

N° d'ordre :

N° de série :



**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de**  
**la Recherche Scientifique**

**UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED**

**FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES**

**Mémoire de fin d'étude**

**MASTER ACADEMIQUE**

**Domaine : Mathématiques et Informatique**

**Filière : Mathématiques**

**Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées**

**Thème**

**Méthode d'ondelettes**  
**pour résoudre des équation différentielles ordinaires**  
**d'ordre supérieur**

**Présenté par : : Mehenni Yasmina**

**Benzaoui Hanine**

**Soutenu le : 15.06.2022 devant le jury composé de :**

M.Moumen Bekkouche    MCB    Président    Univ. d'El Oued

Dehda Bachir                    MCA    Rapporteur    Univ. d'El Oued

M.S.Messai Aoun                MAA    Examineur    Univ. d'El Oued

**Année universitaire 2021 – 2022**

# dédicace



Je dédicace ce travaille

À qui les mots ne peuvent remplir leur droit  
à qui les nombres ne peuvent pas compter leurs vertus  
à mes chers parents, que Dieu me soutienne.

À

Mes chers frères  
Amin, Bilal, Rahmani et Anos

À

Mes chères soeurs  
Hano et Djouri.

À

Mon fiancé pour son soutien et toujours à mes côtés.

À

Ma chère grand-mère Pour ce qu'elle m'a prié Dieu.

À

Ma cousine et ma soeur chaima pour leur soutien moral.

À

Ma tante mon amour samiha.

À

Ma grande famille,mes amies et tous mes professeurs.

***Mehenni Yasmina***

# dédicace

Je dédie ce modeste travail

À

la mémoire de mes parents mon père (Allah yarahmo) et surtout ma mère qui ont fait de moi ce qui je suis Aujourd'hui et qui ont été de guide mes pas durant tout ma vie.

À

mes frères et mes chères soeurs

À

mon cher mari et ma deuxième famille

À

grand mère (Allah yarhamha)

À

tous les professeurs

À

toute mes amis

À

camarades d'école : Khawla,Wissam,aicha, saoussen,Marwa, Massouda

merci pour votre le soutien

***Benzaoui Hanine***

# Remerciements

*Avant toute chose, nous tenons à remercier "Allah" le tout puissant, pour nous avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail. Comme nous tenons à remercier vivement, encadreur de mémoire Dr. Dehda Bachir maitre de Conférence à luniversité Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi le soutien très précieux tout au long de ce travail. Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fai.*

*Nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.*

*Nous remercions encore, Dr. BELOUL Said et Dr Toati Ibrahim Mohamed Al-Saeed qui nous a aidé à accomplir ce travail*

*Grand remerciement sincèrement toutes nos familles surtout les pères et les mères qui ont donné la volonté et l'aide et le courage pour accomplir ce modeste travail.*

*Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également au nos camarades de la promotion 2020 de Mathématiques*

*Que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos remerciements.*

*Enfin ,Nous remercions tous nos Personnel universitaires qui nous accueillent chaque matin avec le sourire*

## Résumé

Dans ce mémoire, notre objectif est de démontrer l'efficacité de la méthode d'ondelette de Haar et ses avantages par rapport aux autres méthodes classiques pour résoudre des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. Pour cela, nous avons fait une étude théorique et numérique liée à la nouvelle méthode (l'ondelette de Haar), puis nous avons comparé les résultats de cette méthode avec des méthodes classiques (différences finies et Runge-kutta). Les résultats numériques concernant la méthode d'ondelette de Haar sont très précis que les autres méthodes.

**Mots clés :** les équations différentielles, ondelettes de Haar, différences finies, Runge-kutta.

## Abstract

In this work, our objective is to demonstrate the efficiency of the Haar wavelet method and its advantages over other classical methods for solving higher order linear differential equations. For this, we made a theoretical and numerical study related to the new method (the Haar wavelet), then we compared the results of this method with classical methods (finite differences and Runge-kutta). Numerical results regarding Haar wavelet method are very accurate than other methods.

**Key words :** differentielle equations, Haar wavelts, finite differences method, Runge-kutta method, numerical method.

## ملخص

في هذه المذكرة، هدفنا هو إظهار كفاءة طريقة موجة هار ومزاياها على الطرق التقليدية الأخرى لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الرتب العليا. لهذا قمنا بدراسة نظرية وعددية تتعلق بالطريقة الجديدة (موجة هار)، ثم قمنا بمقارنة نتائج هذه الطريقة بالطرق الكلاسيكية (الفروق المنتهية و رونج كوتا). النتائج العددية المتعلقة بطريقة موجة هار دقيقة للغاية مقارنة بالطرق الأخرى .

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التفاضلية، موجة هار، الفروق المنتهية و رونج كوتا.

# Table des matières

	<b>Page</b>
Dédicace . . . . .	i
Remerciements . . . . .	iii
Résumé . . . . .	iv
<b>Introduction Général</b>	<b>1</b>
<b>1 Généralités sur les équation différentielles</b>	<b>4</b>
1.1 Définition les équations différentielles . . . . .	5
1.2 Les équation différentielles d'ordre 1 . . . . .	5
1.2.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 . . . . .	5
1.3 Les équations différentielles d'ordre 2 et d'ordre supérieur . . . . .	9
1.4 Les équations différentielles d'ordre $n$ qui admettent un abaissement d'ordre . . . . .	12
1.4.1 Les équations de la forme $y^{(n)} = f(x)$ . . . . .	12
1.4.3 Les équations de la forme $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$ . . . . .	12
1.4.5 Les équations de la forme $y^{(n)} = f(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ . . . . .	13
1.4.7 Les équations différentielles linéaires d'ordre $n$ . . . . .	14
1.5 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre $n$ . . . . .	14
1.5.1 Indépendance linéaire . . . . .	15
1.6 Équations linéaires homogène à coefficients constants . . . . .	17
1.7 Équation linéaire non homogène à coefficients constants . . . . .	19
1.7.1 Méthode des coefficients indéterminées . . . . .	20
<b>2 Méthodes numériques</b>	<b>24</b>
2.1 Méthode de différences finies . . . . .	25
2.1.1 Discrétisation du domaine . . . . .	25
2.1.2 Principe de la méthode de différences finies . . . . .	25
2.1.3 Convergence, consistance et stabilité . . . . .	28

2.1.4	Méthode de différences finies pour un problème elliptique . . . . .	29
2.2	Méthodes de Runge-Kutta . . . . .	33
2.2.1	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 . . . . .	34
2.2.2	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 . . . . .	35
2.3	Méthode d'ondelette de Haar . . . . .	38
2.3.1	Définitions et quelques exemples . . . . .	38
2.3.2	La base d'ondelette de Haar sur $L^2([a, b])$ . . . . .	40
2.3.3	Principe de La Méthode D'ondelettes de Haar . . . . .	42
2.3.4	Explication de la méthode D'ondelettes de Haar . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Application</b> . . . . .	<b>46</b>
3.1	Description de la méthode . . . . .	47
3.2	Expériences numériques . . . . .	49
	<b>Conclusion générale</b> . . . . .	<b>72</b>

# Liste des tableaux

2.1	Comparaison de la précision des méthodes numériques par rapport à la solution exacte . . . . .	37
3.1	L'erreur absolue maximale observée pour différentes valeurs de $J$ pour l'exemple 3.2.1 . . . . .	52
3.2	Ordres de calcul obtenus pour les exemples 3.2.1-3.2.3 . . . . .	52
3.3	L'erreur absolue maximale observée pour différentes valeurs de $J$ pour Exemple 3.2.2. . . . .	55
3.4	L'erreur absolue maximale observée pour différentes valeurs de $J$ pour l'exemple 3.2.3. . . . .	55
3.5	L'erreur absolue maximale observée pour différents cas de conditions aux limites pour l'exemple 3.2.4. . . . .	58
3.6	L'erreur absolue maximale observée pour l'exemple 3.2.5. . . . .	58
3.7	L'erreur absolue maximale observée pour l'exemple 3.2.6. . . . .	58
3.8	La solution numérique de l'exemple 3.2.7 . . . . .	62
3.9	Erreur en utilisant l'ondelette de Haar et RK4 pour le système de l'exemple 3.2.7 . . . . .	63
3.10	La solution numérique de l'exemple 3.2.8 . . . . .	66
3.11	Erreur dans l'exemple 3.2.8 . . . . .	67
3.12	Erreur absolue maximale de l'équation . . . . .	67

# Table des figures

2.1	Discrétisation du domaine en dimension 1 . . . . .	25
2.2	Points médians de la grille. . . . .	26
2.3	Subdivision du pas de calcul dans les méthodes de Runge-Kutta . . . . .	34
2.4	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 . . . . .	35
2.5	Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 . . . . .	35
2.6	Certains types d'ondelettes . . . . .	39
3.1	Les fonctions d'erreur absolue de $y, y', y'', y^{(3)}, y^{(4)}$ lorsque le niveau de résolutions $J = 6$ pour l'exemple 3.2.1. . . . .	53
3.2	Les fonctions d'erreur absolue de $y, y', y'', y^{(3)}, y^{(4)}$ lorsque le niveau des résolutions est $J = 6$ pour l'exemple 3.2.2. . . . .	55
3.3	Les fonctions d'erreur absolue de $y, y', y'', y^{(3)}, y^{(4)}$ lorsque le niveau des résolutions est $J = 6$ pour l'exemple 3.2.3. . . . .	56
3.4	Les fonctions d'erreur absolue de $y, y', y'', y^{(3)}, y^{(4)}, y^{(5)}$ lorsque le niveau des résolutions est $J = 7$ pour l'exemple 3.2.4 avec la limite définie dans le cas II. . . . .	59
3.5	Profils de vitesse $f(t)$ et la fonction d'erreur absolue pour $M = R = 1$ et diverses valeurs de $p$ . . . . .	60
3.6	Erreur en utilisant l'ondelette de Haar et RK4 pour le système de l'exemple 3.2.7 . . . . .	63
3.7	Les solutions exactes et numériques (solution de Haar, tir linéaire et différence finie) . . . . .	66
3.8	Erreur dans l'exemple 3.2.8 . . . . .	67

# **Introduction Général**

La solution des équations différentielles ordinaires occupe une place importante dans les phénomènes chimiques, physiques, mécaniques et électroniques... Les solutions analytiques à l'équation différentielle ordinaire soit n'existent pas, soit sont difficiles à trouver, et pour cela on recourt aux méthodes numériques, comme cette dernière nous a permis d'obtenir des solutions à de nombreux problèmes qui ne sont pas prêts pour un traitement analytique. Il existe de nombreuses méthodes numériques et nous étudierons ici la méthode la plus séduisante de ces dernières années qui est la méthode des ondelettes.

L'analyse par ondelettes est une nouvelle façon passionnante de résoudre des problèmes difficiles en mathématiques, en physique et en ingénierie. Il a été utilisé pour la première fois au début des années 1980 par le géophysicien J. Morlett pour attribuer les tâches.

Il existe différents types d'ondelettes comme Daubechies, Coiflet, Battle-Lemarie, Ondelettes B-spline et Chebyshev, Mathieu, Legendre et Ondelettes de Haar. etc. Elles sont séparées en fonction de leurs propriétés comme le support compact, l'orthogonalité et le nombre de moments nuls et autres.

De nombreux travaux ont été effectués par les auteurs pour résoudre et approximer différents types d'équations telles que les intégrales, les intégrales numériques et les équations différentielles ordinaires. Dans ce travail, la méthode des ondelettes de Haar est utilisée pour résoudre un problème de problèmes aux limites d'ordre arbitraire. associées à des conditions aux limites discrètes ou non discrètes. Considérons les équations différentielles linéaires de degré  $n$ .

Notre travail est divisé en trois chapitres :

\*le premier chapitre : Dédiés en général aux équations différentielles, nous avons pré-

senté quelques définitions de base des équations différentielles linéaires du premier et du second ordre jusqu'à l'ordre  $n$ , et nous avons traité des équations différentielles linéaires à facteurs homogènes et inhomogènes.

\*le deuxième chapitre : nous avons utilisé deux méthodes numériques traditionnelles bien connues pour résoudre les équations différentielles, qui sont Runge Kutta et Différences finies, et la nouvelle méthode pour résoudre les équations différentielles linéaires, qui est la méthode des ondelettes. Enfin, nous nous concentrons sur ondelette Har .

\*le troisième chapitre : nous présentons l'application de la méthode numérique de Haar pour résoudre des équations différentielles. La méthode est basée sur l'expansion de la dérivée supérieure des coefficients différentiels en termes d'ondes Har, puis sur l'intégration de l'expansion pour obtenir la solution.

L'objectif était de prouver l'efficacité de la méthode utilisée et sa distinction par rapport aux autres méthodes traditionnelles. Il s'avère que la nouvelle méthode est plus simple et donne des résultats plus proches ou meilleurs que les méthodes traditionnelles.

Nous avons cloturé notre mémoire par une conclusion générale et de s réfereces principales .

# **Chapitre 1**

## **Généralités sur les équation différentielles**

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés sur les équations différentielles linéaires que nous utiliserons dans la suite de ce travail.

## 1.1 Définition les équations différentielles

**Définition 1.1.1** [12] Une équation différentielle est une relation de la forme :

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

entre une variable  $x$ , une fonction  $y$  et ses dérivées successives jusqu'à l'ordre  $n$ .

## 1.2 Les équation différentielles d'ordre 1

**Définition 1.2.1** [12] Une équation différentielle d'ordre 1 est toute relation de la forme

$$F(x, y, y') = 0. \quad (1.2)$$

**Remarque 1.2.1** Il y en a plusieurs types d'équations différentielles d'ordre 1. Les équations de la forme (1.2)

- (a) Équations différentielles à variables séparables.
- (b) Équations différentielles homogène.
- (c) Équations différentielles linéaires.

Dans ce rappelle, nous allons seulement étudier les équation différentielles linéaires.

### 1.2.1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

**Définition 1.2.2** [12] Les équations différentielles linéaires d'ordre 1 sont les plus intéressantes car on les rencontre en physique (électricité, mécanique,...), ce sont des équations où  $y$  et  $y'$  sont du 1er degré.

Forme générale est :

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad (1.3)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des fonctions en  $x$ .

**Remarque 1.2.2**

1. Si  $a(x) \neq 0$ , alors (1.3) est dite normalisée. Dans ce cas (1.3) se ramène à l'équation :

$$y' + p(x)y = q(x), \quad (1.4)$$

où  $p(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$  et  $q(x) = \frac{c(x)}{a(x)}$ .

2. Si  $c(x) = 0$ ; ou bien  $q(x) = 0$ , alors l'équation obtenue sera homogène (de type 1 et 2) appelée équation linéaire homogène

$$a(x)y' + b(x)y = 0, \quad \text{ou bien} \quad y' + p(x)y = 0 \quad (1.5)$$

**Méthode de solution** [12] On peut utiliser la transformation de Laplace, aussi les séries entières,..., etc

On va appliquer la méthode classique de Lagrange : méthode de variation de la constante (MVC).

Pour intégrer (1.4), nous intégrons l'équation sans deuxième membre (1.5) en séparant les variables :

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx,$$

et en intégrant :

$$\ln |y| = - \int p(x)dx + \ln |C|,$$

en posant

$$u(x) = \int p(x)dx,$$

on a la solution de (1.5)

$$y = Ce^{-u(x)}. \quad (1.6)$$

Cherchons une solution de (1.4) de la même que (1.6), mais en considérant  $C$  comme une fonction de  $x$ . En dérivant (1.6), il vient ;

$$\begin{aligned} y' &= C'e^{-u(x)} - Ce^{-u(x)}u'. \\ &= C'e^{-u(x)} - Ce^{-u(x)}p(x). \end{aligned}$$

En portant dans (1.4), il vient :

$$C'e^{-u(x)} - Ce^{-u(x)}p(x) + Ce^{-u(x)}p(x) = q(x),$$

ou

$$C' = q(x)e^{u(x)}, \quad (1.7)$$

la relation (1.7) permet de calculer  $C(x)$ ; en intégrant, on obtient :

$$C = \int q(x)e^{u(x)} + C_1.$$

En remplaçant  $C$  par sa valeur dans (1.6), on obtient l'intégrale générale de (1.4) :

$$y = e^{-u(x)}\left(\int q(x)e^{u(x)}dx + C_1\right),$$

avec

$$u(x) = \int p(x)dx,$$

où  $C_1$  est une constante réelle.

