



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Echahid Hamma Lakhdar - El Oued

Faculté de la Technologie

Département de Hydraulique et Génie Civil

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Spécialité : Matériaux en génie civil

Présenté par :

Souhaila FETHALLAH

Mounia BELLA BACI

Intitulé :

Etude des plaques par la méthode des éléments finis

Soutenue le : 13/06 /2026

Devant le jury composé de :

Dr : Faouzi MASMOUDI

Président

Dr : Ali FRIK

Examineur

Dr : Bachir LABIODH

Encadreur

Année académique : 2025/2026

الإهداء

إلى أبي الغالي، رحمه الله، الذي كان مصدر إلهام وعطاء،

وستبقى ذكراه خالدة في قلبي.

إلى أُمي العزيزة، رمز الحب والحنان، وصاحبة الدعوات الصادقة

التي رافقتني في كل خطوة.

إلى إخوتي وأخواتي،

الذين كانوا خير سند وعون طوال مسيرتي.

إلى أساتذتي ومعلمي الكرام،

الذين أناروا لي طريق العلم والمعرفة.

إلى كل من دعمني وشجعني ووقف إلى جانبي من قريب أو بعيد.

أهدي لكم جميعاً ثمرة جهدي المتواضع، راجية أن يكون ثمرةً نافعةً وعربون

وفاءً وتقدير.

سهيلة

الإهداء

إلى أبي وأمي،
مصدر قوتي وسبب نجاحي
إلى إخوتي وأخواتي،
الذين كانوا سندي في كل لحظة
إلى أساتذتي الكرام،
الذين لم يبخلوا عليّ بعلمهم وتوجيههم
وإلى كل من مدّ لي يد العون أو دعمني بكلمة أو دعاء...
أهدي هذا التخرج بكل فخر وامتنان،
فهو ثمرة دعمكم قبل أن يكون ثمرة جهدي

مونيا

Sommaire

Sommaire	
Liste des Figures.....	III
Liste des tableaux	V
Notations	IX
Introduction Générale.....	1
CHAPITRE 01 : Recherche bibliographique sur les plaques.	3
1.1 Introduction :	4
1.2 Généralités et Définition sur les plaques :	4
1.3 Classification des plaques selon l'épaisseur (Rapport h/l) :	6
1.4 Les différentes théories d'analyse des plaques :	7
1.5 Théorie des plaques minces (Théorie de Kirchhoff-love) :	8
1.5.1 Hypothèses fondamentales :	8
1.5.2 Cinématique et champs de déplacement :	9
1.5.3 Limitations de la théorie classique :	10
1.6 Théorie des plaques épaisses (Théorie de Mindlin-Reissner) :	10
1.6.1 Hypothèses de Mindlin :	11
1.6.2 Champs de déplacement :	11
1.6.3 Champs de déformation :	12
1.6.4 Relations de comportement (Loi de Hooke) :	13
1.7 Le facteur de correction de cisaillement (k) :	14
1.8 Efforts résultants et Moments (Flexion et Cisaillement) :	15
1.9 Les conditions aux limites (Bord encastré, Bord simplement appuyé, Bord libre) :	17
1.10 Le phénomène de Verrouillage numérique :	19
1.11 Techniques de réduction du verrouillage (Intégration réduite) :	19
1.12 Les plaques existantes :	21
1.12.1 Énumération des éléments courants :	21
1.12.2 Description détaillée de quelques éléments courants :	21
1.13 Conclusion :	22
CHAPITRE 02 : Formulation d'un élément fini de type plaque.	23
2.1 Introduction :	24
2.2 Présentation de l'élément fini SB6-18 :	24
2.3 Formulation de l'élément SB6-18 :	25
2.4 Variables cinématiques et interpolation :	25

2.5 Déformation de membrane :.....	26
2.6 Déformation de flexion :.....	27
2.7 Forme discrétisée de W_{int}^e :.....	27
2.8 Expression de W^e dans le repère global :.....	29
2.9 Conclusion :.....	30
CHAPITRE 03 : Mise en œuvre numérique	31
3.1 Introduction :.....	32
3.2 Résumé des méthodes numériques :.....	32
- Méthode des éléments finis (MEF) :.....	33
-Méthode des éléments de frontière (BEM) :.....	34
-Méthode des moindres carrés :	35
La méthode des différences finies (FDM) :.....	35
3.3 Programmation de la méthode des éléments finis avec MATLAB :.....	36
3.4 Programme Matlab élément finis SB6-18 :.....	39
3.5 Conclusion :.....	42
CHAPITRE 04 : Résultats et discussions	43
4.1 Introduction :.....	44
4.2 Poutre console de Macneal :.....	44
4.3 Panneau fuselé :.....	48
4.4 Plaque carrée soumise à une charge concentrée :.....	52
4.5 Conclusion :.....	55
Annexes	62
1: Résultats du test de la poutre console de MacNeal (Maillage 1×2) avec $C = 1$	63
2 : Résultats du test de la poutre console de MacNeal (Maillage 1×3) avec $C = 1$	64
3 : Résultats du test de la poutre console de MacNeal (Maillage 1×6) avec $C = 1.15$	65
4 : Résultats du test du panneau fuselé du (Maillage 2x2) avec $C=1.25$	66
5 : Résultats du test du panneau fuselé du (Maillage 2x2) avec $C=1.15$	67
6 : Résultats du test du panneau fuselé du (Maillage 4x4) avec $C=1.20$	68
7 : Résultats du test de la Plaque carrée (Maillage 6×6) avec $C =0.4$	70
8 : Résultats du test de la Plaque carrée (Maillage 12×12) avec $C =0.6$	74

Liste des Figures

Chapitre 01 : Recherche bibliographique sur les plaques

FIGURE1.1 : Description géométrique d'une plaque. 5
FIGURE1.2 : Plaque anisotrope (orthotrope) 6
FIGURE1.3 : Déformation d'une plaque mince. 9
FIGURE1.4 : Cinématique de love – Kirchhoff. 10
FIGURE1.5: Cinématique de Reissner – Mindlin. 11
FIGURE1.6: Efforts agissant dans le plan de la plaque. 16
FIGURE1.7: Moments agissant sur un élément de plaque. 17
FIGURE1.8: Efforts tranchants dans un élément de plaque. 17

Chapitre 02 : Formulation d'un élément fini de type plaque

FIGURE2.1 : Elément de référence SB6-18 et ses points d'intégration..... 25
FIGURE2.2 : Elément SB6–18 : les nœuds d'interpolations pour les deux faces supérieures et 27

Chapitre 03 : Mise en œuvre numérique

FIGURE3.1 : Les différentes fenêtres du logiciel MATLAB 38
FIGURE3.2 : Représentation schématique de la face supérieure d'une poutre encastree. 40
FIGURE3.3 : Représentation schématique de la face inférieure d'une poutre encastree..... 40

Chapitre 04 : Résultats et discussions

FIGURE4.1 : Poutre console sollicitée à son extrémité par:(1) un effort de cisaillement,.....54
FIGURE4.2 : Courbe de convergence du déplacement vertical au point A :C=1.0.....55
FIGURE4.3 : Courbe de convergence du déplacement vertical au point A :C=1.0.....56
FIGURE4.4 : Courbe de convergence du déplacement vertical au point A :C=1.15.....56
FIGURE4.5 : Courbe de convergence du déplacement vertical au point A :C=1.20.....57
FIGURE4.6 : Courbe de convergence du déplacement vertical au point A :C=1.25.....57
FIGURE4.7 : Panneau fuselé soumis à un effort de cisaillement ; maillage (2 X 2 X 1) X 2.....58
FIGURE4.8 : Courbe de convergence du déplacement au point C (C=1.0).....59
FIGURE4.9 : Courbe de convergence du déplacement au point C (C=1.05).....60
FIGURE4.10 : Courbe de convergence du déplacement au point C (C=1.15)60

FIGURE4.11 : Courbe de convergence du déplacement au point C ($C=1.20$).....61

FIGURE4.12 : Courbe de convergence du déplacement au point C ($C=1.15$)61

FIGURE4.13 : Plaque carrée simplement appuyée soumise à une charge concentrée.....62

FIGURE4.14 : Courbe de convergence du déplacement W au point A($C=0.4$).....63

FIGURE4.15 : Courbe de convergence du déplacement W au point A($C=0.5$).....63

FIGURE4.16 : Courbe de convergence du déplacement W au point A($C=0.6$).....64

FIGURE4.17 : Courbe de convergence du déplacement W au point A($C=0.7$).....64

FIGURE4.18 : Courbe de convergence du déplacement W au point A($C=0.8$).....65

Liste des tableaux

Chapitre 03 : Mise en œuvre numérique

Tableau 3.1: Connectivité et numérotation des nœuds par élément.....41

Tableau 3.2: Coordonnées nodales de l'élément SB6-18.....41

Chapitre 04 : Résultats et discussions

Tableau 4.1: Valeurs de convergence du déplacement vertical au point A C=1.0.....45

Tableau 4.2: Valeurs de convergence du déplacement vertical au point A C=1.05.....45

Tableau 4.3: Valeurs de convergence du déplacement vertical au point A C=1.15.....46

Tableau 4.4: Valeur de déplacement vertical au point A C=1.20.....47

Tableau 4.5: Valeurs du déplacement vertical au point A C=1.25.....47

Tableau 4.6: Valeurs du déplacement vertical au point C(C=1.0)..... 49

Tableau 4.7: Valeurs du déplacement vertical au point C(C=1.05)..... 49

Tableau 4.8: Valeurs du déplacement vertical au point C(C=1.15).....50

Tableau 4.9: Valeurs du déplacement vertical au point C(C=1.20)..... 50

Tableau 4.10: Valeurs du déplacement vertical au point C(C=1.25).....51

Tableau 4.11: Valeurs du déplacement W au point A(C=0.4)..... 52

Tableau 4.12: Valeurs du déplacement W au point A (C=0.5)..... 53

Tableau 4.13: Valeurs du déplacement W au point A (C=0.6)..... 53

Tableau 4.14: Valeurs du déplacement W au point A (C=0.7)..... 54

Tableau 4.15: Valeurs du déplacement W au point A (C=0.8)..... 55

Résumé

Les plaques jouent un rôle fondamental en génie civil en raison de leur présence dans de nombreuses structures telles que les planchers, les dalles, les ponts et les ouvrages industriels. Leur comportement mécanique étant relativement complexe, leur analyse nécessite l'utilisation de méthodes numériques capables de fournir des résultats précis et fiables. Parmi ces méthodes, la méthode des éléments finis occupe une place importante grâce à son efficacité dans la résolution des problèmes de structures. D'un autre côté, la nécessité d'assembler des structures de type plaque 2D avec des structures volumiques constitue un véritable défi en raison de l'incompatibilité géométrique entre ces deux types de structures. Le présent mémoire s'intéresse à la modélisation numérique des plaques à l'aide d'un élément fini tridimensionnel de type solide-coque. Cet élément présente une géométrie tridimensionnelle avec uniquement des degrés de liberté en translation et utilise une formulation de type plaque. Cet élément est développé et implémenté sous l'environnement MATLAB afin d'étudier son comportement et d'évaluer ses performances dans différentes configurations de calcul. Plusieurs tests numériques sont réalisés pour vérifier la précision, la stabilité et l'efficacité de l'élément proposé. Les résultats obtenus sont analysés et comparés à des solutions de référence afin de mettre en évidence la fiabilité de la formulation adoptée.

Mots clés : plaques, méthodes numériques, méthode des éléments finis, élément fini tridimensionnel, MATLAB.

ملخص

تُعدّ الصفائح من العناصر الإنشائية الأساسية في الهندسة المدنية نظرًا لاستخدامها الواسع في العديد من المنشآت، مثل الأرضيات والبلاطات والجسور والمنشآت الصناعية. ونظرًا لتعقيد سلوكها الميكانيكي نسبيًا، فإن تحليلها يتطلب استخدام طرق عددية قادرة على توفير نتائج دقيقة وموثوقة. ومن بين هذه الطرق، تحتل طريقة العناصر المحدودة مكانة بارزة بفضل فعاليتها في حل المسائل الإنشائية.

ومن جهة أخرى، يُعدّ ربط المنشآت الصفائحية ثنائية الأبعاد بالمنشآت الحجمية ثلاثية الأبعاد تحديًا حقيقيًا بسبب عدم التوافق الهندسي بين هذين النوعين من المنشآت.

تهتم هذه المذكرة بالنمذجة العددية للصفائح باستخدام عنصر محدود ثلاثي الأبعاد من نوع الصلب-القشرة (Solid-Shell). يتميز هذا العنصر بهندسة ثلاثية الأبعاد، مع اعتماد درجات حرية انتقالية فقط، ويستند إلى صياغة خاصة بالصفائح. وقد تم تطوير هذا العنصر وتنفيذه ضمن بيئة MATLAB بهدف دراسة سلوكه وتقييم أدائه في مختلف حالات الحساب. وللتحقق من دقة العنصر المقترح واستقراره وكفاءته، أُجريت عدة اختبارات عددية، ثم حُلِّلت النتائج المتحصل عليها وتمت مقارنتها بالحلول المرجعية لإبراز موثوقية الصياغة المعتمدة.

الكلمات المفتاحية: الصفائح، الطرق العددية، طريقة العناصر المحدودة، عنصر محدود ثلاثي الأبعاد، MATLAB

Abstract

Plates play a fundamental role in civil engineering due to their widespread use in numerous structures such as floors, slabs, bridges, and industrial facilities. Since their mechanical behavior is relatively complex, their analysis requires the use of numerical methods capable of providing accurate and reliable results. Among these methods, the Finite Element Method (FEM) occupies an important place because of its effectiveness in solving structural problems.

On the other hand, the need to assemble two-dimensional (2D) plate structures with three-dimensional solid structures represents a significant challenge due to the geometric incompatibility between these two types of structures. This dissertation focuses on the numerical modeling of plates using a three-dimensional solid-shell finite element. This element is characterized by a three-dimensional geometry with translational degrees of freedom only and employs a plate-type formulation.

The element was developed and implemented in the MATLAB environment to investigate its behavior and evaluate its performance under different computational configurations. Several numerical tests were carried out to verify the accuracy, stability, and efficiency of the proposed element. The obtained results were analyzed and compared with reference solutions to demonstrate the reliability of the adopted formulation.

Keywords: Plates, Numerical Methods, Finite Element Method (FEM), Three-Dimensional Finite Element, MATLAB.

Notations

X, Y, Z	Coordonnées cartésiennes
u, v, w	Composantes du vecteur déplacement
ε	Tenseur des déformations
E	Module de « Young »
σ	Tenseur des contraintes
$[B_m] [B_f]$	Matrices définissant les déformations de membrane, et de flexion
G	Module de coulomb
K	Facteur de correction du cisaillement transversal
ξ, η	Coordonnées paramétriques
β	La rotation
$[K]$	Matrice de rigidité
Q_x, Q_y	Efforts tranchants par unité de longueur
M_x, M_y, M_{xy}	Moments de flexion par unité de longueur.
N_x, N_y, N_{xy}	Efforts normaux par unité de longueur
Ω	Volume d'un corps solide
$[K]$	Matrice de rigidité dans le repère global
ν	Coefficient de poisson
e	Déformation de membrane
$[\partial]$	Matrice des dérivées partielles
D	La rigidité flexionnelle de la plaque
W_{eint}	Forme discrétisée
ξ_x	Déformation suivant x
τ_{xz}, τ_{yz}	Cisaillements transversaux
τ_{xy}	Cisaillement dans le plan
$[K_e]$	Matrice de rigidité élémentaire
$[K_m]$	Matrice de rigidité membranaire
$[K_f]$	Matrice de rigidité en flexion
$[D_s]$	Matrice de passage au repère global
N_i	Fonction de forme du nœud i
$W_{réf}$	Flèche de référence

INTRODUCTION
GENERALE

Introduction Générale

Les plaques sont utilisées très souvent dans le domaine du génie civil, notamment pour concevoir des planchers, des ponts, des réservoirs et des structures industrielles et maritimes. C'est parce qu'elles peuvent transmettre et répartir les charges transversales vers les éléments porteurs, ce qui les rend essentielles dans les constructions modernes.

Cependant, analyser le comportement mécanique des plaques est complexe en raison de la diversité des formes, de la variation de l'épaisseur, de la nature des chargements et des conditions aux limites. Les méthodes classiques, basées sur les théories de Kirchhoff-Love pour les plaques minces et de Reissner-Mindlin pour les plaques épaisses, ont des limites lorsqu'il s'agit d'étudier des structures complexes ou des cas pratiques avancés. C'est pourquoi la méthode des éléments finis est devenue un outil numérique puissant pour modéliser le comportement mécanique des structures.

Malgré les progrès de cette méthode, son application à l'analyse des plaques rencontre encore des problèmes numériques, tels que le verrouillage numérique, qui peut provoquer un raidissement artificiel des éléments et conduire à une sous-estimation des déplacements réels, notamment dans le cas des plaques minces. De plus, utiliser des éléments volumiques classiques pour modéliser des structures minces peut entraîner des coûts de calcul élevés et des difficultés de raccordement entre les éléments surfaciques et volumiques.

Pour résoudre ces problèmes, des éléments de type coque volumique ont été développés pour combiner les avantages des éléments volumiques et des éléments de plaques, tout en offrant une représentation plus efficace des structures minces. Dans ce mémoire, nous allons utiliser un élément fini tridimensionnel appelé SB6-18 [3], qui est un élément prismatique triangulaire composé de six nœuds et de dix-huit degrés de liberté. La formulation de cet élément est basée sur la technique du triangle discret de Kirchhoff. Cet élément se distingue par l'utilisation exclusive des degrés de liberté translationnels sans degrés de rotation, ce qui améliore la compatibilité avec les éléments volumiques et réduit les effets du verrouillage numérique.

L'objectif de ce travail est d'améliorer les comportements membranaire et flexionnel de l'élément fini. Cela sera fait en utilisant des coefficients d'amélioration qui seront appliqués aux matrices de rigidité membranaire et de flexion.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres principaux.

- Le premier chapitre présente les bases théoriques des théories des plaques et la méthode des éléments finis. Il donne un aperçu de quelques éléments finis utilisés dans l'analyse des plaques.
- Le deuxième chapitre est consacré à la formulation mathématique de l'élément SB6-18. Il présente les fonctions de forme, les matrices de rigidité et l'intégration numérique.
- Le troisième chapitre présente les différentes étapes de l'implémentation numérique sous MATLAB. Il décrit l'algorithme adopté pour le calcul.
- Le quatrième chapitre est dédié aux applications numériques. Il étudie la convergence et compare les résultats obtenus avec les solutions de référence. Cela permet d'évaluer les performances de l'élément étudié.

Enfin, cette étude se termine par une conclusion générale. Elle résume les principaux résultats obtenus et donne quelques perspectives futures pour le développement de ce travail.

CHAPITRE 01 :
Recherche bibliographique sur les
plaques.

1.1 Introduction :

Les plaques sont très utilisées dans différents domaines de l'ingénierie, comme le génie civil, la mécanique et l'aéronautique. C'est parce qu'elles sont très efficaces pour supporter des charges et ont une forme spéciale qui les rend solides. Une plaque est caractérisée par une épaisseur très faible par rapport à ses autres dimensions, ce qui signifie qu'elle a un comportement mécanique particulier. Pour comprendre ce comportement, il faut utiliser des modèles mathématiques précis.

De nombreux scientifiques ont étudié les plaques et ont développé plusieurs théories pour les analyser. Les premières approches étaient basées sur des hypothèses simplificatrices, comme la théorie classique des plaques minces de Kirchhoff-Love. Cette théorie est utile pour les structures très minces, mais elle n'est pas précise pour les structures plus épaisses. En effet, elle ne prend pas en compte les effets du cisaillement transverse [4].

Pour améliorer ces théories, des chercheurs ont développé des approches plus avancées, comme celles de Mindlin et Reissner. Ces théories prennent en compte les déformations de cisaillement transverse, qui sont importantes pour les plaques épaisses et les matériaux composites modernes. Cependant, lorsque l'on utilise des méthodes numériques pour calculer les résultats, il peut y avoir des difficultés techniques, comme le phénomène de verrouillage numérique. Ce chapitre présente une synthèse des différentes théories et expose les principes de base de la modélisation numérique [5], ainsi que les problèmes liés à cette approche.

1.2 Généralités et Définition sur les plaques :

Les plaques constituent l'un des modèles les plus importants utilisés en mécanique des milieux continus, en raison de leur large présence dans différentes structures et applications. Dans la littérature scientifique, les plaques sont généralement classées selon plusieurs critères, notamment leur géométrie (plaques rectangulaires, circulaires, etc.), la nature des chargements appliqués (charges ponctuelles ou réparties), ainsi que selon le type de comportement mécanique prédominant, qu'il soit membranaire ou en flexion. Cette classification dépend également de la prise en compte ou non des effets du cisaillement transverse.

