

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de  
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

# MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

## Thème

**Solvabilité des équations différentielles en  
utilisant l'inverse de Drazin**

Présenté par: Imen Zidane

Noura Hanancha

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Président	HARIZ BEKAR LOUREBI	M.C.B	Univ. El Oued
Rapporteur	AHFOUDA BELHADI	M.C.B	Univ. El Oued
Examineur	MANSOURI ABDEL OUAHAB	Prf	Univ. El Oued

# Remerciements

Nous remercions tout d'abord Dieu qui nous a éclairés le chemin du savoir.

Toutes nos gratitude et remerciements les plus vifs s'adressent à " M. Ahfouda Belhadi", à l'université d'ElOued, pour son encadrement, ces conseils, sa modestie et disponibilité, pour réaliser ce travail..

Ainsi qu'à tous les professeurs de l'université d'Eloued.

Nous tenons à remercier tous les étudiants de la promotion 2019/2020 de Math de l'université d'El-oued.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires</b>	<b>4</b>
1.1	Espace métrique complet . . . . .	4
1.2	Norme et espace vectoriel normé . . . . .	4
1.3	Produit scalaire . . . . .	5
1.4	Espaces de Hilbert. . . . .	6
1.5	Opérateurs linéaires bornés . . . . .	6
1.5.1	Opérateurs linéaires dans les espace de Hilbert . . . . .	6
1.5.2	Inverse d'un opérateur . . . . .	8
1.5.3	L'adjoint d'un opérateur. . . . .	8
1.6	Quelques classes d'opérateurs considérées dans $B(H)$ . . . . .	9
1.7	Spectres et Résolvantes . . . . .	10
1.7.1	Valeurs et vecteurs propres . . . . .	10
1.7.2	Spectres et résolvantes . . . . .	10
1.7.3	Classification des points spectraux d'un opérateur auto-adjoint . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Les inverses généralisées</b>	<b>13</b>
2.1	Inverse généralisée Intérieure . . . . .	13
2.2	Inverse extérieure . . . . .	15
2.3	Inverse généralisée . . . . .	16
2.4	Inverse intérieure topologique . . . . .	18
2.4.1	Inverse droite intérieure topologique . . . . .	18
2.4.2	Inverse gauche intérieure topologique . . . . .	19
2.5	Inverse généralisée topologique . . . . .	20
2.6	Inverse généralisé de Moore- Penrose . . . . .	21
2.6.1	a- L'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire . . . . .	21
2.6.2	b- L'inverse de Moore-Penrose d'une matrice . . . . .	21

<b>3 Inverse de Drazin</b>	<b>27</b>
3.1 Préliminaires et définitions . . . . .	27
3.2 Groupe inverse . . . . .	29
3.3 Propriétés des inverses de Drazin . . . . .	31
3.4 Autres propriétés d'inverses de Drazin . . . . .	31
3.5 L'inverse de Drazin d'une matrice carrée . . . . .	34
3.6 Extension au matrices rectangulaires . . . . .	39
<b>4 solvabilité des équation différentielles en utilisant l'inverse de Drazin</b>	<b>43</b>
4.1 Calcul de l'inverse de Drazin en utilisant les valeurs propres . . . . .	43
4.2 Calcul de l'inverse de Drazin en utilisant la trace . . . . .	44
4.3 Solution de l'équation $x' + Ax = f$ . . . . .	46
4.4 L'équation différentielle $Ax' + Bx = f$ . . . . .	47

# Introduction

---

Il est bien connu qu'une matrice sur un corps admet une inverse, si elle est carrée de déterminant non nul. Ce pendant, dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées on a besoin de quelques types d'inverses partielières d'une matrice singulière, ou même rectangulaire. Par exemple, les solutions d'un système linéaire peuvent exister même si la matrice définissant ce système est singulière. Ce qui conduit à l'inverse ainsi nomme généralise d'une matrice ou l'inverse de Drazin.