**Exemple 1.2.2** Trouver la solution de cette équation

$$xy' - y = x^2. \quad (1.8)$$

Si  $xy' - y = 0$ , on a :

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x},$$

en intégrant ,

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln |C|, \text{ d'où } y = Cx.$$

Cherchons une solution de (1.8) de la forme  $y = C(x)x$ . On aura :

$$y' = C'(x)x + C(x),$$

et en portant dans (1.8) :

$$C'(x)x^2 + C(x)x - C(x)x = x^2, \text{ donc } C'(x) = 1 \text{ alors, } C(x) = x + C_1,$$

d'où la solution générale de (1.8) est

$$y = x(x + c_1),$$

où  $C_1$  est une constante réelle.

**Exemple 1.2.3** résoudre l'équation différentielle linéaire suivante :

$$y' + \underbrace{2xy}_{p(x)} = \underbrace{2xe^{-x^2}}_{q(x)}. \quad (1.9)$$

Si  $y' + 2xy = 0$ , on a

$$\frac{dy}{y} = -2xdx,$$

en intégrant :

$$\ln |y| = -x^2 + C \text{ d'où } y = C_1e^{-x^2}, (C_1 = \pm e^C).$$

Cherchons une solution de (1.9) de la forme  $y = C_1(x)e^{-x^2}$  On aura :

$$y' = C_1'(x)e^{-x^2} - 2xC_1e^{-x^2},$$

et en portant dans (1.9) :

$$C_1'e^{-x^2} - 2xC_1(x)e^{-x^2} + 2xC_1(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}, \text{ d'où } C_1'(x) = 2x \text{ et } C_1(x) = x^2 + C_2,$$

d'où la solution générale de (1.9) est

$$y = (x^2 + C_2)e^{-x^2},$$

où  $C_2$  est une constante réelle .

### 1.3 Les équations différentielles d'ordre 2 et d'ordre supérieur

**Définition 1.3.1** [9] Soit  $E$  un espace vectoriel normé.

Une équation différentielle ordinaire, également notée EDO, d'ordre  $n$  est une relation entre la variable réelle  $x$ , une fonction inconnue  $x \rightarrow y(x)$  et ses dérivées  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  au point  $x$  définie par

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

où  $F$  est une fonction continue sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R} \times E^{n+1}$  appelé domaine, n'est pas indépendante de sa dernière variable  $y^{(n)}$ . On prendra  $x$  dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  ( $I$  peut être  $\mathbb{R}$  tout entier). La solution  $y$  en général sera à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$ . On dit que cette équation est scalaire si  $F$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.3.2** [9] Une équation différentielle d'ordre  $n$  est mise sous forme résolue quand on peut exprimer la dérivée la plus forte en fonction de  $x$  et des dérivées précédentes

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{1.10}$$

**Exemple 1.3.1**  $x + \sqrt{y''' + (y')^2} = y$ , équation différentielle d'ordre 3, on peut écrire

$$x + \sqrt{y''' + (y')^2} - y = 0$$

**Définition 1.3.3** (*Le problème de Cauchy*). Le problème qui consiste à trouver une solution  $y = \varphi(x)$  de l'équation (1.10) satisfaisant aux conditions initiales

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (1.11)$$

il s'appelle problème de Cauchy pour l'équation (1.10).

**Théorème 1.3.2** [9] (*Théorème de Picard*). Si dans l'équation (1.10),  $f$  on a :

a)  $f$  est continue en tous arguments  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$  dans un certain domaine  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  de leur variation ,

b)  $f$  possède dans le domaine  $D$  des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial y^{n-1}}$  par rapport aux arguments  $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ ,

alors il existe un intervalle  $-h < x < x_0 + h$  dans lequel il existe une solution unique  $y = \varphi(x)$  de l'équation (1.10) qui satisfait aux conditions (1.11), ou les valeurs  $x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ .

Pour une équation du second ordre  $y'' = f(x, y, y')$  les conditions initiales sont de la forme

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0,$$

où  $x_0, y_0, y'_0$  sont des nombres donnés. Dans ce cas, le théorème ci-dessus d'existence et d'unicité signifie géométriquement que par un point donné  $M_0(x_0, y_0)$ , il ne passe qu'une seule courbe dont la pente de la tangente en  $M_0$  a la valeur  $y'_0$ .

**Exemple 1.3.3** Pour le problème

$$\begin{cases} y'' = \sin y' + e^{-x^2 y}, \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \quad (1.12)$$

La fonction  $f(x, y, y') = \sin y' + e^{x^2 y}$  est continue sur  $\mathbb{R}^3 \ni (x_0, y_0, z_0)$  donc a) est vérifié

b)  $\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 e^{-x^2 y}$ , (bornée dans  $\mathbb{R}$ ),  $\frac{\partial f}{\partial y'} = \cos y'$  (bornée dans  $\mathbb{R}$ ).

Conclusion.  $\forall (x_0, y_0, y'_0)$  le problème (1.12) admet une seule solution

**Définition 1.3.4** [9] On appelle solution générale d'une équation différentielle d'ordre  $n$  (1.10) l'ensemble de toutes ses solutions définies par la formule  $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$  contenant  $n$  constantes arbitraires  $C_1, C_2, \dots, C_n$  telles que si les conditions (1.10) sont données, il existe des valeurs  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n$  telles que  $y = \varphi(x, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_n)$  seront solutions de l'équation (1.11) satisfaisant à ces conditions initiales.

**Définition 1.3.5** [9] Toute solution obtenue à partir de la solution générale pour des valeurs concrètes des constantes arbitraires  $C_1, C_2, \dots, C_n$  s'appelle solution particulière de l'équation différentielle (1.10).

**Définition 1.3.6** [9] Une équation de la forme  $\phi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$  qui définit de façon implicite la solution générale de l'équation différentielle s'appelle intégrale générale de cette équation. En donnant aux constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  des valeurs numériques concrètes admissibles, on obtient une intégrale particulière ou l'intégrale différentielle. Le graphique de la solution particulière ou d'intégrale particulière s'appelle courbe intégrale de l'équation différentielle donnée.

**Exemple 1.3.4** [9] La fonction  $y = C_1 x + C_2$  est la solution générale de l'équation  $y'' = 0$ , où  $C_1, C_2$  sont des constantes arbitraires à valeurs complexes.

En effet, en intégrant successivement l'équation donnée, on trouve

$$y' = C_1,$$

$$y = C_1 x + C_2.$$

**Remarque 1.3.1** Il y en a plusieurs types d'équations différentielles d'ordre  $n$ , on commence par les équations qui admettent un abaissement d'ordre.

## 1.4 Les équations différentielles d'ordre $n$ qui admettent un abaissement d'ordre

### 1.4.1 Les équations de la forme $y^{(n)} = f(x)$

[9]Après l'avoir intégrer successivement  $n$  fois on obtient la solution générale

$$y = \underbrace{\int \int \int \dots \int}_{n \text{ fois}} f(x) \underbrace{dx \dots dx}_{n \text{ fois}} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1}x + C_n,$$

à chaque intégration l'ordre de l'équation devient inférieur à  $n$ .

### Exemple 1.4.2 Résoudre l'équation

$$y''' = 3x^2 + \cos x.$$

Par intégration, on trouve

$$y'' = x^3 + \sin x + C_1,$$

$$y' = \frac{x^4}{4} - \cos x + C_1x + C_2,$$

$$y = \frac{x^5}{20} - \sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

On remarque que l'équation était d'ordre 3, après la première intégration, on obtient une équation d'ordre 2, après la deuxième une équation d'ordre 1.

### 1.4.3 Les équations de la forme $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n-1)})$

[9]L'ordre d'une telle équation peut être réduit de  $k$  unités par la substitution  $y^{(k)}(x) = p(x)$ . Alors l'équation (1.10) prend la forme

$$f(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0.$$

De cette dernière équation on définit, si c'est possible,  $p = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$  et ensuite on trouve  $y$  de l'équation  $y^k = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$  en intégrant  $k$  fois.

**Exemple 1.4.4** Résoudre l'équation  $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$ . Posons  $y^{(4)} = p$ , on obtient

$$\frac{dp}{dx} - p = 0, \text{ d'où } p = C_1 e^x, y^{(4)} = C_1 e^x.$$

En intégrant successivement, on trouve

$$y''' = C_1 e^x + C_2,$$

$$y'' = C_1 e^x + C_2 x + C_3,$$

$$y' = C_1 e^x + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4,$$

$$y = C_1 e^x + C_2 \frac{x^3}{6} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5.$$

### 1.4.5 Les équations de la forme $y^{(n)} = f(y, y', \dots, y^{(n-1)})$

[9] La substitution  $y' = p$  permet d'abaisser l'ordre de l'équation d'une unité c'est à dire qu'elle devient d'ordre  $n - 1$ . Dans ce cas  $p$  est considéré comme une nouvelle fonction de  $y$ . Toutes les dérivées  $y', y'', \dots, y^{(n)}$  s'expriment par des dérivées de la nouvelle fonction  $p$  par rapport à  $y$ .

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

$$y''' = \frac{d}{dx} \left( p \frac{dp}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( p \frac{dp}{dy} \right) \frac{dy}{dx} =$$

$$p^2 \frac{d^2 p}{dy^2} + \left( \frac{dp}{dy} \right)^2 \text{ etc.}$$

**Exemple 1.4.6** Résoudre l'équation

$$y'' + (y')^2 = 2e^{-y}. \tag{1.13}$$

En posant  $y' = \frac{dy}{dx} = p$ ,  $y'' = p \frac{dp}{dy}$ , on obtient une équation de Bernoulli

$$p \frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}.$$

En effectuant la substitution  $p^2 = z$ , on la ramène à une équation linéaire

$$\frac{dz}{dy} + 2z = 4e^{-y},$$

dont la solution générale est  $z = 4e^{-y} + C_1 e^{-2y}$ . En remplaçant  $z$  par  $p^2 = (y')^2$ , on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{4e^{-y} + C_1 e^{-2y}}.$$

Séparons les variables et intégrons, il vient

$$x + C_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{4e^{-y} + C_1}, \text{ d'où } e^y + \tilde{C}_1 = (x + C_2)^2$$

où  $\tilde{C}_1 = \frac{C_1}{4}$ . C'est l'intégrale de l'équation (1.13).

### 1.4.7 Les équations différentielles linéaires d'ordre n

[9] On appelle équation différentielle linéaire d'ordre n, toute équation qui peut s'écrire sous la forme :

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x),$$

avec  $a_n \neq 0, a_{n-1}, \dots, a_0, b$  sont des fonctions continues sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , à valeurs réelles ou complexes.

## 1.5 Équations différentielles linéaires homogènes d'ordre n

Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n, appelée aussi sans second membre, toute équation qui s'écrit :

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \tag{1.14}$$

où  $a_n \neq 0, a_{n-1}, \dots, a_0$ , sont coefficients réels données.

résoudre l'équation (1.14) en utilisant la médiane  $y = e^\lambda$ .

### 1.5.1 Indépendance linéaire

**Définition 1.5.1** [9] Soit donné un système fini de  $n$  fonctions  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  définies sur l'intervalle  $I$  ( $I$  peut être  $\mathbb{R}$  tout entier). Les fonctions  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  sont dites linéairement indépendantes sur l'intervalle  $I$  s'il existe des constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  non toutes nulles et telles que pour toutes les valeurs  $x$  prises dans cet intervalle on ait l'identité

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_n y_n(x) = 0. \quad (1.15)$$

les fonctions  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  sont dite linéairement indépendantes sur l'intervalle  $I$

Si et seulement si  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Exemple 1.5.2** Le système de fonctions  $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, e^{k_3 x}$  où  $k_1, k_2, k_3$  sont deux à deux distincts, est linéairement indépendantes sur l'intervalle  $] - \infty, +\infty[$ . Raisonnons par l'absurde en supposant que le système donné soit linéairement dépendant sur cette intervalle. Alors

$$\alpha_1 e^{k_1 x} + \alpha_2 e^{k_2 x} + \alpha_3 e^{k_3 x} = 0, \quad (1.16)$$

sur l'intervalle  $] - \infty, +\infty[$  et l'un au moins des nombres  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  est différent de zéro, par exemple  $\alpha_3 \neq 0$ . En divisant les deux membres de l'identité (1.16) par  $e^{k_1 x}$ , on aura

$$\alpha_1 + \alpha_2 e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 e^{(k_3 - k_1)x} = 0.$$

Dérivons l'identité, il vient

$$\alpha_2 (k_2 - k_1) e^{(k_2 - k_1)x} + \alpha_3 (k_3 - k_1) e^{(k_3 - k_1)x} = 0. \quad (1.17)$$

Divisons les deux membres de l'identité (1.17) par  $e^{(k_2-k_1)x}$  :

$$\alpha_2(k_2 - k_1) + \alpha_3(k_3 - k_1)e^{(k_3-k_2)x} = 0. \quad (1.18)$$

Dérivons (1.18), il vient

$$\alpha_3(k_3 - k_2)(k_3 - k_1)e^{(k_3-k_2)x} = 0,$$

ce qui est impossible car  $\alpha_3 \neq 0$  et  $k_3 \neq k_1$ ,  $k_3 \neq k_2$  par hypothèse et  $e^{(k_3-k_2)x} \neq 0$ . Notre supposition sur la dépendance linéaire du système donne a abouti a une contradiction, ce qui signifie que ce système de fonctions est linéairement indépendant sur l'intervalle  $] - \infty, +\infty[$ , C'est à-dire que l'identité (1.16) ne sera vérifiée que pour  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ .

**Définition 1.5.2 [9]** Soient  $n$  fonctions  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  possédant des dérivées d'ordre  $(n - 1)$ . Le déterminant

$$W[y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

s'appelle wronskien de ces fonctions. En générale, le wronskien est une fonction de  $x$  définie dans un certain intervalle.

**Exemple 1.5.3** Le wronskien des fonctions

$$y_1(x) = e^{k_1x}, y_2(x) = e^{k_2x}, y_3(x) = e^{k_3x},$$

est

$$W [y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & e^{k_3 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & k_3 e^{k_3 x} \\ k_1^2 e^{k_1 x} & k_2^2 e^{k_2 x} & k_3^2 e^{k_3 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2+k_3)x} (k_2 - k_1) (k_3 - k_1) (k_3 - k_2).$$

**Théorème 1.5.4** [9] Soient  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$   $n$  solutions de l'équation (1.14) sur un intervalle  $I$ . Alors l'ensemble des solutions est linéairement indépendantes sur  $I$  si et seulement si  $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$ .

**Définition 1.5.3** [9] Tout ensemble  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  de  $n$  solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.14) sur un intervalle  $I$  est appelé **Ensemble fondamental** des solutions sur  $I$ .

**Théorème 1.5.5** [9] Soient  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$   $n$  solutions linéairement indépendantes de l'équation sur  $I$ . Alors la solution générale de l'équation (1.14) sur  $I$  est donnée par

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x),$$

où  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sont des constantes.

## 1.6 Équations linéaires homogène à coefficients constants

[9] Considérons l'équation différentielle

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0, \tag{1.19}$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des constantes Pour résoudre (1.19) on procède comme suit : On cherche la solutions sous la forme :  $y = e^{\lambda x}$ , où  $\lambda$  une constante à déterminer. Donc

$$\begin{aligned} y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \\ &\vdots \\ y^n &= \lambda^n e^{\lambda x}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

En remplaçons  $y = e^{\lambda x}$  et (1.20) dans (1.19) obtient

$$a_0 \lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + \dots + a_{n-1} (\lambda e^{\lambda x}) + a_n e^{\lambda x} = e^{\lambda x} (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) = 0.$$

Comme  $e^{\lambda x} \neq 0$ , alors

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \tag{1.21}$$

(1.21) est appelé équation caractéristique associée à (1.19)

On peut résoudre (1.21) seulement si  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont des constantes réelles, en tenant compte du fait que :

- [a] À chaque racine réelle simple  $\lambda_0$  correspond une seule solution particulière  $y_p = e^{\lambda_0 x}$
- [b] À chaque couple de racines complexe conjugué  $\lambda_0 = a + ib$  correspond deux solution particulières  $e^{ax} \cos(bx), e^{ax} \sin(bx)$
- [c] À chaque racine réelle multiple (d'abord de multiplicité  $s$ ) :  $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{s-1} e^{\lambda x}$
- [d] À chaque couple de racines complexe conjugué de multiplicité  $s$  :

$$\begin{aligned} &e^{ax} \cos(bx), x e^{ax} \cos(bx), \dots, x^{s-1} e^{ax} \cos(bx), \\ &e^{ax} \sin(bx), x e^{ax} \sin(bx), \dots, x^{s-1} e^{ax} \sin(bx). \end{aligned}$$

Si  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  sont  $n$  intégrales particulières linéairement indépendantes de l'équation (1.19) :

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

est la solution générale de (1.19).