Ainsi, on distingue les plaques minces, pour lesquelles l'effet du cisaillement transverse est négligé, connues sous le nom de plaques de Kirchhoff-Love, et les plaques épaisses, dans lesquelles cet effet est pris en considération, appelées plaques de Hencky-Mindlin. Une plaque est

définie comme un corps plan ou prismatique dont l'épaisseur h est faible par rapport aux deux autres dimensions, à savoir la longueur L et la largeur b .

Selon la configuration géométrique du plan, les plaques peuvent être rectangulaires, circulaires, annulaires, triangulaires, etc. Du point de vue du matériau, si les propriétés mécaniques sont identiques dans toutes les directions, la plaque est dite isotrope. En revanche, lorsque ces propriétés varient selon les directions, la plaque est qualifiée d'anisotrope. La surface moyenne, ou plan médian, est définie comme le plan situé à égale distance des deux faces de la plaque et est généralement représentée par l'équation $z=0$.

Elle est équivalente à la ligne moyenne dans la théorie des poutres. La fibre normale (ou fibre transverse) désigne l'ensemble des points appartenant à une droite perpendiculaire au plan médian en un point donné (x, y) , et orientée suivant l'axe z [1].

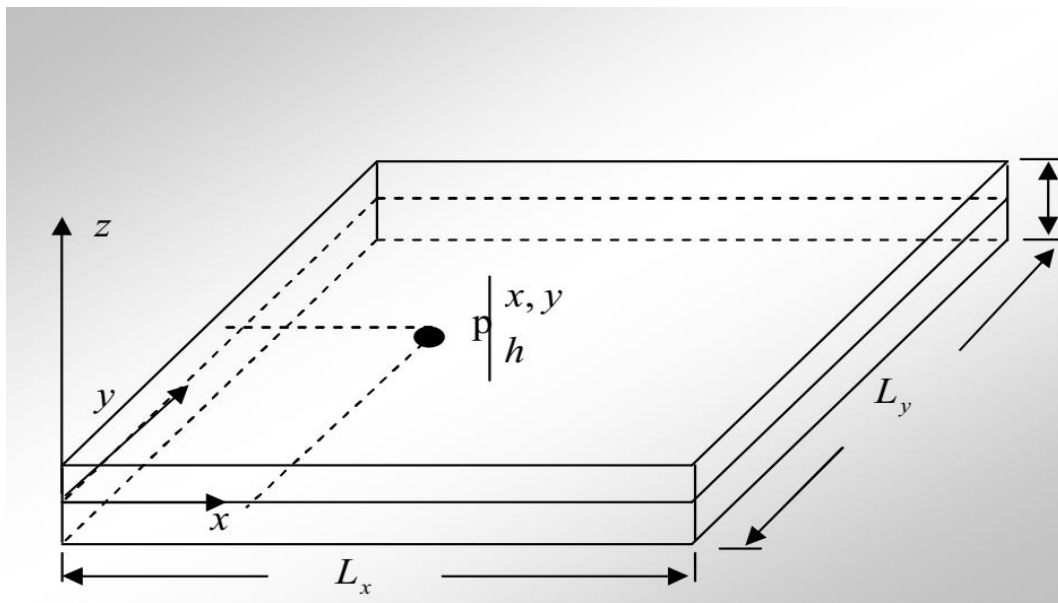


FIGURE1.1 : Description géométrique d'une plaque.

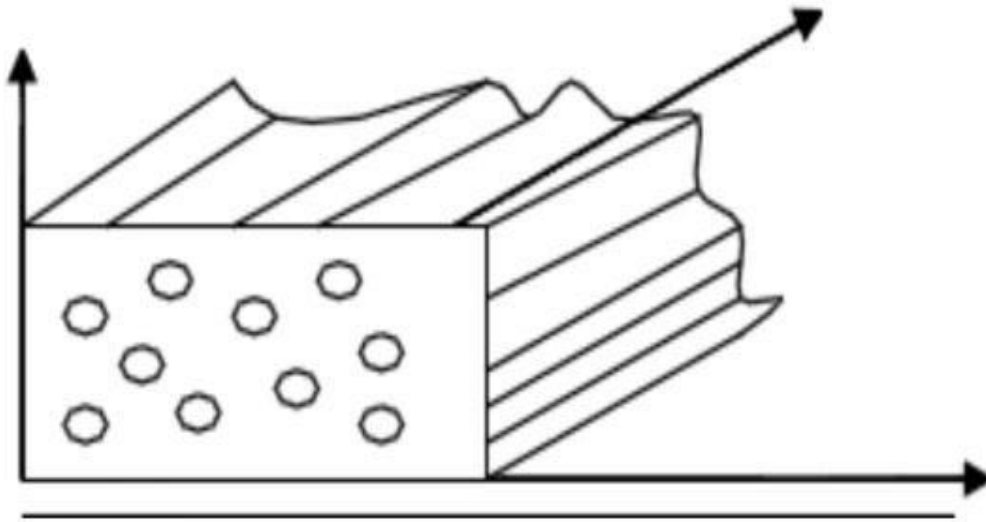


FIGURE 1.2 : *Plaque anisotrope (orthotrope).*

1.3 Classification des plaques selon l'épaisseur (Rapport h/l) :

Le comportement mécanique des plaques est classifié en fonction du rapport de finesse, qui est le rapport entre une dimension caractéristique de la plaque dans son plan et son épaisseur. Ce rapport est essentiel pour choisir le modèle théorique approprié à l'analyse de la plaque, que ce soit dans les études théoriques ou lors de simulations numériques utilisant la méthode des éléments finis.

Il existe différentes théories pour analyser les plaques en fonction de leur épaisseur. Les plaques minces sont celles dont le rapport de finesse est élevé, c'est-à-dire que l'épaisseur est très inférieure à la dimension caractéristique de la plaque $h/L < 1/20$. Dans ce cas, la théorie de Kirchhoff-Love s'applique. Cette théorie permet de négliger les effets de cisaillement transverse, ce qui simplifie les équations mécaniques et rend l'analyse plus efficace.

En revanche, les plaques épaisses ou modérément épaisses ont un rapport de finesse intermédiaire $1/20 \leq h/L \leq 1/4$. Dans ce cas, la théorie de Henky-Mindlin, également appelée théorie de Mindlin-Reissner, s'applique. Cette théorie prend en compte les déformations dues au cisaillement transverse, qui jouent un rôle crucial dans la distribution des contraintes et le calcul de l'énergie interne. Il est donc important de choisir le modèle théorique approprié en fonction du rapport de finesse de la plaque pour obtenir des résultats précis [4].

1.4 Les différentes théories d'analyse des plaques :

La théorie de la flexion des plaques la plus simple est la théorie de Kirchhoff-Love, appelée aussi théorie classique de la flexion. Elle est basée sur le champ de déplacements suivants :

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w = w_0(x, y) \end{cases} \quad (1.1)$$

Dans lequel (u, v, w) sont les composantes du déplacement, dans un repère de coordonnées cartésiennes, d'un point appartenant au feuillet moyen (plan de la plaque de coordonnée $z=0$). Le champ de déplacement repose sur les hypothèses classiques selon lesquelles une section droite, normale au feuillet moyen avant déformation, reste droite et normale après déformation. Sous ces hypothèses, les déformations à l'effort tranchant et les contraintes normales au feuillet moyen sont négligées : l'état de déformation est généré uniquement par la flexion et les extensions du feuillet moyen (tensions de membrane). Les bases d'une théorie prenant en compte les déformations au cisaillement ont été posées par [6].

Puis la théorie complète a été publiée par [7]. Cette théorie est connue sous le nom de théorie améliorée des plaques. Elle est basée sur le champ de déplacement suivant :

$$\begin{cases} u = -z\beta_x(x, y) \\ v = -z\beta_y(x, y) \\ w = w_0(x, y) \end{cases} \quad (1.2)$$

Où les termes β_y et β_x désignent les rotations des sections droites autour des axes y et x respectivement. Selon cette théorie, une section droite, normale au feuillet moyen avant déformation, reste droite mais n'est plus normale au feuillet moyen après déformation. De plus, il est possible de prendre en compte, en plus des déformations à l'effort tranchant, l'inertie de rotation des sections droites. Un modèle de plaque plus complexe peut être développé en utilisant comme composantes du champ de déplacement des fonctions de la variable z d'ordre deux. Ce modèle introduit des nouvelles inconnues dont l'interprétation physique n'est pas évidente. De plus, l'apport de ce type de modèle sur les résultats n'est pas justifié en regard de la complexité introduite dans les calculs [8].

1.5 Théorie des plaques minces (Théorie de Kirchhoff-love) :

On définit les plaques minces comme des éléments structuraux dont l'épaisseur est faible par rapport à leurs autres dimensions. Leur modélisation est généralement basée sur la théorie de Gustav Kirchhoff et Augustus Edward Hough Love. Selon cette théorie, le comportement mécanique des plaques minces est principalement régi par la flexion. Les effets du cisaillement transverse sont alors négligés.

On suppose que les lignes normales à la surface moyenne de la plaque restent droites et perpendiculaires à cette surface, même après déformation. De plus, la distribution des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque est considérée comme linéaire. C'est ce qui permet de simplifier l'analyse mécanique de ces plaques minces.

On définit les plaques minces comme des éléments structuraux dont l'épaisseur est faible par rapport aux autres dimensions géométriques. Leur modélisation repose généralement sur la théorie de Gustav Kirchhoff – Augustus Edward Hough Love, selon laquelle le comportement mécanique est essentiellement régi par le phénomène de flexion, avec négligence des effets du cisaillement transverse. Il est supposé que les normales à la surface moyenne restent droites et perpendiculaires après déformation, et que la distribution des déplacements à travers l'épaisseur est linéaire [1].

1.5.1 Hypothèses fondamentales :

La théorie classique des plaques est basée essentiellement sur les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1 : Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.

Hypothèse 2 : La contrainte normale σ_z est négligeable devant les autres composantes.

Hypothèse 3 : Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan après déformation.

Hypothèse 4 : L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

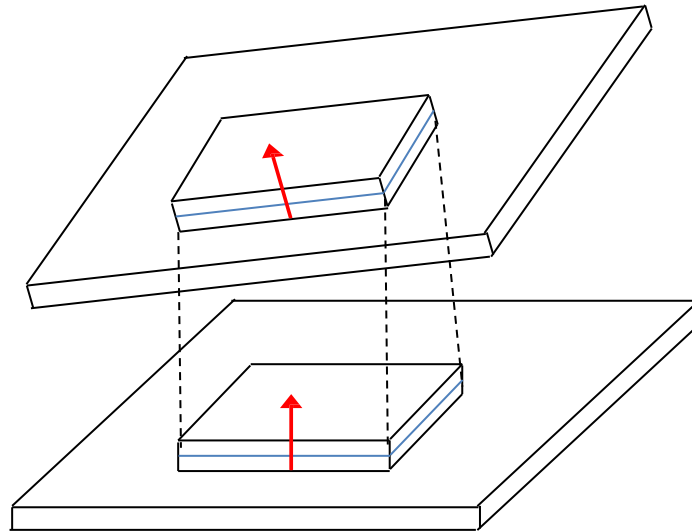


FIGURE1.3 : Déformation d'une plaque mince.

1 .5.2 Cinématique et champs de déplacement :

En se basant sur les hypothèses ci-dessus, le champ de déplacement est donné par :

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (1.3)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (1.4)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (1.5)$$

Avec (u_0, v_0, w_0) , les composantes du champ de déplacement sur le plan moyen de la plaque ($z = 0$).

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\begin{cases} \beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (1.6)$$

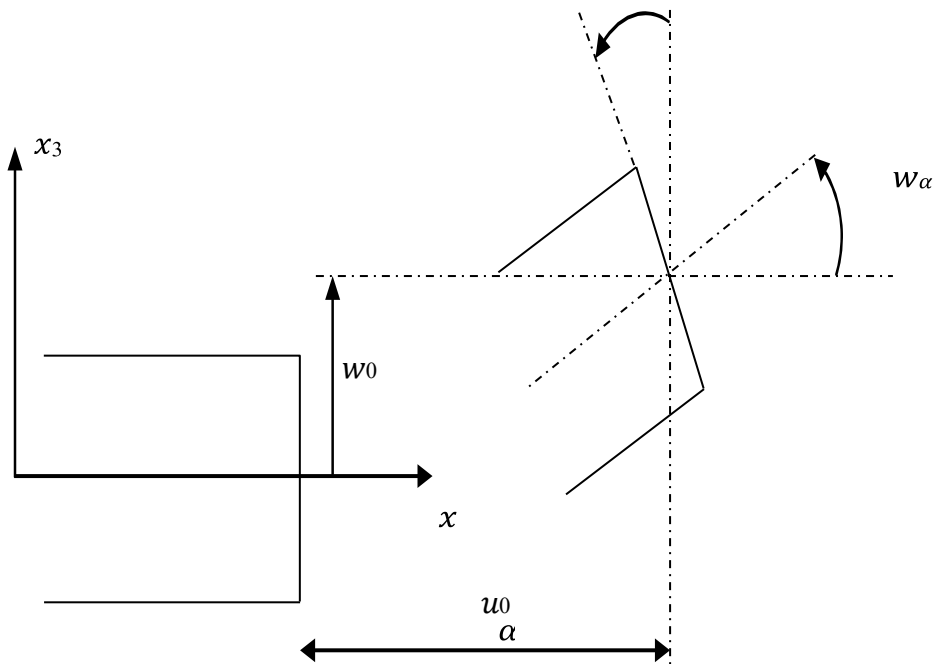


FIGURE1.4 : Cinématique de love – Kirchhoff.

1.5.3 Limitations de la théorie classique :

La méthode classique des plaques (théorie de Kirchhoff–Love) est adaptée uniquement aux plaques minces, car elle néglige des effets importants tels que le cisaillement transverse, qui deviennent significatifs dans les plaques épaisses. Pour cette raison, on utilise la (théorie de Mindlin–Reissner) pour les plaques épaisses, qui prend en compte à la fois les effets du cisaillement transverse et la distribution réelle des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque, permettant ainsi une analyse plus précise et réaliste du comportement mécanique des plaques épaisses [2].

1.6 Théorie des plaques épaisses (Théorie de Mindlin-Reissner) :

La théorie de Mindlin-Reissner est une extension de la théorie classique «développée pour pallier l'insuffisance du modèle de Kirchhoff dans le cas des plaques épaisses. Elle repose sur la prise en compte de la déformation due au cisaillement transversal. Dans ce modèle, les normales à la surface moyenne ne restent plus perpendiculaires à celle-ci après déformation «ce qui permet une évaluation plus réaliste des champs de déplacement et de contrainte [7].

1.6.1 Hypothèses de Mindlin :

Les droites normales à la surface moyenne restent rectilignes après déformation, sans rester nécessairement perpendiculaires, ce qui permet de prendre en compte les déformations de cisaillement transverse.

- Les déplacements de tout point de la plaque sont exprimés par w_0, u_0, v_0 et les rotations β_x, β_y .
- On suppose une variation linéaire des déplacements à travers l'épaisseur de la plaque.
- La contrainte normale σ_z est négligeable par rapport aux autres composantes de contrainte.
- Les contraintes de cisaillement transverse τ_{xz}, τ_{yz} sont prises en considération.
- Les rotations β_x, β_y représentent l'orientation des fibres normales après déformation.
- Cette théorie est adaptée à l'analyse des plaques épaisses, pour lesquelles les effets de cisaillement ne peuvent pas être négligés.

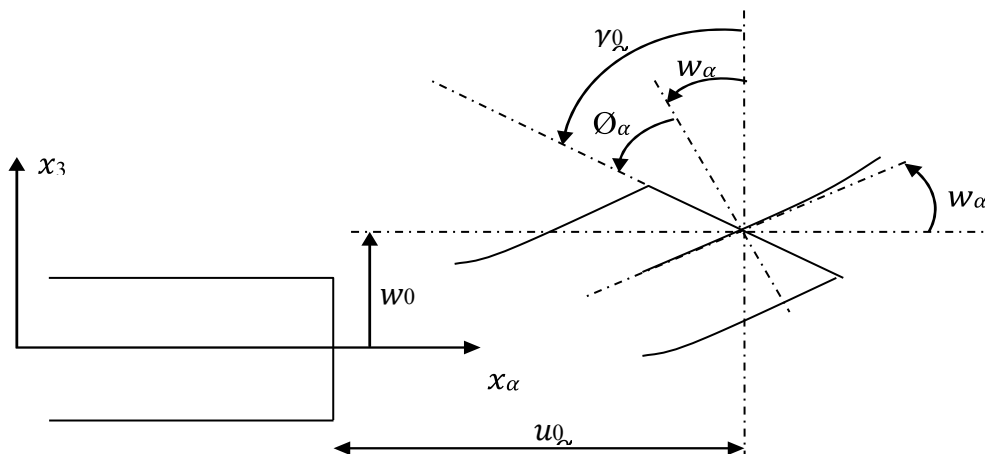


FIGURE 1.5: Cinématique de Reissner – Mindlin.

1.6.2 Champs de déplacement :

Dans la théorie des plaques épaisses, également connue sous le nom de théorie de Reissner et Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne. Cependant, elle n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen. Les angles que fait la fibre normale avec l'axe sont notés β_x et β_y . Ces angles ne correspondent plus à l'inclinaison du plan moyen, on a donc [1] :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) + z \cdot \phi_\alpha(x_1, x_2) \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (1.7)$$

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\beta_x \neq -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.8)$$

$$\beta_y \neq -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (1.9)$$

Donc, les variables cinématiques indépendantes sont :

u et v : Les déplacements de la membrane.

w : Le déplacement transversal.

$\beta_x(\theta_y)$: La rotation du plan xy autour de y.

$\beta_y(-\theta_x)$: La rotation du plan xy autour de x.

Avec ce choix de la forme des champs de déplacements, les déformations transversales sont constantes en chaque point. Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes dans chaque couche et discontinues entre les couches. Cela oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte les effets de cisaillement transversal dans l'écriture de l'énergie. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique des coefficients correcteurs dans des situations complexes. L'étude des composites épais reste aléatoire avec ce type d'approche cinématique.

Donc, le champ des déplacements s'exprime alors en fonction des trois variables par la relation suivante

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

1.6.3 Champs de déformation :

Concernant le champ de déformation, les termes gardent leur forme générale [1] :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z = 0 \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (1.11)$$

Et par ailleurs, ε_{xz} et ε_{yz} ne sont plus nuls :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (1.12)$$

On ne peut donc plus négliger le cisaillement. Le vecteur et le tenseur des courbures ne peuvent plus se simplifier et restent:

$$\vec{\kappa} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Et l'on a toujours

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = z \cdot K \quad (1.15)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = z \cdot \vec{\kappa} \quad (1.16)$$

1.6.4 Relations de comportement (Loi de Hooke) :

Les relations de comportement, basées sur la loi de Hooke, décrivent le lien fondamental entre les contraintes (σ) et les déformations (ε) dans le domaine de l'élasticité linéaire des matériaux. Elles constituent la base de la modélisation mécanique en méthode des éléments finis.

Cas unidimensionnel :

$$\{\sigma\} = [E] \{\varepsilon\} \quad (1.17)$$

Dans ce cas, la contrainte σ est proportionnelle à la déformation ε . Le coefficient de proportionnalité est le module de Young E , qui caractérise la rigidité du matériau. Plus E est élevé, plus le matériau est rigide et résiste à la déformation.

Cas bidimensionnel (état de contraintes planes) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1. 18)$$

Cette formulation matricielle est utilisée pour les structures planes, comme les plaques minces.

Elle relie les contraintes normales et de cisaillement aux déformations correspondantes.

Le module de Young E et le coefficient de Poisson ν sont pris en compte.

C'est une étape clé dans la méthode des éléments finis.

Elle permet de définir la matrice de comportement du matériau, aussi appelée matrice de rigidité constitutive.

Cette matrice est utilisée pour construire la matrice de rigidité globale [9].

1.7 Le facteur de correction de cisaillement (k) :

Le facteur de correction de cisaillement K est introduit pour corriger une hypothèse simplificatrice de la théorie de Reissner-Mindlin [6]. Cette théorie suppose que les contraintes de cisaillement transverse Q_{xz} et Q_{yz} sont constantes à travers l'épaisseur de la plaque. Mais cela contredit la condition physique selon laquelle les contraintes de cisaillement doivent être nulles sur les surfaces libres de la plaque.

Pour déterminer ce facteur, Raymond Mindlin a étudié la propagation des ondes dans une plaque infinie. Il a utilisé une solution exacte issue de la théorie tridimensionnelle de l'élasticité. D'après ses travaux, le facteur K dépend du coefficient de Poisson ν .

Pour les matériaux isotropes, les valeurs généralement admises pour K varient entre 0,76 pour $\nu=0$ et 0,91 pour $\nu=0,5$.

