$|\Gamma(it)|=\sqrt{\frac{\pi}{t\operatorname{sh}\pi t}}\quad\text{et}\quad\left|\Gamma(\frac{1}{2}+it)\right|=\sqrt{\frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi t}},$$

de même on peu vérifier les formules suivantes

$$\frac{\Gamma(n+z)\Gamma(n-z)}{[(n-1)!]^2}=\frac{\pi}{\sin\pi z}\prod_{m=1}^{n-1}\left(1-\frac{z^2}{m^2}\right)$$

$$\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2}+z)\Gamma(n+\frac{1}{2}-z)}{\left[\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]^2}=\frac{1}{\cos\pi z}\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{4z^2}{(2m-1)^2}\right].$$

2.5.2 Formule de multiplication de Legendre-Gauss

Cette formule, établie par plusieurs méthodes dans le domaine réel, est valable dans le domaine complexe; on peut le vérifier comme il suit, soit p un entier quelconque positif; on a vu que [2]

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)(z+2)(z+3)...(z+n)}.$$

Il s'agit d'en déduire la formule de Gauss déjà rencontrée

$$\Gamma(\frac{z}{p})\Gamma(\frac{z+1}{p})...\Gamma(\frac{z+p-1}{p})=(2\pi)^{(p-1)/2}\,p^{\frac{1}{2}-z}\Gamma(z).$$

Pour cela, nous considérons le produit

$$f(z)=\Gamma(\frac{z+1}{p})\Gamma(\frac{z+2}{p})...\Gamma(\frac{z+p}{p}).$$

D'après la définition (2.5.1), $f(z)$ est la limite du produit

$$\frac{n^{(z+1)/p}n!}{\left(\frac{z+1}{p}\right)\left(\frac{z+1}{p}+1\right)...\left(\frac{z+1}{p}+n\right)}\frac{n^{(z+2)/p}n!}{\left(\frac{z+2}{p}\right)\left(\frac{z+2}{p}+1\right)...\left(\frac{z+2}{p}+n\right)}\cdots\frac{n^{(z+p)/p}n!}{\left(\frac{z+p}{p}\right)\left(\frac{z+p}{p}+1\right)...\left(\frac{z+p}{p}+n\right)}.$$

On met facilement cette fonction $f(z)$ sous la forme suivante

$$f(z)=\frac{n^{z+(1+p)/2}p^{(n+1)/p}\,(n!)^p}{(z+1)\,(z+2)\,...\,[z+(1+n)\,p]}.$$

En particulier, si $z = 0$

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{z+(1+p)/2} p^{(n+1)/p} (n!)^p}{[(1+n)\, p]!}.$$

D'où il résulte que

$$\frac{f(z)}{f(0)} = \frac{[(1+n)\, p]!}{(z+1)(z+2)\ldots[z+(1+n)\, p]},$$

quantité qu'on peut encore écrire, en faisant apparaître $\Gamma(z)$

$$zp^{-z}\left(\frac{n}{n+1}\right)^z \frac{[(1+n)\, p]^z\, [(1+n)\, p]!}{z\,(z+1)(z+2)\ldots[z+(1+n)\, p]}$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z)}{f(0)} = zp^{-z}\Gamma(z).$$

Calculons à part $f(0)$, qui s'écrit

$$f(0) = \Gamma(\frac{1}{p})\Gamma(\frac{2}{p})\ldots\Gamma(\frac{p-1}{p}) = \prod_{k=1}^{p-1}\Gamma(\frac{k}{p}),$$

(puisque $f(0)$ est positif), ou encore, en utilisant la relation des compléments

$$f(0) = \sqrt{\frac{\pi^{p-1}}{\sin\frac{\pi}{p}\sin\frac{2\pi}{p}\ldots\sin\frac{(p-1)\pi}{p}}} = \sqrt{\frac{\pi^{p-1}2^{p-1}}{p}}.$$

Rappelons en effet que pour tout nombre complexe z et tout entier n, on a

$$\sin nz = 2^{n-1}\sin z\sin(z+\frac{\pi}{n})\ldots\sin\left[z+(n-1)\frac{\pi}{n}\right]$$

ce qui découle directement de la formule trigonométrique

$$\begin{aligned}
\sin nz &= \frac{e^{niz}-e^{-niz}}{2i} = \frac{e^{-niz}(e^{2niz}-1)}{2i}\\
&= \frac{1}{2i}e^{-niz}(e^{2iz}-1)(e^{2iz}-e^{-2i\pi/n})\ldots(e^{2iz}-e^{-2(n-1)i\pi/n})\\
&= A\sin z\sin(z+\frac{\pi}{n})\ldots\sin\left[z+(n-1)\frac{\pi}{n}\right]
\end{aligned}$$

où la constante A qui vaut

$$A = (2i)^{n-1}\exp\left\{-\frac{i\pi}{n}\,[1+2+\ldots+(n-1)]\right\} = (2i)^{n-1}e^{-i(n-1)\pi/2} = 2^{n-1}.$$

Il résulte de là que pour tout entier n, on a

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}...\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$$

(il suffit de diviser les 2 membres de l'équation précédente par $\sin z$ et de faire tendre z vers zéro).