L'inversibilité est l'une des disciplines les plus répandues en Mathématique, beaucoup de problèmes sont interprétés par une équation du type  $Ax = y$ , où  $A$  est une transformation linéaire donnée, qui est dans notre situation une matrice de type  $m \times n$  sur  $\mathbb{k}$  (un opérateur linéaire défini d'un espace vectoriel  $E$  dans un autre  $F$  de dimensions respective  $n$  et  $m$ ) : comme l'analyse numérique, l'optimisation, la théorie de contrôle, théorie de codage, la statistique et les modèles linéaires, ce problème est aussi manipulé via le concept d'une inverse généralise (ou le pseudo inverse)d'une matrice (ou d'un opérateur linéaire). Devant des questions de ce type on cherche un opérateur ayant le maximum de propriétés dont l'inverse usuelle réjouit, et d'une manière que cette inverse existe pour une classe aussi large d'opérateurs linéaires.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des solution des équations différentielles en utilisant l'inverse de Drazin avec quelques exemples.

Dans le premier chapitre on donne quelques rappels sur les opérateurs linéaires et bornés.

Dans le deuxième chapitre, on donne les définitions des inverses généralises, et quelque propriétés : le troisièmement chapitre est consacré à l'étude des propriétés de l'inverse de Drazin.

Et enfin, le dernier chapitre est consacré à l'étude de solvabilité des équation différentielles on utilisant l'inverse de Drazin.

# Chapitre 1

## Préliminaires

On rappelle dans ce chapitre quelques définitions et propriétés utiles.

### 1.1 Espace métrique complet

**Définition 1.1.1.** *On rappelle qu'un espace métrique est un couple  $(E, d)$  où  $E$  est un ensemble et  $d$  une distance sur  $E$ , c'est-à-dire une application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}^+$  qui vérifie pour tout  $(x; y; z) \in E^3$  les propriétés suivantes :*

\*  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ .

\*  $d(x, y) = d(y, x)$  (commutativité).

\*  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité triangulaire).

**Définition 1.1.2.** *On dit qu'un espace métrique  $(E, d)$  est complet lorsque toute suite de Cauchy de  $E$  est convergente dans  $E$ .*

### 1.2 Norme et espace vectoriel normé

**Définition 1.2.1.** *Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $K$  qui sera soit le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels ou le corps  $\mathbb{C}$  des nombres complexes. Une norme sur  $E$  est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ , définie sur  $E$  à valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{R}_+$  des nombres réels positifs, vérifiant*

*les quatre propriétés suivantes :*

\*  $\forall u \in E : N(u) \geq 0$  (positivité).

\*  $N(u) = 0$  implique  $u = 0$  (séparation).

\*  $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k} : N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$  (homogénéité).

\*  $\forall u \in E, \forall v \in E : N(u + v) \leq N(u) + N(v)$  (inégalité triangulaire).

Pour  $u \in E$  donné, le nombre réel positif  $N(u)$  est appelé norme de  $u$

**Définition 1.2.2.** Un espace vectoriel normé réel (resp. Complexe) est un couple constitué par un espace vectoriel  $E$  réel (resp. complexe) et par une norme  $\|\cdot\|$  sur l'espace vectoriel  $E$ .

On abrégera souvent espace vectoriel normé en e. v. n. Un e. v. n. sera noté  $(E, \|\cdot\|)$  ou  $E_{\|\cdot\|}$ .

Il ne faut pas qu'il y ait la moindre ambiguïté sur le corps des scalaires de  $E$ , Si l'on ne précise pas le corps, cela signifie que les résultats concernent aussi bien un e. v. n. réel qu'un e. v. n. complexe.

**Définition 1.2.3.** On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet, sur le corps  $K$  des réels ou des complexes.  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{C}^n$ , avec leurs normes usuelles sont des Banach.

## 1.3 Produit scalaire

**Définition 1.3.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

Un produit scalaire sur  $E$  est une fonction  $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ , définie sur le produit cartésien  $E \times E$  à valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels, vérifiant les cinq propriétés :

1-  $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall w \in E : f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$  (additivité par rapport à la première variable, la seconde étant fixée quelconque).