Ensuite, en comparant la fréquence du premier mode antisymétrique de cisaillement obtenue par la théorie tridimensionnelle de l'élasticité et celle issue de la théorie de Mindlin, on peut déterminer le facteur K. Cela se fait à partir d'une équation polynomiale.

$$k^3 - 8k^2 + \frac{8(2 - \nu)}{1 - \nu}K - \frac{8}{1 - \nu} = 0 \quad (1. 19)$$

Pour certaines valeurs du coefficient de Poisson, on obtient:

$$k=0.86 \text{ pour } \nu=0.3$$

$$k=\pi^2/12 \text{ pour } 0.176$$

En 1987, Wittrick a proposé une approximation du facteur K dans le cas d'une plaque simplement supportée [10]:

$$k = \frac{8(2 - \nu)k}{6 - \nu} \quad (1. 20)$$

Par ailleurs, les résultats de la théorie de Eric Reissner–Mindlin, basés sur une distribution parabolique des contraintes de cisaillement, conduisent à la valeur classique:

$$K=5 /6$$

À ce jour, le facteur de correction de cisaillement demeure un sujet de discussion dans la littérature scientifique. Toutefois, l'ensemble des auteurs s'accorde sur son influence significative sur la précision des résultats numériques, notamment dans l'analyse des plaques épaisses par la méthode des éléments finis.

1.8 Efforts résultants et Moments (Flexion et Cisaillement) :

Dans la théorie des plaques, on remplace les contraintes tridimensionnelles par des efforts et des moments qui résultent de l'intégration sur l'épaisseur de la plaque [4].

•Efforts résultants de membrane :

Les efforts membranaires sont les forces internes qui agissent dans le plan moyen d'une structure, comme une plaque ou une coque. Ces efforts provoquent des déformations dans le plan de la structure, mais ne créent pas de courbure notable. Ils sont principalement liés aux efforts de traction et de compression qui se produisent dans la surface de l'élément.

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz, \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} dz \quad (1. 21)$$

N_x, N_y : efforts normaux (traction/compression).

N_{xy} : effort de cisaillement dans le plan.

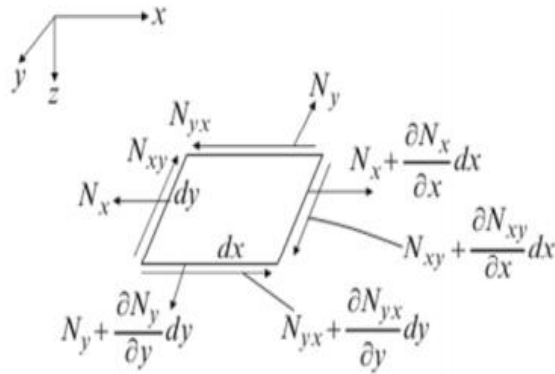


FIGURE1.6: Efforts agissant dans le plan de la plaque.

•Moments de flexions :

Les moments de flexion sont des efforts internes qui apparaissent dans une structure soumise à des charges extérieures et qui provoquent sa courbure ou sa déformation par flexion.

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz, \quad (1. 22)$$

$$M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xy} z dz$$

M_x, M_y : Moments de flexion.

M_{xy} : moment de torsion.

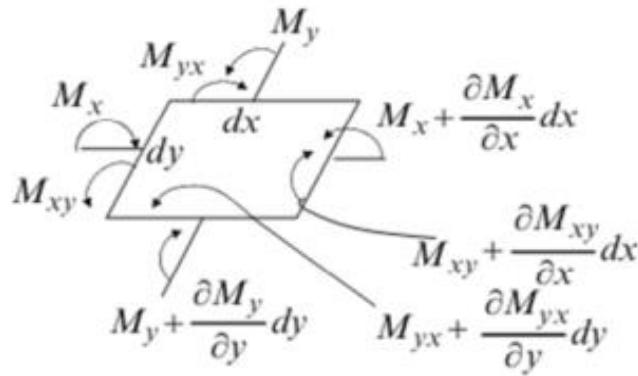


FIGURE1.7: Moments agissant sur un élément de plaque.

•Efforts tranchants :

Les efforts tranchants sont des forces qui agissent à l'intérieur d'une structure lorsqu'elle est soumise à des charges. Ces forces internes ont pour effet de faire glisser une partie de la structure par rapport à une autre partie le long d'un plan de coupe. Cela se produit sans rotation principale, mais avec une action de cisaillement qui peut être importante. Les efforts tranchants sont donc des forces tranchantes qui peuvent avoir un impact significatif sur la stabilité de la structure.

$$Q_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz , Q_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{yz} dz \tag{1. 23}$$

Q_x, Q_y : efforts de cisaillement transversal.

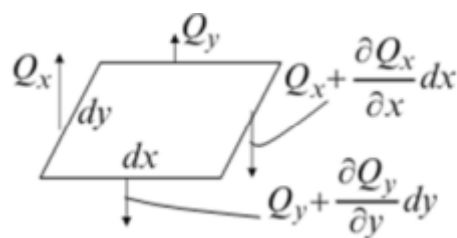


FIGURE1.8: Efforts tranchants dans un élément de plaque.

1.9 Les conditions aux limites (Bord encastré, Bord simplement appuyé, Bord libre) :

L'équation différentielle de la surface élastique admet une infinité de solutions. La solution réelle d'un problème donné sera celle qui remplit les conditions au contour. Nous allons nous

borner à l'examen de plaques à contour polygonal. Nous allons prendre l'axe des y parallèle au bord considéré. De plus, les conditions imposées sur un bord d'une plaque peuvent toujours se ramener à des conditions imposées à la flèche $w(x; y)$. En effet, les composantes des efforts et des moments de flexion $(Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy})$ sont des fonctions des dérivées partielles de $w(x; y)$. [1]

Considérons une plaque rectangulaire et étudions les différentes situations les plus fréquemment rencontrées.

Bord encasté :

Si le bord d'une plaque est encasté, la flèche le long de ce bord est nulle. Le plan tangent à la surface moyenne fléchie, le long de ce bord, coïncide avec la position initiale du plan moyen de la plaque. La rotation est donc nulle le long de ce bord. Si un bord est encasté, les conditions aux limites sont formulées comme suit [4]:

$$W(a, y) = 0, \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (1. 24)$$

Bord simplement appuyé :

Si le bord de la plaque est simplement appuyé, la flèche le long de ce bord est nulle. En plus, ce bord peut tourner librement autour de l'axe x c'est à dire qu'il n'existe pas de moment de flexion M_x le long de ce bord. Comme la flèche w est identiquement nulle le long du côté, ses dérivées en y le sont également et l'on a les conditions suivantes [1].

$$W(a, y) = 0, \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (1. 25)$$

Bord libre :

Sous la forme proposée par Poisson, les conditions aux limites pour ce cas stipulent que le moment de flexion M_x doit être nul. L'effort tranchant Q_x et le moment de torsion M_{xy} devraient l'être aussi. Kirchhoff trouva que ces trois conditions étaient de trop et que deux suffisaient pour déterminer complètement la flèche. Il a démontré que les deux conditions de Poisson relatives au moment de torsion M_{xy} et à l'effort tranchant Q_x pouvaient être remplacées par une seule condition aux limites (exprimant l'annulation de la réaction totale) [11].

$$M_x = 0; V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\alpha) \quad (1. 26)$$

Ce qui peut s'écrire en fonction des dérivées partielles de la flèche w comme suit :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (V_x = 0) \quad (1. 27)$$

1.10 Le phénomène de Verrouillage numérique :

Le phénomène de verrouillage numérique en cisaillement est un problème important lors de l'analyse des plaques épaisses avec la méthode des éléments finis, notamment lorsqu'on utilise la théorie de Raymond Mindlin et Eric Reissner. De manière simple, ce phénomène se produit lorsque le modèle numérique est trop rigide par rapport à la rigidité réelle de la structure. Cela signifie que dans les calculs numériques, la plaque devient plus rigide qu'elle ne l'est en réalité.

Cela se produit parce que l'élément fini ne représente pas correctement les déformations de cisaillement transverse, surtout lorsque la plaque est mince par rapport à sa longueur ou à sa largeur. Dans la réalité, lorsque la plaque est mince, l'effet du cisaillement transverse devient faible et peut être négligé, comme dans la théorie de Gustav Kirchhoff et August Love.

Cependant, certains éléments de plaques épaisses dans la méthode des éléments finis imposent des contraintes numériques qui maintiennent artificiellement le cisaillement transverse, même lorsqu'il devrait disparaître, ce qui conduit au phénomène de verrouillage numérique. Ce problème apparaît souvent dans les éléments à interpolation linéaire, car ces éléments ne parviennent pas à assurer correctement la transition entre le comportement des plaques épaisses et celui des plaques minces.

Lorsque le paramètre de finesse devient faible, les déplacements calculés diminuent et la rigidité numérique augmente, rendant les résultats inexacts. Les principaux effets du verrouillage numérique en cisaillement incluent la sous-estimation des flèches, des résultats imprécis, un ralentissement ou une mauvaise convergence de la solution numérique, et l'apparition d'erreurs importantes dans l'analyse des plaques minces.

La compréhension de ce phénomène est essentielle pour étudier les plaques épaisses avec la méthode des éléments finis, ce qui justifie le développement de techniques numériques spécifiques pour le réduire et améliorer la précision des résultats.[2]

1.11 Techniques de réduction du verrouillage (Intégration réduite) :

Dans l'analyse des plaques épaisses selon la théorie de Reissner -Mindlin, la matrice de rigidité élémentaire obtenue par la méthode des éléments finis est donnée par:

$$K = \int_{\Omega} B^T D B d\Omega \quad (1. 28)$$

Cette matrice peut être décomposée en deux contributions principales:

$$K = K_b + K_s \quad (1. 29)$$

Où K_b représente la rigidité de flexion et K_s la rigidité de cisaillement transversal.

La contribution due au cisaillement s'écrit:

$$K_s = \int_{\Omega} B_s^T D_s B_s d\Omega \quad (1. 30)$$

Avec:

$$D_s = kGh \quad \text{et} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1. 31)$$

Lorsque le rapport h/L devient faible, la théorie continue prévoit une diminution des déformations de cisaillement. Cependant, au niveau discret, les fonctions d'interpolation utilisées dans les éléments finis ne satisfont pas correctement cette condition limite. Il en résulte une contribution excessive de K_s , conduisant au phénomène de verrouillage au cisaillement (shear locking), caractérisé par une rigidité numérique artificiellement élevée.

Afin de remédier à ce problème, on adopte la technique d'intégration sélective réduite. Le principe consiste à utiliser une intégration complète pour la partie flexion K_b et une intégration réduite pour la partie cisaillement K_s . L'intégrale est alors évaluée par une quadrature de Gauss à nombre réduit de points:

$$\int_{\Omega} f(\xi, \eta) d\Omega \approx \sum_{i=1}^n \omega_i f(\xi_i, \eta_i) \quad (1. 32)$$

Avec $n=1$ pour l'intégration réduite au lieu de $n=4$ dans le cas complet pour un élément quadrilatéral bilinéaire.

Cette approche permet de limiter la rigidité numérique excessive tout en conservant la cohérence physique du modèle, améliorant ainsi la précision des déplacements et la convergence de la solution [12].

1.12 Les plaques existantes :

Dans le cadre de la méthode des éléments finis appliquée aux plaques, plusieurs types d'éléments ont été développés. Nous pouvons les classer comme suit [5]:

1.12.1 Énumération des éléments courants :

Les bibliothèques de calcul des structures contiennent généralement les éléments suivants:

L'élément CST (Constant Strain Triangle).

L'élément LST (Linear Strain Triangle).

L'élément Q4 (Quadrilatère à 4 nœuds).

L'élément Q8 (Quadrilatère à 8 nœuds / Serendipity).

L'élément DKT (Discrete Kirchhoff Triangle).

L'élément DST (Discrete Shear Triangle).

1.12.2 Description détaillée de quelques éléments courants :

- L'élément CST (Constant Strain Triangle) :

C'est l'élément triangulaire le plus basique avec 3 nœuds situés aux sommets.

Avantages : L'élément CST est simple à formuler et facile à implémenter numériquement et il offre une bonne stabilité dans les maillages non structurés.

Inconvénients : Il présente une précision limitée car la déformation est supposée constante et il nécessite un maillage très fin pour obtenir des résultats fiables.

- L'élément Q4 (Quadrilatère à 4 nœuds) :

C'est un élément à 4 nœuds avec une interpolation bilinéaire.

Avantages : très simple à programmer et largement utilisé pour les géométries régulières.

Inconvénients : pour les plaques minces, cet élément souffre fortement du phénomène de verrouillage en cisaillement (verrouillage numérique). Il nécessite des techniques correctives comme l'intégration réduite pour améliorer sa précision.

L'élément DKT (triangle de Kirchhoff discret):

C'est un élément triangulaire à 3 nœuds mais possédant 9 degrés de liberté.

Avantages:

Bonne précision pour la flexion des plaques minces et moyennement épaisses, et absence totale de verrouillage numérique.

Inconvénient:

Formulation plus complexe et mise en œuvre numérique plus délicate.

1.13 Conclusion :

Ce chapitre a permis d'établir les bases nécessaires pour étudier le comportement des plaques en utilisant la méthode des éléments finis. Nous avons distingué les deux modèles principaux dans ce domaine : le modèle de Kirchhoff et le modèle de Mindlin. Chacun de ces modèles convient à des hypothèses et à des applications spécifiques, selon l'épaisseur de la plaque et la nature des déformations.

Une attention particulière a été portée au phénomène de verrouillage numérique, qui constitue l'une des principales difficultés dans l'analyse numérique des plaques, surtout dans le cas des plaques minces. Ce phénomène peut entraîner des résultats imprécis et altérer la convergence des solutions. Pour y remédier, nous avons mis en évidence l'importance des techniques de correction, notamment l'intégration réduite, pour atténuer ce phénomène et améliorer la précision des résultats obtenus.

Sur la base de ces connaissances théoriques, ce chapitre offre une base scientifique et méthodologique solide pour développer la formulation de l'élément fini utilisé dans cette étude. Il ouvre également la voie à la partie appliquée, qui consiste à mettre en œuvre un programme de calcul sous un environnement informatique, afin de réaliser l'analyse numérique et d'évaluer la performance du modèle proposé. Cela sera abordé dans le chapitre suivant.

***CHAPITRE 02 : Formulation d'un
élément fini de type plaque.***

2.1 Introduction :

Ce chapitre présente un élément fini prismatique qui a été développé par [3]. L'élément fini prismatique repose sur la formulation DKT, qui est connue pour sa capacité à modéliser les phénomènes de flexion sans provoquer de verrouillage numérique. La configuration géométrique de l'élément fini prismatique est basée sur la formulation DKT pour les deux faces, la face supérieure et la face inférieure. Cette approche permet de combiner la précision de la théorie des plaques minces avec la structure volumique de l'élément fini prismatique. Cela garantit une représentation précise des champs de déformation et des contraintes à travers l'épaisseur de l'élément fini prismatique.

2.2 Présentation de l'élément fini SB6-18 :

L'élément fini SB6-18 est un outil avancé utilisé pour analyser les plaques avec la méthode des éléments finis. Il est basé sur une forme prismatique triangulaire et comporte six points de référence, ou nœuds. Chaque nœud a trois degrés de liberté, qui sont le déplacement perpendiculaire et les rotations autour des axes du plan, ce qui donne un total de dix-huit degrés de liberté pour l'élément SB6-18.

La façon dont l'élément SB6-18 est conçu repose sur une combinaison du comportement des membranes et de la flexion, permettant ainsi une description plus précise de la façon dont les plaques se comportent, notamment lorsque les effets des membranes et de la flexion interagissent.

Pour améliorer la précision de la modélisation de la flexion, l'élément SB6-18 utilise l'approche du triangle de Kirchhoff discret, ou DKT, appliquée aux faces triangulaires de l'élément prismatique. Cette approche aide à améliorer les performances numériques de l'élément SB6-18 et à réduire les problèmes numériques, comme le phénomène de verrouillage en cisaillement.

Grâce à ces caractéristiques, l'élément SB6-18 offre une bonne précision et une stabilité numérique appréciable, ce qui le rend adapté à l'analyse des plaques minces dans des applications de génie civil, comme les dalles, les planchers et les éléments structuraux soumis à diverses charges.

2.3 Formulation de l'élément SB6-18 :

L'élément SB6-18 est défini dans les axes locaux du plan moyen. Les directions x, y, z sont parallèles aux axes ξ, η, ζ de l'espace de référence. La figure 2.1 montre la géométrie de l'élément de référence SB6-18 et ses points d'intégration. Pour éviter les répétitions, seules les relations qui n'ont pas été mentionnées dans le chapitre précédent sont présentées.

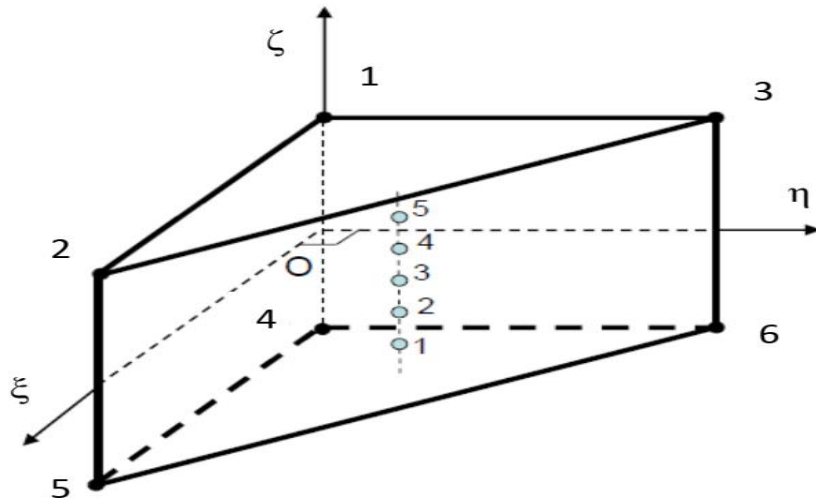


FIGURE 2.1 : Élément de référence SB6-18 et ses points d'intégration.

2.4 Variables cinématiques et interpolation :

L'élément SB6-18 est un élément linéaire iso-paramétrique. Les coordonnées spatiales (x, y, z) sont reliées aux coordonnées du nœud i (x_i, y_i, z_i) au moyen des fonctions de forme N_i par les formules :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^6 x_i N_i(\xi, \eta, \zeta); y = \sum_{i=1}^6 y_i N_i(\xi, \eta, \zeta); z \\ &= \sum_{i=1}^6 z_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Les mêmes fonctions de forme sont utilisées pour définir le champ de déplacement de l'élément u en termes des déplacements nodaux u_i :

$$u = \sum_{i=1}^6 u_i N_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.2)$$

Avec :

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad u_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Pour poursuivre les calculs, on se donne des fonctions de forme iso-paramétriques linéaires N_i (ξ, η, ζ) associées à l'élément prismatique à six nœuds :

$$N(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 - \xi)\eta \\ (1 - \xi)\zeta \\ (1 - \xi)(1 - \eta - \zeta) \\ (1 + \xi)\eta \\ (1 + \xi)\zeta \\ (1 + \xi)(1 - \eta - \zeta) \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

L'origine du repère est souvent confondue avec le coin droit du triangle du plan médian de l'élément. Celui-ci possède un angle droit, comme on peut le voir sur la Figure 2.1. Les fonctions de forme ont pour but de transformer un prisme régulier dans l'espace défini par les axes ξ, η et ζ en un prisme quelconque dans l'espace défini par les axes x, y et z .

Lorsque l'on considère des déplacements petits, on peut découpler les effets de membrane et de flexion. Dans ce cas, les déformations peuvent être caractérisées par l'opérateur de déformation discrétisé de membrane et de flexion.

2.5 Déformation de membrane :

Les déformations de membrane en fonction des déplacements nodaux sont données par :

$$\{e\} = [B_m]\{u_n\} \quad (2.5)$$

Avec :

$$[B_m] = [[B_{m1}], [B_{m2}]] \quad (2.6)$$

Les matrices B_{m1} et B_{m2} représentent l'opérateur de déformation de membrane qui relie le déplacement à la déformation pour les deux faces triangulaires supérieure et inférieure du prisme respectivement, et qui sont définies suivant la formulation de l'élément triangulaire CST.

2.6 Déformation de flexion :

$$\{x\} = [B_f]\{u_n\} \quad (2.7)$$

Avec :

$$[B_f] = \left[[B_{f1}], [B_{f2}] \right] \quad (2.8)$$

Les matrices B_{f1} et B_{f2} représentent l'opérateur de déformation de flexion qui relie le déplacement à la déformation pour les deux faces triangulaires supérieure et inférieure du prisme respectivement, et qui sont définies suivant la formulation de l'élément triangulaire DKT (voir figure 2.2).