Remarque 2.5.1 *La fonction Γ est fonction holomorphe a $\mathbb{C}\diagdown\mathbb{Z}^{-}$ tout entier On a* [4]

$$\Gamma\left(\alpha+1\right)=\alpha\Gamma\left(\alpha\right).$$

2.6 Dérivée logarithmique de la fonction Gamma

A côté de $\Gamma(z)$, on utilise aussi très largement la fonction [5]

$$\Psi(z)=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \tag{2.6.1}$$

La fonction $\Psi(z)$ reste analytique dans tout le plan complexe, à l'exception des points $z=-n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ ...)$ en lesquels elles admet des pôles simples.

Des relations fonctionnelles pour la fonction Gamma on tire les relations fonctionnelles suivantes pour la fonction $\Psi(z)$

$$\Psi(z+1)=1/z+\Psi(z), \tag{2.6.2}$$

$$\Psi(z)=\Psi(1-z)-\pi\cot\pi z, \tag{2.6.3}$$

$$2\ln 2+\Psi(z)+\Psi(z+1/2)=2\Psi(2z). \tag{2.6.4}$$

Indiquons une autre relation qui se laisse déduire facilement de (2.6.2)

$$\Psi(z+n)=\Psi(z)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z+k-1}. \tag{2.6.5}$$

Les relations (2.6.2) à (2.6.3) permettent de calculer $\Psi(z)$ pour des valeurs entières et demi-entières de l'argument introduisons la notation

$$\Psi(1)=\Gamma'(1)=-\gamma.$$

La quantité γ est appelée constante d'Euler ($\gamma=0.577215...$).

Posant dans (2.6.4) $z = 1/2$, on obtient

$$\Psi(1/2) = -\gamma - 2\ln 2.$$

Pour $z = 1$ et $z = 1/2$ la formule (2.6.5) donne

$$\Psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \tag{2.6.6}$$

$$\Psi(n+1/2) = -\gamma - 2\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}. \tag{2.6.7}$$

De la représentation intégrale de la fonction Bêta on déduit celle de la fonction $\Psi(z)$. On a par définition

$$\Psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{\triangle z \to 0} \frac{\Gamma(z) - \Gamma(z - \triangle z)}{\Gamma(z)\triangle z} = \lim_{\triangle z \to 0} \left[\frac{1}{\triangle z} - \frac{\Gamma(z - \triangle z)}{\Gamma(z)\triangle z}\right]. \tag{2.6.8}$$

l'expression $\frac{\Gamma(z-\triangle z)}{\Gamma(z)\triangle z}$ se confond presque, pour des $\triangle z > 0$ assez petits, avec la fonction bêta

$$B(z - \triangle z, \triangle z) = \frac{\Gamma(z - \triangle z)\Gamma(\triangle z)}{\Gamma(z)}. \tag{2.6.9}$$

Car

$$\lim_{\triangle z \to 0} \triangle z \Gamma(\triangle z) = \lim_{\triangle z \to 0} \Gamma(1 + \triangle z) = 1. \tag{2.6.10}$$

Il y a intérêt à éliminer la quantité $1/\triangle z$ figurant dans la relation limite pour $\Psi(z)$ en introduisant la différence $\Psi(z) - \Psi(1)$. On a

$$\begin{aligned}
\Psi(z) - \Psi(1) &= \Psi(z) + \gamma = \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{\Gamma(1 - \triangle z)}{\Gamma(1)\triangle z} - \frac{\Gamma(z - \triangle z)}{\Gamma(1)\triangle z}\right] \\
&= \lim_{\triangle z \to 0} \frac{1}{\Gamma(\triangle z)\triangle z} \left[B(1 - \triangle z) - B(z - \triangle z)\right] \\
&= \lim_{\triangle z \to 0} \int_0^1 \frac{1 - t^{z-1}}{1 - t} \left(\frac{1 - t}{t}\right)^{\triangle z} dt.
\end{aligned}$$

Faisant le passage à la limite sous le signe d'intégration, ce qui est légitime en vertu de la convergence uniforme de l'intégrale pour des Δz suffisamment petits, on obtient une représentation intégrale de $\Psi(z)$

$$\Psi(z) = -\gamma + \frac{1 - t^{z-1}}{1 - t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{2.6.11}$$

Changeant dans (2.6.11) t et e^{-t}, on obtient une autre représentation intégrale très utilisée

$$\Psi(z) = -\gamma + \frac{e^{-t} - e^{-zt}}{1 - e^{-t}} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0. \tag{2.6.12}$$

De la représentation intégrale (2.6.11) on peut déduire un développement en série fort simple de la fonction $\Psi(z)$ en développant $1/(1-t)$ suivant les puissance de t et un faisant l'intégration terme à terme

$$\Psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right). \tag{2.6.13}$$

Chapitre 3

Les applications de Fonction Gamma

Le fait d'avoir donnée une signification au nombre $\Gamma(x)$ pour x quelconque réel incite à utiliser la fonction Γ pour des problèmes d'interpolation. Mais il y a plus: on a trouvé en effet que la fonction $\Gamma(x)$ n'avait que des pôles simples (sur les entiers négatifs et zéro); et cette propriété de peut s'appliquer, elle aussi à des questions autres que celles touchant à l'interpolation.

Nous donnons dans ce chapitre deux exemples de telles utilisations. le premier exemple est application de fonction Gamma au calcul des intégrales (sphériques et Dirichlet), et le deuxième exemple est l'intégration et la dérivation d'ordre quelconque.

3.1 Applications du fonction Γ au calcul des intégrales

La fonction Γ étant tabulée, on peut considérer que le calcul de certaines intégrales définies est effectué si l'on a ramené les intégrales proposées à une expression contenant (outre, bien entendu, des transcendantes élémentaires) la fonction Γ ou des combinaisons finies de fonction Γ. Nous en donnons deux exemples très importants: les intégrales sphériques et celles de Dirichlet.