**Exemple 1.6.1** [9] Résoudre l'équation suivante :

$$y''' + 2y'' + y' = 0. \quad (1.22)$$

Écrivons l'équation caractéristique

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0$$

D'où  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$ . Les racines sont réelles et l'une d'elles à savoir  $\lambda_1 = -1$  est double de sorte que la solution générale de l'équation (1.22) est de la forme

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3xe^{-x}.$$

**Exemple 1.6.2** Résoudre l'équation suivante :

$$y''' + 2y'' + y' + y = 0. \quad (1.23)$$

L'équation caractéristique associée à (1.23) est

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0, \quad (1.24)$$

dont les racines sont  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$ . D'où la solution générale de (1.23) est :

$$y = C_1e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

## 1.7 Équation linéaire non homogène à coefficients constants

[9] Soit donnée une équation différentielle

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = f(x), \quad (1.25)$$

à coefficients réels constants  $a_0, a_1, \dots, a_n$ .

Pour résoudre (1.25), il y en a plusieurs méthodes (méthode de la variation de la constance (MVC), méthode des coefficients indéterminés, méthode de séries entière,...).

### 1.7.1 Méthode des coefficients indéterminés

**Théorème 1.7.2 [9]** *La solution générale de l'équation non homogène (1.25) est égale à la somme de la solution de l'équation homogène associée et l'une quelconque des solutions particulières de l'équation non homogène.*

La recherche de la solution générale de l'équation homogène associée s'obtient en appliquant les règles exposées plus haut au sous-section ( ELHCC ). Ainsi, le problème d'intégration de l'équation (1.25) se ramène à la recherche de la solution particulière  $y_{p.n}$  de l'équation non homogène. Dans le cas général, l'intégration de l'équation (1.25) peut être réalisée par la méthode de variation des constantes arbitraires . Pour les seconds membres de forme, la solution particulière peut être obtenue plus simplement par la méthode des coefficients indéterminés. La forme générale du second membre  $f(x)$  de l'équation (1.25) pour laquelle on peut appliquer la méthode des coefficients indéterminés est la suivante

$$f(x) = e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x],$$

où  $P_l(x)$  et  $Q_m(x)$  sont des polynômes de degrés  $l$  et  $m$  respectivement. Dans ce cas, la solution particulière  $y_{p.n}$  de l'équation (1.25) est cherchée sous la forme

$$y_{p.n} = x^s e^{\alpha x} [\tilde{P}_k(x) \cos \beta x + \tilde{Q}_k(x) \sin \beta x],$$

où  $k = \max(m, l)$ ,  $\tilde{P}_k(x)$  et  $\tilde{Q}_k(x)$  sont des polynômes en  $x$  de degré  $k$  de la forme générale à coefficients indéterminés, alors que  $s$  est la multiplicité de la racine  $\lambda = \alpha + i\beta$  de l'équation caractéristique ( si  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors  $s = 0$ .)

**Exemple 1.7.3** Résoudre l'équation suivante :

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 - 3x. \quad (1.26)$$

L'équation caractéristique est  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ , elle admet deux racines simples  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = 2$ , alors les solutions de l'équation homogène sont

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Puisque le nombre zéro n'est pas racine de l'équation caractéristique, la solution particulière  $y_{p.n}$  de l'équation (1.26) doit être cherchée sous la forme

$$y_{p.n} = ax^2 + bx + c,$$

où  $a, b, c$  sont des coefficients, pour le moment inconnus, qu'on doit déterminer. En introduisant l'expression de  $y_{p.n}$  dans l'équation (1.26), on obtient

$$2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 - 3x,$$

d'où

$$\begin{cases} 2a = 1, \\ -6a + 2b = -3, \\ 2a - 3b + 2c = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = 0, \\ c = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

de sorte qu'une solution particulière soit

$$y_{p.n} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2},$$

et la solution générale de l'équation (1.26)

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2}, \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

**Théorème 1.7.4 [9] (principe de superposition).** Si  $y_k(x)$  est solution de l'équation

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f_k(x), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

alors la fonction  $y(x) = \sum_{k=1}^m y_k(x)$  est solution de l'équation

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = \sum_{k=1}^m f_k(x)$$

**Exemple 1.7.5** Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + y = 2x^2 \cosh x = x^2(e^x + e^{-x}). \quad (1.27)$$

L'équation (1.27) est une équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 2.

L'équation caractéristique de l'équation homogène  $y'' - 2y' + y = 0$  :  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  admet une racine double  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ , la solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_h = e^{-x}(C_1 + C_2 x) \quad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour trouver une solution particulière  $y_p$  de l'équation (1.27) cherchons des solutions de deux équation

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^x, \quad (1.28)$$

$$y'' - 2y' + y = x^2 e^{-x}. \quad (1.29)$$

L'équation (1.28) a une solution particulière  $y_{p1}$  de la forme  $y_{p1} = e^x(ax^2 + bx + c)$  alors

$$y' = [ax^2 + (2a + b)x + (b + c)]e^x,$$

$$y'' = [ax^2 + (4ax + b) + (2a + 2b + c)]e^x.$$

En introduisant l'expression de  $y, y'$  et  $y''$  dans (1.28) et par identification on trouve  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = -\frac{1}{2}$ ,  $c = \frac{3}{8}$ , si bien que

$$y_{p1} = e^x \left( \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} \right).$$

Cherchons une solution particulière de l'équation (1.29) sous la forme  $y_{p_2} = e^x(ax^4 + bx^3 + cx^2)$ . Par identification  $a = \frac{1}{12}, b = 0, c = 0$ , donc

$$y_{p_2} = e^{-x} \left( \frac{1}{12} x^4 \right)$$

En vertu du principe de superposition, la solution particulière  $y_p$  de l'équation donnée sera égale à la somme des solutions  $y_{p_1}$  et  $y_{p_2}$ , des équations (1.28) et (1.29) :

$$y_p = e^{-x} \left( \frac{1}{12} x^4 \right) + e^x \left( \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} \right).$$

La solution générale de l'équation (1.27).

$$y = e^{-x} (C_1 + C_2 x) + e^{-x} \left( \frac{1}{12} x^4 \right) + e^x \left( \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} \right),$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles arbitraires.

## **Chapitre 2**

# **Méthodes numériques**

Dans ce chapitre, on donne un aperçu de quelques méthodes numériques classiques pour résoudre des équations différentielles linéaires. Nous étudierons les deux méthodes suivantes : la méthode des différences finies et la méthode Runge kutta. puis Nous étudierons la nouvelle méthode numérique ondelettes.

## 2.1 Méthode de différences finies

La méthode de différences finies consiste à remplacer les dérivées par des différences divisées en un nombre finis des points discrets.

### 2.1.1 Discrétisation du domaine

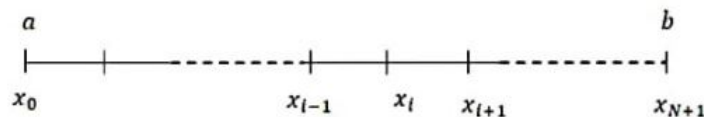
Soit  $I = [a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . on dit que  $(x_k)_{0 \leq k \leq N+1}$  une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  si,

$$x_k \in [a, b], \quad \forall 0 \leq k \leq N + 1 \text{ et vérifiés :}$$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = b.$$

Pour  $i = 0, \dots, N$  on note  $h_{i+\frac{1}{2}} = x_{i+1} - x_i$  et on définit le pas du maillage par

$$h = \max h_{i+\frac{1}{2}}$$

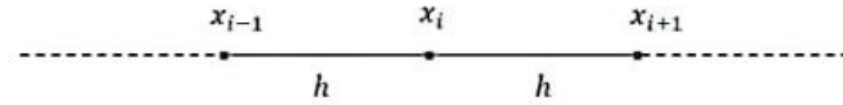


**FIGURE 2.1** – Discrétisation du domaine en dimension 1 .

### 2.1.2 Principe de la méthode de différences finies

[6]Le principe de la méthode de différences finies (DF) consiste à se donner un certain nombre de points du domaine, qu'on notera,  $(x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ . On approche l'opérateur différentiel par un quotient de manière à en déduire un système d'équations en

fonction d'inconnus discrètes représenter des approximation d'inconnu  $u$  aux points de discrétisation.



**FIGURE 2.2** – Points médians de la grille.

Effectuons d'abord un développement de Taylor au voisinage de  $x_i$  à l'ordre 3.

$$u(x_{i+1}) = u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + o(h^3),$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + o(h^3).$$

La soustraction de ces deux relation donne

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = 2hu'(x_i) + o(h^3). \quad (2.1)$$

On note  $u_i = u(x_i), \forall i = 0, \dots, N + 1$ . La relation (2.1) devient

$$u_{i+1} - u_{i-1} = 2hu'(x_i) + o(h^3).$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre 2 (centré) pour approximer la dérivée première de  $u$  en  $x_i$

$$u'(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + o(h^2). \quad (2.2)$$

Effectuons un développement de Taylor au voisinage de  $x_i$  d'ordre 4,

$$u(x_{i+1}) = u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + o(h^4),$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + o(h^4).$$

En faisant la somme de deux égalités, on aboutit à

$$u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = h^2u''(x_i) + o(h^4).$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre deux pour approximer la dérivée second de  $u$  :

$$u''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + o(h^2). \quad (2.3)$$

Effecton d'abord un développement de Taylor au voisinage de  $x_i$  a l'ordre 5,

$$u(x_{i+1}) = u(x_i + h) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}u''''(x_i) + o(h^5),$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i - h) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}u''''(x_i) + o(h^5)$$

$$u(x_{i+2}) = u(x_i + 2h) = u(x_i) + 2hu'(x_i) + 2h^2u''(x_i) + 8\frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + 16\frac{h^4}{4!}u''''(x_i) + o(h^5)$$

$$u(x_{i-2}) = u(x_i - 2h) = u(x_i) - 2hu'(x_i) + 2h^2u''(x_i) - 8\frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + 16\frac{h^4}{4!}u''''(x_i) + o(h^5)$$

En faisant la somme de quatre égalités. on aboutit à

$$u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2} = h^3u'''(x_i) + o(h^5)$$

Ce qui permet d'obtenir le schéma d'ordre trois pour approximer la dérivée troisième de  $u$  :

$$u'''(x_i) = \frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + 2u_{i-1} - u_{i-2}}{h^3} + o(h^2). \quad (2.4)$$

**Autres schémas d'approximation** : D'après le développement de Taylor au voisinage de  $x_i$  on a

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}) &= u(x_i) + hu'(x_i) + o(h^2) \\ \implies u'(x_i) &= \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} + o(h), \end{aligned}$$

un schéma décentré avant ( $S.D.A_v$ ).

Si on utilise le point  $u(x_{i-1})$  :

$$\begin{aligned} u(x_{i-1}) &= u(x_i) - hu'(x_i) + o(h^2) \\ \implies u'(x_i) &= \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h} + o(h). \end{aligned}$$

schéma décentré arrière ( $S.D.A_r$ ).

### 2.1.3 Convergence, consistance et stabilité

**Définition 2.1.3.1** *Supposons le problème suivant avec  $L$  un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 en  $t$*

$$\begin{cases} Lu(x, t) = f(x, t) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ u(x, 0) = \phi(x), & \text{pour } x \in \Omega \text{ (ouverte de } \mathbb{R}) \end{cases} \quad (2.5)$$

*En remplaçant les dérivées partielles par des différences finies on obtient un opérateur discret  $L_{h,k}$ . Ainsi l'équation aux dérivées partielles homogène discrétisée s'écrit sous la forme  $L_{h,k}v = 0$  ( $h$  le pas de l'espace,  $k$  le pas du temps). Un schéma aux différences finies général associées à l'équation (2.5) s'écrit donc comme suit*

$$L_{k,h}v = f_i^n.$$

*La condition initiale est simplement  $v_m^0 = \phi(x_m)$  pour  $x_m \in \Omega$ .*

- **Consistance [6]** : On dit que le schéma  $L_{h,k}u = f_i^n$  est consistant avec l'équation aux dérivée partielles (2.5) si pour toute fonction  $\varphi$  de classe  $C^\infty$ , on a :

En tout point  $(x_i, t_n)$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (L\varphi - L_{h,k}\varphi) = 0$$

- On dit qu'un schéma de discrétisation a  $N$  points est d'ordre  $p$  s'il existe  $c \in \mathbb{R}$  ne dépend que de la solution exacte, tel que l'erreur de consistance satisfait

$$\max_{i=1, \dots, N} |R_i| \leq ch^p.$$

- **stabilité** : Un schéma numérique est dit stable lorsque la différence entre la solution numérique obtenue et la solution exacte des équations discrétisées est bornée.
- La stabilité dépend du norme.

- **convergence [6]** : Soit  $u(x, t)$  la solution de (2.5) et  $u$  une solution du schéma discrète  $L_{h,k} = \infty_i^n$  telle que  $v_i^0$  converge vers  $\phi(x)$  quand  $x_i$  tendant vers  $x$ .

On dit que le schéma aux différences finies  $L_{h,k}$  est un schéma convergent si  $v_i^n$  converge vers  $u(x, t)$  quand  $(x_i, t_n)$  converge vers  $(x, t)$  pur  $(h, k)$  tendant vers  $(0, 0)$  c'est-à-dire la solution d'un schéma aux différences finies converge vers la solution exacte de l'équation aux dérivées partielles.

- Convergence = stabilité + consistance.

### 2.1.4 Méthode de différences finies pour un problème elliptique

[6] Soit le problème suivant

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $c \in C([0, 1], \mathbb{R}_+)$  et  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ , qui peut modéliser par exemple un phénomène de diffusion-réaction d'une espèce chimique. On se donne un pas du maillage constant  $h = \frac{1}{N+1}$  et une subdivision de  $[0, 1]$ , notés  $(x_k)_{0 \leq k \leq N+1}$  avec

$$x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = 1.$$

En approchant  $u''(x_i)$  par quotient différentiel en utilisant le développement de Taylor, on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2} (2u_i - u_{i+1} - u_{i-1}) + c_i u_i = f_i, & i = 1, \dots, N, \\ u_0 = u_{N+1} = 0, \end{cases} \quad (2.7)$$

où :

$u_i$  est l'inconnue discrète associée au noeud  $i, i = 0, \dots, N + 1$ , on pose  $u_0 = u_{N+1} = 0$ .

$c_i = c(x_i)$  et  $f_i = f(x_i)$ .

On peut écrire ces équations sous la forme matricielle

$$A_h U_h = b_h. \tag{2.8}$$

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + c_1 h^2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 + c_2 h^2 & -1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 + c_3 h^2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & -1 & 2 + c_{N-1} h^2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 + c_N h^2 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

et

$$u_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix}, b_h = h^2 f_i = \begin{bmatrix} h^2 f_1 \\ h^2 f_2 \\ h^2 f_3 \\ h^2 f_4 \\ \vdots \\ h^2 f_{N-1} \\ h^2 f_N \end{bmatrix}.$$

**Exemple 2.1.4.1** [7] On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' + u' = x, x \in ]0, 1[, \\ u(0) = a, u(1) = b \end{cases} \tag{2.10}$$

On cherche à approcher cette solution par la méthode de différences finies. Soit  $N \in \mathbb{N}$  et  $h = \frac{1}{N+1}$ . on note  $u_i$  la valeur approchée recherchée de  $u$  au point  $ih$  pour  $i = 0, \dots, N+1$ . On utilise les approximations centrées les plus simples de  $u'$  et  $u''$  au point  $ih, i = 1, \dots, N$ . On pose  $u_h = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ .

1. Donner une discrétisation par différences finies de ce problème.
2. Ecrire le système obtenu sous la forme matricielle  $A_h u_h = b_h$ . Donner  $A_h$  et  $b_h$ .
3. Montrer que le schéma obtenu est consistant et donner une majoration de l'erreur de consistance si  $u$  est suffisamment régulière.
4. Montrer que le schéma obtenu est stable.