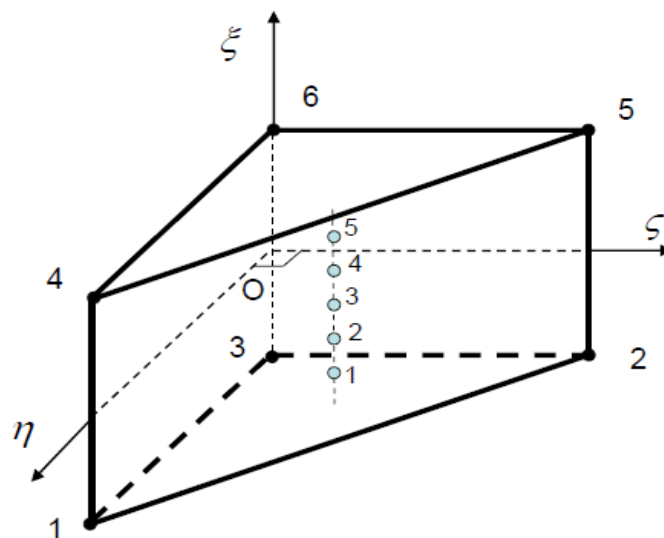


FIGURE 2.2 : Élément SB6-18 : les nœuds d'interpolations pour les deux faces supérieures et inférieures du prisme

inférieure du prisme

2.7 Forme discrétisée de W_{int}^e :

$$W_{int}^e = \langle u_n^* \rangle [K] \{u_n\} \quad (2.9)$$

La matrice de rigidité élémentaire est :

$$[K] = [K_m] + [K_f] \quad (2.10)$$

Les rigidités de membrane et de flexion sont obtenues par intégration numérique en utilisant 5 points d'intégration qui se trouvent sur la même droite suivant l'épaisseur.

Leurs coordonnées (ξ, η, ζ) et leurs poids d'intégration sont les racines du polynôme de Gauss-Legendre données dans le tableau 4.5 :

Pour la membrane :

$$[K_m] = \int_V [B_m]^T [H_m] [B_m] dV \quad (2.11)$$

$$[K_m] = \int_{V_{réf}} ([B_m]^T [H_m] [B_m]) detJ d\xi d\eta d\zeta \quad (2.12)$$

$$[K_m] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_i \omega_j \omega_k ([B_m]^T [H_m] [B_m]) detJ \quad (2.13)$$

Pour la flexion :

$$[K_f] = \int_V [B_f]^T [H_f] [B_f] dV \quad (2.14)$$

$$[K_f] = \int_{V_{réf}} ([B_f]^T [H_f] [B_f]) detJ d\xi d\eta d\zeta \quad (2.15)$$

$$[K_f] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \omega_i \omega_j \omega_k ([B_f]^T [H_f] [B_f] detJ) \quad (2.16)$$

$V_{réf}$: volume de l'élément de référence.

m : représente le nombre de points d'intégration (PI) dans les directions ξ, η, ζ .

Une intégration numérique de type Gauss-Legendre à été utilisée.

Avec H_m et H_f : matrice de comportement homogénéisé de membrane et de flexion.

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

$$[H_m] = \frac{Eh}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson. Les efforts résultants (effort normal et moment de flexion) :

$$[N] = [H_m]\{e\} \quad , \quad [M] = [H_f]\{x\} \quad (2.19)$$

Dans l'objectif d'améliorer le comportement en flexion de l'élément SB6-18, la matrice de rigidité en flexion K_f a été multipliée par un coefficient c qui varie entre les valeurs [0.4 à 0.8], ainsi que la matrice de rigidité de membrane K_m et multipliée par un coefficient c qui varie entre les valeurs [1 à 1.25], Cette technique a été utilisée par [13], [14], et [15].

2.8 Expression de W^e dans le repère global :

Les déplacements dans le repère global U, V, W sont reliés aux quantités locales par :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [Q_1]^T \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

$$[Q_1]^T = \begin{Bmatrix} \langle t_1 \rangle \\ \langle t_2 \rangle \\ \langle n \rangle \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{1Y} & t_{1Z} \\ t_{2X} & t_{2Y} & t_{2Z} \\ n_X & n_Y & n_Z \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Les composantes de $[Q_1]^T$ relatives au triangle de la face supérieure du prisme sont données explicitement par les relations correspondantes. Les composantes de $[Q_2]^T$ relatives au triangle de la face inférieure sont obtenues par les mêmes relations qui définissent $[Q_1]^T$ en remplaçant les nœuds 1, 2, 3 par les nœuds 4, 5, 6.

Soit $\langle u_n \rangle_{glob}$, les variables nodales de l'élément dans le repère global :

$$\langle u_n \rangle_{glob} = \langle \dots : U_i V_i W_i \quad ; \quad i = \text{varie de 1 à 6} \dots \rangle$$

Nous avons donc :

$$\{u_n\} = [T]\{u_n\}_{glob} \quad (2.22)$$

Avec :

$$[T]_{(18 \times 18)} = \begin{bmatrix} [T_1] & [0] \\ [0] & [T_2] \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$[T_1]_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} [Q_1]^T & [0] & [0] \\ [0] & [Q_1]^T & [0] \\ [0] & [0] & [Q_1]^T \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$[T_2]_{(9 \times 9)} = \begin{bmatrix} [Q_2]^T & [0] & [0] \\ [0] & [Q_2]^T & [0] \\ [0] & [0] & [Q_2]^T \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

La matrice de rigidité et la matrice de masse dans le repère global :

$$[K]_{glob} = [T]^T [K] [T] \quad (2.26)$$

2.9 Conclusion :

En résumé, ce chapitre a présenté une formulation géométrique et mathématique rigoureuse de l'élément fini prismatique SB6-18. L'élément fini prismatique SB6-18 est une solution performante pour la modélisation structurelle, car il combine harmonieusement la théorie des membranes et la théorie de la flexion. La formulation DKT, qui est la formulation Discrete Kirchhoff Triangle, a été adoptée sur les faces supérieure et inférieure du prisme. Cela a permis d'éviter complètement le phénomène de verrouillage numérique. Ainsi, l'élément fini prismatique SB6-18 offre une grande précision, même dans le cas des plaques minces.

De plus, l'établissement des matrices de rigidité élémentaires, associé à l'utilisation de l'intégration numérique de Gauss-Legendre, assure une représentation fidèle des champs de déformation et de contrainte à travers l'épaisseur de l'élément fini prismatique SB6-18. Ce socle théorique et numérique constitue l'outil fondamental qui sera utilisé dans le chapitre suivant pour réaliser les simulations numériques et valider l'efficacité de l'élément fini prismatique SB6-18 par rapport aux modèles de référence.

CHAPITRE 03 : Mise en œuvre numérique

3.1 Introduction :

Cette partie donne une idée générale des méthodes numériques utilisées, en se concentrant particulièrement sur la méthode des éléments finis pour l'analyse des plaques. Cette méthode consiste à convertir un problème physique continu en un modèle numérique discret composé d'éléments reliés entre eux.

Le logiciel MATLAB est utilisé pour mettre en œuvre cette méthode en suivant des étapes de programmation bien organisées. Pour finir, un exemple d'application est présenté pour montrer la démarche globale sans entrer dans les détails des calculs ou des résultats.

3.2 Résumé des méthodes numériques :

Les méthodes numériques sont très importantes dans les domaines de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Elles nous aident à analyser et à résoudre des phénomènes physiques complexes. Les méthodes numériques sont particulièrement utiles dans des domaines comme la mécanique des structures, le transfert de chaleur, la mécanique des fluides et l'électromagnétisme. Elles sont également utilisées dans de nombreuses applications industrielles et technologiques modernes.

L'idée de base des méthodes numériques est de trouver des solutions approximatives très proches de la solution réelle. Cela signifie qu'elles ne cherchent pas une solution exacte, mais plutôt une solution qui est très proche de la réalité. Les méthodes numériques nous permettent de contrôler le degré de précision selon les besoins. Cela se fait en transformant les problèmes physiques continus en un modèle mathématique simplifié que les ordinateurs peuvent résoudre.

Ce processus repose sur un concept appelé la discrétisation. La discrétisation consiste à transformer un domaine continu en un ensemble limité de points ou d'éléments. Cela permet de remplacer les équations différentielles par un système d'équations algébriques. Les ordinateurs peuvent ensuite résoudre ce système à l'aide d'algorithmes numériques précis et efficaces.

Il existe plusieurs méthodes numériques utilisées dans ce contexte. La méthode des éléments finis et la méthode des différences finies sont parmi les plus courantes. La méthode des éléments finis est très utilisée pour l'analyse des structures en raison de sa précision et de sa flexibilité. Elle permet de traiter des géométries complexes et des conditions aux limites variées.

Grâce aux progrès importants des capacités des ordinateurs et des logiciels d'ingénierie, les méthodes numériques sont devenues un outil indispensable dans la conception et la simulation. Elles nous permettent d'étudier le comportement des modèles avant leur réalisation pratique, ce qui réduit les coûts et le temps tout en améliorant la précision des résultats.

Nous allons aborder quatre méthodes principales en analyse numérique. Ces méthodes sont la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies, la méthode des moindres carrés et la méthode des éléments de frontière. Ces méthodes sont parmi les approches les plus importantes utilisées dans la modélisation numérique et la résolution des équations qui gouvernent les phénomènes physiques.[16]

- Méthode des éléments finis (MEF) :

La méthode des éléments finis est une technique numérique très importante et très puissante utilisée pour analyser les structures, notamment dans le génie civil, la mécanique et l'ingénierie en général. Elle a été créée pour offrir une alternative efficace aux solutions analytiques classiques, qui peuvent devenir impossibles ou très compliquées à appliquer lorsqu'il s'agit de géométries complexes, de matériaux non homogènes ou de conditions de chargement complexes.

Le principe de base de cette méthode consiste à diviser un domaine continu, comme une plaque, un pont ou un solide tridimensionnel, en petites parties simples appelées éléments finis. Ces éléments finis sont reliés entre eux par des points appelés nœuds. Cette étape est appelée maillage et est essentielle pour obtenir des résultats précis.

À l'intérieur de chaque élément, on utilise des fonctions mathématiques appelées fonctions de forme pour représenter le comportement de l'élément. Ces fonctions permettent de calculer le champ physique, comme le déplacement, la contrainte ou la température, en utilisant uniquement les valeurs aux nœuds. Cela simplifie considérablement le problème. Ensuite, on applique des principes physiques fondamentaux, tels que le principe d'équilibre, le principe variationnel de l'énergie ou le principe de l'énergie potentielle minimale.

Cela conduit à un système d'équations algébriques linéaires sous forme matricielle, qui peut être exprimé de manière générale.

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (3. 1)$$

où:

[K] représente la matrice de rigidité globale du système, traduisant la résistance de la structure à la déformation,

{U} est le vecteur des déplacements nodaux inconnus,

{F} est le vecteur des forces externes appliquées.

Après assemblage des contributions de tous les éléments, on obtient un système global qui peut être résolu par des méthodes numériques telles que l'élimination de Gauss ou des algorithmes matriciels implémentés dans des logiciels comme MATLAB ou ANSYS .

Cette méthode présente plusieurs avantages importants:

- elle permet de traiter des géométries très complexes,
- elle est adaptée aux matériaux hétérogènes ou anisotropes,
- elle offre une grande précision après raffinement du maillage,
- elle est largement utilisée dans l'analyse des plaques, poutres, coques, le transfert thermique et même les phénomènes électromagnétiques.

Grâce à ces caractéristiques, la méthode des éléments finis est devenue un outil fondamental de la modélisation et de la simulation numérique en ingénierie moderne [17].

-Méthode des éléments de frontière (BEM) :

La méthode des éléments de frontière est basée sur une idée simple : elle transforme un problème physique complexe en un problème plus simple qui ne concerne que les frontières du domaine. Cette transformation utilise des relations intégrales dérivées des équations qui régissent le problème, comme les équations d'équilibre ou de Laplace. Cela signifie que seul le contour du domaine doit être discrétisé, et non tout le volume, ce qui réduit le nombre d'équations et l'effort de calcul nécessaires.

Cette méthode utilise des solutions fondamentales, qui représentent la réponse d'un milieu infini à une excitation ponctuelle. Grâce à ces solutions, il est possible d'exprimer les grandeurs physiques à l'intérieur du domaine, comme les déplacements ou les potentiels, uniquement en fonction des valeurs définies sur la frontière.

La méthode des éléments de frontière présente plusieurs avantages importants. Elle réduit la dimension du problème, ce qui la rend plus facile à résoudre. Elle est également adaptée aux domaines infinis ou semi-infinis, ce qui est utile pour les problèmes où les frontières ne sont

pas clairement définies. De plus, elle offre une précision élevée au niveau des frontières, ce qui est crucial pour de nombreux problèmes physiques. Cependant, la méthode des éléments de frontière a également certaines limites. Elle peut avoir du mal à traiter les matériaux non homogènes ou les comportements non linéaires, et le calcul des intégrales singulières peut être complexe.[18]

-Méthode des moindres carrés :

La méthode des moindres carrés est une approche mathématique importante utilisée pour traiter les données et construire des modèles. Elle cherche à minimiser la somme des carrés des écarts entre les valeurs théoriques et les valeurs expérimentales pour obtenir la meilleure représentation des phénomènes étudiés. La méthode des moindres carrés est très utilisée pour identifier les paramètres, ajuster les modèles mathématiques et analyser les données expérimentales, en particulier lorsque les relations analytiques sont imprécises ou inexistantes.

Les méthodes numériques occupent une place centrale dans l'ingénierie moderne. Elles permettent de résoudre des problèmes complexes qui sont difficiles à traiter avec les méthodes analytiques classiques, comme les problèmes de transfert de chaleur et de mécanique des structures. La méthode des éléments finis est l'une des méthodes numériques les plus importantes. Elle consiste à diviser le domaine en petits éléments, à les résoudre localement, puis à les assembler pour obtenir une solution globale approximative. La méthode des éléments finis a montré son efficacité dans l'analyse des structures comme les poutres, les plaques et les coques. Elle est donc un outil essentiel pour la simulation numérique et la conception en ingénierie.[19]

La méthode des différences finies (FDM) :

La méthode des différences finies (FDM) est l'une des principales méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations différentielles décrivant les phénomènes physiques et ingénieriaux. Elle consiste à remplacer les dérivées par des approximations algébriques basées sur les valeurs de la fonction en des points discrets d'un maillage, transformant ainsi les équations différentielles continues en équations algébriques résolubles numériquement.

Cette méthode repose sur la discrétisation du domaine en un maillage régulier ou irrégulier, en utilisant des schémas de différences (progressives, régressives et centrées) pour approximer les dérivées, le schéma centré étant généralement le plus précis. Elle est utilisée pour résoudre des équations telles que le transfert de chaleur, les équations des ondes et les équations de Laplace et de Poisson.

La méthode des différences finies est largement appliquée en transfert de chaleur et en mécanique des fluides. Elle est appréciée pour sa simplicité de compréhension et de programmation, mais elle reste moins flexible pour les géométries complexes que la méthode des éléments finis, et peut nécessiter un grand nombre de points pour assurer une bonne précision.

De manière générale, cette méthode constitue une base fondamentale en analyse numérique et sert de point d'entrée vers des méthodes plus avancées de simulation en ingénierie [20].

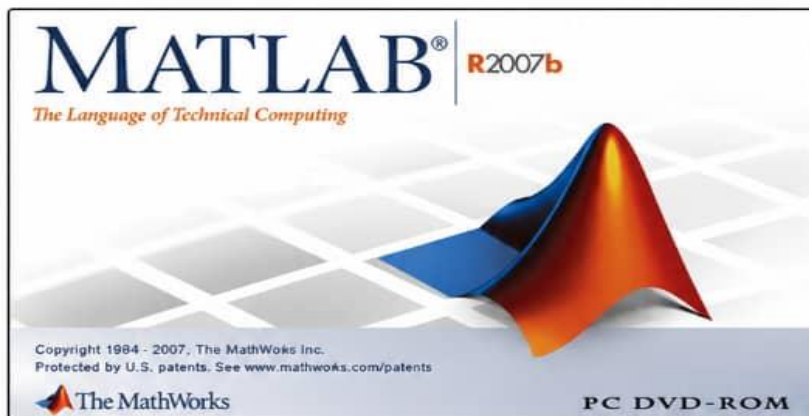
3.3 Programmation de la méthode des éléments finis avec MATLAB :

MATLAB (Matrix Laboratory) est un environnement de calcul numérique développé par la société MathWorks, largement utilisé dans les domaines scientifiques et techniques grâce à sa puissance de calcul, sa simplicité de programmation et sa grande efficacité dans le traitement des problèmes mathématiques complexes [21]. Dans le domaine du génie civil et plus particulièrement dans l'étude des plaques par la méthode des éléments finis, MATLAB joue un rôle fondamental dans la modélisation, la simulation et l'analyse numérique des structures [22]. En effet, cette méthode repose sur la discrétisation du domaine étudié en un ensemble d'éléments finis reliés entre eux par des nœuds, ce qui permet de transformer un problème continu en un système discret d'équations algébriques. MATLAB facilite toutes ces étapes grâce à sa capacité remarquable à manipuler les matrices et les vecteurs, ce qui constitue le cœur même de la méthode des éléments finis.

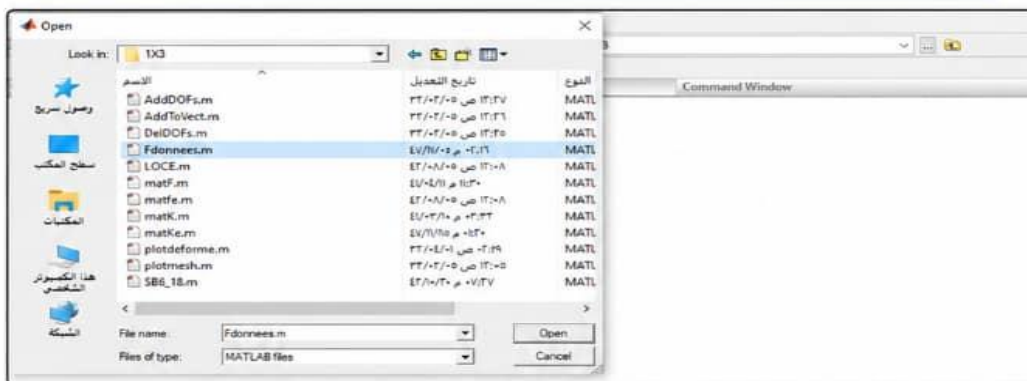
Ainsi, MATLAB permet tout d'abord de définir la géométrie de la plaque en introduisant les coordonnées des nœuds et la connectivité des éléments, puis de construire les matrices de rigidité élémentaires correspondant à chaque élément. Ces matrices sont ensuite assemblées pour former la matrice globale de rigidité du système structural, qui représente le comportement mécanique global de la plaque sous différentes sollicitations. Par ailleurs, MATLAB permet l'application des conditions aux limites de manière précise et flexible, qu'il s'agisse d'appuis simples, d'encastres ou de bords libres, en modifiant les matrices et les vecteurs du système afin de respecter les contraintes physiques du problème [22].

Une fois le modèle entièrement défini, MATLAB intervient dans la résolution du système d'équations linéaires de grande taille de la forme $K U = F$, où K représente la matrice globale de rigidité, U le vecteur des déplacements inconnus et F le vecteur des forces appliquées. Grâce à ses algorithmes optimisés et à ses opérateurs matriciels performants, MATLAB permet d'obtenir des solutions numériques précises et rapides même pour des systèmes de grande dimension

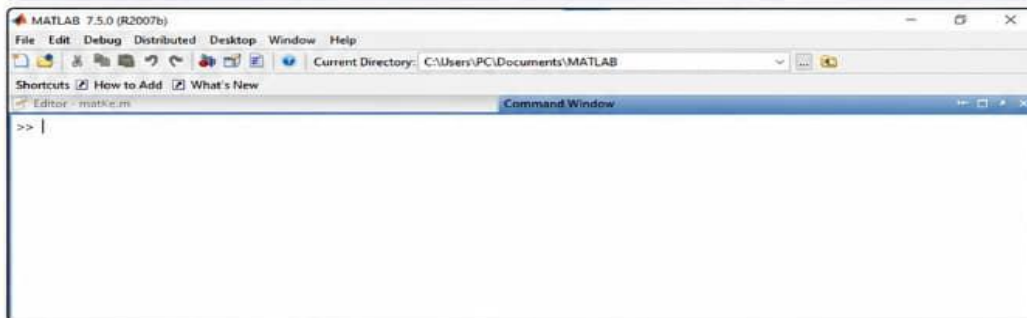
[21]. En outre, MATLAB offre des outils avancés de post-traitement permettant l'exploitation et la visualisation des résultats obtenus, notamment à travers la représentation des déplacements, des contraintes et des moments fléchissants sous forme de graphes bidimensionnels et tridimensionnels, ce qui facilite grandement l'interprétation physique du comportement de la plaque[23]. Ainsi, MATLAB constitue un outil incontournable dans l'analyse des plaques par la méthode des éléments finis, car il combine à la fois la rigueur mathématique, la rapidité de calcul et la puissance de visualisation.



1) Écran de démarrage de MATLAB 7.5 (R2007b)
L'écran de lancement du logiciel MATLAB.