3.1.1 Calcul des intégrales sphériques

La fonction $f(x,y)$ étant sommable et positive, on se propose de calculer l'intégrale étendue à tout le plan

$$\iint_{R^2} f(x,y)\,dxdy.$$

On peut toujours, en passant en coordonnées polaires, la mettre sous la forme

$$\int\int_{\substack{r\geq 0\\ 0\leq\theta\leq 2\pi}} f(r\csc\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta$$

et obtenir alors par 2 intégrations simples

$$\int_0^{+\infty} dr\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rd\theta.$$

On peut remplacer $rd\theta$ par ds (élément de longueur sur le cercle de centre 0, de rayon r). On peut étendre cette formule à l'espace $\mathbb{R}^n$ en définissant la sphère à n dimensions de centre 0 comme le lieu des points $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ tels que

$$\sum_1^n x_i^2 = Cte \quad / \text{ Cte} = \text{constante}$$

Et en faisant apparaître de même l'aire $(n-1)$ dimensionnelle qui généralise sur cette sphère l'élément ds envisagé pour $n=2$. Ainsi l'intégrale $(n-uple)$

$$\iiint ... \int_{R^n} f(x_1, x_2...x_n)\,dx_1dx_2...dx_n$$

(qui s'écrit parfois commodément sous la forme $\int f(x)\,dx$) pourra s'écrire

$$\int f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} dr\int ... \iiint_\Sigma f ds$$

$\sum$ désignant la sphère dans l'espace à n dimensions, ds l'élément linéaire de cette surface. Dans ces conditions $\iint ... \int_\Sigma$ est une fonction, du rayon r de cette sphère. Soit $I(r)$ cette fonction, on peut écrire

$$\iint ... \int_{R^n} f(x)dx = \int_0^{+\infty} I(r)\,dr.$$

Prenons un cas particulier simple: celui où la fonction $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ est une fonction de la seule variable

$$r = \sqrt{\sum_1^n x_i^2};$$

on a alors $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) = g(r)$ et l'intégrale précédente $I(r)$ devient elle-même $I(r) = g(r) S(r)$, $S(r)$ désignant l'aire généralisée de la $(n-1)$-sphère de rayon r. Pour des raisons évidentes d'homogénéité, si l'on appelle S_n l'aire de la sphère de rayon I dans $\mathbb{R}^n$, on a $S(r) = S_n r^{n-1}$ et l'on en déduit

$$\int_{R^n} f(x)\, dx = S_n \int_0^{+\infty} g(r)\, r^{n-1} dr$$

le calcul de ces intégrales sphériques se ramène donc complètement à celui des S_n. Pour effectuer ce calcul, on utilise l'artifice suivant: on choisit comme fonction $f(x)$ l'exponentielle e^{-x^2}. On a ainsi, avec les notations précédentes

$$\int_{R^n} \exp\left(-x^2\right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x_1^2\right) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x_2^2\right) dx_2 ... \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-x_n^2\right) dx_n.$$

Toutes ces intégrales étant égales, l'intégrale considérée vaut

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda\right]^n$$

mais conformément au calcul précédent elle vante également

$$S_n \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr,$$

intégrale qui s'exprime par la fonction Γ. En égalant ces 2 valeurs, on obtient

$$S_n = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda\right]^n}{\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr} = \frac{2\left(\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma(n/2)}. \tag{3.1.1}$$

Exemple 3.1.1 $S_2 = 2\pi$, $S_3 = 4\pi$, $S_4 = 2\pi^2$, $S_5 = 8\pi^3/3$, $S_6 = \pi^3$.

Connaissant les S_n, on a toutes les intégrales sphériques sans nouvelles intégrations. Par exemple le volume de la sphère dans R_n est

$$V_n = S_n \int_0^R r^{n-1} dr = S_n \frac{R^n}{n} = \frac{\left(\sqrt{\pi}\right)^n R^n}{\Gamma\left(n/2+1\right)}.$$

Ainsi: $V_2 = \pi R^2$, $V_3 = \frac{4}{3}\pi R^3$, $V_4 = \frac{1}{2}\pi R^4$, $V_5 = \frac{8}{15}\pi^2 R^5$, $V_6 = \frac{1}{6}\pi^3 R^3$, ...

La règle qui déduit le volume de la sphère de la connaissance de son aire est évidente, on prend la primitive de $S_n(R)$ par rapport à R pour obtenir V_n.

On remarque d'ailleurs que pour un rayon R fixé, le volume V_n de cette sphère tend vers zéro lorsque le nombre de dimensions tend vers l'infini.

3.1.2 Calcul des intégrales répétées des Dirichlet

Une importante application des intégrales eulériennes est celle employée par Dirichlet et que nous traitons en détail car elle intervient dans la théorie de la convolution et dans le calcul symbolique. La méthode de Dirichlet consiste à ramener, en utilisant la fonction Γ, des intégrales multiples à des intégrales simples. Soit à calculer d'abord

$$I_2 = \int\int f(x+y)\, x^{\alpha-1} y^{\beta-1} dx dy \tag{3.1.2}$$

étendu à un triangle $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x+y \leq 1$

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x+y)\, x^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy. \tag{3.1.3}$$

La méthode de Dirichlet consiste à essayer de remplacer la borne supérieure $1-x$ par1. Pour cela on pose

$$y = \frac{1-v}{v} x, \quad y = \frac{x}{v} - x, \quad \text{d'où } \ dy = \frac{xdv}{v^2}.$$

Alors

$$\int_0^{1-x} f(x+y)\, x^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy$$

devient

$$-\int_1^x \left(\frac{x}{v}\right) x^{\alpha+\beta-2} \left(1-v\right)^{\beta-1} v^{1-\beta} \left(x\frac{dv}{v^2}\right) \tag{3.1.4}$$

Soit

$$\int_x^1 f(x/v)\, x^{\alpha+\beta-1} v^{-\beta-1} (1-v)^{\beta-1}\, dv.$$

Dans l'expression (3.1.3) trouvée pour I_2, on inverse alors l'ordre des intégrations.