**Solution :** Soit  $\Omega_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N + 1\}$  où  $h = \frac{1}{N+1}, N \in \mathbb{N}$

1. Avec un schéma centrée, on a

$$u''(x_i) = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + o(h^2). \quad (2.11)$$

$$u'(x_i) = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + o(h^2). \quad (2.12)$$

L'équation discrète

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = ih \quad i = 1, \dots, N. \quad (x_i = ih). \quad (2.13)$$

Pour les conditions aux limites, on a  $u_0 = u(0) = a$ , et  $u_{N+1} = u(1) = b$ . Donc, le problème discrète devient

$$\begin{cases} -\left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{h^2}\right) u_{i-1} + \frac{2}{h^2} u_i + \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2}\right) u_{i+1} = ih & i = 1, \dots, N, \\ u_0 = a, \\ u_{N+1} = b. \end{cases}$$

2. On peut écrire le système sous la forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} & \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2}\right) & \ddots & \ddots & \\ -\left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{h^2}\right) & \frac{2}{h^2} & \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2}\right) & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \left(\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2}\right) & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \frac{2}{h^2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h + \left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{h^2}\right) a \\ 2h \\ \vdots \\ \vdots \\ (N-1)h \\ Nh - \left(\frac{1}{2h} + \frac{1}{h^2}\right) b \end{bmatrix},$$

3. La consistance : En utilisant le développement de Taylor

$$\begin{aligned}
 u_{i+1} &= u_i + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_i), \quad x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1} \\
 u_{i-1} &= u_i - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}u^{(4)}(\xi_{i-1}), \quad x_{i-1} \leq \xi_{i-1} \leq x_i \\
 \implies \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} &= u''(x_i) + \frac{h^2}{4!}(u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\xi_{i-1})) \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

Pour  $u'(x_i)$  :

$$\begin{aligned}
 u_{i+1} &= u_i + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{3!}u'''(\lambda_i), \quad x_i \leq \lambda_i \leq x_{i+1}. \\
 u_{i-1} &= u_i - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) - \frac{h^3}{3!}u'''(\lambda_{i-1}), \quad x_{i-1} \leq \lambda_{i-1} \leq x_i. \\
 \implies \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} &= u'(x_i) + \frac{h^2}{12}(u^{(3)}(\lambda_i) + u^{(3)}(\lambda_{i-1})) \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies R_i &= -u''(x_i) + \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u'(x_i) - \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \\ &= \frac{h^2}{4!} (u^{(4)}(\xi_i) + u^{(4)}(\xi_{i-1})) - \frac{h^2}{12} (u^{(3)}(\lambda_i) + u^{(3)}(\lambda_{i-1})) \end{aligned}$$

$$\implies |R_i| \leq \frac{h^2}{12} \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| + \frac{h^2}{6} \max_{x \in [0,1]} |u^{(3)}(x)| \leq \frac{h^2}{12} \left( \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| + 2 \max_{x \in [0,1]} |u^{(3)}(x)| \right)$$

$$\implies |R| \rightarrow 0 \text{ quand } h \rightarrow 0.$$

Alors, le schéma est consistant d'ordre 2.

4. De la consistance on a :

$$|R_i| \leq \frac{h^2}{12} (\max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| + 2 \max_{x \in [0,1]} |u^{(3)}(x)|)$$

alors :

$$\|R\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} |R_i| \leq ch^2$$

$$h = (h_1, \dots, h_N) \quad \text{et}$$

$$C = \frac{1}{12} \left( \max_{x \in [0,1]} |u^{(4)}(x)| + 2 \max_{x \in [0,1]} |u^{(3)}(x)| \right)$$

Quand  $h \rightarrow 0$  on a  $\max_{i \in \{1, \dots, N\}} |R_i| \rightarrow 0$ ,

alors le problème discret est stable pour la norme discrète du maximum (La norme de la convergence uniforme)

## 2.2 Méthodes de Runge-Kutta

[2] L'équation différentielle d'ordre  $n$ , se ramène à la résolution combinée de  $n$  équations différentielles à valeurs initiales de type Cauchy :

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = f(x, u), \\ u(x_0) = u_0 \end{cases} \quad (2.16)$$

Le domaine de calcul  $[x_0, x_n]$  est subdivisé en  $n$  sous intervalles  $\{[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \dots, n\}$

Permet d'aboutir à l'expression :

$$u_i = u_{i-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, u) dx. \tag{2.17}$$

il existe plusieurs méthode pour résoudre l'èquation différentielle (2.17) comme Euler, différences finies

L'ordre de précision de la méthode d'Euler est équivalent à la troncature de la série de Taylor à l'ordre 1 :

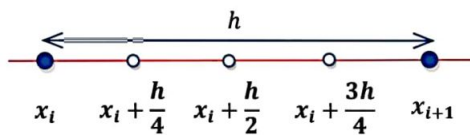
$$u_i = u_{i-1} + h * \underbrace{\left(\frac{du}{dx}\right)_{i-1}}_{f(x_{i-1}, u_{i-1})} + \theta^{(2)} \tag{2.18}$$

$\theta^{(2)}$  : L'erreur de troncature d'ordre 2 :

$$\theta^{(2)} \simeq \frac{h^2}{2!} \underbrace{\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{i-1}}_{f'(x_{i-1}; u_{i-1})} \tag{2.19}$$

Pour augmenter la précision (ordre de la méthode), le calcul des dérivées  $f^{(2)}, f^{(3)}, \dots, f^{(n)}$  augmente énormément le temps et le coût de calcul.

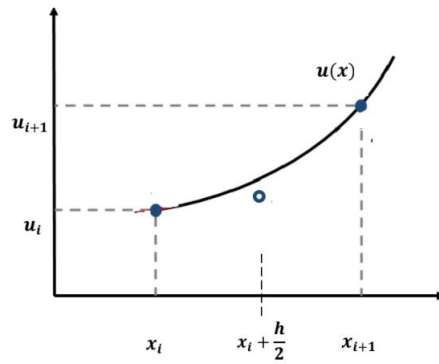
Carle Runge et Martin Kutta, ont développé des méthodes d'ordres plus élevés, par l'insertion des nœuds intermédiaires dans le pas de calcul :



**FIGURE 2.3** – Subdivision du pas de calcul dans les méthodes de Runge-Kutta

### 2.2.1 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

[2]Un nœud est inséré au milieu de l'intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  . La méthode est d'ordre 2 et l'erreur d'approximation est d'ordre 3 :



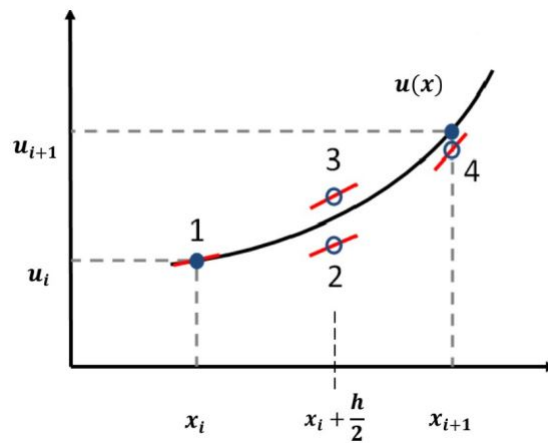
**FIGURE 2.4** – Méthode de Runge-Kutta d’ordre 2

La solution de l’équation différentielle (2.17) est obtenue en deux étapes :

$$\begin{cases} K_1 &= h * f(x_i, u_i), \\ K_2 &= h * f(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{K_1}{2}), \\ u_{i+1} &= u_i + K_2. \end{cases} \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Méthode de Runge-Kutta d’ordre 4

[2]Deux points intermédiaires sont insérés dans l’intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$  :



**FIGURE 2.5** – Méthode de Runge-Kutta d’ordre 4

La solution de l'équation différentielle (2.15) est obtenue en quatre étapes :

$$\begin{cases} k_1 &= h * f(x_i, u_i), \\ k_2 &= h * f(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_1}{2}), \\ k_3 &= h * f(x_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{k_2}{2}), \\ k_4 &= h * f(x_i + h, u_i + k_3), \\ u_{i+1} &= u_i + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}. \end{cases} \quad (2.21)$$

**Exemple 2.2.3** [2] On considère le problème à valeur initiale, de l'exemple précédent :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u + e^{2t}, \\ u(0) = 2. \end{cases}$$

Utiliser la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, pour calculer  $u(0.5)$ , en utilisant un pas  $\Delta t = 0.25$ .

**Solution :**

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 :

**t=0.25 :**

$$k1 = \Delta t * [u_{r2}(0) + e^{2*t_0}] = 0.25 * [2 + e^{2*0}] = 0.7500,$$

$$k2 = \Delta t * \left[ \left( u_{r2}(0) + \frac{k1}{2} \right) + e^{2*(t_0 + \frac{\Delta t}{2})} \right] = 0.25 * \left[ 2 + \frac{0.75}{2} + e^{2*(0 + \frac{0.25}{2})} \right] = 0.9147,$$

$$u_{R4}(0.25) = u_{R4}(0) + k2 = 2 + 0.9147 = 2.9147.$$

**t=0.5 :**

$$k1 = \Delta t * [u_{r2}(0.25) + e^{2*t_1}] = 0.25 * [2.9147 + e^{2*0.25}] = 1.1408,$$

$$k2 = \Delta t * \left[ \left( u_{r2}(0.25) + \frac{k1}{2} \right) + e^{2*(t_1 + \frac{\Delta t}{2})} \right] = 0.25 * \left[ 2.9147 + \frac{1.1408}{2} + e^{2*(0.25 + \frac{0.25}{2})} \right] = 1.4005,$$

$$u_{R4}(0.5) = u_{R4}(0.25) + k2 = 2.9147 + 1.4005 = 4.3152.$$

Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 :

**t=0.25 :**

$$k1 = \Delta t * [u_{r4}(0) + e^{2*t_0}] = 0.25 * [2 + e^{2*0}] = 0.7500 ,$$

$$k2 = \Delta t * \left[ \left( u_{r4}(0) + \frac{k1}{2} \right) + e^{2*(t_0 + \frac{\Delta t}{2})} \right] = 0.25 * \left[ 2 + \frac{0.75}{2} + e^{2*(0 + \frac{0.25}{2})} \right] = 0.9147 ,$$

$$k3 = \Delta t * \left[ \left( u_{r4}(0) + \frac{k2}{2} \right) + e^{2*(t_0 + \frac{\Delta t}{2})} \right] = 0.25 * \left[ 2 + \frac{0.9147}{2} + e^{2*(0 + \frac{0.25}{2})} \right] = 0.9353,$$

$$k4 = \Delta t * [(u_{r4}(0) + k3) + e^{2*(t_0 + \Delta t)}] = 0.25 * [2 + 0.9353 + e^{2*(0 + 0.25)}] = 1.1460,$$

$$u_{r4}(0.25) = u_{r4}(0) + \frac{k1}{6} + \frac{k2}{3} + \frac{k3}{3} + \frac{k4}{6} = 2 + \frac{0.75}{6} + \frac{0.9147}{3} + \frac{0.9353}{3} + \frac{1.146}{6} = 2.9327.$$

**t=0.5 :**

$$k1 = \Delta t * [u_{r4}(0.25) + e^{2*t_1}] = 0.25 * [2.9327 + e^{2*0.25}] = 1.1453 ,$$

$$k2 = \Delta t * \left[ \left( u_{r4}(0.25) + \frac{k1}{2} \right) + e^{2*(t_1 + \frac{\Delta t}{2})} \right] = 0.25 * \left[ 2.9327 + \frac{1.1453}{2} + e^{2*(0.25 + \frac{0.25}{2})} \right] = 1.4056,$$

$$k3 = \Delta t * \left[ \left( u_{r4}(0.25) + \frac{k2}{2} \right) + e^{2*(t_1 + \frac{\Delta t}{2})} \right] = 0.25 * \left[ 2.9327 + \frac{1.4056}{2} + e^{2*(0.25 + \frac{0.25}{2})} \right] = 1.4381 ,$$

$$k4 = \Delta t * [(u_{r4}(0.25) + k3) + e^{2*(t_1 + \Delta t)}] = 0.25 * [2.9327 + 1.4381 + e^{2*(0.25 + 0.25)}] = 1.7723,$$

$$u_{r4}(0.5) = u_{r4}(0.25) + \frac{k1}{6} + \frac{k2}{3} + \frac{k3}{3} + \frac{k4}{6} = 2.9327 + \frac{1.1453}{6} + \frac{1.4056}{3} + \frac{1.4381}{3} + \frac{1.7723}{6} = 4.3669.$$

Comparaison des valeurs numériques avec la valeur exacte :

$u_e(0.5)$	$u_m(0.5)$	$u_{r2}(0.5)$	$u_{r4}(0.5)$	$u_{ex}(0.5)$	$\epsilon_e(0.5)$	$\epsilon_m(0.5)$	$\epsilon_{r2}(0.5)$	$\epsilon_{r4}(0.5)$
<b>3.8497</b>	<b>4.7417</b>	<b>4.3152</b>	<b>4.3669</b>	<b>4.3670</b>	<b>11.84%</b>	<b>8.58%</b>	<b>1.19%</b>	<b>0.0023%</b>

**TABLE 2.1** – Comparaison de la précision des méthodes numériques par rapport à la solution exacte

## 2.3 Méthode d'ondelette de Haar

La notion de "Ondelettes" ou "Wavelets" a été utilisée pour la première fois au début des années 80 par le géophysicien français J. Morlet pour désigner des fonctions mathématiques utilisées dans la représentation des données sismiques.

Les ondelettes sont des fonctions de base de variation multi-échelles, ou multirésolutions, utilisées dans le but de l'approximation ou de la compression des données.

La théorie des ondelettes n'est pas en fait tout à fait nouvelle, mais le support mathématique, contenu déjà dans les recherches des années 30, a été développé considérablement dans les dernières 20 années, après que ces fonctions ont été utilisés dans le traitement numérique du signal et en particulier dans l'analyse et la compression des images.

### 2.3.1 Définitions et quelques exemples

#### 2.3.1.1 Qu'est ce qu'une ondelette

**Définition 2.3.1.1.1** Une "ondelette" est une fonction oscillante (ce qui explique le mot "onde") de moyenne nulle, appelée  $\psi$ , possédant un certain degré de régularité et dont le support est fini (ce qui explique le mot "ondelette", qui veut dire petite onde).

**Définition 2.3.1.1.2** Une ondelette est une fonction de base que l'on peut translater et dilater pour recouvrir le plan temps-fréquences et analyser un signal. L'ondelette doit être une fonction de moyenne nulle, en d'autres termes, doit être une onde. Ce qui s'écrit mathématiquement par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \, dx = 0. \quad (2.22)$$

**Définition 2.3.1.1.3** Une ondelette  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  vérifiant la condition d'admissibilité ssi :

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(w)|^2}{w} \, dw < \infty, \quad (2.23)$$

où  $\widehat{\psi}(w)$  est la transformée de Fourier de  $\psi(w)$ .