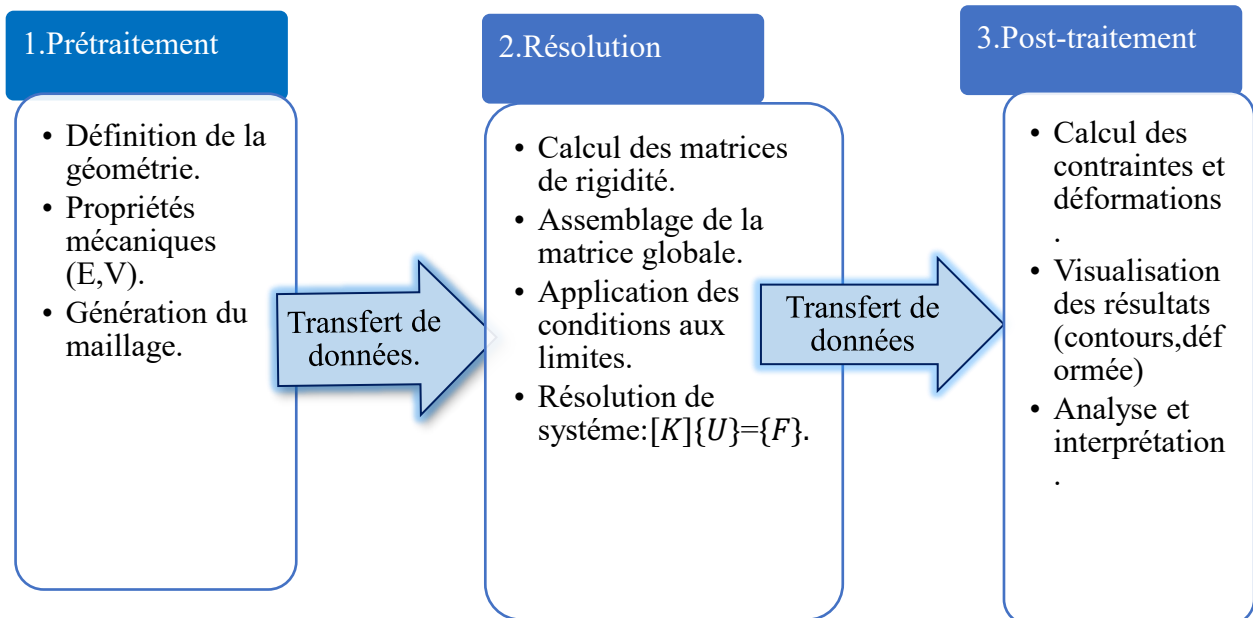
2) Fenêtre d'ouverture d'un fichier MATLAB
Cette fenêtre permet de rechercher et d'ouvrir un fichier script (.m) ou une fonction MATLAB.



3) Fenêtre principale de MATLAB (Command Window)
La fenêtre principale où l'on peut exécuter des commandes MATLAB et voir les résultats.

FIGURE3.1 : Les différentes fenêtres du logiciel MATLAB

-Organigramme de programmation par la méthode des éléments finis sous MATLAB.



3.4 Programme Matlab élément finis SB6-18 :

Tous programmes basés sur la méthode des éléments finis incluent quelques blocs fonctionnels caractéristiques :

- Lecture, vérification et organisation des données décrivant le maillage (nœuds et éléments), les paramètres physiques (module d'élasticité...etc.), les sollicitations et conditions aux limites.
- Construction des matrices et vecteurs élémentaires, puis assemblage de ceux-ci pour former la matrice globale et le vecteur global des sollicitations.
- Résolution du système d'équation après prise en compte des conditions aux limites.
- Impression des résultats après calcul éventuel de variables additionnelles (contrainte, réactions...etc.).

Dans ce qui suit nous allons présenter le détail d'un fichier de données du programme MATLAB SB6-18 pour l'application (4.2).

-Exemple maillage (1.3.1) :

-Dans cette étape, nous avons procédé à la modélisation géométrique de la poutre en la discrétisant (Maillage) en éléments finis de type SB6-18 (un élément prismatique tridimensionnel). Le modèle a été divisé en 06 éléments principaux connectés à un total de 16 nœuds, comme illustré dans les Figures (3.1) et (3.2). Nous avons défini les coordonnées spatiales (X, Y, Z) de chaque nœud et établi le tableau de connectivité reliant chaque élément à ses nœuds respectifs, conformément aux Tableaux (3.1) et (3.2).

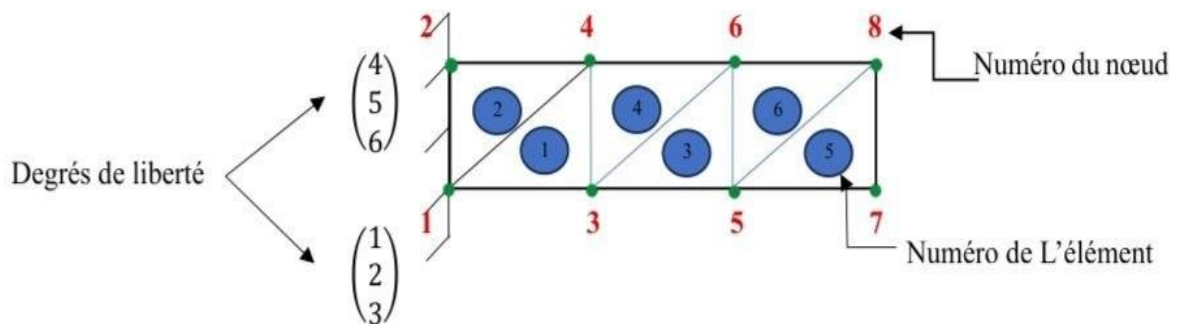


FIGURE3.2 : Représentation schématique de la face supérieure d'une poutre encastree.

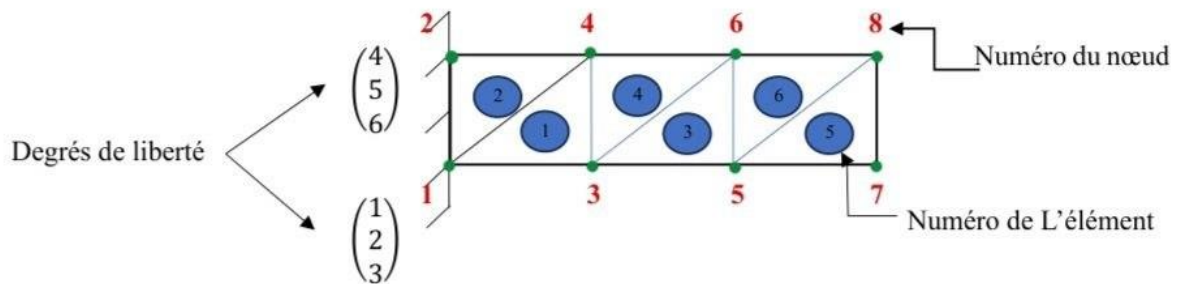


FIGURE3.3 : Représentation schématique de la face inférieure d'une poutre encastree.

Tableau 3.1: Connectivité et numérotation des nœuds par élément.

Élément	Numéros des nœuds					
1	3	4	1	11	12	9
2	2	1	4	10	9	12
3	5	6	3	13	14	11
4	4	3	6	12	11	14
5	7	8	5	15	16	13
6	6	5	8	14	13	16

Tableau 3.2: Coordonnées nodales de l'élément SB6-18.

Noeud	X	Y	Z
1	0	0	0.0500
2	0	0.2000	0.0500
3	2.0000	0	0.0500
4	2.0000	0.2000	0.0500
5	4.0000	0	0.0500
6	4.0000	0.2000	0.0500
7	6.0000	0	0.0500
8	6.0000	0.2000	0.0500
9	0	0	-0.0500
10	0	0.2000	-0.0500
11	2.0000	0	-0.0500
12	2.0000	0.2000	-0.0500
13	4.0000	0	-0.0500
14	4.0000	0.2000	-0.0500
15	6.0000	0	-0.0500
16	6.0000	0.2000	-0.0500

-Lors de l'exécution du code sous l'environnement MATLAB, la matrice de rigidité de chaque élément a été calculée par intégration numérique, puis assemblée pour obtenir la matrice de rigidité globale de la structure. Afin de modéliser l'état d'encastrement, nous avons défini les conditions aux limites visant à bloquer les mouvements au niveau des appuis.

Dans cet exemple d'application, l'encastrement concerne les nœuds (1, 2, 9, 10), ce qui a nécessité l'identification du vecteur des degrés de liberté (DDL) bloqués, noté e comme suit :

$$e = \langle 123456252627282930 \rangle$$

Cette procédure nous a permis d'imposer les contraintes cinématiques nécessaires à la structure, puis de résoudre le système mécanique $[K]\{U\} = \{F\}$ afin d'extraire les valeurs des déplacements finaux pour chaque nœud.

-Dans l'étape finale, nous avons exploité les résultats numériques obtenus pour transformer les déplacements en contraintes et en déformations. Ces résultats ont été représentés graphiquement afin d'analyser le comportement de la poutre sous charge et d'évaluer l'efficacité de l'élément SB6-18 dans la simulation.

3.5 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a présenté l'aspect numérique de l'étude en introduisant les méthodes numériques ainsi que leur importance dans la résolution des problèmes d'ingénierie complexes, notamment dans l'analyse des plaques. L'accent a été mis sur la méthode des éléments finis, en exposant ses principes fondamentaux et ses étapes d'application, ainsi que le rôle du logiciel MATLAB dans la mise en œuvre des modèles numériques.

Enfin, un exemple d'application a été présenté afin d'illustrer la procédure de mise en œuvre du modèle numérique et l'extraction des résultats, ce qui constitue une transition vers le chapitre suivant consacré aux résultats et à la discussion.

CHAPITRE 04 : Résultats et discussions

4.1 Introduction :

Ce chapitre représente le cœur de notre étude, puisqu'il marque la transition entre les développements théoriques et la modélisation mathématique vers l'étape de vérification et de simulation numérique. L'objectif principal consiste à évaluer les performances et l'efficacité de l'élément fini utilisé (SB6-18) à travers une série de tests de référence reconnus standards dans le domaine de l'analyse des structures.

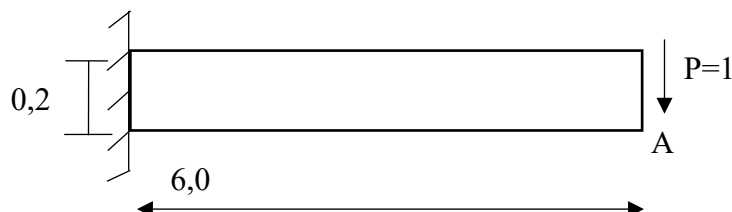
Ces tests ont été soigneusement sélectionnés afin de couvrir les différents aspects du comportement mécanique et de vérifier la capacité de cet élément à surmonter les difficultés numériques classiques, telles que le phénomène de verrouillage, ainsi qu'à étudier sa sensibilité à la distorsion du maillage.

Dans ce contexte, une étude paramétrique a été réalisée, où un ensemble de valeurs étudiées a été représenté par le paramètre C . Celui-ci a été appliqué aux contributions membranaires B_m dans les premiers et deuxièmes tests, ainsi qu'aux contributions en flexion B_f dans le troisième test, afin d'analyser leur influence sur la réponse numérique de l'élément.

4.2 Poutre console de Macneal :

Une poutre en console est considérée, encadrée de manière rigide à l'une de ses extrémités, tandis que l'autre extrémité, libre, est soumise à une force appliquée, comme illustré sur la figure 4.1. Cette figure regroupe l'ensemble des paramètres du problème, notamment la valeur de la charge, le module de Young, le coefficient de Poisson ainsi que l'épaisseur de la poutre. Ce modèle constitue un cas de référence classique en éléments finis, largement utilisé pour évaluer la précision des résultats et valider la performance des formulations numériques. [24]

L'analyse se limite à un chargement de type effort tranchant, de valeur $P=1$.



$E = 1,0 \times 10^7$; $\nu = 0,3$; épaisseur $h = 0,1$

FIGURE 4.1: Poutre console sollicitée à son extrémité par:(1) un effort de cisaillement

Tableau 4.1: Valeurs de convergence du déplacement vertical au point A C=1.0

	Pour C=1.0				
Maillage	1x2	1x3	1x6	1x9	1x12
W	0.0035	0.0099	0.0439	0.0921	0.1447
W _{réf}	0.1081				

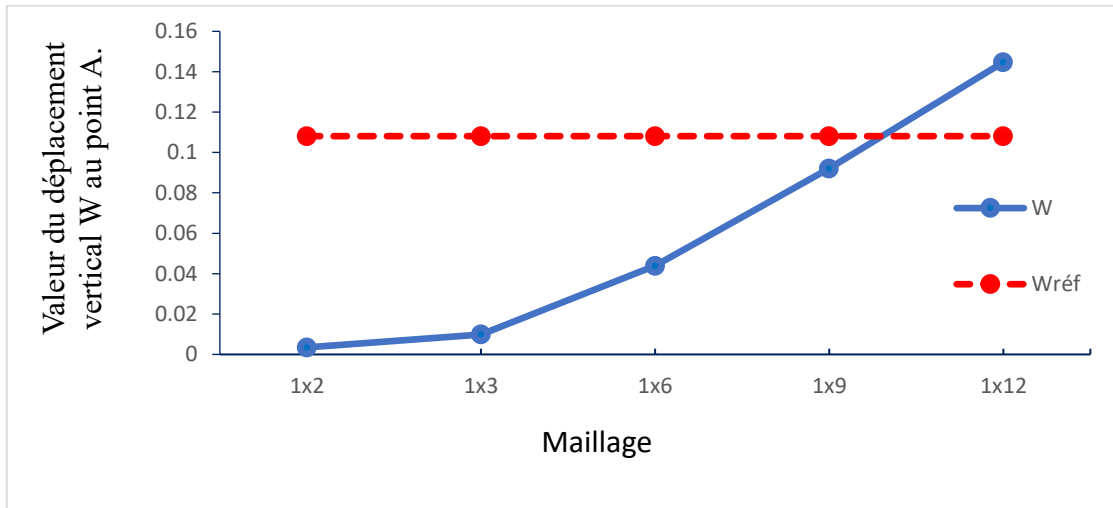


FIGURE 4.2: Courbe de convergence du déplacement vertical au point A :C=1.0

Tableau 4.2: Valeurs de convergence du déplacement vertical au point A C=1.05

	Pour C=1.05				
Maillage	1x2	1x3	1x6	1x9	1x12
W	0.0032	0.0090	0.0398	0.0836	0.1313
W _{réf}	0.1081				

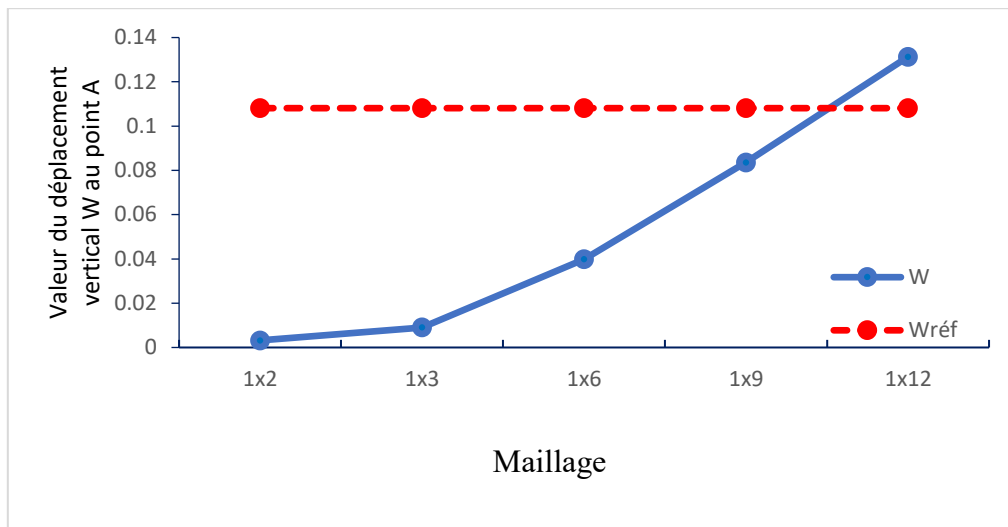


FIGURE 4.3: Courbe de convergence du déplacement vertical au point A :C=1.05

Tableau 4.3: Valeurs de convergence du déplacement vertical au point A C=1.15

Pour C=1.15					
Maillage	1x2	1x3	1x6	1x9	1x12
W	0.0026	0.0075	0.0332	0.0697	0.1094
W _{réf}	0.1081				

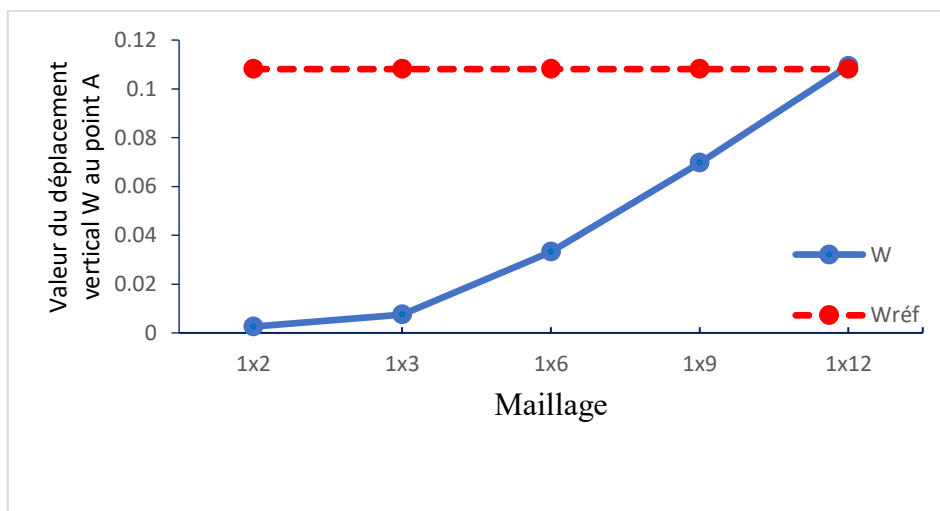


FIGURE 4.4: Courbe de convergence du déplacement vertical au point A :C=1.15

Tableau 4.4: Valeur de déplacement vertical au point A C=1.20

Pour C=1.20					
Maillage	1x2	1x3	1x6	1x9	1x12
W	0.0024	0.0069	0.0305	0.0640	0.1005
W _{réf}	0.1081				

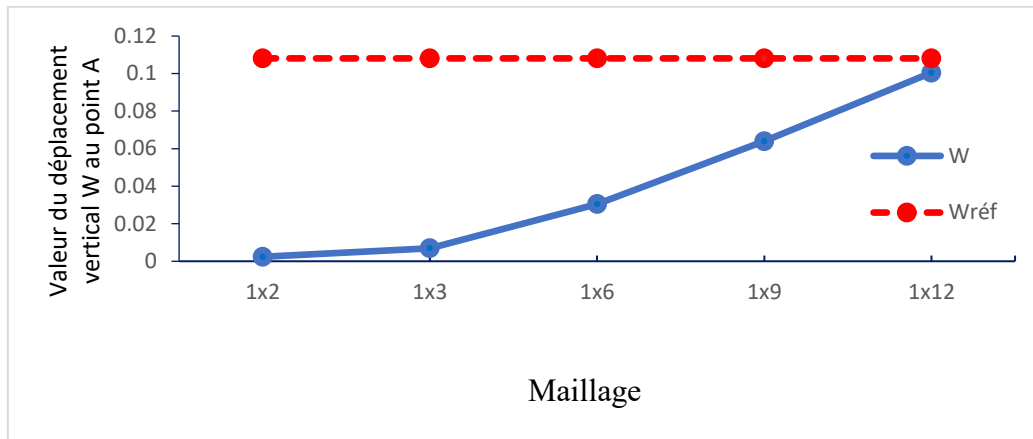


FIGURE 4.5: Courbe de convergence du déplacement vertical au point A :C=1.20

Tableau 4.5: Valeurs du déplacement vertical au point A C=1.25

Pour C=1.25					
Maillage	1x2	1x3	1x6	1x9	1x12
W	0.0022	0.0063	0.0281	0.0590	0.0926
W _{réf}	0.1081				