Les 3 inégalités $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$ délimitant le domaine deviennent $x > 0$, $0 < v < 1$, $x < v$.

Il y a lieu de faire attention à la justification de l'interversion des intégrations, étant donné qu'il y a des infinis sous le signe $\int$: mais la règle de Fubini est applicable. L'intégrale

$$\int_0^1 dx \int_x^1 f(x/v)\, x^{\alpha+\beta-1} ... v^{-(\beta+1)} (1-v)^{\beta-1}\, dv$$

devient

$$\int_0^1 dv \int_0^v f(x/v) ... v^{-(\beta+1)} (1-v)^{\beta-1}\, dx. \tag{3.1.5}$$

En posant alors $x/v = \tau$, on obtient

$$\int_0^1 dv \int_0^1 f(\tau)\, v^{\alpha+\beta-1} v^{-\beta-1} (1-v)^{\beta-1}\, v d\tau$$

ou

$$\int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1}\, dv \int_0^1 \tau^{\alpha+\beta-1} f(\tau)\, d\tau,$$

ou encore

$$B(\alpha,\beta) \int_0^1 f(\tau)\, \tau^{\alpha+\beta-1} d\tau,$$

qui est une intégrale simple et s'écrit

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^1 f(\tau)\, \tau^{\alpha+\beta-1} d\tau. \tag{3.1.6}$$

On traite le même problème avec 3 variables

$$\int\int\int f(x+y+z)\, x^{\alpha-1} y^{\beta-1} z^{\gamma-1} dxdydz$$

étendue à $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z < 1$. On écrit, de même

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x+y+z)\, y^{\beta-1}z^{\gamma-1}dz. \tag{3.1.7}$$

On s'occupe des 2 dernières intégrales, on les ramène à la forme obtenue précédemment en posant

$$z = y\frac{1-v}{v} = \frac{y}{v} - y \text{ ou } y + z = \frac{y}{v},$$

on voit aisément que les limites sont en bas 1, et en haut, $y/1-x$; comme $dz = -y\left(dv/v^2\right)$, on a, pour l'élément différentiel

$$f(x+y/v)\, y^{\beta+\gamma-1}v^{1-\gamma}(1-v)^{\gamma-1}\, dv.$$

D'où l'intégrale suivant

$$\int_0^{1-x} dy \int_{y/(1-x)}^{1} f(x+y/v)\, y^{\beta+\gamma-1}v^{-1-\gamma}(1-v)^{\gamma-1}\, dv. \tag{3.1.8}$$

On balaye avec MQ au lieu de le faire avec MP, v allant de $y/(1-x)$ à 1, $0 < v < 1$, et $0 < y < (1-x)\, v$; d'où

$$\int_0^1 dv \int_0^{(1-x)v} f(x+y/v)\, y^{\beta+\gamma-1}v^{-1-\gamma}(1-v)^{\gamma-1}\, dy.$$

Posons

$$y/v = \tau \Longrightarrow dy = vd\tau, \quad y^{\beta+\gamma-1} = v^{\beta+\gamma-1}\tau^{\beta+\gamma-1},$$

$$\int_0^1 dv \int_0^{(1-x)} f(x+\tau)(1-v)^{\gamma-1}\, v^{1-\beta}\tau^{\beta+\gamma-1}d\tau,$$

formule qui nous ramène au cas précédent. Cette quantité vaut donc

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \int_0^{(1-x)} f(x+\tau)\, \tau^{\gamma+\beta-1}d\tau. \tag{3.1.9}$$

Dans l'intégrale de départ, qui vaut

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}dx \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta+\gamma)} \int_0^{(1-x)} f(x+\tau)\, \tau^{\beta+\gamma-1}d\tau,$$

on reconnaît la précédente, où β est remplacé par $\beta+\gamma$ et où α est inchangé.

On voit donc que cette intégrale multiple se ramène à une intégrale simple, et l'on peut traiter de la même manière le cas de n variables

$$I_n = \int\int ... \int f\left(t_1+t_2+...+t_n\right) t_1^{\alpha_1-1} t_2^{\alpha_2-1} ... t_n^{\alpha_n-1} dt_1 dt_2 ... dt_n.$$

Pour $t_i \geq 0$, $\sum\limits_1^n t_i \leq 1$, I_n peut être écrit sous la forme

$$\int\limits_0^1 dt_1 \int\limits_0^{1-t_1} dt_2 \int\limits_0^{1-(t_1+t_2)} dt_3 ... \int\limits_1^{1-(t_1+t_2+...+t_{n-2})} dt_{n-1} \int\limits_0^{1-(t_1+t_2+...+t_{n-1})} f\left(\sum_1^n t_i\right)\left(\prod_{i=1}^n t_i^{\alpha_i-1} dt_i\right) \tag{3.1.10}$$

c'est-à-dire, que l'on obtient en posant $t_1+t_2+...t_{n-2}=\lambda$

$$\int\limits_0^{1-\lambda} \int\limits^{1-\lambda-t_{n-1}} f\left(\sum_1^n t_i\right) t_n^{\alpha_n-1} t_{n-1}^{\alpha_{n-1}-1} dt_{n-1} dt_n$$

en procédant comme précédemment, on se ramène à

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-\lambda} f\left(\lambda+\tau\right)\left(1-v\right)^{\alpha_n-1} v^{\alpha_{n-1}-1} \tau^{\alpha_n+\alpha_{n-1}-1} d\tau dv$$