2-  $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v)$  (homogénéité par rapport à la première variable étant fixée, quelconque).

3-  $\forall u \in E, \forall v \in E : f(u, v) = f(v, u)$  (symétrie).

4-  $\forall u \in E : f(u, u) \geq 0$  (positivité).

5-  $f(u, u) = 0 \implies u = 0$  (séparation, mais on dit plutôt que  $f$  est définie).

Pour  $u \in E, v \in E$  donnés le nombre réel ( $> 0$ ,  $< 0$ , ou  $= 0$ )  $f(u, v)$  s'appelle le produit scalaire de  $u$  et  $v$  (ou bien de  $u$  par  $v$ ).

## 1.4 Espaces de Hilbert.

Soit  $H$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , on appelle un produit scalaire l'application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ , qui à tout couple  $(x, y)$  associe le nombre complexe  $\langle x, y \rangle$  telle que  $\forall x, y, z \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$

1.  $\langle \lambda x + \mu z, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle z, y \rangle$
2.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
3.  $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0$  si et seulement si  $x = 0$ .

Si  $H$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ , on a  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ . Un espace vectoriel  $H$  sur  $\mathbb{C}$  muni d'un produit scalaire est dit espace pré-hilbertien, tout espace pré-hilbertien est un espace vectoriel normé, la norme est donnée par  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Si l'espace pré-hilbertien est complet, il est appelé espace de Hilbert.

**Définition 1.4.1.** (*Identité de parallélogramme*). Soit  $x, y \in H$ , avec  $H$  est un espace pré-hilbertien alors  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ .

**Remarque 1.1.** *Un espace vectoriel normé est un espace pré-hilbertien si et seulement si sa norme vérifie l'identité de parallélogramme.*

**Définition 1.4.2.** *On dit que deux éléments  $x, y$  d'un espace pré-hilbertien sont orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$  et on note  $x \perp y$ .*

**Définition 1.4.3.** *On appelle espace de Banach, tout espace vectoriel normé complet sur le corps  $\mathbb{C}$ .*

**Remarque 1.2.** *Un espace de Banach est un espace de Hilbert si sa norme vérifie l'identité de parallélogramme.*

**Exemple 1.1.**  $\mathbb{C}, \mathbb{R}^n$  et  $L^2(\Omega)$  munis de leurs produits scalaires usuels sont des espaces de Hilbert.

## 1.5 Opérateurs linéaires bornés

### 1.5.1 Opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert

#### Définitions

**Définition 1.5.1.** *Une application  $A$  définie d'un espace de Hilbert  $H$  dans  $k$  est dit "Opérateur linéaire" si  $A$  satisfait les deux propriétés suivantes :*

1)  $\forall x, y \in H, A(x + y) = A(x) + A(y)$  : (Additivité)

2)  $\forall x \in H, \forall \alpha \in \mathbb{K}, A(\alpha x) = \alpha A(x)$  : (Homogénéité)

L'opérateur identité  $I$  est défini par  $Ix = x$  pour tout  $x \in H$ .

L'opérateur nul  $0$  est défini par  $0x = 0$ , pour tout  $x \in H$ .

Le noyau de  $A$  notée  $\ker(A)$  et image de  $A$ , notée  $R(A)$  sont définis par :

Soit  $A : H \longrightarrow K$  .

$\ker(A) = \{x \in H, Ax = 0\}$  et  $R(A) = \{Ax, x \in H\}$  .

**Définition 1.5.2.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur le corps  $\mathbb{C}$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  :

L'application  $A_\lambda : H \longrightarrow H$  définie pour  $x \in H$  par

$$A_\lambda(x) = \lambda x$$

est un opérateur linéaire.