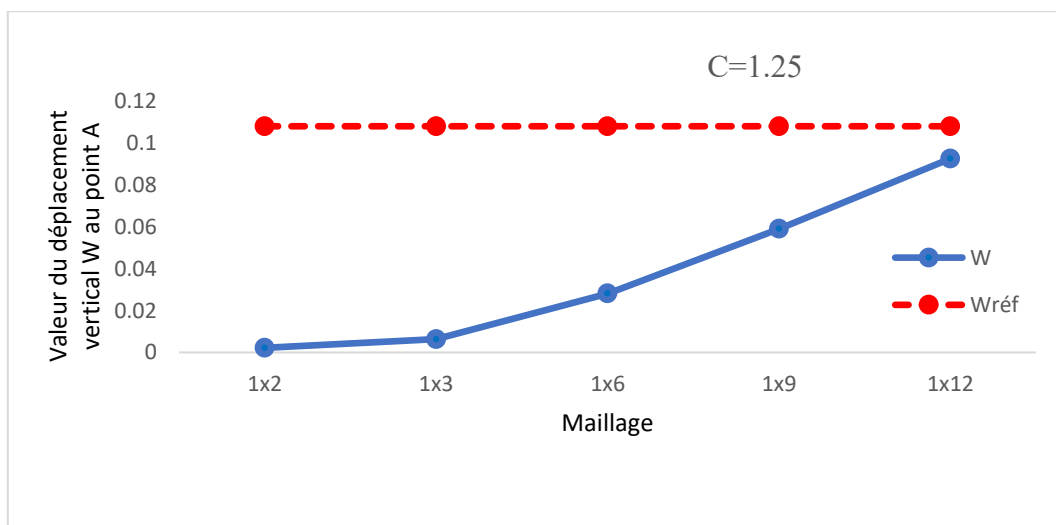


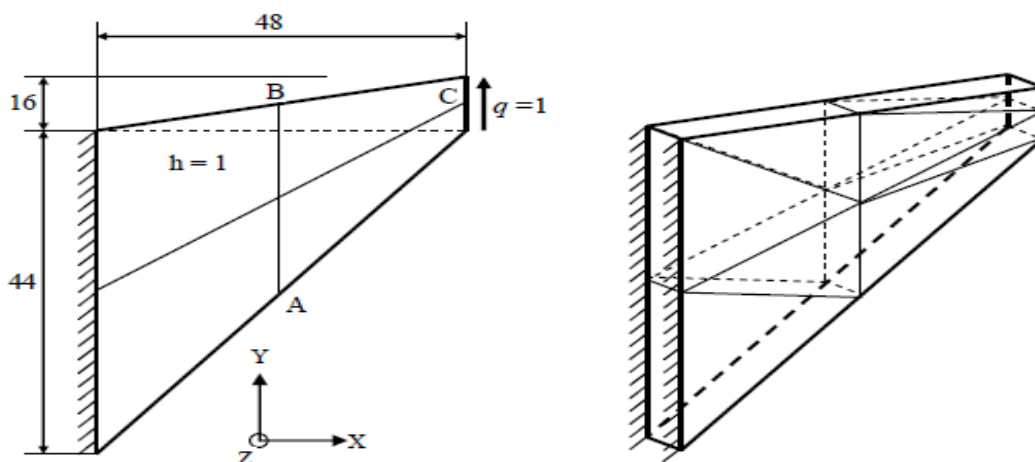
FIGURE 4.6: Courbe de convergence du déplacement vertical au point A :C=1.25

Les courbes obtenues montrent une amélioration progressive des résultats ainsi qu'une convergence vers la solution de référence à mesure que la densité du maillage augmente, ce qui confirme la précision et l'efficacité du modèle numérique. En comparant l'influence des différentes valeurs du paramètre C , il apparaît que la valeur $C = 1.15$ assure la meilleure concordance avec la solution de référence, en particulier au dernier niveau de raffinement du maillage, tandis que les autres valeurs présentent des écarts notables, soit par sous-estimation, soit par surestimation. Par conséquent, cette valeur peut être considérée comme la plus appropriée pour obtenir les résultats les plus précis dans le cadre du test de MacNeal. Par ailleurs, cette analyse montre que l'élément fini SB6-18 a réalisé de bonnes performances en termes de précision et de convergence vers la solution de référence.

4.3 Panneau fuselé :

Le panneau fuselé proposé par Cook et al. ainsi que par Bergan et Felippa.[25] (voir la figure 4.2) est encasté sur le bord gauche et soumis à une charge de cisaillement uniformément répartie le long du bord droit. Cet exemple a pour objectif de déterminer le déplacement vertical au point C. Ce cas test est utilisé afin de vérifier le comportement de l'élément dans des maillages distordus (maillage distordu), ainsi que dans des problèmes dominés par les effets de cisaillement.

Deux maillages différents ont été étudiés, dont l'un est représenté sur la figure 4.2. Les résultats obtenus à l'aide de l'élément SB6-18, présentés dans le tableau 4.2, ont été comparés à la solution de référence proposée par [25] pour un maillage 32×32 .



$E = 1 ; \nu = 1/3 ; h = 1$

Conditions aux limites : $U = V = 0$ (à l'encastrement).

FIGURE 4.7: Panneau fuselé soumis à un effort de cisaillement ; maillage (2 X 2 X 1) X 2

Tableau 4.6: Valeurs du déplacement vertical au point C(C=1.0)

	Pour C=1.0	
Maillage	2x2	4x4
W	17.2492	32.6425
W _{réf}	23.90	

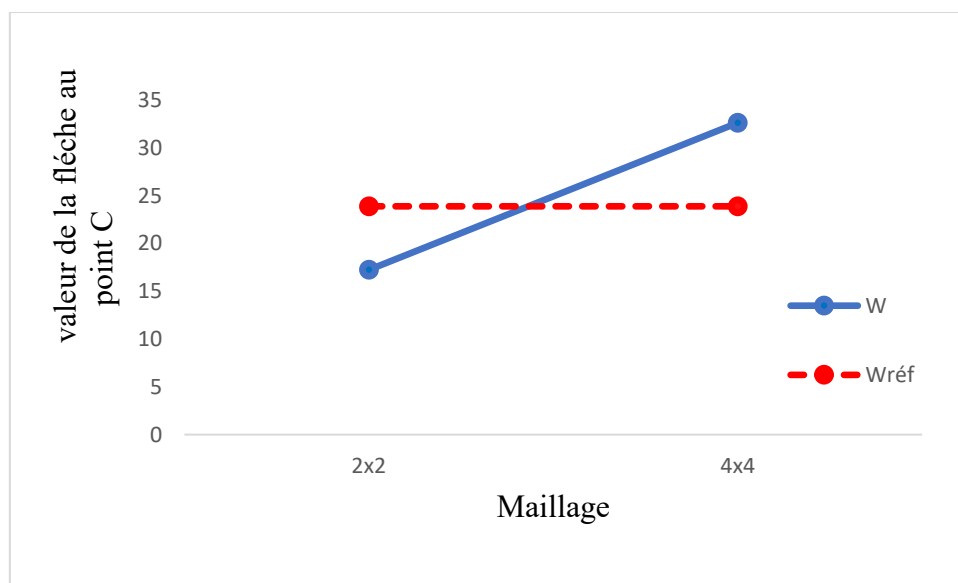


FIGURE 4. 8: Courbe de convergence du déplacement au point C (C=1.0)

Tableau 4.7: Valeurs du déplacement vertical au point C(C=1.05)

	Pour C=1.05	
Maillage	2x2	4x4
W	15.6455	29.6077
W _{réf}	23.90	

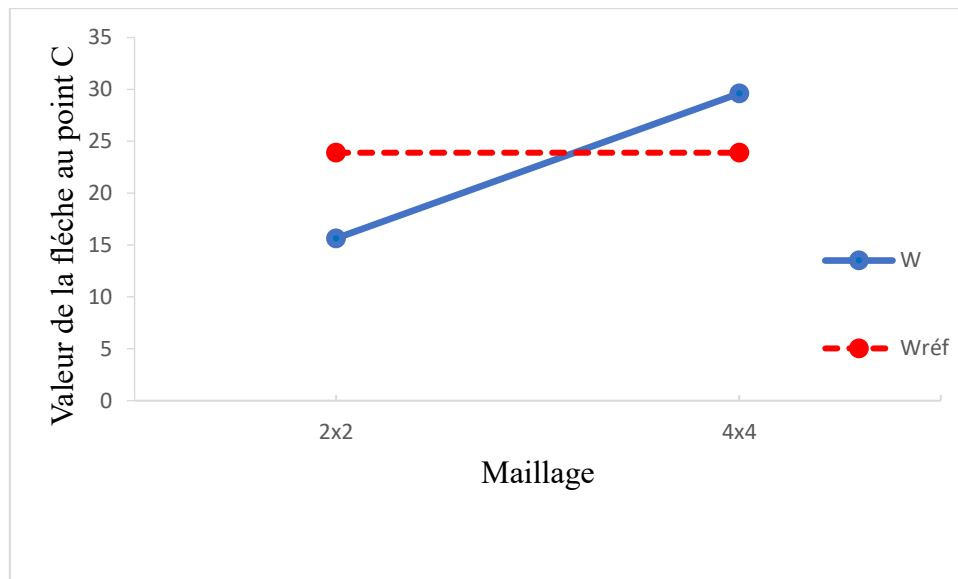


FIGURE 4.9: Courbe de convergence du déplacement au point C (C=1.05)

Tableau 4.8: Valeurs du déplacement vertical au point C(C=1.15)

Pour C=1.15		
Maillage	2x2	4x4
W	13.0428	24.6824
W _{réf}	23.90	

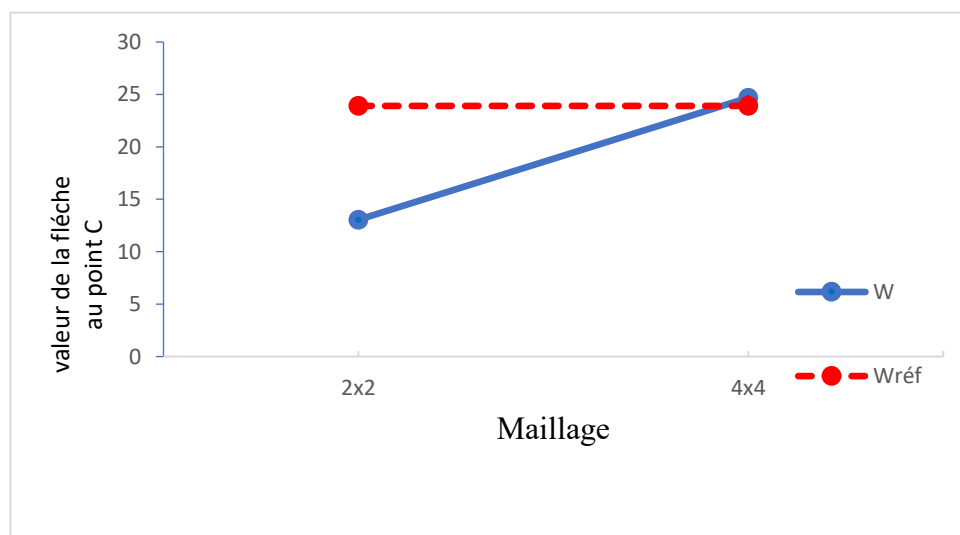


FIGURE 4.10: Courbe de convergence du déplacement au point C (C=1.15)

Tableau 4.9: Valeurs du déplacement vertical au point C(C=1.20)

Pour C=1.20		
Maillage	2x2	4x4
W	11.9786	22.6684

$W_{réf}$	23.90
-----------	-------

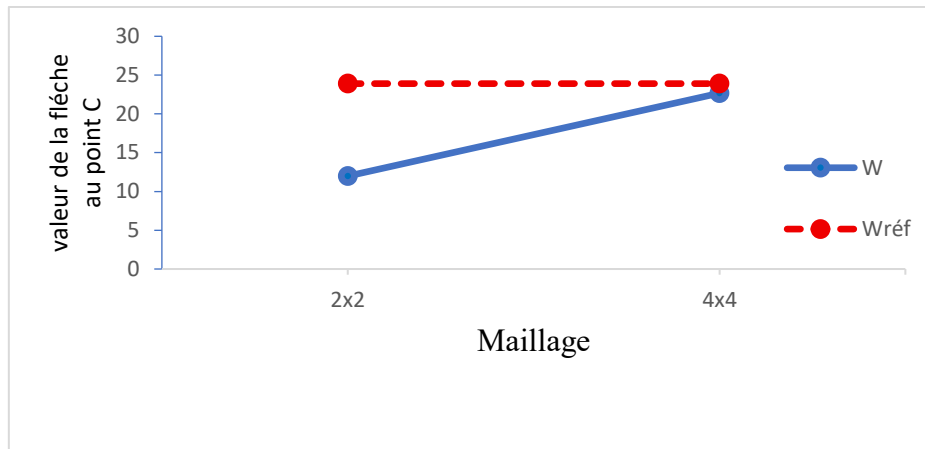


FIGURE 4.11: Courbe de convergence du déplacement au point C (C=1.20)

Tableau 4.10: Valeurs du déplacement vertical au point C(C=1.25)

Pour C=1.25		
Maillage	2x2	4x4
W	11.0395	20.8912
$W_{réf}$	23.90	

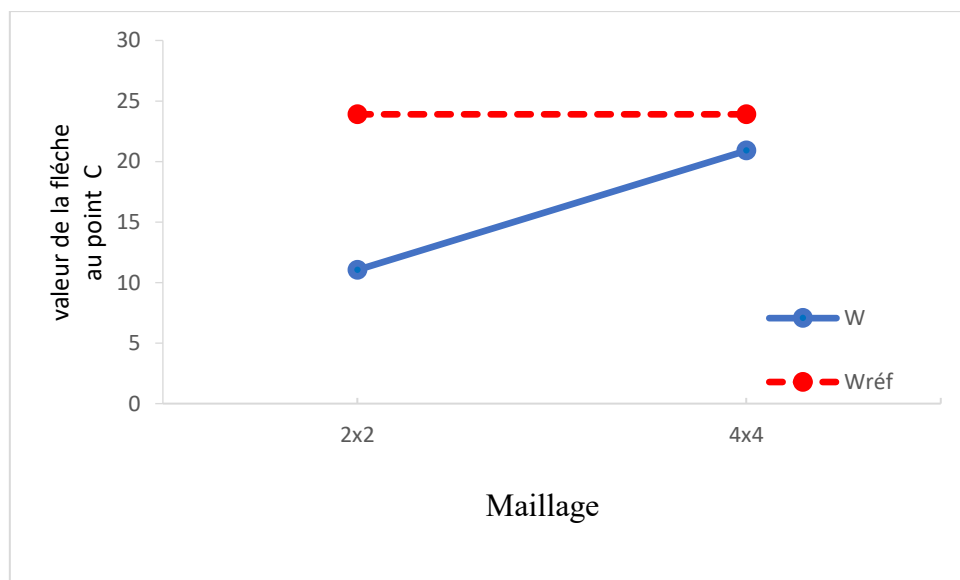


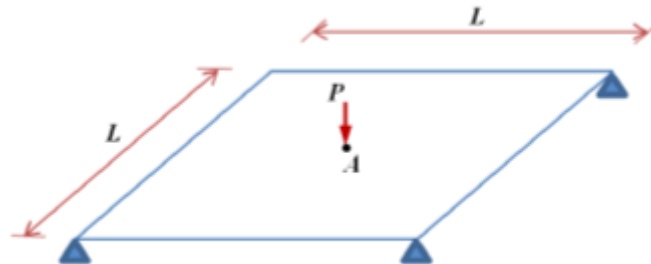
FIGURE 4.12: Courbe de convergence du déplacement au point C (C=1.25)

On conclut de ces résultats que l'élément fini SB6-18 a montré une grande précision ainsi qu'une capacité remarquable de convergence vers la solution de référence lorsque la densité du maillage augmente. En ce qui concerne le choix optimal de la valeur du coefficient c on constate que les deux valeurs $c=1.15$ et $c=1.20$ assurent une bonne convergence. Plus important encore, cet élément a conservé la stabilité de ses résultats malgré la déformation géométrique de la plaque, ce qui confirme son efficacité dans la réduction du phénomène de verrouillage en cisaillement. Cela en fait un élément fiable et performant pour l'analyse des plaques de géométrie non régulière.

4.4 Plaque carrée soumise à une charge concentrée :

Dans cet exemple, on étudie une plaque carrée simplement appuyée, soumise à une charge concentrée de valeur $P=10$ kN (voir figure 4.3). Ce cas test a déjà été analysé par Argyris et al. [26]

La plaque est modélisée à l'aide de l'élément SB6-18 en utilisant plusieurs maillages. Les valeurs du déplacement au centre de la plaque (point A) sont relevées et présentées dans des tableaux. Une solution de référence est également considérée, obtenue à partir d'un maillage fin de type (48×48) .



$L = 10$ m ; épaisseur $h = 0,1$ m ; $E = 10.92 \times 10^5$ KN/m² ; $\nu = 0,3$

FIGURE 4.13: Plaque carrée simplement appuyée soumise à une charge concentrée
(la géométrie et les données)

Tableau 4.11: Valeurs du déplacement W au point A ($C=0.4$)

	Pour $C=0.4$			
Maillage	6x6	12x12	20x20	22x22
W	8.1196	2.5852	1.0881	0.9165
$W_{\text{réf}}$	0.3910			

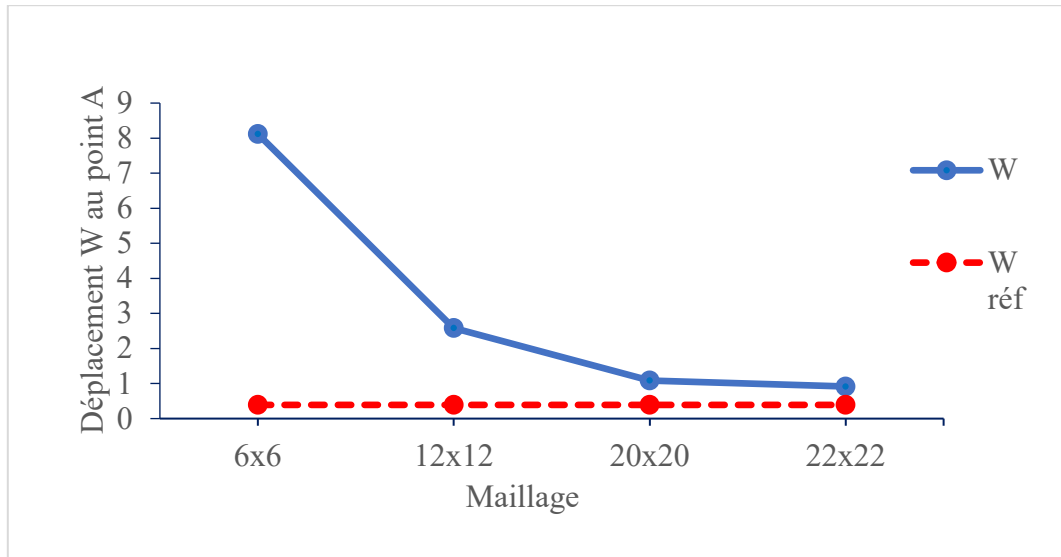


FIGURE 4.14: Courbe de convergence du déplacement W au point A(C=0.4)

Tableau 4.12: Valeurs du déplacement W au point A (C=0.5)

	Pour C=0.5			
Maillage	6x6	12x12	20x20	22x22
W	5.1965	1.6555	0.6917	0.5865
W _{réf}	0.3910			

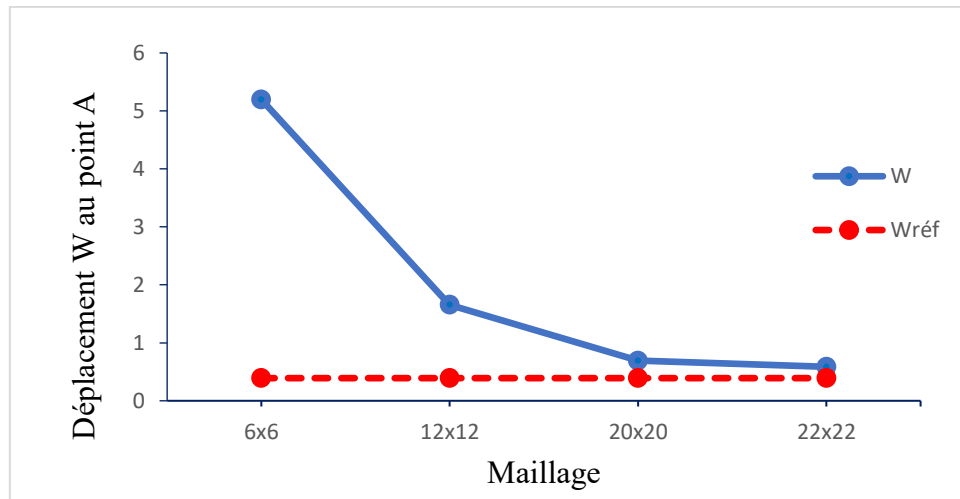


FIGURE 4.15: Courbe de convergence du déplacement W au point A(C=0.5)

Tableau 4.13: Valeurs du déplacement W au point A (C=0.6)