Soit

$$B\left(\alpha_{n-1},\alpha_n\right) \int\limits_0^{1-\lambda} f\left(\lambda+\tau\right) \tau^{\alpha_n+\alpha_{n-1}-1} d\tau$$

(comme dans le cas de 2 variables).

En procédant par récurrence, on obtient

$$I_n = \frac{\Gamma\left(\alpha_1\right)...\Gamma\left(\alpha_n\right)}{\Gamma\left(\alpha_1+...+\alpha_n\right)} \int\limits_0^1 f\left(\tau\right) \tau^{\Sigma\alpha_i-1} d\tau. \tag{3.1.11}$$

On est ainsi ramené à une intégrale simple.

3.2 L'intégration et La dérivation d'ordre quelconque

Une interpolation intéressante est celle qui consiste à donner au symbole d^n/dx^n, (ou D^n) , de dérivation d'ordre n entier, un sens quand n est un nombre quelconque réel. On commence par donner un sens non pas à la dérivation, mais à l'intégration d'ordre quelconque.

3.2.1 Primitive d'ordre entier

Il existe une formule de Cauchy permettant de ramener au calcul d'une intégrale indéfinie simple celui de la primitive d'ordre n d'une fonction. Si l'on pose

$$f_1(x) = \int f(x)\,dx; \quad f_2(x) = \int f_1(x)\,dx; \ ...; \quad f_n(x) \ = \int f_{n-1}(x)\,dx,$$

on peut écrire, à condition que ces fonctions soient définies pour $x > 0$

$$f_n(x) = \int_0^x \int_0^{\xi_{n-1}} \int_0^{\xi_{n-2}} ... \int_0^{\xi_2} \int_0^{\xi_1} f(\xi)\, d\xi d\xi_1 ... d\xi_{n-1} dx \tag{3.2.1}$$

sous la forme

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}\,dt. \tag{3.2.2}$$

On pose souvent aussi

$$If(x) = \int f(x)\,dx$$

on a donc alors $I^n f(x) = f_n(x)$, où $f(x)$ et x^{n-1} sont remplacés par zéro si $x < \ 0$.

On peut essayer d'étendre la formule (3.2.2) au cas où n est d'abord un nombre réel positif quelconque. On appellera α ce nombre quand il ne sera pas entier, et nous poserons, avec M. Riesz

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}\,dt \qquad (x > b) \tag{3.2.3}$$

b étant un nombre fini (ou $b = -\infty$) . (Rappelons que Hadamard était parti de la même intégrale, mais sans le facteur $\Gamma(\alpha)$ au dénominateur, pour définir ce qu'il a appelé "partie finie d'une intégrale définie" dans le cas des valeurs négatives non entières de α). L'absence du facteur $1/\Gamma(\alpha)$ rendait impossible l'extension de cette notion à la valeur zéro ou aux valeurs négatives entières de α.

Nous supposons que $f(x)$ est continue dans l'intervalle (b, x) et que, si $t \to -\infty$, $f(t) \to 0$ de façon que ne s'introduise aucune complication provenant éventuellement des grandes valeurs de t.

L'intégrale écrite à la formule (3.2.3), qu'on appelle aussi parfois "de Riemann-Liouville", est alors convergente pour tout $\alpha > 0$, (et même pour tout α complexe tel que $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$). Elle diverge pour tout $\alpha \leq 0$.

3.2.2 Primitive d'ordre fractionnaire

Si α et β sont positifs (ou si $\operatorname{Re}(\alpha)$ et $\operatorname{Re}(\beta) > 0$) alors

$$I^{\alpha}\left(I^{\beta} f(x)\right) = I^{\alpha+\beta} f(x). \tag{3.2.4}$$

En effet, intervertissant l'ordre des intégrations, on obtient, par la formule bien connue de Dirichlet

$$\begin{aligned} I^{\alpha}\left[I^{\beta} f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_b^x (x-t)^{\alpha-1}\, dt \int_b^t f(v)(t-v)^{\beta-1}\, dv \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_b^x f(v)\, dv \int_b^x (x-t)^{\alpha-1}(t-v)^{\beta-1}\, dt. \end{aligned}$$

Cette seconde intégrale est eulérienne et s'écrit par les changements de variable simples $t - v = U$, puis $U = (x-v)u$

$$(x-v)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du = (x-v)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta),$$

ce qui donne immédiatement, grâce à un calcul classique

$$I^{\alpha}\left[I^{\beta} f(x)\right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_b^x f(v)(x-v)^{\alpha+\beta-1} dv = I^{\alpha+\beta} f(x).$$

Bien entendu, pour $\alpha = 1$, on retrouve la primitive ordinaire $\int_b^x f(t)\mathrm{d}t$ si α ou $\operatorname{Re}(\alpha)$ est positif; $I^{\alpha} f(x)$ est une fonction holomorphe par rapport à α. (Bien remarquer que dans tout ce calcul la valeur x est fixée).