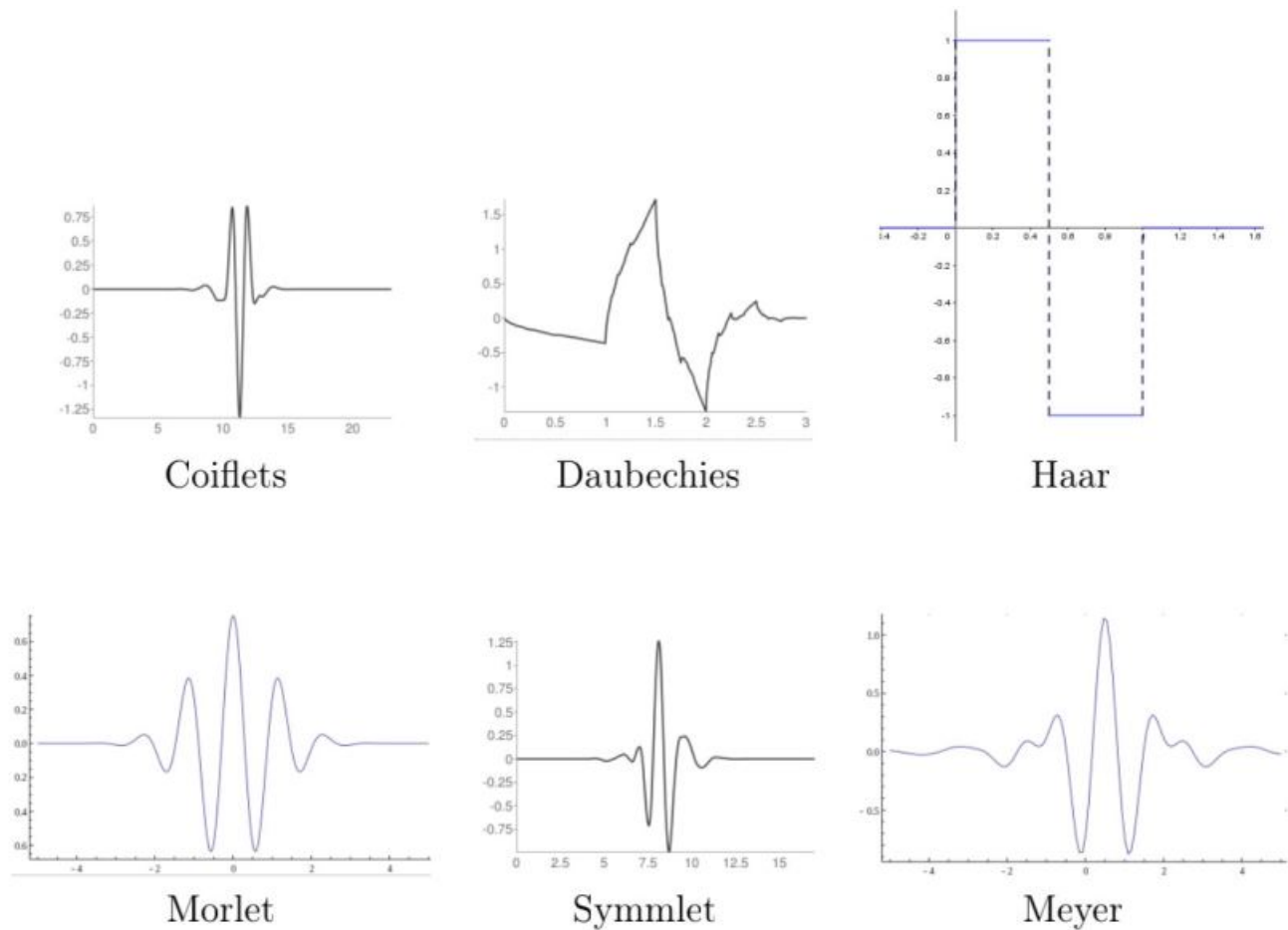
**Exemple 2.3.1.1.4** L'ondelette de Haar :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ -1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.24)$$

**Exemple 2.3.1.1.5** L'ondelette de Morlet (complexe) :

$$\psi(x) = e^{-\pi x^2} e^{10i\pi x}, \quad (2.25)$$

maintenant, Nous allons montrer les ondelettes les plus importantes avec leurs courbes graphiques.



**FIGURE 2.6** – Certains types d'ondelettes

### 2.3.1.2 Propriétés des ondelettes

Les ondelettes sont des fonctions qui peuvent être caractérisées par certaines propriétés remarquables, ces dernières pouvant être incompatibles entre elles, cela implique des choix à faire suivant l'application souhaitée. Nous donnons des propriétés d'ondelettes.

— **Décroissance rapide** : une ondelette sera dite à décroissance rapide si

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, |\psi(x)| \leq \frac{C_m}{1 + |x|^m}. \quad (2.26)$$

— **Orthogonalité** : une ondelette  $\psi$  est dite orthogonale si pour tout  $(j, j', n, n') \in \mathbb{Z}^4$  on a

$$\langle \psi_{jn}, \psi_{j'n'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{nn'} \quad (\delta_{jj'} = 0 \text{ si } j \neq j' \text{ et } \delta_{jj} = 1). \quad (2.27)$$

— **Nombre de moments nuls** : pour  $n \in \mathbb{N}$ , une ondelette admet  $n$  moments nuls si

$$\forall k = 0, 1, \dots, n-1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) \, dx = 0. \quad (2.28)$$

— **Support compact** : Autant l'ondelette a moins de moments nuls autant son support est compact, et une analyse plus exacte des hautes fréquences est possible.

### 2.3.2 La base d'ondelette de Haar sur $L^2([a, b])$

**Définition 2.3.2.1** [1] La fonction d'échelle définie sur l'intervalle  $[a, b)$  est :

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [a, b), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.29)$$

Cette fonction s'appelle l'ondelette père.

**Définition 2.3.2.2** *Toutes les autres fonctions des ondelettes de Haar sont définies sur des sous-intervalles de  $[a, b)$ .*

*Chaque fonction des ondelettes de Haar définie pour  $x \in [a, b)$  sauf la fonction d'échelle peut être exprimée comme :*

$$h_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\alpha, \beta), \\ -1 & \text{si } x \in [\beta, \gamma], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.30)$$

où

$$\alpha = a + (b - a) \frac{k}{m} \text{ et } \beta = a + (b - a) \frac{k + 0.5}{m}, \gamma = a + (b - a) \frac{k + 1}{m}, \quad i = 2, 3, \dots, 2M.$$

*Le entier  $m = 2^j$  indique le niveau de l'ondelette où  $j = 0, 1, 2, \dots, J$  et  $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ .*

*Le entier  $j$  est le paramètre de dilatation et  $k$  est le paramètre de translation. Le niveau maximal de résolution est l'entier  $J$ . La relation entre  $i, m$  et  $k$  est donné par :  $i = m + k + 1$ , Dans le cas de valeurs minimales  $m = 1$  et  $k = 0$ , on a  $i = 2$ . La valeur maximale de  $i$  est  $i = 2^{J+1} = 2M$ . Les fonctions des ondelettes de Haar sont orthogonales les uns aux autres car*

$$\int_a^b h_j(x)h_k(x)dx = \begin{cases} (b - a)2^{-j} & \text{si } j = k, \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases} \quad (2.31)$$

*toute fonction  $f$  qui est carrée intégrable dans l'intervalle  $[a, b]$  " i . e  $f \in L^2([a, b])$ " peut être exprimée sous la forme d'une somme infinie d'ondelettes de Haar*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i h_i(x). \quad (2.32)$$

**Remarque 2.3.2.3** *La série ci-dessus se termine par des termes finis si  $f$  est constante par morceaux ou peut être approchée comme constante par morceaux pendant chaque sous-intervalle.*

**Remarque 2.3.2.4** *Lors de l'application de la méthode D'ondelettes de Haar , L'intervalle  $[a, b)$  sera divisé en  $2M + 1$  sous-intervalles, d'où  $\Delta x = \frac{b - a}{2M}$ , les points de colocalisation*

$$x_l = a + (b - a) \frac{l - 0.5}{2M},$$

*où  $l = 1, 2, \dots, 2M$  et la matrice de Haar  $(H(i, l))_{il}$  est de la dimension de  $2M \times 2M$ , telle que  $H(i, l) = h_i(x_l)$ . Nous expliquerons cela plus tard .*

### 2.3.3 Principe de La Méthode D'ondelettes de Haar

Le principe de cette méthode est de réduire le problème à un ensemble d'équations algébriques en développant d'abord les termes, qui a une dérivée maximale, est donné sous une forme de la somme de fonctions de Haar et aussi les coefficients de Haar inconnus . Pour calculer les coefficients de Haar , nous devons résoudre un système linéaire d'équations algébriques, et d'autres dérivés et la fonction elle-même sont obtenus par intégration .

### 2.3.4 Explication de la méthode D'ondelettes de Haar

Avant de commencer d'application de la méthode D'ondelettes de Haar sur certaines équations aux dérivées partielles, Nous introduisons les notations suivantes :

$$P_{i,1}(x) = \int_0^x h_i(x) dx \tag{2.33}$$

où  $h_i$  est définie par eq. (2.30), on définit aussi

$$P_{i,v}(x) = \int_0^x P_{i,v-1}(x) dx \quad v = 2, 3, \dots \tag{2.34}$$

Ces intégrales peuvent être calculées en utilisant l'équation eq. (2.30), et les deux premières d'entre elles sont données par

$$P_{i,1}(x) = \begin{cases} x - \alpha & \text{si } x \in [\alpha, \beta), \\ \gamma - x & \text{si } x \in [\beta, \gamma), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.35)$$

$$P_{i,2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha, \\ \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 & \text{si } \alpha \leq x < \beta, \\ \frac{(b-a)^2}{4m^2} - \frac{1}{2}(x - \gamma)^2 & \text{si } \beta \leq x < \gamma, \\ \frac{(b-a)^2}{4m^2} & \text{si } x \geq \gamma. \end{cases} \quad (2.36)$$

De même, on peut trouver d'autres intégrales  $P_{i,v}(x)$   $v = 3, 4, \dots$ . Intégration les fonctions de Haar eq. (2.30) pour  $\lambda$  fois. Pour tout  $x \in [a, b]$  on a

$$\begin{aligned} p_{i,\lambda}(x) &= \underbrace{\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x h_i(s) \mathbf{d}s^\lambda}_{\lambda \text{ times}} \\ &= \frac{1}{(\lambda - 1)!} \int_a^x (x - s)^{\lambda-1} h_i(s) \mathbf{d}s, \quad \lambda = 1, 2, \dots; i = 1, 2, \dots, 2M \end{aligned} \quad (2.37)$$

Le cas  $\lambda = 0$  correspond à la fonction  $h_i(x)$ .

Toutes ces intégrales peut être calculées analytiquement et présentées directement. Quand  $i = 1$  l'équation eq. (2.37) donne

$$P_{1,\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda!} (x - a)^\lambda. \quad (2.38)$$

Et pour  $i \geq 2$  dans l'équation (2.37), on obtient

$$p_{i,\lambda}(x) = \frac{1}{\lambda!} \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [a, \alpha), \\ (x - \alpha)^\lambda & \text{si } x \in [\alpha, \beta), \\ [(x - \alpha)^\lambda - 2(x - \beta)^\lambda] & \text{si } x \in [\beta, \gamma), \\ [(x - \alpha)^\lambda - 2(x - \beta)^\lambda + (x - \gamma)^\lambda] & \text{si } x \in [\gamma, b). \end{cases} \quad (2.39)$$

Maintenant  $y^{(n)}(t)$  peut être considéré comme suit

$$y^{(n)}(\mathbf{t}) \simeq \sum_{i=0}^{2M} c_i h_i(t) = \mathbf{C}_m^T h_m(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in [a, b], \quad (2.40)$$

ce qui donne

$$y(\mathbf{t}) \simeq \sum_{i=0}^{2M} c_i \mathbf{P}_{in}(\mathbf{t}) + \frac{y^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} t^{n-1} + \dots + \frac{y''(a)}{2!} t^2 + y'(a)t + y(a), \quad \mathbf{t} \in [a, b]. \quad (2.41)$$

Pour résoudre les problèmes aux limites dans certains exemples, nous avons besoin des valeurs  $P_{i,\lambda}(b)$ , qui peuvent être calculées à partir de eq. (2.39). Dans des cas particuliers  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = 2$ , on trouve

$$q_1(i) = p_{i,1}(b) = \begin{cases} b - a & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.42)$$

$$q_2(i) = p_{i,2}(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}(b - a)^2 & \text{si } i = 1, \\ \frac{(b - a)^2}{4m^2} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.43)$$

Sur l'intervalle  $[0, 1)$  on définit aussi,

$$Ch_i(x) = \int_0^1 P_{i,1}(x) dx \quad i = 1, 2, 3, \dots, 2M. \quad (2.44)$$

Donc,

$$Chi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 & \text{si } x \in [\alpha, \beta), \\ \frac{1}{4m^2} - \frac{1}{2}(\beta - 1)^2 & \text{si } x \in [\beta, \gamma), \\ \frac{1}{4m^2} & \text{si } x \in [\gamma, 1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.45)$$

Maintenant, après avoir rappelé certains symboles et relations nous commencerons par méthode de solution et expliquer la méthode des ondelettes de Haar en l'appliquant à EDP .

# **Chapitre 3**

## **Application**

### 3.1 Description de la méthode

Par rapport à la section précédente, si les valeurs initiales sont données dans (2.39), la fonction peut être approximée par une base de Haar et par conséquent, nous pouvons développer la solution des problèmes de valeur initiale. Nous voulons maintenant proposer la technique pour résoudre les problèmes de valeurs aux limites sous la forme générale de l'équation différentielle d'ordre  $n$  :  $F(Y(t), t) = 0$  sur l'intervalle  $[a, b]$  lorsque certaines valeurs initiales ne sont pas données. Nous supposons que  $Y^{(n)}(t)$  peut être développé en termes d'ondelettes de Haar comme suit

$$\mathbf{y}^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{2M} \mathbf{c}_i \mathbf{h}_i(t), \quad t \in [a, b]. \quad (3.1)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(n-1)}(t) &= \sum_{i=1}^{2M} \mathbf{c}_i P_{i1}(t) + \mathbf{y}^{(n-1)}(a), \\ \mathbf{y}^{(n-2)}(t) &= \sum_{i=1}^{2M} \mathbf{c}_i P_{i2}(t) + t\mathbf{y}^{(n-1)}(a) + \mathbf{y}^{(n-2)}(a), \\ \mathbf{y}^{(n-3)}(t) &= \sum_{i=1}^{2M} \mathbf{c}_i P_{i3}(t) + \frac{t^2}{2}\mathbf{y}^{(n-1)}(a) + t\mathbf{y}^{(n-2)}(a) + \mathbf{y}^{(n-3)}(a), \\ &\vdots \\ \mathbf{y}(t) &= \sum_{i=1}^{2M} \mathbf{c}_i P_{in}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \mathbf{y}^{(k)}(a). \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer  $\mathbf{y}^{(j)}(a)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n - 1$  sont inconnus. Ainsi, les équations ci-dessus peuvent être réécrites en tant que suit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}^{(n-1)}(t) &= \sum_{i=1}^{2M} \mathbf{c}_i P_{i1}(t) + \mathbf{c}_m, \\
 \mathbf{y}^{(n-2)}(t) &= \sum_{i=1}^{2M} \mathbf{c}_i P_{i2}(t) + t\mathbf{c}_m + \mathbf{c}_{m+1}, \\
 \mathbf{y}^{(n-3)}(t) &= \sum_{i=1}^{2M} \mathbf{c}_i P_{i3}(t) + \frac{t^2}{2}\mathbf{c}_m + t\mathbf{c}_{m+1} + \mathbf{c}_{m+2}, \\
 &\vdots \\
 \mathbf{y}(t) &= \sum_{i=1}^{2M} \mathbf{c}_i P_{in}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \mathbf{c}_{m+k}.
 \end{aligned}$$

où  $c_{m+k} = \mathbf{y}^{(n-k-1)}(a)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Maintenant, en remplaçant l'expansion de  $\mathbf{y}^{(j)}(t)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  dans le système de  $F(Y(t), t) = 0$  et En discrétisant les résultats aux points de collocation  $x_l$ , on obtient les équations suivantes

$$F(Y(\gamma_l), \gamma_l) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad (3.2)$$

$$g_i(Y(t_0), Y(t_1), \dots, Y(t_k)) = 0. \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

En résolvant le système obtenu de (3.2) et (3.3) incluant  $(m+n)$  équations donne la valeur des coefficients inconnus  $c_i, i = 0, 1, \dots, (m+n-1)$  et donc les fonctions  $\mathbf{y}^{(j)}(t), j = 0, 1, \dots, n$  sont approximativement identifiés.

**Remarque 3.1.1** *Il convient de mentionner que nous pouvons simplement apporter quelques petites modifications  $\mathbf{y}^i(a), i = 0, 1, \dots, n - 1$  sont donnés. En particulier si  $\mathbf{y}^{(i)}(a), i = 0, 1, \dots, n - 1$  sont tous donnés, le système devient un problème de valeur initiale et il n'est pas nécessaire de définir tout  $c_i, i = m, \dots, m + n - 1$ . Nous pouvons également conserver la structure de l'algorithme et entrer la valeur initiale donnée dans le modèle décrit. Évidemment, le premier état considère la valeur de  $\mathbf{y}^{(i)}(a), 1 \leq i \leq n$ , précisément et le second état les trouve approximativement de telle sorte qu'il y ait un bon accord entre les valeurs précises et approximatives.*

### 3.2 Expériences numériques

Dans cette section, nous résolvons quelques exemples pour décrire plus en détail l'implémentation des fonctions de base de Haar rationalisées. Les résultats numériques obtenus confirment la validité et l'efficacité de la méthode proposée. Les calculs associés avec les exemples ont été réalisés. Pour voir la convergence de la méthode proposée, nous utilisons les formules d'erreur suivantes

$$e_r = \left\| \mathbf{y}_{\text{Exact}}^{(r)}(t) - \mathbf{y}_{\text{Haarwavelet}}^{(r)}(t) \right\|_{\infty}, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

$$ER_r = \log_{10} \left( \left| \mathbf{y}_{\text{Exact}}^{(r)}(t) - \mathbf{y}_{\text{Haarwavelet}}^{(r)}(t) \right| \right), \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

De plus, nous avons obtenu l'ordre de calcul (C-Order) de la méthode proposée en utilisant la formule suivante [11]

$$C - \text{Order} = \frac{\log \left( \frac{\|E_J(t)\|_{\infty}}{\|E_{J+1}(t)\|_{\infty}} \right)}{\log(2)},$$

où  $E_j(t) = \mathbf{y}_{\text{Exact}}(t) - \mathbf{y}_M(t)$ .