En effet, pour  $x_1, x_2 \in H$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$  ; On a

$$\begin{aligned} A_\lambda(\alpha x_1 + x_2) &= \lambda(\alpha x_1 + x_2) \\ &= \alpha(\lambda x_1) + (\lambda x_2) \\ &= \alpha A_\lambda(x_1) + A_\lambda(x_2) \end{aligned}$$

Cet opérateur est appelé homothétie de rapport  $\lambda$  de l'espace linéaire  $H$ . Si  $H$  est un espace linéaire tel que  $\dim(E) = 1$ , alors tout opérateur linéaire de  $H$  vers  $H$  est une dilatation.

**Définition 1.5.3.** L'opérateur linéaire  $A$  sur un espace de Hilbert  $H$  est dit borné s'il existe un nombre positif  $c$  tel que :

$$\|Ax\| \leq c \|x\| \text{ pour tout } x \in H$$

**Définition 1.5.4.** On dénote par  $B(H)$  ou  $L(H)$  l'espace des Opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Hilbert  $H$ .

**Définition 1.5.5.** On définit la norme de l'opérateur linéaire borné  $A$  par

$$\|A\| = \inf \{c > 0 : \|Ax\| \leq c \|x\| ; \forall x \in H\} .$$

**Théorème 1.1.** Soit  $A \in B(H)$  : la norme de  $A$  est donnée par :

$$\|A\| = \sup \{\|Ax\|, x \in H, \|x\| = 1\} .$$

*Démonstration.* On démontre les inégalités dans les deux sens.

1) Posons  $a = \sup \{ \|Ax\|, x \in H, \|x\| = 1 \}$ , si l'opérateur  $A$  est borné, alors :

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| = \|A\| \text{ pour } \|x\| = 1$$

donc  $a \leq \|A\|$  d'après la définition de  $\|A\|$  :

2) Pour tout vecteur  $x \in H$  on a :

$$\|Ax\| = \left\| A \left( \|x\| \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \left\| \left( A \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \|x\| \leq a \|x\|$$

d'où

$$\|A\| \leq a = \sup \{ \|Ax\|, x \in H, \|x\| = 1 \}.$$

En combinant les deux inégalités dans 1) et 2) on obtient l'égalité désirée. □

**Théorème 1.2.** *Pour tout opérateur linéaire sur un espace de Hilbert  $H$ , les assertions suivantes sont équivalentes*

- 1)  $A$  est borné.
- 2)  $A$  est continu sur l'espace  $H$ .
- 3)  $A$  est continu en un point  $x_0$  ( $x_0$  est un vecteur) de l'espace  $H$ .

**Théorème 1.3.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert, et  $f$  est une forme linéaire continue sur  $H$ . Il existe un vecteur  $a \in H$  et un seul, tel que :*

$$\forall x \in H, f(x) = \langle a, x \rangle.$$

## 1.5.2 Inverse d'un opérateur

**Définition 1.5.6.** *On dit que l'opérateur  $A \in B(H)$  est inversible sur l'espace de Hilbert  $H$ , s'il existe un opérateur  $B \in B(H)$  qui vérifie :*

$$BA = AB = I$$

où  $I$  est l'opérateur identité dans  $H$ .

On écrit  $B = A^{-1}$  et est dit l'opérateur inverse de  $A$ .

## 1.5.3 L'adjoint d'un opérateur.

**Définition 1.5.7.** *Pour tout opérateur  $A \in B(H)$ ,  $A^*$  désigne l'opérateur adjoint de l'opérateur  $A$ , défini par*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle,$$

pour tout  $x, y \in H$ .

Rappelons dans la proposition suivante quelques propriétés élémentaires.

**Proposition 1.1.** *Si  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de Hilbert  $H$ , alors leurs adjoints  $A^*, B^*$  sont aussi deux opérateurs linéaires bornés sur  $H$  et les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- (i)  $\|A^*\| = \|A\|$
- (ii)  $(A + B)^* = A^* + B^*$
- (iii)  $(\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*, \alpha \in \mathbb{C}$ .
- (iv)  $(A^*)^* = A$
- (v)  $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ , si  $A$  est inversible
- (vi)  $(AB)^* = B^*A^*$ .