	Pour C=0.6			
Maillage	6x6	12x12	20x20	22x22
W	3.5134	1.1187	0.4677	0.3966

$W_{réf}$	0.3910
-----------	--------

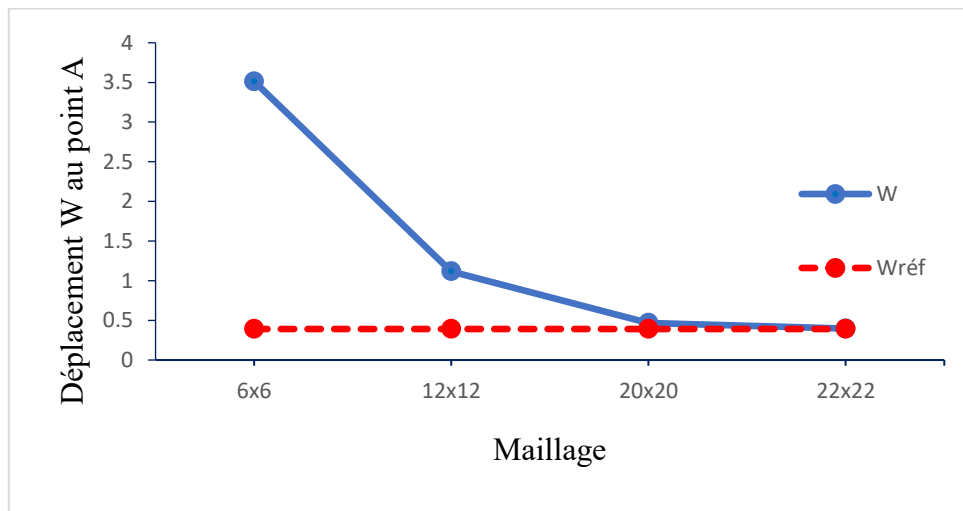


FIGURE 4.16: Courbe de convergence du déplacement W au point A(C=0.6)

Tableau 4.14: Valeurs du déplacement W au point A (C=0.7)

Pour C=0.7				
Maillage	6x6	12x12	20x20	22x22
W	2.6513	0.8442	0.3529	0.2993
$W_{réf}$	0.3910			

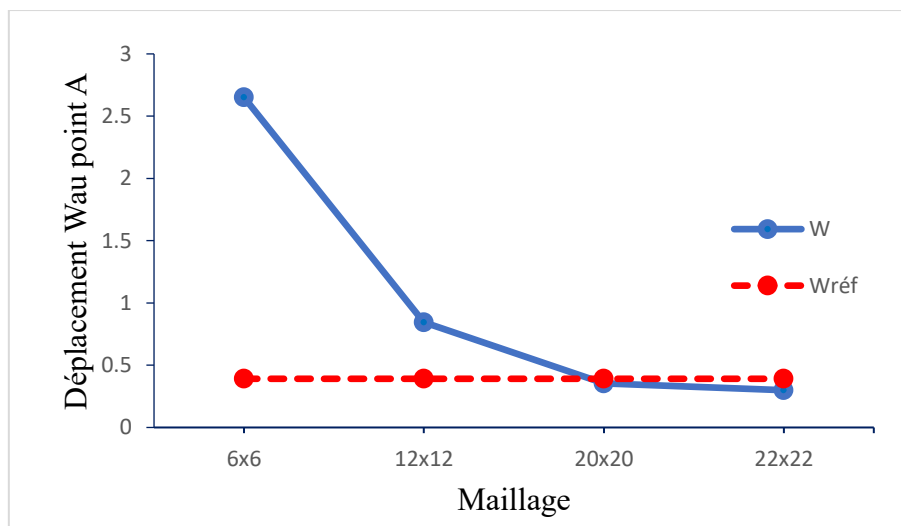
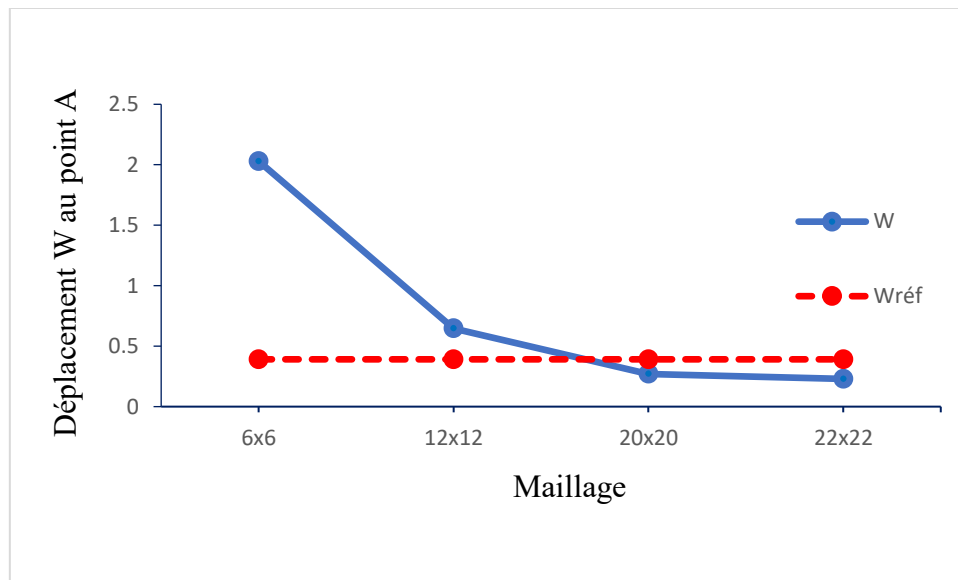


FIGURE 4.17: Courbe de convergence du déplacement W au point A(C=0.7)

Tableau 4.15: Valeurs du déplacement W au point A ($C=0.8$)

Pour $C=0.8$				
Maillage	6x6	12x12	20x20	22x22
W	2.0299	0.6463	0.2702	0.2291
$W_{\text{réf}}$	0.3910			

**FIGURE 4.18:** Courbe de convergence du déplacement W au point A ($C=0.8$)

Les résultats de la modélisation à l'aide de l'élément SB6-18 montrent une convergence progressive du déplacement (W) vers la solution de référence ($W_{\text{réf}} = 0.3910$) avec le raffinement du maillage. Ce comportement confirme l'efficacité de l'élément, à condition de choisir le paramètre optimal $C = 0.6$, qui garantit une précision maximale sans sous-estimation de la valeur réelle. En revanche, les écarts observés pour les autres valeurs de C mettent en évidence la sensibilité de l'élément SB6-18 aux phénomènes de sur-flexibilité ou de rigidité excessive.

4.5 Conclusion :

De manière générale, les résultats numériques obtenus ont montré que l'élément SB6-18 possède de bonnes performances numériques et une fiabilité appréciable dans l'analyse des plaques, en assurant une représentation précise du comportement mécanique dans les différents cas étudiés.

Les résultats ont également mis en évidence un comportement de convergence clair, se traduisant par une amélioration de la précision des déplacements calculés avec l'augmentation de la

densité du maillage et leur rapprochement des valeurs de référence, ce qui confirme l'efficacité du modèle numérique adopté.

L'étude paramétrique effectuée sur le coefficient d'amélioration (C) a mis en évidence l'influence importante de ce paramètre sur les comportements membranaire et flexionnel de l'élément. Les analyses réalisées dans le cadre des deux tests ou le comportement de l'élément et membranaire montrent que certaines valeurs de (C), notamment ($C = 1.15$) et ($C = 1.20$), assurent une bonne concordance avec les solutions de référence ainsi qu'une convergence stable. Dans le cas où le comportement est flexionnel, la valeur ($C = 0.6$) s'est révélée la plus appropriée pour obtenir une précision optimale du déplacement sans sous-estimation des résultats.

Ainsi, ce travail confirme que l'élément fini SB6-18 représente un outil numérique fiable, précis et performant pour l'analyse des plaques. Les améliorations apportées aux matrices de rigidité contribuent significativement à l'optimisation de son comportement numérique et ouvrent des perspectives intéressantes pour l'étude de structures plus complexes en génie civil et en mécanique des structures.

CONCLUSION GENERALE

Le présent travail a porté sur le développement et l'évaluation d'un élément fini tridimensionnel de type solide-coque, noté SB6-18, implémenté sous l'environnement MATLAB. Cet élément, basé uniquement sur des degrés de liberté de translation et utilisant une formulation de type plaque (DKT), a été étudié à travers plusieurs applications numériques afin d'évaluer sa précision, sa stabilité et ses capacités de convergence.

Les résultats obtenus ont montré que l'élément SB6-18 présente de bonnes performances numériques et permet une représentation satisfaisante du comportement mécanique des plaques dans les différents cas étudiés. Les tests réalisés ont mis en évidence une convergence progressive des solutions vers les valeurs de référence avec le raffinement du maillage, ce qui confirme la robustesse et l'efficacité du modèle numérique adopté.

L'étude paramétrique menée sur le coefficient d'amélioration C a également démontré l'influence importante de ce paramètre sur les comportements membranaire et flexionnel de l'élément. Les valeurs $C=1.15$ et $C=1.20$ ont donné les meilleurs résultats pour le comportement membranaire, tandis que la valeur $C=0.6$ s'est révélée la plus adaptée dans les cas de flexion. Ces améliorations ont permis d'optimiser les matrices de rigidité et d'accroître la précision globale de l'élément.

En définitive, ce mémoire confirme que l'élément fini SB6-18 constitue un outil numérique fiable, précis et performant pour l'analyse des plaques. Les résultats obtenus ouvrent des perspectives intéressantes pour l'extension de cette approche à des structures plus complexes et à des applications avancées en génie civil et en mécanique des structures.

Références bibliographiques

- [1] S. P. Timoshenko & Woinowsky-Krieger, S. Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, 2nd Edition, 1959.
- [2] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, The Finite Element Method. Elsevier, 2013.
- [3] Bachir LABIODH, Contribution à l'étude numérique des coques par des éléments de type solide-coque, applications linéaires et non linéaires, Université Mohamed Khider – Biskra, 2021
- [4] J. N. Reddy, Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, 2nd ed. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2007.
- [5] K. J. Bathe, Finite Element Procedures. Prentice Hall, 1996.
- [6] Reissner, E., The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, 1945.
- [7] Mindlin, R. D. (1951). "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates." Journal of Applied Mechanics, ASME.
- [8] J. N. Reddy. (1984). A simple higher-order theory for laminated composite plates. Journal of Applied Mechanics, 51, 745–752.
- [9] J.-C. Craveur, Modélisation des structures par éléments finis. Dunod, 2016.
- [10] W. H. Wittrick, Analytical, three-dimensional elasticity solutions to some plate problems, and some observations on Mindlin's plate theory, International Journal of Solids and Structures, vol. 23, no. 4, pp. 441–464, 1987.
- [11] K. Bhaskar, Analysis of Plates: Classical and Shear Deformation Theories. CRC Press, 2021.
- [12] T. J. R. Hughes, The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Dover Publications, 2000.
- [13] Wang P. Solid-shell finite element for quasi-static and dynamic analysis of 3D thin structures: Application to sheet metal forming processes. Thèse de doctorat de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers ParisTech - Campus de Metz, 2017.
- [14] Trinh VD. Formulation, développement et validation d'éléments finis de type coques volumiques sous intégrés Stabilisés utilisables pour des

problèmes a cinématique et comportement non linéaires. Thèse de doctorat de l'École Doctorale, ENSAM-Paris, 2009.

[15] Flanagan D, Belytschko T. A Uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 17, p. 679-706, 1981.

[16] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 10th ed. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 2011.

[17] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, and R. J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4th ed. New York, NY, USA: John Wiley & Sons, 2001.

[18] M. H. Aliabadi, *The Boundary Element Method: Applications in Solids and Structures*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2002.

[19] C. L. Lawson and R. J. Hanson, *Solving Least Squares Problems*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1995.

[20] J. C. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, 2nd ed. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2004.

[21] A. Quarteroni, F. Saleri, and P. Gervasio, *Calcul scientifique : Cours, exercices et problèmes corrigés avec MATLAB*. Paris, France: Springer Paris, 2010.

[22] G. Dhatt, J. L. Batoz, and G. Touzot, *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Québec, Canada: Les Presses de l'Université Laval, 1981.

[23] A. J. M. Ferreira, *MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures*. Dordrecht, Netherlands: Springer, 2008.

[24] Macneal H, Harder L. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite elements in Analysis and Design*, 1:3-20, 1985.

[25] Bergan PG and Fellipa CA. "A triangular membrane element with rotational

[26] Argyris J, Papadrakakis M, Stefanou G. Stochastic finite element analysis of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 4781-4804, 2002.

Annexes

1: Résultats du test de la poutre console de MacNeal (Maillage 1×2) avec C = 1

Nombre des elements total :4

Nombre des noeuds total : 12

Déplacements nodaux :

Noeud	U	V	W
1	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
2	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
3	-0.00006988	+0.00347601	+0.00000000
4	+0.00011570	+0.00000136	+0.00000000
5	-0.00006168	+0.00810801	+0.00000000
6	+0.00019992	+0.00347784	+0.00000000
7	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
8	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
9	+0.00003494	-0.00173801	+0.00000000
10	-0.00005785	-0.00000068	+0.00000000
11	+0.00003084	-0.00405400	+0.00000000
12	-0.00009996	-0.00173892	+0.00000000

2 : Résultats du test de la poutre console de MacNeal (Maillage 1×3) avec C = 1

Nombre des elements total :6

Nombre des noeuds total : 16

Déplacements nodaux :

Noeud	U	V	W
1	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
2	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
3	-0.00014464	+0.00380643	+0.00000000
4	+0.00018995	+0.00000203	+0.00000000
5	-0.00021238	+0.00988880	+0.00000000
6	+0.00034876	+0.00380912	+0.00000000
7	-0.00020425	+0.01672952	+0.00000000
8	+0.00043270	+0.00989151	+0.00000000
9	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
10	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
11	+0.00007232	-0.00190321	+0.00000000
12	-0.00009497	-0.00000101	+0.00000000
13	+0.00010619	-0.00494440	+0.00000000
14	-0.00017438	-0.00190456	+0.00000000
15	+0.00010213	-0.00836476	+0.00000000
16	-0.00021635	-0.00494575	+0.00000000

3 : Résultats du test de la poutre console de MacNeal (Maillage 1×6) avec $C = 1.15$

Nombre des elements total :6

Nombre des noeuds total : 16

Déplacements nodaux :

Noeud	U	V	W
1	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
2	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
3	-0.00025976	+0.00293145	+0.00000000
4	+0.00029210	+0.00000294	+0.00000000
5	-0.00046582	+0.00824586	+0.00000000
6	+0.00056191	+0.00293522	+0.00000000
7	-0.00061894	+0.01541285	+0.00000000
8	+0.00077930	+0.00824964	+0.00000000
9	-0.00071913	+0.02390308	+0.00000000
10	+0.00094376	+0.01541663	+0.00000000
11	-0.00076639	+0.03318726	+0.00000000
12	+0.00105529	+0.02390686	+0.00000000
13	-0.00076072	+0.04273610	+0.00000000
14	+0.00111389	+0.03319104	+0.00000000
15	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
16	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
17	+0.00012988	-0.00146573	+0.00000000
18	-0.00014605	-0.00000147	+0.00000000
19	+0.00023291	-0.00412293	+0.00000000
20	-0.00028096	-0.00146761	+0.00000000
21	+0.00030947	-0.00770642	+0.00000000
22	-0.00038965	-0.00412482	+0.00000000
23	+0.00035956	-0.01195154	+0.00000000
24	-0.00047188	-0.00770831	+0.00000000

25	+0.00038319	-0.01659363	+0.00000000
26	-0.00052764	-0.01195343	+0.00000000
27	+0.00038036	-0.02136805	+0.00000000
28	-0.00055695	-0.01659552	+0.00000000

4 : Résultats du test du panneau fuselé du (Maillage 2x2) avec C=1.25

Nombre des elements total :8

Nombre des noeuds total : 18

Déplacements nodaux :

Nœud	U	V	W
1	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
2	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
3	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
4	+2.29052297	-4.56652589	+0.00000000
5	-0.37657887	-4.43950552	+0.00000000
6	-4.33686081	-4.67563228	+0.00000000
7	+3.53848751	-15.19713539	+0.00000000
8	+0.19042845	-15.64548907	+0.00000000
9	-3.76658149	-15.81093592	+0.00000000
10	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
11	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
12	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
13	-1.14526149	+2.28326295	+0.00000000
14	+0.18828943	+2.21975276	+0.00000000
15	+2.16843040	+2.33781614	+0.00000000
16	-1.76924375	+7.59856769	+0.00000000
17	-0.09521423	+7.82274453	+0.00000000
18	+1.88329074	+7.90546796	+0.00000000

5 : Résultats du test du panneau fuselé du (Maillage 2x2) avec C=1.15

Nombre des elements total :8

Nombre des noeuds total : 18

Déplacements nodaux

Noeud	U	V	W
1	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
2	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
3	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
4	+1.90949080	-3.80687697	+0.00000000
5	-0.31393437	-3.70098664	+0.00000000
6	-3.61541704	-3.89783334	+0.00000000
7	+2.94985442	-12.66906750	+0.00000000
8	+0.15875037	-13.04283682	+0.00000000
9	-3.14000460	-13.18076133	+0.00000000
10	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
11	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
12	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
13	-0.95474540	+1.90343849	+0.00000000
14	+0.15696718	+1.85049332	+0.00000000
15	+1.80770852	+1.94891667	+0.00000000
16	-1.47492721	+6.33453375	+0.00000000
17	-0.07937519	+6.52141841	+0.00000000
18	+1.57000230	+6.59038066	+0.00000000

6 : Résultats du test du panneau fuselé du (Maillage 4x4) avec C=1.20

Nombre des elements total :32

Nombre des noeuds total : 50

Déplacements nodaux :

Nœud	U	V	W
1	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
2	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
3	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
4	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
5	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
6	+2.19297860	-1.94812545	+0.00000000
7	+0.72273498	-1.64825272	+0.00000000
8	-0.13640267	-1.51245378	+0.00000000
9	-1.06722437	-1.57536552	+0.00000000
10	-3.36123964	-1.92358028	+0.00000000
11	+4.24340468	-5.68484048	+0.00000000
12	+1.64491607	-5.50598374	+0.00000000
13	-0.42784249	-5.36714925	+0.00000000
14	-2.74077287	-5.47848597	+0.00000000
15	-5.80118268	-5.58523068	+0.00000000
16	+6.19887782	-12.18901921	+0.00000000
17	+3.04225341	-12.15515210	+0.00000000
18	-0.12859020	-12.09004572	+0.00000000
19	-3.50701667	-12.08676608	+0.00000000
20	-7.32366084	-12.05053085	+0.00000000
21	+8.56988179	-21.93306049	+0.00000000
22	+5.43804927	-22.23688149	+0.00000000
23	+1.60741215	-22.66842561	+0.00000000
24	-2.51252292	-22.87609406	+0.00000000

25	-6.46895303	-22.97060372	+0.00000000
26	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
27	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
28	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
29	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
30	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
31	-1.09548636	+0.97408737	+0.00000000
32	-0.36193656	+0.82424594	+0.00000000
33	+0.06819578	+0.75583721	+0.00000000
34	+0.53366887	+0.78739015	+0.00000000
35	+1.68057768	+0.96168205	+0.00000000
36	-2.11821547	+2.84137056	+0.00000000
37	-0.82453136	+2.75185931	+0.00000000
38	+0.21429944	+2.68214364	+0.00000000
39	+1.37101769	+2.73852866	+0.00000000
40	+2.89999522	+2.79201983	+0.00000000
41	-3.08666911	+6.08932377	+0.00000000
42	-1.52468798	+6.07353279	+0.00000000
43	+0.07082265	+6.03966740	+0.00000000
44	+1.75557571	+6.03754112	+0.00000000
45	+3.66103370	+6.01938806	+0.00000000
46	-4.27851725	+10.95414242	+0.00000000
47	-2.71997528	+11.10575626	+0.00000000
48	-0.80156695	+11.32235999	+0.00000000
49	+1.25744931	+11.42621714	+0.00000000
50	+3.23368011	+11.47347199	+0.00000000

7 : Résultats du test de la Plaque carrée (Maillage 6×6) avec $C = 0.4$

Nombre des elements total :72

Nombre des noeuds total : 98

Déplacements nodaux :

Noeud	U	V	W
1	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
2	+0.00000000	+0.00000000	+2.58350000
3	+0.00000000	+0.00000000	+3.69071000
4	+0.00000000	+0.00000000	+4.05978000
5	+0.00000000	+0.00000000	+3.69071000
6	+0.00000000	+0.00000000	+2.58350000
7	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
8	+0.00000000	+0.00000000	+2.58350000
9	+0.00000000	+0.00000000	+3.32164000
10	+0.00000000	+0.00000000	+4.05978000
11	+0.00000000	+0.00000000	+4.42885000
12	+0.00000000	+0.00000000	+4.05978000
13	+0.00000000	+0.00000000	+3.32164000
14	+0.00000000	+0.00000000	+2.58350000
15	+0.00000000	+0.00000000	+3.69071000
16	+0.00000000	+0.00000000	+4.05978000
17	+0.00000000	+0.00000000	+4.79793000
18	+0.00000000	+0.00000000	+5.53607000
19	+0.00000000	+0.00000000	+4.79793000
20	+0.00000000	+0.00000000	+4.05978000
21	+0.00000000	+0.00000000	+3.69071000
22	+0.00000000	+0.00000000	+4.05978000
23	+0.00000000	+0.00000000	+4.42885000
24	+0.00000000	+0.00000000	+5.53607000