**Exemple 3.2.1** *Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante [15, 14]*

$$\mathbf{y}^{(6)}(t) + \mathbf{y}(t) = 6(2t \cos(t) + 5 \sin(t)), \quad t \in [-1, 1]$$

*avec les conditions aux limites séparées*

$$\mathbf{y}(-1) = \mathbf{y}(1) = 0.$$

$$\mathbf{y}''(-1) = -4 \cos(-1) + 2 \sin(-1),$$

$$\mathbf{y}''(1) = 4 \cos(1) + 2 \sin(1),$$

$$\mathbf{y}^{(4)}(-1) = 8 \cos(-1) - 12 \sin(-1),$$

$$\mathbf{y}^{(4)}(1) = -8 \cos(1) - 12 \sin(1).$$

et la solution exacte

$$y(t) = (t^2 - 1) \sin(t).$$

Selon l'algorithme, nous commençons par approximer  $y^{(6)}(t)$  comme suit

$$y^{(6)}(t) \simeq \sum_{i=1}^{2M} c_i h_i(t), \quad t \in [-1, 1]$$

où  $h_i(t)$  sont les fonctions de base de Haar définies dans (2.29) et (2.30) sur  $[a, b] = [-1, 1]$ . Supposons que  $J = 1$ , ce qui signifie  $2M = 4$  par intégration  $y_{(j)}(t), j = 0, 1, \dots, 5$ , comme suit

$$\begin{aligned} y^{(5)}(t) &= \sum_{i=1}^4 c_i P_{i1}(t) + c'_4, \\ y^{(4)}(t) &= \sum_{i=1}^4 c_i P_{i2}(t) + t c'_4 + c'_5, \\ &\vdots \\ y(t) &= \sum_{i=1}^4 c_i P_{i6}(t) + \frac{t^5}{120} c'_4 + \frac{t^4}{24} c'_5 + \frac{t^3}{6} c'_6 + \frac{t^2}{2} c'_7 + t c'_8 + c'_9. \end{aligned}$$

Les points de collocation uniformes choisis,  $-3/4, -1/4, 1/4$ , et  $3/4$ , doit être substitué dans l'équation suivante

$$\sum_{i=1}^4 c_i h_i(t) + \sum_{i=1}^4 c_i P_{i6}(t) + \frac{t^5}{120} c'_4 + \frac{t^4}{24} c'_5 + \frac{t^3}{6} c'_6 + \frac{t^2}{2} c'_7 + t c'_8 + c'_9 - 6(2t \cos(t) + 5 \sin(t)) = 0,$$

ce qui donne quatre équations linéaires algébriques. De plus, nous obtiendrons les six autres

*équations linéaires suivantes*

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^4 c_i P_{i6}(-1) - \frac{1}{120}c'_4 + \frac{1}{24}c'_5 - \frac{1}{6}c'_6 + \frac{1}{2}c'_7 - c'_8 + c'_9 &= 0, \\
 \sum_{i=1}^4 c_i P_{i6}(1) + \frac{1}{120}c'_4 + \frac{1}{24}c'_5 + \frac{1}{6}c'_6 + \frac{1}{2}c'_7 + c'_8 + c'_9 &= 0, \\
 \sum_{i=1}^4 c_i P_{i4}(-1) - \frac{1}{6}c'_4 - \frac{1}{2}c'_5 - c'_6 + c'_7 + 4 \cos(-1) - 2 \sin(-1) &= 0, \\
 \sum_{i=1}^4 c_i P_{i4}(1) + \frac{1}{6}c'_4 + \frac{1}{2}c'_5 + c'_6 + c'_7 - 4 \cos(1) + 2 \sin(1) &= 0, \\
 \sum_{i=1}^4 c_i P_{i2}(-1) - c'_4 + c'_5 - 8 \cos(-1) + 12 \sin(-1) &= 0, \\
 \sum_{i=1}^4 c_i P_{i2}(1) + c'_4 + c'_5 + 8 \cos(1) + 12 \sin(1) &= 0,
 \end{aligned}$$

*qui comprennent dix coefficients inconnus. En résolvant le système obtenu, on obtient*

$$\begin{aligned}
 c'_0 &= 0, & c'_5 &= 11.56970, \\
 c'_1 &= -18.94644, & c'_6 &= 11.19923, \\
 c'_2 &= -8.38589, & c'_7 &= 1.09517, \\
 c'_3 &= -8.38589, & c'_8 &= -0.77553, \\
 c'_4 &= -2.85037, & c'_9 &= 0.03760,
 \end{aligned}$$

*d'évaluer  $y^{(r)}$ ,  $r = 0, 1, \dots, 6$  et le tableau (3.1) comprend l'erreur absolue observée par ces valeurs. Le tableau (3.2) montre les calculs commandes obtenues pour cet exemple. De même, la fonction d'erreur absolue lorsque  $j = 6$  est illustré dans la figure (3.1) qui montre des la précision de la méthode. Noter que, suite à la remarque 3.1 relative à*

$$c'_5 = y^{(4)}(-1), \quad c'_7 = y''(-1), \quad c'_9 = y(-1),$$

*qui sont données, le schéma peut également être réduit à 7 équations comprenant 7 coefficients inconnus. En outre, cet exemple avec d'autres conditions aux limites discutées dans [14, 15] peut aussi être directement réduite au système d'équations linéaires suivant décrite.*

**Exemple 3.2.2** *Considérons le problème de valeur limite à deux points suivant [10, 15].*

$$y^{(6)}(t) + ty(t) + (t^3 + 11t + 24) e^t = 0, \quad t \in [0, 1],$$

*avec les conditions aux limites séparées*

$$y(0) = y(1) = 0,$$

$$y''(0) = 0, \quad y''(1) = -4e,$$

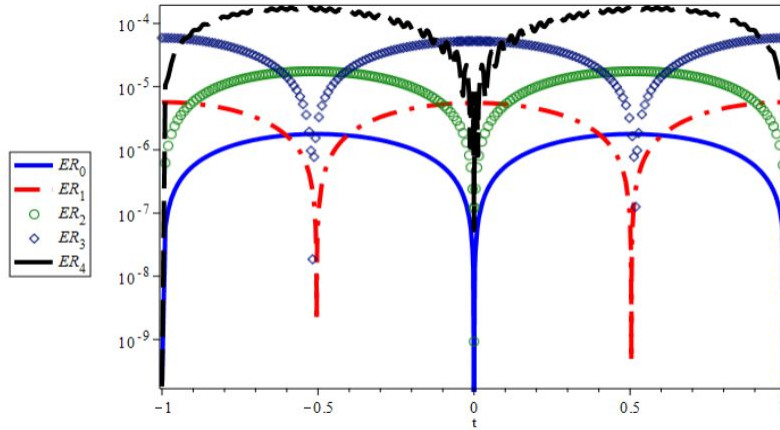
$$y^{(4)}(0) = -8, \quad y^{(4)}(1) = -16e,$$

**TABLE 3.1** – L'erreur absolue maximale observée pour différentes valeurs de  $J$  pour l'exemple 3.2.1

$e_r$	$J = 2$	$J = 3$	$J = 4$	$J = 5$	$J = 6$
$e_0$	$3.5 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-4}$	$2.9 \times 10^{-5}$	$7.1 \times 10^{-6}$	$1.7 \times 10^{-6}$
$e_1$	$1.1 \times 10^{-3}$	$3.4 \times 10^{-4}$	$9.0 \times 10^{-5}$	$2.3 \times 10^{-5}$	$5.5 \times 10^{-6}$
$e_2$	$3.6 \times 10^{-3}$	$1.1 \times 10^{-3}$	$2.8 \times 10^{-4}$	$6.9 \times 10^{-5}$	$1.7 \times 10^{-5}$
$e_3$	$1.2 \times 10^{-2}$	$3.5 \times 10^{-3}$	$9.1 \times 10^{-4}$	$2.4 \times 10^{-4}$	$5.9 \times 10^{-4}$
$e_4$	$7.1 \times 10^{-2}$	$1.5 \times 10^{-2}$	$3.1 \times 10^{-3}$	$8.0 \times 10^{-4}$	$1.8 \times 10^{-4}$
$e_5$	$8.0 \times 10^{-1}$	$1.9 \times 10^{-1}$	$5.0 \times 10^{-2}$	$1.2 \times 10^{-2}$	$3.0 \times 10^{-3}$

**TABLE 3.2** – Ordres de calcul obtenus pour les exemples 3.2.1-3.2.3

J	Exemple 1	Exemple 2	Exemple 3
3	1.6699	1.9542	2.2439
4	1.9234	1.9296	2.078
5	1.932	2.0418	2.0324
6	2.0623	2.0875	2.0265



**FIGURE 3.1** – Les fonctions d’erreur absolue de  $y, y', y'', y^{(3)}, y^{(4)}$  lorsque le niveau de résolutions  $J = 6$  pour l’exemple 3.2.1.

et la solution exacte

$$y(t) = t(1 - t)e^t. \tag{3.4}$$

De la même manière, nous approximons  $y^6(t)$  en utilisant les fonctions de base de Haar définies dans (2.30) sur  $[a, b] = [0, 1]$  et ensuite l’intégration successive pour préparer les termes nécessaires. Comme précédemment, supposons que  $2M = 4$

$$\sum_{i=1}^4 c_i h_i(t) + \sum_{i=1}^4 c_i t P_{i6}(t) + \frac{t^6}{120} c'_4 + \frac{t^5}{24} c'_5 + \frac{t^4}{6} c'_6 + \frac{t^3}{2} c'_7 + t^2 c_8 + t c'_9 + (t^3 + 11t + 24) e^t = 0,$$

et des points de collocation uniformes  $1/8, 3/8, 5/8$  and  $7/8$  ce qui donne quatre équations linéaires algébriques. De plus, nous aurons d’autres 6 équations linéaires comme suit

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^4 c_i P_{i6}(0) + c'_9 = 0, \\
 & \sum_{i=1}^4 c_i P_{i6}(1) + \frac{1}{120}c'_4 + \frac{1}{24}c'_5 + \frac{1}{6}c'_6 + \frac{1}{2}c'_7 + c'_8 + c'_9 = 0, \\
 & \sum_{i=1}^4 c_i P_{i4}(0) + c'_7 = 0, \\
 & \sum_{i=1}^4 c_i P_{i4}(1) + \frac{1}{6}c'_4 + \frac{1}{2}c'_5 + c'_6 + c'_4 + 4e = 0, \\
 & \sum_{i=1}^4 c_i P_{i2}(0) + c'_5 + 8 = 0, \\
 & \sum_{i=1}^4 c_i P_{i2}(1) + c'_4 + c'_5 + 16e = 0,
 \end{aligned}$$

En résolvant le système obtenu, on obtient

$$\begin{aligned}
 c'_0 &= -52.70217, & c'_5 &= -8, \\
 c'_1 &= 17.75331, & c'_6 &= 3.00940, \\
 c'_2 &= 6.17749, & c'_7 &= 0, \\
 c'_3 &= 12.04343, & c'_8 &= 1.0009, \\
 c'_4 &= 14.71856, & c'_9 &= 0,
 \end{aligned}$$

d'évaluer  $y^r$ ,  $r = 0, 1, \dots, 6$  et le tableau 3 comprend l'erreur absolue par ces valeurs. Le tableau 2 montre les ordres de calcul obtenu pour l'exemple 2. De même, la fonction d'erreur absolue lorsque  $j = 6$  est illustré dans la figure 2 qui montre les calculs l'efficacité de la méthode.

**Exemple 3.2.3** Considérons l'équation différentielle non linéaire suivante [10]

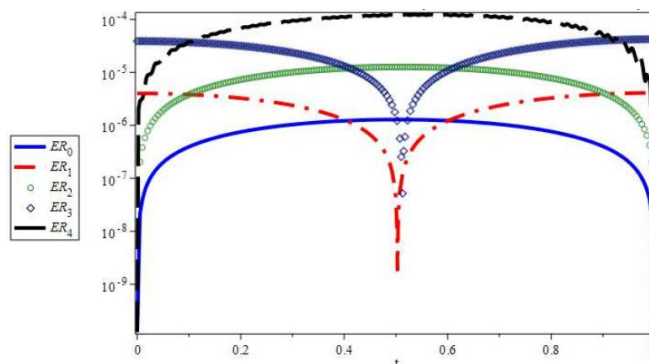
$$y^{(4)}(t) + y'(t)y'''(t) - 4(y'(t))^2y''(t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

**TABLE 3.3** – L’erreur absolue maximale observée pour différentes valeurs de  $J$  pour Exemple 3.2.2.

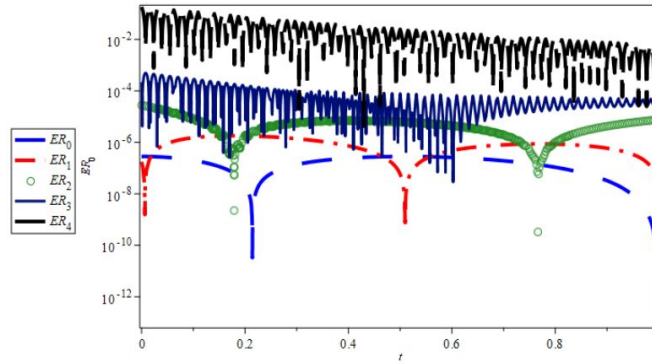
$e_r$	$J = 2$	$J = 3$	$J = 4$	$J = 5$	$J = 6$
$e_0$	$3.1 \times 10^{-4}$	$8.0 \times 10^{-5}$	$2.1 \times 10^{-5}$	$5.1 \times 10^{-6}$	$1.2 \times 10^{-6}$
$e_1$	$9.6 \times 10^{-4}$	$2.5 \times 10^{-4}$	$6.3 \times 10^{-5}$	$1.6 \times 10^{-6}$	$4.0 \times 10^{-6}$
$e_2$	$3.0 \times 10^{-3}$	$7.9 \times 10^{-4}$	$2.0 \times 10^{-4}$	$5.0 \times 10^{-5}$	$1.3 \times 10^{-5}$
$e_3$	$9.6 \times 10^{-3}$	$2.6 \times 10^{-3}$	$6.8 \times 10^{-4}$	$1.7 \times 10^{-4}$	$4.1 \times 10^{-5}$
$e_4$	$3.9 \times 10^{-2}$	$8.9 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-3}$	$5.0 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-4}$
$e_5$	$5.8 \times 10^{-1}$	$1.3 \times 10^{-1}$	$3.4 \times 10^{-2}$	$8.2 \times 10^{-3}$	$2.1 \times 10^{-3}$

**TABLE 3.4** – L’erreur absolue maximale observée pour différentes valeurs de  $J$  pour l’exemple 3.2.3.

$e_r$	$J = 2$	$J = 3$	$J = 4$	$J = 5$	$J = 6$
$e_0$	$9.0 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-5}$	$4.5 \times 10^{-6}$	$1.1 \times 10^{-6}$	$2.7 \times 10^{-7}$
$e_1$	$6.1 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-4}$	$3.0 \times 10^{-5}$	$7.1 \times 10^{-6}$	$1.8 \times 10^{-6}$
$e_2$	$5.5 \times 10^{-3}$	$1.6 \times 10^{-3}$	$4.2 \times 10^{-4}$	$1.1 \times 10^{-4}$	$2.7 \times 10^{-5}$
$e_3$	$6.2 \times 10^{-2}$	$2.4 \times 10^{-2}$	$6.9 \times 10^{-3}$	$1.9 \times 10^{-3}$	$4.9 \times 10^{-4}$
$e_4$	2.2	1.3	0.7	$3.0 \times 10^{-1}$	$1.8 \times 10^{-1}$



**FIGURE 3.2** – Les fonctions d’erreur absolue de  $y, y', y'', y^{(3)}, y^{(4)}$  lorsque le niveau des résolutions est  $J = 6$  pour l’exemple 3.2.2.