3.2.3 Prolongement analytique

Dans les conditions de dérivabilité convenables, on a cherché à étendre la définition $I^{\alpha} f(x)$ à des valeurs de α pour lesquelles l'intégrale cesse de converger.

C'est Hadamard, là aussi, qui a fait le premier pas, en retranchant (pour les indices non entiers) de l'intégrale divergente certaines parties bien choisies. Ce qui reste est appelé ≪partie finie de l'intégrale≫ .

On peut du reste opérer la même extension par le prolongement analytique. Supposons que les dérivées successives habituelles $f^{(k)}(t)$ existent pour $k \leq p$ et qu'elles satisfassent aux mêmes conditions que $f(t)$. On aura alors, en intégrant par parties autant de fois qu'il faudra, pour

$$n \leq pI^{\alpha} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (x-b)^{\alpha+k} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+n)} \int_{b}^{x} f^{(n)}(t)(x-t)^{\alpha+n-1} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(\alpha+k+1)} (x-b)^{\alpha+k} + I^{\alpha+n} f^{(n)}(x). \tag{3.2.5}$$

Cette formule se simplifie si $b = -\infty$, le terme tout intégré disparaissant complètement. On a alors

$$I^{\alpha} f(x) = I^{\alpha+n} f^{(n)}(x). \tag{3.2.6}$$

Les formules (3.2.5) et (3.2.6) montrent que, dans les conditions précédentes, $I^{\alpha} f(x)$, considérée comme fonction analytique de α, peut se prolonger hors du domaine de convergence de l'intégrale de départ, ce prolongement pouvant s'étendre à toutes les valeurs de α telles que $\mathrm{Re}(\alpha) > -p$. Dans ces cas, le symbole

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{c}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt \tag{3.2.7}$$

désigne le prolongement analytique précédent. Ces résultats permettent de lever la restriction imposée au départ par l'inégalité $\alpha > 0$ assurant la convergence de $I(\alpha)$.

3.2.4 Dérivation d'ordre fractionnaire

Il reste à se demander ce que deviennent, dans cette perspective, les dérivées ordinaires d'une fonction, qui correspondent précisément aux cas, mis à part jusqu'ici, où α est soit un entier négatif, soit zéro. Tout d'abord a-t-on le droit de poser $I^{0} f(x) = f(x)$ Il faudrait, pour que cela soit légitime, que

$$\lim_{\alpha \to 0} I^{\alpha} f(x) = f(x).$$

On supposera, pour le montrer, tout d'abord, c fini et $f(x)$ continue dans (c,x) ; $I^{\alpha}f(x)$ s'écrit alors

$$I^{\alpha}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{c}^{x}[f(t)-f(x)](x-t)^{\alpha-1}\,dt+\frac{f(x)}{\Gamma(\alpha)}\int_{c}^{x}(x-t)^{\alpha-1}\,dt. \tag{3.2.8}$$

Le dernier terme s'écrit

$$\frac{f(x)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-c)^{\alpha}.$$

Comme $\alpha\to 0$, il tend vers $f(x)$. Quant au premier terme, il tend vers zéro avec α.

En effet, on peut remplacer l'expression

$$\int_{c}^{x}[f(t)-f(x)](x-t)^{\alpha-1}\,dt \quad \text{par} \quad \int_{c}^{x-\delta}+\int_{x-\delta}^{x}.$$

Le terme $\int_{x-\delta}^{x}$ est arbitrairement petit car $f(t)-f(x)$ est lui-même arbitrairement petit, f étant continue. Le terme $\int_{c}^{x-\delta}$, lorsque δ est fixé, tend alors lui-même vers zéro avec α puisque zéro annule $1/f(x)$. Le cas où c vaudrait $-\infty$ se ramène aussitôt au précédent, l'intervalle$(-\infty,c)$ étant tel que l'intégrale, pour les mêmes raisons, tend vers zéro avec α. On peut donc bien poser $I^{0}f(x)=f(x)$.

La formule du prolongement analytique (3.2.5) se réduit, dans le cas où $\alpha=0$, au développement de Taylor

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^{k}+\frac{1}{(n-1)!}\int_{c}^{x}f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}\,dt.$$

Signification de $I^{\alpha}f(x)$ quand $\alpha=-n$ (entier négatif).

Si $\alpha=-n$, $I^{-n}f(x)$ doit être la dérivée $f^{(n)}(x)$ ordinaire analytique (3.2.5). Il suffit de faire sur $f^{(n)}(x)$ les mêmes hypothèses qu'on a faites sur $f(x)$; on peut alors poser

$$I^{-n}f(x)=\lim_{\alpha\to-n+0}I^{\alpha}f(x)=f^{(n)}(x). \tag{3.2.9}$$

Il est essentiel de remarquer que les dérivées ordinaires $f^{(n)}(x)$ ne peuvent apparaître ici que grâce à la présence du facteur $1/\Gamma(\alpha)$, faute de quoi les singularités polaires ne disparaîtraient pas, comme on le remarque dans la démonstration précédente.