25	+0.00000000	+0.00000000	+8.11957000
26	+0.00000000	+0.00000000	+5.53607000
27	+0.00000000	+0.00000000	+4.42885000
28	+0.00000000	+0.00000000	+4.05978000
29	+0.00000000	+0.00000000	+3.69071000
30	+0.00000000	+0.00000000	+4.05978000
31	+0.00000000	+0.00000000	+4.79793000
32	+0.00000000	+0.00000000	+5.53607000
33	+0.00000000	+0.00000000	+4.79793000
34	+0.00000000	+0.00000000	+4.05978000
35	+0.00000000	+0.00000000	+3.69071000
36	+0.00000000	+0.00000000	+2.58350000
37	+0.00000000	+0.00000000	+3.32164000
38	+0.00000000	+0.00000000	+4.05978000
39	+0.00000000	+0.00000000	+4.42885000
40	+0.00000000	+0.00000000	+4.05978000
41	+0.00000000	+0.00000000	+3.32164000
42	+0.00000000	+0.00000000	+2.58350000
43	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
44	+0.00000000	+0.00000000	+0.00258350
45	+0.00000000	+0.00000000	+0.00369071
46	+0.00000000	+0.00000000	+0.00405978
47	+0.00000000	+0.00000000	+0.00369071
48	+0.00000000	+0.00000000	+0.00258350
49	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
50	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
51	+0.00000000	+0.00000000	-1.29175000
52	+0.00000000	+0.00000000	-1.84536000
53	+0.00000000	+0.00000000	-2.02989000
54	+0.00000000	+0.00000000	-1.84536000

55	+0.00000000	+0.00000000	-1.29175000
56	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
57	+0.00000000	+0.00000000	-1.29175000
58	+0.00000000	+0.00000000	-1.66082000
59	+0.00000000	+0.00000000	-2.02989000
60	+0.00000000	+0.00000000	-2.21443000
61	+0.00000000	+0.00000000	-2.02989000
62	+0.00000000	+0.00000000	-1.66082000
63	+0.00000000	+0.00000000	-1.29175000
64	+0.00000000	+0.00000000	-1.84536000
65	+0.00000000	+0.00000000	-2.02989000
66	+0.00000000	+0.00000000	-2.39896000
67	+0.00000000	+0.00000000	-2.76803000
68	+0.00000000	+0.00000000	-2.39896000
69	+0.00000000	+0.00000000	-2.02989000
70	+0.00000000	+0.00000000	-1.84536000
71	+0.00000000	+0.00000000	-2.02989000
72	+0.00000000	+0.00000000	-2.21443000
73	+0.00000000	+0.00000000	-2.76803000
74	+0.00000000	+0.00000000	-4.05978000
75	+0.00000000	+0.00000000	-2.76803000
76	+0.00000000	+0.00000000	-2.21443000
77	+0.00000000	+0.00000000	-2.02989000
78	+0.00000000	+0.00000000	-1.84536000
79	+0.00000000	+0.00000000	-2.02989000
80	+0.00000000	+0.00000000	-2.39896000
81	+0.00000000	+0.00000000	-2.76803000
82	+0.00000000	+0.00000000	-2.39896000
83	+0.00000000	+0.00000000	-2.02989000
84	+0.00000000	+0.00000000	-1.84536000

85	+0.00000000	+0.00000000	-1.29175000
86	+0.00000000	+0.00000000	-1.66082000
87	+0.00000000	+0.00000000	-2.02989000
88	+0.00000000	+0.00000000	-2.21443000
89	+0.00000000	+0.00000000	-2.02989000
90	+0.00000000	+0.00000000	-1.66082000
91	+0.00000000	+0.00000000	-1.29175000
92	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
93	+0.00000000	+0.00000000	-1.29175000
94	+0.00000000	+0.00000000	-1.84536000
95	+0.00000000	+0.00000000	-2.02989000
96	+0.00000000	+0.00000000	-1.84536000
97	+0.00000000	+0.00000000	-1.29175000
98	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000

8 : Résultats du test de la Plaque carrée (Maillage 12×12) avec C =0.6

Nombre des elements total :288

Nombre des noeuds total : 338

Déplacements nodaux :

Noeud	U	V	W
1	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
2	+0.00000000	+0.00000000	+0.28706000
3	+0.00000000	+0.00000000	+0.41676000
4	+0.00000000	+0.00000000	+0.49118000
5	+0.00000000	+0.00000000	+0.53816000
6	+0.00000000	+0.00000000	+0.56541000
7	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
8	+0.00000000	+0.00000000	+0.56541000
9	+0.00000000	+0.00000000	+0.53816000
10	+0.00000000	+0.00000000	+0.49118000
11	+0.00000000	+0.00000000	+0.41676000
12	+0.00000000	+0.00000000	+0.28706000
13	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
14	+0.00000000	+0.00000000	+0.00028706
15	+0.00000000	+0.00000000	+0.36573000
16	+0.00000000	+0.00000000	+0.44440000
17	+0.00000000	+0.00000000	+0.50491000
18	+0.00000000	+0.00000000	+0.54801000
19	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
20	+0.00000000	+0.00000000	+0.58358000
21	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
22	+0.00000000	+0.00000000	+0.54801000
23	+0.00000000	+0.00000000	+0.50491000
24	+0.00000000	+0.00000000	+0.44440000

25	+0.00000000	+0.00000000	+0.36573000
26	+0.00000000	+0.00000000	+0.28706000
27	+0.00000000	+0.00000000	+0.41676000
28	+0.00000000	+0.00000000	+0.44440000
29	+0.00000000	+0.00000000	+0.49022000
30	+0.00000000	+0.00000000	+0.53603000
31	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
32	+0.00000000	+0.00000000	+0.60098000
33	+0.00000000	+0.00000000	+0.61084000
34	+0.00000000	+0.00000000	+0.60098000
35	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
36	+0.00000000	+0.00000000	+0.53603000
37	+0.00000000	+0.00000000	+0.49022000
38	+0.00000000	+0.00000000	+0.44440000
39	+0.00000000	+0.00000000	+0.41676000
40	+0.00000000	+0.00000000	+0.49118000
41	+0.00000000	+0.00000000	+0.50491000
42	+0.00000000	+0.00000000	+0.53603000
43	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
44	+0.00000000	+0.00000000	+0.61296000
45	+0.00000000	+0.00000000	+0.64409000
46	+0.00000000	+0.00000000	+0.65781000
47	+0.00000000	+0.00000000	+0.64409000
48	+0.00000000	+0.00000000	+0.61296000
49	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
50	+0.00000000	+0.00000000	+0.53603000
51	+0.00000000	+0.00000000	+0.50491000
52	+0.00000000	+0.00000000	+0.49118000
53	+0.00000000	+0.00000000	+0.53816000
54	+0.00000000	+0.00000000	+0.54801000

55	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
56	+0.00000000	+0.00000000	+0.61296000
57	+0.00000000	+0.00000000	+0.65878000
58	+0.00000000	+0.00000000	+0.70459000
59	+0.00000000	+0.00000000	+0.73223000
60	+0.00000000	+0.00000000	+0.70459000
61	+0.00000000	+0.00000000	+0.65878000
62	+0.00000000	+0.00000000	+0.61296000
63	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
64	+0.00000000	+0.00000000	+0.54801000
65	+0.00000000	+0.00000000	+0.53816000
66	+0.00000000	+0.00000000	+0.56541000
67	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
68	+0.00000000	+0.00000000	+0.60098000
69	+0.00000000	+0.00000000	+0.64409000
70	+0.00000000	+0.00000000	+0.70459000
71	+0.00000000	+0.00000000	+0.78326000
72	+0.00000000	+0.00000000	+0.86194000
73	+0.00000000	+0.00000000	+0.78326000
74	+0.00000000	+0.00000000	+0.70459000
75	+0.00000000	+0.00000000	+0.64409000
76	+0.00000000	+0.00000000	+0.60098000
77	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
78	+0.00000000	+0.00000000	+0.56541000
79	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
80	+0.00000000	+0.00000000	+0.58358000
81	+0.00000000	+0.00000000	+0.61084000
82	+0.00000000	+0.00000000	+0.65781000
83	+0.00000000	+0.00000000	+0.73223000
84	+0.00000000	+0.00000000	+0.86194000

85	+0.00000000	+0.00000000	+1.14899000
86	+0.00000000	+0.00000000	+0.86194000
87	+0.00000000	+0.00000000	+0.73223000
88	+0.00000000	+0.00000000	+0.65781000
89	+0.00000000	+0.00000000	+0.61084000
90	+0.00000000	+0.00000000	+0.58358000
91	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
92	+0.00000000	+0.00000000	+0.56541000
93	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
94	+0.00000000	+0.00000000	+0.60098000
95	+0.00000000	+0.00000000	+0.64409000
96	+0.00000000	+0.00000000	+0.70459000
97	+0.00000000	+0.00000000	+0.78326000
98	+0.00000000	+0.00000000	+0.86194000
99	+0.00000000	+0.00000000	+0.78326000
100	+0.00000000	+0.00000000	+0.70459000
101	+0.00000000	+0.00000000	+0.64409000
102	+0.00000000	+0.00000000	+0.60098000
103	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
104	+0.00000000	+0.00000000	+0.56541000
105	+0.00000000	+0.00000000	+0.53816000
106	+0.00000000	+0.00000000	+0.54801000
107	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
108	+0.00000000	+0.00000000	+0.61296000
109	+0.00000000	+0.00000000	+0.65878000
110	+0.00000000	+0.00000000	+0.70459000
111	+0.00000000	+0.00000000	+0.73223000
112	+0.00000000	+0.00000000	+0.70459000
113	+0.00000000	+0.00000000	+0.65878000
114	+0.00000000	+0.00000000	+0.61296000

115	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
116	+0.00000000	+0.00000000	+0.54801000
117	+0.00000000	+0.00000000	+0.53816000
118	+0.00000000	+0.00000000	+0.49118000
119	+0.00000000	+0.00000000	+0.50491000
120	+0.00000000	+0.00000000	+0.53603000
121	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
122	+0.00000000	+0.00000000	+0.61296000
123	+0.00000000	+0.00000000	+0.64409000
124	+0.00000000	+0.00000000	+0.65781000
125	+0.00000000	+0.00000000	+0.64409000
126	+0.00000000	+0.00000000	+0.61296000
127	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
128	+0.00000000	+0.00000000	+0.53603000
129	+0.00000000	+0.00000000	+0.50491000
130	+0.00000000	+0.00000000	+0.49118000
131	+0.00000000	+0.00000000	+0.41676000
132	+0.00000000	+0.00000000	+0.44440000
133	+0.00000000	+0.00000000	+0.49022000
134	+0.00000000	+0.00000000	+0.53603000
135	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
136	+0.00000000	+0.00000000	+0.60098000
137	+0.00000000	+0.00000000	+0.61084000
138	+0.00000000	+0.00000000	+0.60098000
139	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
140	+0.00000000	+0.00000000	+0.53603000
141	+0.00000000	+0.00000000	+0.49022000
142	+0.00000000	+0.00000000	+0.44440000
143	+0.00000000	+0.00000000	+0.41676000
144	+0.00000000	+0.00000000	+0.28706000

145	+0.00000000	+0.00000000	+0.36573000
146	+0.00000000	+0.00000000	+0.44440000
147	+0.00000000	+0.00000000	+0.50491000
148	+0.00000000	+0.00000000	+0.54801000
149	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
150	+0.00000000	+0.00000000	+0.58358000
151	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
152	+0.00000000	+0.00000000	+0.54801000
153	+0.00000000	+0.00000000	+0.50491000
154	+0.00000000	+0.00000000	+0.44440000
155	+0.00000000	+0.00000000	+0.36573000
156	+0.00000000	+0.00000000	+0.28706000
157	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
158	+0.00000000	+0.00000000	+0.28706000
159	+0.00000000	+0.00000000	+0.41676000
160	+0.00000000	+0.00000000	+0.49118000
161	+0.00000000	+0.00000000	+0.53816000
162	+0.00000000	+0.00000000	+0.56541000
163	+0.00000000	+0.00000000	+0.57450000
164	+0.00000000	+0.00000000	+0.56541000
165	+0.00000000	+0.00000000	+0.53816000
166	+0.00000000	+0.00000000	+0.49118000
167	+0.00000000	+0.00000000	+0.41676000
168	+0.00000000	+0.00000000	+0.28706000
169	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
170	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
171	+0.00000000	+0.00000000	-0.14353000
172	+0.00000000	+0.00000000	-0.20838000
173	+0.00000000	+0.00000000	-0.24559000
174	+0.00000000	+0.00000000	-0.26908000

175	+0.00000000	+0.00000000	-0.28271000
176	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
177	+0.00000000	+0.00000000	-0.28271000
178	+0.00000000	+0.00000000	-0.26908000
179	+0.00000000	+0.00000000	-0.24559000
180	+0.00000000	+0.00000000	-0.20838000
181	+0.00000000	+0.00000000	-0.14353000
182	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
183	+0.00000000	+0.00000000	-0.14353000
184	+0.00000000	+0.00000000	-0.18286000
185	+0.00000000	+0.00000000	-0.22220000
186	+0.00000000	+0.00000000	-0.25245000
187	+0.00000000	+0.00000000	-0.27401000
188	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
189	+0.00000000	+0.00000000	-0.29179000
190	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
191	+0.00000000	+0.00000000	-0.27401000
192	+0.00000000	+0.00000000	-0.25245000
193	+0.00000000	+0.00000000	-0.22220000
194	+0.00000000	+0.00000000	-0.18286000
195	+0.00000000	+0.00000000	-0.14353000
196	+0.00000000	+0.00000000	-0.20838000
197	+0.00000000	+0.00000000	-0.22220000
198	+0.00000000	+0.00000000	-0.24511000
199	+0.00000000	+0.00000000	-0.26802000
200	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
201	+0.00000000	+0.00000000	-0.30049000
202	+0.00000000	+0.00000000	-0.30542000
203	+0.00000000	+0.00000000	-0.30049000
204	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000

205	+0.00000000	+0.00000000	-0.26802000
206	+0.00000000	+0.00000000	-0.24511000
207	+0.00000000	+0.00000000	-0.22220000
208	+0.00000000	+0.00000000	-0.20838000
209	+0.00000000	+0.00000000	-0.24559000
210	+0.00000000	+0.00000000	-0.25245000
211	+0.00000000	+0.00000000	-0.26802000
212	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
213	+0.00000000	+0.00000000	-0.30648000
214	+0.00000000	+0.00000000	-0.32204000
215	+0.00000000	+0.00000000	-0.32891000
216	+0.00000000	+0.00000000	-0.32204000
217	+0.00000000	+0.00000000	-0.30648000
218	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
219	+0.00000000	+0.00000000	-0.26802000
220	+0.00000000	+0.00000000	-0.25245000
221	+0.00000000	+0.00000000	-0.24559000
222	+0.00000000	+0.00000000	-0.26908000
223	+0.00000000	+0.00000000	-0.27401000
224	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
225	+0.00000000	+0.00000000	-0.30648000
226	+0.00000000	+0.00000000	-0.32939000
227	+0.00000000	+0.00000000	-0.35230000
228	+0.00000000	+0.00000000	-0.36612000
229	+0.00000000	+0.00000000	-0.35230000
230	+0.00000000	+0.00000000	-0.32939000
231	+0.00000000	+0.00000000	-0.30648000
232	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
233	+0.00000000	+0.00000000	-0.27401000
234	+0.00000000	+0.00000000	-0.26908000

235	+0.00000000	+0.00000000	-0.28271000
236	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
237	+0.00000000	+0.00000000	-0.30049000
238	+0.00000000	+0.00000000	-0.32204000
239	+0.00000000	+0.00000000	-0.35230000
240	+0.00000000	+0.00000000	-0.39163000
241	+0.00000000	+0.00000000	-0.43097000
242	+0.00000000	+0.00000000	-0.39163000
243	+0.00000000	+0.00000000	-0.35230000
244	+0.00000000	+0.00000000	-0.32204000
245	+0.00000000	+0.00000000	-0.30049000
246	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
247	+0.00000000	+0.00000000	-0.28271000
248	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
249	+0.00000000	+0.00000000	-0.29179000
250	+0.00000000	+0.00000000	-0.30542000
251	+0.00000000	+0.00000000	-0.32891000
252	+0.00000000	+0.00000000	-0.36612000
253	+0.00000000	+0.00000000	-0.43097000
254	+0.00000000	+0.00000000	-0.57450000
255	+0.00000000	+0.00000000	-0.43097000
256	+0.00000000	+0.00000000	-0.36612000
257	+0.00000000	+0.00000000	-0.32891000
258	+0.00000000	+0.00000000	-0.30542000
259	+0.00000000	+0.00000000	-0.29179000
260	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
261	+0.00000000	+0.00000000	-0.28271000
262	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
263	+0.00000000	+0.00000000	-0.30049000
264	+0.00000000	+0.00000000	-0.32204000

265	+0.00000000	+0.00000000	-0.35230000
266	+0.00000000	+0.00000000	-0.39163000
267	+0.00000000	+0.00000000	-0.43097000
268	+0.00000000	+0.00000000	-0.39163000
269	+0.00000000	+0.00000000	-0.35230000
270	+0.00000000	+0.00000000	-0.32204000
271	+0.00000000	+0.00000000	-0.30049000
272	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
273	+0.00000000	+0.00000000	-0.28271000
274	+0.00000000	+0.00000000	-0.26908000
275	+0.00000000	+0.00000000	-0.27401000
276	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
277	+0.00000000	+0.00000000	-0.30648000
278	+0.00000000	+0.00000000	-0.32939000
279	+0.00000000	+0.00000000	-0.35230000
280	+0.00000000	+0.00000000	-0.36612000
281	+0.00000000	+0.00000000	-0.35230000
282	+0.00000000	+0.00000000	-0.32939000
283	+0.00000000	+0.00000000	-0.30648000
284	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
285	+0.00000000	+0.00000000	-0.27401000
286	+0.00000000	+0.00000000	-0.26908000
287	+0.00000000	+0.00000000	-0.24559000
288	+0.00000000	+0.00000000	-0.25245000
289	+0.00000000	+0.00000000	-0.26802000
290	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
291	+0.00000000	+0.00000000	-0.30648000
292	+0.00000000	+0.00000000	-0.32204000
293	+0.00000000	+0.00000000	-0.32891000
294	+0.00000000	+0.00000000	-0.32204000

295	+0.00000000	+0.00000000	-0.30648000
296	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
297	+0.00000000	+0.00000000	-0.26802000
298	+0.00000000	+0.00000000	-0.25245000
299	+0.00000000	+0.00000000	-0.24559000
300	+0.00000000	+0.00000000	-0.20838000
301	+0.00000000	+0.00000000	-0.22220000
302	+0.00000000	+0.00000000	-0.24511000
303	+0.00000000	+0.00000000	-0.26802000
304	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
305	+0.00000000	+0.00000000	-0.30049000
306	+0.00000000	+0.00000000	-0.30542000
307	+0.00000000	+0.00000000	-0.30049000
308	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
309	+0.00000000	+0.00000000	-0.26802000
310	+0.00000000	+0.00000000	-0.24511000
311	+0.00000000	+0.00000000	-0.22220000
312	+0.00000000	+0.00000000	-0.20838000
313	+0.00000000	+0.00000000	-0.14353000
314	+0.00000000	+0.00000000	-0.18286000
315	+0.00000000	+0.00000000	-0.22220000
316	+0.00000000	+0.00000000	-0.25245000
317	+0.00000000	+0.00000000	-0.27401000
318	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
319	+0.00000000	+0.00000000	-0.29179000
320	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
321	+0.00000000	+0.00000000	-0.27401000
322	+0.00000000	+0.00000000	-0.25245000
323	+0.00000000	+0.00000000	-0.22220000
324	+0.00000000	+0.00000000	-0.00018286

325	+0.00000000	+0.00000000	-0.00014353
326	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000
327	+0.00000000	+0.00000000	-0.14353000
328	+0.00000000	+0.00000000	-0.20838000
329	+0.00000000	+0.00000000	-0.24559000
330	+0.00000000	+0.00000000	-0.26908000
331	+0.00000000	+0.00000000	-0.28271000
332	+0.00000000	+0.00000000	-0.28725000
333	+0.00000000	+0.00000000	-0.28271000
334	+0.00000000	+0.00000000	-0.26908000
335	+0.00000000	+0.00000000	-0.24559000
336	+0.00000000	+0.00000000	-0.20838000
337	+0.00000000	+0.00000000	-0.14353000
338	+0.00000000	+0.00000000	+0.00000000