**FIGURE 3.3** – Les fonctions d’erreur absolue de  $y, y', y'', y^{(3)}, y^{(4)}$  lorsque le niveau des résolutions est  $J = 6$  pour l’exemple 3.2.3.

avec les conditions aux limites non séparées

$$\begin{aligned} y(0) + y\left(\frac{1}{2}\right) + y(1) &= \ln(3), & y(1) &= \ln(2), \\ y'(0) + 3y'\left(\frac{1}{2}\right) - 2y'(1) &= 2, & y'(1) &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et la solution exacte

$$y(t) = \ln(1 + t).$$

L’erreur absolue maximale observée pour différentes valeurs de  $J$  d’évaluer  $y^{(r)}$ ,  $r = 0, 1, \dots, 4$  sont indiqués dans le tableau 4 et les fonctions d’erreur absolue de  $y, y', y'', y^3, y^4$  sont présentés dans la figure (3.3) 3. De même, le tableau (3.2) 2 montre les ordres de calcul obtenus pour cet exemple.

**Exemple 3.2.4** Considérons les problèmes de valeurs limites non linéaires du cinquième ordre [5, 8, 16].

$$y^{(5)}(t) - e^{-t}y^2(t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

qui est associé à l’un des cas suivants :

**Cas I :** Les conditions aux limites séparées en deux points

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 1, \quad y(1) = y'(1) = e,$$

**Cas II :** Les conditions aux limites non séparées en deux points

$$\begin{aligned} y^{(2)}(0) - 2y(0)y(1) + y''(1) + y^{(4)}(1) - 1, \\ y^{(3)}(1) + y''(0) - y'(1) + y^{(3)}(0) - 2y^{(4)}(0) = 0, \\ y(0)y''(0) + (y'(1))^2 - y''(1)y'(1) - 2y^{(3)} + 1 = 0, \\ y''(0) + y^{(3)}(1) - 2y^{(4)} - y^{(4)}(0) + e = 0, \\ y^{(3)}(0) - y(1) + y''(1) + y(0) - 2 = 0, \end{aligned}$$

**Cas III :** Les conditions aux limites multipoint non séparées

$$\begin{aligned} y(0) + y' \left( \frac{2}{5} \right) + y''(\ln(2)) + y^{(4)} \left( \frac{5}{6} \right) + y(1) = 3 + e + e^{\frac{2}{5}} + e^{\frac{5}{6}}, \\ y'(0) - y^{(4)} \left( \frac{1}{8} \right) + y \left( \frac{1}{3} \right) + y'' \left( \frac{5}{6} \right) + y^{(3)}(1) = 1 + e - e^{\frac{1}{8}} + e^{\frac{1}{3}} + e^{\frac{5}{6}}, \\ y(0) + y' \left( \frac{2}{5} \right) + y(\ln(2)) + y^{(3)} \left( \frac{4}{9} \right) + y''(1) = 3 + e + e^{\frac{2}{5}} + e^{\frac{4}{9}}, \\ y''(0) + y \left( \frac{1}{3} \right) + y'(\ln(2)) - y^{(4)} \left( \frac{5}{6} \right) + y(1) = 3 + e + e^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{5}{6}}, \\ 2y^{(3)}(0) + y'' \left( \frac{1}{3} \right) + y^{(3)}(\ln(\sqrt{3})) + y' \left( \frac{8}{9} \right) + y^{(4)}(1) = 2 + \sqrt{3} + e + e^{\frac{1}{3}} + e^{\frac{8}{9}}, \end{aligned}$$

et la solution exacte  $y = e^t$ . L'erreur absolue maximale observée pour différents cas de conditions limites à évaluer  $y^r$ ,  $r = 0, 1, \dots, 5$  sont présentés dans le tableau (3.5). De même, la fonction d'erreur absolue pour le second cas lorsque  $J = 7$  sont démontrés dans Figure (3.4).

**Exemple 3.2.5** Considérons le problème non linéaire singulier des valeurs limites à deux points [13, 3].

$$(ty'(t))' + te^{y(t)} = 0, \quad t \in [0, 1], \quad (3.5)$$

avec les conditions limites

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

**TABLE 3.5** – L’erreur absolue maximale observée pour différents cas de conditions aux limites pour l’exemple 3.2.4.

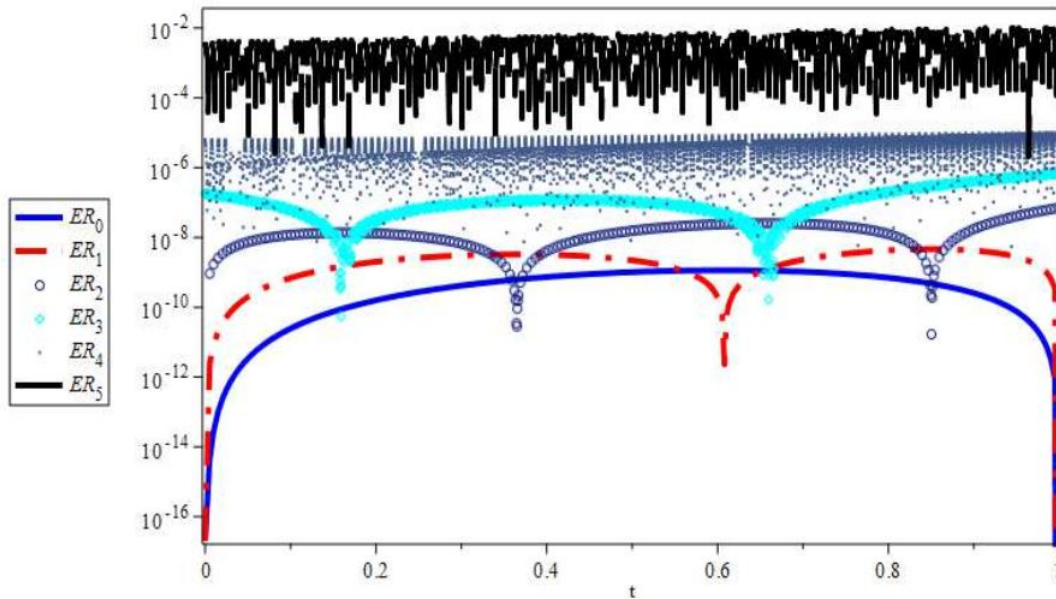
$e_r$	<b>Case I</b>		<b>Case II</b>		<b>Case III</b>	
	$J = 5$	$J = 6$	$J = 5$	$J = 6$	$J = 5$	$J = 6$
$e_0$	$1.8 \times 10^{-8}$	$2.5 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^{-6}$	$6.1 \times 10^{-6}$	$1.0 \times 10^{-4}$	$9.2 \times 10^{-6}$
$e_1$	$7.3 \times 10^{-8}$	$7.1 \times 10^{-5}$	$4.2 \times 10^{-6}$	$1.7 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^{-4}$	$6.8 \times 10^{-6}$
$e_2$	$1.1 \times 10^{-6}$	$1.4 \times 10^{-4}$	$8.1 \times 10^{-6}$	$3.5 \times 10^{-5}$	$2.6 \times 10^{-4}$	$1.7 \times 10^{-5}$
$e_3$	$1.2 \times 10^{-5}$	$1.9 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-5}$	$5.1 \times 10^{-5}$	$4.5 \times 10^{-4}$	$3.0 \times 10^{-5}$
$e_4$	$1.7 \times 10^{-4}$	$3.2 \times 10^{-4}$	$2.0 \times 10^{-5}$	$8.0 \times 10^{-5}$	$5.0 \times 10^{-4}$	$3.9 \times 10^{-5}$
$e_5$	$4.1 \times 10^{-2}$	$4.1 \times 10^{-2}$	$1.1 \times 10^{-2}$	$2.2 \times 10^{-2}$	$4.2 \times 10^{-2}$	$1.3 \times 10^{-2}$

**TABLE 3.6** – L’erreur absolue maximale observée pour l’exemple 3.2.5.

$M = 2^J$ (Mesh points)	Present method	$n$ (No. of terms)	HPM	$n$ (Mesh points)	B-spline method
8	$1.1617 \times 10^{-5}$	10	$1.3395 \times 10^{-5}$	20	$3.1607 \times 10^{-5}$
16	$2.2876 \times 10^{-6}$	14	$3.0159 \times 10^{-6}$	40	$7.8742 \times 10^{-6}$

**TABLE 3.7** – L’erreur absolue maximale observée pour l’exemple 3.2.6.

$M = 2^J$ (Mesh points)	Present method	$n$ (No. of terms)	HPM	$n$ (Mesh points)	FDM solution
8	$2.3666 \times 10^{-4}$	12	$2.6371 \times 10^{-4}$	16	$3.6400 \times 10^{-4}$
16	$1.3922 \times 10^{-5}$	22	$1.6482 \times 10^{-5}$	32	$2.4900 \times 10^{-5}$



**FIGURE 3.4** – Les fonctions d’erreur absolue de  $y, y', y'', y^{(3)}, y^{(4)}, y^{(5)}$  lorsque le niveau des résolutions est  $J = 7$  pour l’exemple 3.2.4 avec la limite définie dans le cas II.

La solution exacte est donnée par  $y(t) = 2 \ln((A + 1)/(At^2 + 1))$  avec  $A = 3 - 2\sqrt{2}$ . Le tableau 6 présente une comparaison entre les valeurs maximales erreur absolue obtenue par la méthode présentée, la méthode de perturbation de l’homotopie [13] et la méthode B-spline [3].

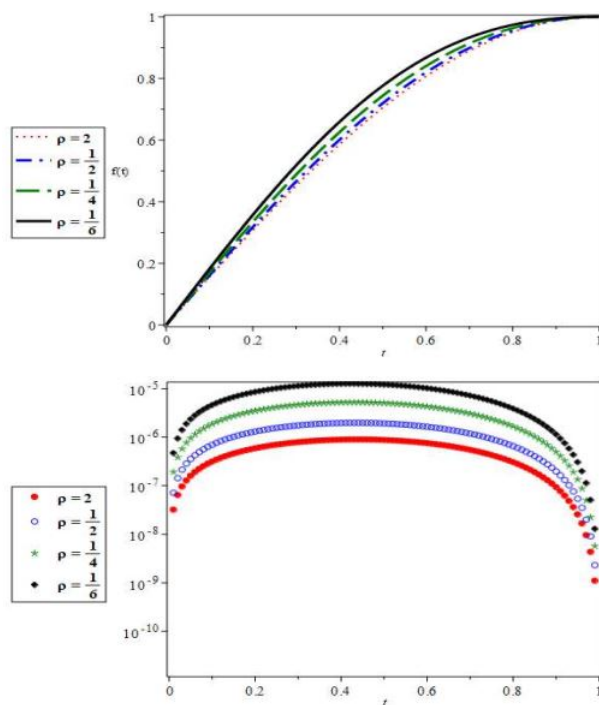
**Exemple 3.2.6** Considérons le problème non linéaire de valeur limite singulière décrivant l’équilibre de la sphère de gaz isotherme [13, 4]

$$(t^2 y'(t))' + t^2 y^5(t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

avec les conditions limites

$$y'(0) = 0, \quad y(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

La solution exacte est  $y(t) = \sqrt{3/(3 + t^2)}$ . Le tableau 7 présente une comparaison entre l’erreur absolue maximale obtenue par les méthodes présentées, la méthode des perturbations d’homotopie [13] et la méthode des différences finies (FDM) d’ordre 4 à trois points [4].



**FIGURE 3.5** – Profils de vitesse  $f(t)$  et la fonction d'erreur absolue pour  $M = R = 1$  et diverses valeurs de  $p$

**Exemple 3.2.7** *Considérez l'ordre 4 de IVP :*

$$u^{(4)}(x) + xu(x) = 16 \sin(2x) + x \sin(2x), \quad 0 < x < 1.$$

$$u(0) = 0, u'(0) = 2, u''(0) = 0, u'''(0) = -8.$$

*avec la solution exacte*

$$u(x) = \sin(2x).$$

*Utilisation de trois niveaux d'ondelettes de Haar ( $j = 3$ )*

**Étape (1) :** *Développez la dérivée la plus élevée  $u^{(4)}(x)$ ,*

$$u^{(4)}(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x)$$

**Étape (2) :** Intégrer les deux côtés de 0 à  $x$

$$\int_0^x u^{(4)}(\tau) d\tau = \int_0^x \sum_{i=0}^{2M} a_i h_i(\tau) d\tau$$

$$u'''(x) - u'''(0) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) \Rightarrow u'''(x) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) + u'''(0)$$

$$u'''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x) - 8$$

Encore une fois, intégrez les deux côtés de 0 à  $x$

$$\int_0^x u''(\tau) d\tau = \int_0^x \sum_{i=0}^{2M} a_i P_{i,2}(\tau) d\tau - \int_0^x 8 d\tau$$

$$\Rightarrow u''(x) - u''(0) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,3}(x) - 4x^2$$

$$u'(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,3}(x) - 4x^2 + 2$$

Encore une fois, intégrez les deux côtés de 0 à  $x$

$$\int_0^x u'(\tau) d\tau = \int_0^x \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,3}(\tau) d\tau - \int_0^x 4\tau^2 d\tau + \int_0^x 2 d\tau$$

$$u(x) - u(0) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,4}(x) - \frac{4}{3}x^3 + 2x$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,4}(x) - \frac{4}{3}x^3 + 2x$$

**Étape (3) :** *Substituez  $u(x)$  et ses dérivés dans l'équation et évaluez à les points de collocation  $x_l$ .*

$$u^{(4)}(x) + xu(x) = 16 \sin(2x) + x \sin(2x)$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) x \left( \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,4}(x) - \frac{4}{3}x^3 + 2x \right) = 16 \sin(2x) + x \sin(2x)$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i [h_i(x_l) + x_l P_{i,4}(x_l)] = 16 \sin(2x_l) + x_l \sin(2x_l) + \frac{4}{3}x_l^4 - 2x_l^2,$$

$$l = 1, 2, \dots, 16.$$

**Étape (4) :** *En résolvant le système d'équation linéaire, nous obtenons l'ondelette coefficients  $a_i$ .*

**Étape (5) :** *Substituez les coefficients dans  $u(x)$  pour obtenir la solution.*

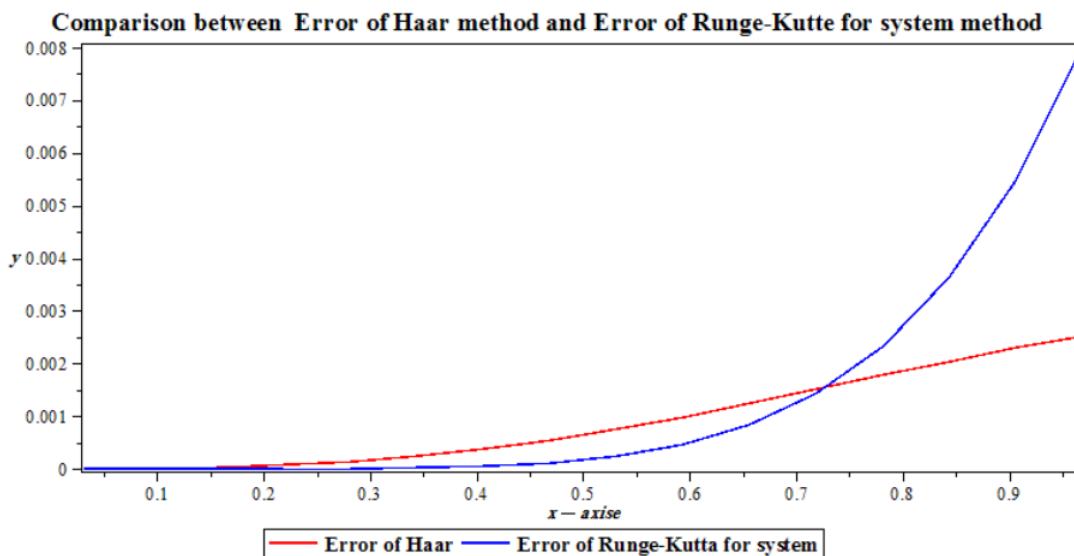
Tableau (3.8) montre les solutions exactes et approximatives à différents nœuds.