Remarque 3.2.1 *Pour $\alpha < 0$, il y a ici un phénomène qui représente un grave inconvénient pour cette généralisation de la notion de dérivée; en effet quand α n'est ni zéro ni un entier négatif, l'intégrale $I^{\alpha} f(x)$ (c'est -à-dire la dérivée d'ordre α) est une fonctionnelle dépendant de toutes les valeurs que prend $f(t)$ dans l'intervalle (c, x), ce qui ne se produit jamais dans le cas d'une dérivée d'ordre entier n, une telle dérivée ne dépendant évidemment que les propriétés purement locales de la fonction, puisque seules les valeurs que prend $f(x)$ au voisinage de x_0 interviennent dans le calcul de $f'(x_0)$. Les dérivées ordinaires apparaissent donc, dans cette perspective, comme des valeurs exceptionnelles n'existant pas parce que $-N$ est un pôle de la fonction Γ. On le voit immédiatement du reste sur la formule de définition. La quantité*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{c}^{x-\delta} f(t)(x-t)^{-1} dt \qquad (\delta > 0)$$

étant toujours nulle pour $\alpha = -N$ ou zéro, seule l'intégrale $\int_{c}^{x-\delta}$ prise sur le voisinage de $f(x)$ intervient dans le calcul de $I^{-n} f(x)$, les autres termes ne fournissant aucune contribution. Cette différence de nature entre $f^{(n)}(x)$ et $f^{(\alpha)}(x)$ trouve son application dans la théorie des perturbations lumineuses.

Il reste à préciser le rapport entre $I^{\alpha} f(x)$ considéré comme un opérateur d'intégration et l'opération de dérivation obtenue quand α est négatif. Soit β un nombre positif (ou tel que $\mathrm{Re}(\beta) > 0$), on a, en différentiant sous le signe $\int$

$$\frac{d}{dx} I^{\beta+1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \frac{d}{dx} \int_{c}^{x} f(t)(x-t)^{\beta} dt = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{c}^{x} f(t)(x-t)^{\beta-1} dt = I^{\beta} f(x).$$

Toujours grâce au même prolongement, cette relation subsiste pour $\beta > -p$.

On procède de même façon pour montrer que

$$\frac{d^k}{dx^k} I^{\beta+k} = I^{\beta} \quad ou \quad I^{-k}\left(I^{\beta}\right) = I^{-k+\beta}$$

3.2.5 Prolongement par série $I^{\alpha} f(x)$

Une autre manière d'effectuer le prolongement, voisine elle aussi de celle introduite par Hadamard consiste à poser

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (t-x)^k .$$

En supposant d'abord α positif, l'expression

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt$$

s'écrit

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x [f(t) - P(t)](x-t)^{\alpha-1} dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x P(t)(x-t)^{\alpha-1} dt. \tag{3.2.10}$$

Le second terme s'écrit

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(x)(x-\alpha)^{k+\alpha}}{(k+\alpha) k!}.$$

Le prolongement ainsi défini suppose seulement qu'il existe un polynôme $P(t)$ tel que

$$\frac{f(t) - P(t)}{(x-t)^n}$$

reste borné lorsque $t \to x$; (3.2.10) réalise d'ailleurs une extension de (3.2.8).

Il peut être commode, dans ces calculs, de placer la singularité à l'origine, c'est-à-dire d'écrire (avec les notations de M.Riesz)

$$J^{\alpha} f(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b f(t) t^{\alpha-1} dt.$$

Si l'on pose alors

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k,$$

on obtient

$$J^{\alpha} f(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^b [f(t) - P(t)] t^{\alpha-1} dt + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0) b^{k+\alpha}}{(k+\alpha) k!},$$

en particulier

$$J^0 f(0) = f(0) \quad \text{et} \quad J^{-k} f(0) = (-1)^k f^{(k)}(0). \tag{3.2.11}$$

Remarque 3.2.2 *On peut d'ailleurs procéder d'une autre manière, extrêmement simple, pour obtenir $I^{\alpha} f(x)$ quand α est négatif (mais ni entier ni nul).*

En effet, ce qui est important dans cette question de convergence, c'est le signe de α. Supposons que $f(x)$ soit p fois dérivable et qu'on veuille en calculer la dérivée d'ordre α, α étant un nombre compris entre $-(p-1)$ et $-p$. On calcule d'abord la dérivée ordinaire d'ordre (p) soit $f^{(p)}(x)$ et on applique à $f^{(p)}(x)$ l'opérateur $I^{\alpha-p}$. Comme $\alpha - p > 0$, $I^{\alpha-p}$ est bien convergente, et par conséquent répond à la question.

3.2.6 Applications des notions de dérivée et primitive d'ordre non entier

On peut introduire la dérivée d'ordre non entier pour écrire des formules déjà connues; il arrive que cette manière de les écrire révèle des relations jusqu'ici cachées, entre des fonctions (même entre des méthodes). Nous en donne un exemple est relatif aux fonctions de Bessel.

Démonstration de la formule de Sonine relative aux fonctions de Bessel

Supposons $\mathrm{Re}(p) > -1/2$; la fonction de Bessel $J_p(z)$ est donnée par l'intégrale suivante

$$J_p(z) = \frac{2(z/2)^p}{\Gamma(p+1/2)\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left(1-t^2\right)^{p-1/2} \cos zt dt. \tag{3.2.12}$$

Posons $zt = w$, on obtient

$$J_p(z) = \frac{2}{(2z)^p \Gamma(p+1/2)\sqrt{\pi}} \int_0^z \left(z^2-w^2\right)^{p-1/2} \cos w dw \tag{3.2.13}$$

ou, après un changement des variables $z^2 = u, w^2 = v$ évidement on a

$$2^p \sqrt{\pi} u^{p/2} J_p\left(\sqrt{u}\right) = \int_0^u \frac{(u-v)^{p-1/2} \cos \sqrt{v}}{\Gamma(p+1/2)\sqrt{v}} dv \tag{3.2.14}$$

ou, en faisant apparaître la dérivée d'ordre fractionnaire

$$2^p \sqrt{\pi} u^{p/2} J_p\left(\sqrt{u}\right) = \frac{d^{-p-1/2}}{du^{-p-1/2}} \left(\frac{\cos \sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right).$$

Prenons la dérivée d'ordre $-q-1$ de cette équation

$$\frac{d^{-q-1}}{du^{-q-1}} \left[2^p \sqrt{\pi} u^{p/2} J_p\left(\sqrt{u}\right)\right] = \frac{d^{-p-q-3/2}}{du^{-p-q-3/2}} \left(\frac{\cos \sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right), \tag{3.2.15}$$

Soit

$$2^{p+q+1}\sqrt{\pi}u^{1/2(p+q+1)}J_{p+q+1}\left(\sqrt{u}\right),$$

ou, en reprenant la définition (3.2.12) de $J_p(z)$

$$2^{q+1}u^{1/2(p+q+1)}J_{p+q+1}\left(\sqrt{u}\right)=\int_0^u v^{p/2}J_p\left(\sqrt{v}\right)\frac{(u-v)^q}{\Gamma(q+1)}dv \tag{3.2.16}$$

ou, en substituant $u=x^2,\ v=x^2\sin\theta$

$$J_{p+q+1}(x)=\frac{x^{q+1}}{2^q\Gamma(q+1)}\int_0^{\pi/2}J_p(x\sin\theta)\sin^{p+1}\theta\cos^{2q+1}\theta d\theta \tag{3.2.17}$$

c'est la célèbre formule de Sonine [3].

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié la fonction Gamma (définition, propriétés, prolongement analytique et leur relation avec les autres fonctions spéciales) et ses applications surtout à l'analyse fractionnelle (intégrations, dérivations). On a montré son importance dans son application dans plusieurs branches de physique et physique mathématique: la conduction de la chaleur, l'interaction rayonnement-matière, la propagation d'ondes électromagnétiques et sonores, la théorie des réacteurs nucléaires et la structure des étoiles.

Ce mémoire présente des perspectives sur l'utilisation de la fonction Gamma dans la recherche dans ces diverses branches.

Bibliographie

[1] **A.Nikiforov,V.Ouvarov,** Fonction Spéciales de La Physique Mathématique, Editions Mir, Moscou, 1978.

[2] **Artin E**, Einfuhrung in die Theorie der Gammafunktion, Teubner, Leipzig (English translation: The Gamma Function, Pubished 1964 by Holt, Rinehart and Winston, New York),1931.

[3] **Ch.Pisot,** Les Intégrales Eulériennes et Leurs Applications Étude approfondie de la fonction Gamma, Editions Dunod, Paris, 1966.

[4] **Henri Limbourg,** La Théorie de La Fonction Gamma, Ancien Éléve de L'université de Gand,1859.

[5] **Milton Abramowitz et Lrene A. Stegun,** Handbook of Mathematical Functions, with Formule, Geaphs, and Mathematical Tables,1954.

[6] **Murray R. Spiegel, Ph. D**, Theory and Problems of Fourier Analysis with Application to Boundary Value Problems, Editions McGraw-Hill, America, 1974.

[7] **V.Smirnov**, Cours de Mathématiques Supérieures, tome III, Editions Mir, Moscou, 1972.

[8] **Weber and Arfken,** Essential Mathematical Methods for Physicists,Editions Academic Press,1966.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié la fonction Gamma (définition, propriétés, prolongement analytique et leur relation avec les autres fonctions spéciales) et ses applications surtout à l'analyse fractionnelle (intégrations, dérivations). On a montré son importance dans son application dans plusieurs branches de physique et physique mathématique: la conduction de la chaleur, l'interaction rayonnement-matière, la propagation d'ondes électromagnétiques et sonores, la théorie des réacteurs nucléaires et la structure des étoiles. Ce mémoire présente des perspectives sur l'utilisation de la fonction Gamma dans la recherche dans ces diverses branches.

Mots clés: fonction Gamma, fonction Bêta, fonctions de Bessel, Intégrale d'Euler, fonction factorielle.

Abstract

In this memory,we searched, the Gamma function (definition, specialty, analytical continuity, and relation with author special function), and may become clear importance application on manyphysics branchs, mathematical physics, and special application on fractional continuity (integral, derivative), thermal conduction, radioactive reaction, and electromagnetic radiation propagation, voice, nuclear reactor theory and Temple of stars. To be subject in this memory stand points about use the function gamma in search domain with different branchs.

Key words: Gamma function, Beta function, Bessel functions, Euler integral, factorial function.

الملخص

في هذه المذكرة درسنا وظيفة الدالة غاما (التعريف، الخصائص، الاستمرار التحليلية و علاقتها مع وظائف خاصة أخرى) وقد تبين أهمية تطبيقها في العديد من فروع الفيزياء والفيزياء الرياضية، و تطبيقاتها خاصة في التحليل الجزئي (التكامل، الاشتقاقات)، التوصيل الحراري، و التفاعل الإشعاعي، و انتشار الموجات الكهرومغناطيسية و الصوت، نظرية المفاعلات النووية و هيكلة النجوم. تعرض هذه المذكرة وجهات النظر بشأن لاستخدام وظيفة الدالة غاما في مجال البحث في مختلف فروع.

كلمات مفتاحيه: دالة غاما، دالة بيتا، دوال بيسل، تكامل أولر، دالة عاملي.