**TABLE 3.8** – La solution numérique de l'exemple 3.2.7

Node(x/32)	Exact	Haar solution	RK4 pour le système
1	0.06245932	0.06245939	0.06245931
3	0.1864033	0.18640761	0.18640328
5	0.30743851	0.30746207	0.30743864
7	0.42367626	0.42374063	0.42367741
9	0.53330267	0.53343726	0.53330804
11	0.63460708	0.63484409	0.63462502
13	0.72600866	0.72638354	0.72605734
15	0.80608111	0.80662775	0.80619522
17	0.87357494	0.87432576	0.87381471
19	0.92743692	0.92841901	0.92789968
21	0.96682656	0.96806159	0.96766088
23	0.99112919	0.99263072	0.99255173
25	0.99996559	1.00173857	1.00228037
27	0.99319785	0.99523685	0.99681803
29	0.9709316	0.97321914	0.97640324
31	0.93351428	0.93601905	0.9415419

**TABLE 3.9** – Erreur en utilisant l’ondelette de Haar et RK4 pour le système de l’exemple 3.2.7

Nœud(x/32)	Erreur de Haar	Erreur de RK4 pour le système
1	0.00000007	0.00000001
3	0.00000431	0.00000002
5	0.00002356	0.00000013
7	0.00006437	0.00000115
9	0.00013459	0.00000537
11	0.00023701	0.00001794
13	0.00037488	0.00004868
15	0.00054664	0.00011411
17	0.00075082	0.00023977
19	0.0009821	0.00046276
21	0.00123504	0.00083432
23	0.00150153	0.00142254
25	0.00177298	0.00231478
27	0.002039	0.00362018
29	0.00228755	0.00547162
31	0.00250477	0.00802762



**FIGURE 3.6** – Erreur en utilisant l’ondelette de Haar et RK4 pour le système de l’exemple 3.2.7

*L’erreur absolue maximale de l’ondelette de Haar pour l’IVP est de 0,00250477.*

*L’erreur absolue maximale de RK4 pour IVP est de 0,00802762.*

**Exemple 3.2.8** *Considérons le BVP inhomogène du second ordre :*

$$u''(x) + u(x) = \sin(x) + x \cos(x), \quad 0 < x < 1.$$

$$u(0) = 1, u(1) = 1.667433$$

*avec la solution exacte*

$$u(x) = \cos(x) + \frac{5}{4} \sin(x) + \frac{1}{4}(x^2 \sin(x) - x \cos(x))$$

*Utilisation de trois niveaux d'ondelettes de Haar ( $j = 3$ ) :*

**Étape (1) :** *Développez  $u''(x)$  série d'ondelettes.*

$$u''(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x)$$

**Étape (2) :** *Intégrer les deux côtés de 0 à  $x$*

$$\int_0^x u''(\tau) d\tau = \int_0^x \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(\tau) d\tau$$

$$u'(x) - u'(0) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x)$$

$$u'(x) = u'(0) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(x)$$

*Encore une fois, intégrer les deux côtés de 0 à  $x$  a nouveau*

$$u(x) - u(0) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + x u'(0)$$

$$u(x) = u(0) + x u'(0) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x)$$

où  $u'(0)$  est inconnu,  $u'(0)$  peut être trouvé en considérant.

$$u(1) = 1.667433$$

$$u(1) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) + u'(0) + 1$$

$$u'(0) = 0.667433 - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1)$$

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) - x \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(x) + 0.667433x + 1$$

**Étape (3) :** Substituer  $u(x)$  ses dérivés dans l'équation

$$u''(x) + u(x) = x \sin(x) + x \cos(x)$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(1) + 1 + x \left[ - \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(1) + 0.667433 \right]$$

$$= \sin(x) + x \cos(x)$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i [h_i(x_l) + P_{i,2}(x_l) - x_l P_{i,2}(1)]$$

$$\sin(x_l) + x_l \cos(x_l) - 0.667433x_l - 1,$$

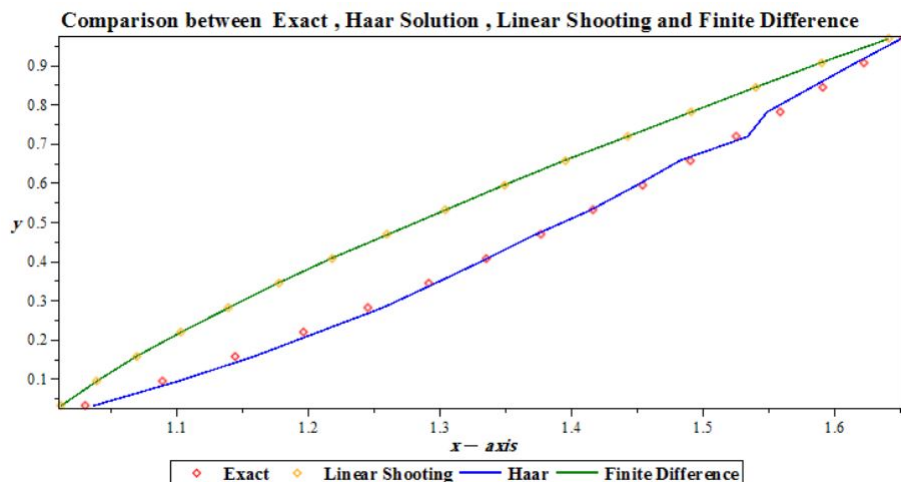
$$l = 1, 2, \dots, 16$$

**Étape (4) :** Évaluez aux points de collocation  $x_l$ , résolvez le système de linéaire pour les coefficients d'ondelettes  $a_i$ .

**Étape (5) :** Substituer le coefficient dans  $u(x)$  pour obtenir la solution.

**TABLE 3.10** – La solution numérique de l'exemple 3.2.8

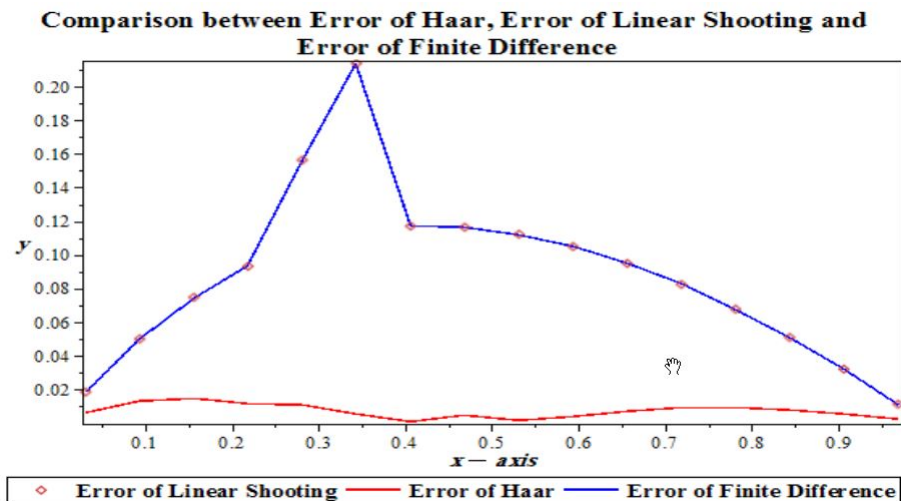
Node(x/32)	Exact	Haar solution	Finite Difference	Linear Shooting
1	1.03076684	1.03731194	1.01223017	1.01228100
3	1.08949571	1.10240672	1.03942495	1.03941897
5	1.14469969	1.15966881	1.06995086	1.06994136
7	1.19664324	1.20816745	1.10344680	1.10343418
9	1.24559411	1.25667542	1.13957272	1.13955791
11	1.29181853	1.29703658	1.17801204	1.17799453
13	1.33557659	1.33667609	1.21847403	1.21845484
15	1.37711767	1.37260730	1.26069621	1.26006759
17	1.41667605	1.41526066	1.30444677	1.30442598
19	1.45446674	1.45050873	1.34952690	1.34950727
21	1.49068148	1.48339958	1.39577316	1.39575340
23	1.52548513	1.53448845	1.44305974	1.44309160
25	1.55901222	1.54951312	1.49130075	1.49128505
27	1.59136390	1.58348080	1.54045242	1.54044062
29	1.62260531	1.61703899	1.59051518	1.59050700
31	1.65276320	1.65066385	1.64153577	1.64153278



**FIGURE 3.7** – Les solutions exactes et numériques(solution de Haar, tir linéaire et différence finie)

**TABLE 3.11** – Erreur dans l'exemple 3.2.8

Node(x/32)	Error of Haar	Error of Finite Difference	Error of Linear Shooting
1	0.00654510	0.01853667	0.01853874
3	0.01291101	0.05007075	0.05007674
5	0.01496912	0.07474883	0.07475833
7	0.01152421	0.09319644	0.09320907
9	0.01108131	0.15602139	0.15636200
11	0.00521805	0.21380649	0.21382400
13	0.00109950	0.11710256	0.11712175
15	0.00451037	0.11642146	0.11644175
17	0.00141539	0.11222928	0.11225007
19	0.00395801	0.10503984	0.10496046
21	0.00728190	0.09490832	0.09492809
23	0.00900332	0.08242539	0.08244353
25	0.00949910	0.06771147	0.06772716
27	0.00788310	0.05091148	0.05092388
29	0.00556632	0.03207013	0.03209831
31	0.00209935	0.01122743	0.01123041



**FIGURE 3.8** – Erreur dans l'exemple 3.2.8

**TABLE 3.12** – Erreur absolue maximale de l'équation

Maximum absolute error		
Haar Solution	Finite Difference	Linear Shooting
0.01496912	0.21380649	0.21382400

**Exemple 3.2.9** Exemple d'application 3.2.7 dans matlab

```

1  function F=F(i , alpha , x)
2      p=L(i) ;
3      x1=p(2)/(2^p(1)) ; x2=(p(2)+0.5)/(2^p(1)) ; x3=(p(2)+1)
        /(2^p(1)) ;
4      if x>=0&x<x1 ;
5          F=0 ;
6      elseif x>=x1&x<x2 ;
7          F=(1/gamma(alpha+1))*((x-x1)^alpha) ;
8      elseif x>=x2&x<x3 ;
9          F=(1/gamma(alpha+1))*((x-x1)^alpha) - 2*(1/gamma(alpha+1))*((x-x2)^alpha) ;
10     else x>=x3&x<1 ;
11         F=(1/gamma(alpha+1))*((x-x1)^alpha) - 2*(1/gamma(alpha+1))*((x-x2)^alpha) + (1/gamma(alpha+1))*((x-x3)^alpha) ;
12 end

```

```

1  function h=h(i , x)
2      p=L(i) ;
3      x1=p(2)/(2^p(1)) ; x2=(p(2)+0.5)/(2^p(1)) ; x3=(p(2)+1)
        /(2^p(1)) ;
4      if x>=0&&x<x1 ;
5          h=0 ;
6      elseif x>=x1&&x<x2 ;
7          h=1 ;
8      elseif x>=x2&&x<x3 ;
9          h=-1 ;
10     else x>=x3&&x<1 ;
11         h=0 ;
12 end

```

```
1 function L=L(i)
2 for j=0:i
3     for k=0:(2^j)-1
4         if i==(2^j)+k+1;
5             L=[j k];
6         end
7     end
8 end
```

```
1 format long
2 %Programme pour l'exemple 3.2.7
3 J=input('J='); t=input('t=');
4 M=2^J;
5 for k=1:2*M
6     x(k)=(k-0.5)/(2*M);
7 end
8 A=zeros(2*M);
9 for i=1:2*M
10    A(i,1)=1+(((x(i))^5)/gamma(5));
11 end
12 for i=1:2*M
13    for j=2:2*M
14        A(i,j)=h(j,x(i))+x(i)*F(j,4,x(i));
15    end
16 end
17 B=zeros(2*M,1);
18 for i=1:2*M
19    B(i)=16*sin(2*x(i))+x(i)*sin(2*x(i))-2*(x(i)^2)+(4/3)
    *(x(i)^4);
20 end
21 C=inv(A)*B;
22 y=0;
23 for i=2:2*M
24    y=y+C(i)*F(i,4,t);
25 end
26 yapprochee=y+(C(1)*(t.^4)/gamma(5))+2.*t-(4/3)*(t.^3)
27 yexacte=sin(2.*t)
```

## **Conclusion générale**

Dans ce mémoire nous avons présenté d'une part, une étude approfondie et détaillée sur les équations différentielles de premier et de deuxième ordre et d'ordre supérieur. D'une autre part, nous avons introduit des méthodes de résolution des équations différentielles d'ordre supérieur avec des conditions initiales. L'objectif principal de ce travail est de proposer la méthode des ondelettes de Haar pour la résolution des équations différentielles linéaires, une solution exacte du problème a été utilisée dans le test pour illustrer l'efficacité de l'approximation de solution de l'équation différentielle linéaires d'ordre supérieur par la méthode des ondelettes de Haar.

# Bibliographie

- [1] I. Aziz, F. Haq, et al. A comparative study of numerical integration based on haar wavelets and hybrid functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 59(6) :2026–2036, 2010.
- [2] A. Bounecer. cours module méthode numériques appliquées à l'énergétique. Université frères Montouri Constantine 1, 2019- 2020.
- [3] H. Çağlar, N. Çağlar, and M. Özer. B-spline solution of non-linear singular boundary value problems arising in physiology. *Chaos, Solitons & Fractals*, 39(3) :1232–1237, 2009.
- [4] M. Chawla, R. Subramanian, and H. Sathi. A fourth order method for a singular two-point boundary value problem. *BIT Numerical Mathematics*, 28(1) :88–97, 1988.
- [5] K. Chompuvised and A. Dhamacharoen. Solving boundary value problems of ordinary differential equations with non-separated boundary conditions. *Applied mathematics and computation*, 217(24) :10355–10360, 2011.
- [6] N. Doudi. cours modulex. Université Chahid Hama Lakhdar El-Oued, 2018- 2019.
- [7] N. Doudi. Series modulex. Université Chahid Hama Lakhdar El-Oued, 2018- 2019.
- [8] V. S. Erturk. Solving nonlinear fifth-order boundary value problems by differential transformation method. *Selcuk Journal of Applied Mathematics*, 8(1) :45–49, 2007.
- [9] M. Krasnov, A. Kiselev, and G. Makarenko. *Recueil de problèmes sur les équations différentielles ordinaires*. Traduit du russe. Éditions Mir, 1981.

- [10] G. B. Loghmani and S. Alavizadeh. Numerical solution of fourth-order problems with separated boundary conditions. *Applied mathematics and computation*, 191(2) :571–581, 2007.
- [11] J. Majak, B. Shvartsman, K. Karjust, M. Mikola, A. Haavajõe, and M. Pohlak. On the accuracy of the haar wavelet discretization method. *Composites Part B : Engineering*, 80 :321–327, 2015.
- [12] J. Martin. *Cours de mathématiques pour la préparation aux brevets de techniciens supérieurs et pour les écoles d'ingénieurs*. Dunod, 1967.
- [13] P. Roul. A new efficient recursive technique for solving singular boundary value problems arising in various physical models. *The European Physical Journal Plus*, 131(4) :1–15, 2016.
- [14] S. S. Siddiqi and G. Akram. Septic spline solutions of sixth-order boundary value problems. *Journal of computational and applied Mathematics*, 215(1) :288–301, 2008.
- [15] S. S. Siddiqi and E. H. Twizell. Spline solutions of linear sixth-order boundary-value problems. *International Journal of Computer Mathematics*, 60(3-4) :295–304, 1996.
- [16] A.-M. Wazwaz. The numerical solution of fifth-order boundary value problems by the decomposition method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 136(1-2) :259–270, 2001.

### Résumé

Dans ce mémoire, notre objectif est de démontrer l'efficacité de la méthode d'ondelette de Haar et ses avantages par rapport aux autres méthodes classiques pour résoudre des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur. Pour cela, nous avons fait une étude théorique et numérique liée à la nouvelle méthode (l'ondelette de Haar), puis nous avons comparé les résultats de cette méthode avec des méthodes classiques (différences finies et Runge-kutta). Les résultats numériques concernant la méthode d'ondelette de Haar sont très précis que les autres méthodes.

**Mots clés :** les équations différentielles, ondelettes de Haar, différences finies, Runge-kutta.

### Abstract

In this work, our objective is to demonstrate the efficiency of the Haar wavelet method and its advantages over other classical methods for solving higher order linear differential equations. For this, we made a theoretical and numerical study related to the new method (the Haar wavelet), then we compared the results of this method with classical methods (finite differences and Runge-kutta). Numerical results regarding Haar wavelet method are very accurate than other methods.

**Key words :** differentielle equations, Haar wavelts, finite differences method, Runge-kutta method, numerical method.

### ملخص

في هذه المذكرة، هدفنا هو إظهار كفاءة طريقة موجة هار ومزاياها على الطرق التقليدية الأخرى لحل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الرتب العليا. لهذا قمنا بدراسة نظرية وعددية تتعلق بالطريقة الجديدة (موجة هار)، ثم قمنا بمقارنة نتائج هذه الطريقة بالطرق الكلاسيكية (الفروق المنتهية و رونج كوتا). النتائج العددية المتعلقة بطريقة موجة هار دقيقة للغاية مقارنة بالطرق الأخرى .

**الكلمات المفتاحية:** المعادلات التفاضلية، موجة هار، الفروق المنتهية و رونج كوتا.