## 1.6 Quelques classes d'opérateurs considérées dans $B(H)$ .

Un opérateur  $A \in B(H)$  est dit :

- Compact, si  $\langle A_{x_0}, x_n \rangle \rightarrow 0$  pour toute suite orthonormée  $(x_n)$  de  $H$ .
- De rang fini, si  $R(A)$  est de dimension finie.
- Positif, si  $\langle Ax, x \rangle \geq 0$  pour tout  $x \in H$  ; on note  $A \geq 0$ .
- Auto-adjoint, si  $A = A^*$  .
- projection si  $A^2 = A$ .
- projection orthogonale si  $A^2 = A$  et  $A = A^*$  .
- Isométrie, si  $A^*A = I_H$ .
- Unitaire, si  $A^*A = AA^* = I$ .
- Dominant, si  $R(A - \lambda) \subseteq R(A - \lambda)^*, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ .
- Normal, si  $A^*A - AA^* = 0$ .
- Sous-normal, s'il admet une extension normale.
- Quasinormal, s'il commute avec  $A^*A$ .
- Hyponormal, si  $A^*A - AA^* \geq 0$ .
- Semi-normal, si  $A$  ou  $A^*$  est hyponormal.
- $k$ -quasihyponormal, si  $A^{*k}(A^*A - AA^*)A^k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 1.3.** *On a la série des inclusions des classes d'opérateurs suivantes*

*positifs  $\subset$  autoadjoints  $\subset$  normaux  $\subset$  quasinormaux  $\subset$  hyponormaux  $\subset$   $k$ -hyponormaux*

## 1.7 Spectres et Résolvantes

### 1.7.1 Valeurs et vecteurs propres

**Définition 1.7.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur un corps  $K$  et  $A$  un opérateur linéaire sur  $E$ .

Un scalaire  $\lambda \in K$  est une **valeur propre** de  $A$  s'il existe un vecteur  $v \in E$  non nul tel que :

$$(A - \lambda I)v = 0 \iff Av = \lambda v.$$

Le vecteur  $v$  est alors appelé un **vecteur propre** de  $A$  correspondant à la valeur propre  $\lambda$ .

**Théorème 1.4.** Pour  $A \in B(H)$ ,  $H$  est un espace de Hilbert si  $A$  auto-adjoint alors toutes les valeurs propres de  $A$  sont réelles.

*Démonstration.* Soit  $A$  auto-adjoint dans  $B(H)$  et  $\lambda$  une valeur propre de  $A$

$$(Ax = \lambda x, x \neq 0)$$

ona

$$\begin{aligned} \lambda \langle x, x \rangle &= \langle \lambda x, x \rangle \\ &= \langle Ax, x \rangle \\ &= \langle x, A^* x \rangle \\ &= \langle x, Ax \rangle \\ &= \langle x, \lambda x \rangle \\ &= \bar{\lambda} \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

$\implies \lambda \langle x, x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle$ , mais  $x \neq 0 \implies \lambda = \bar{\lambda}$  alors  $\lambda \in \mathbb{R}$ . □

### 1.7.2 Spectres et résolvantes

L'ensemble des valeurs propres forme une partie d'un sous-ensemble de  $\mathbb{C}$ , qui est incluse ou égale à un sous ensemble de  $\mathbb{C}$  que l'on appelle spectre de  $A$ , et on note par  $\sigma(A)$ .

## Rappels et définitions

**Définition 1.7.2.** Le spectre d'un opérateur  $A \in B(H)$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{C}$  défini par :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}.$$

**Définition 1.7.3.** On appelle **rayon spectral**  $r(A)$  de l'opérateur  $A$  est le scalaire :

$$r(A) = \sup \{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

**Définition 1.7.4.** L'ensemble résolvant de  $A$  est le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  du spectre de  $A$ .

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ est inversible.}\}$$

**Définition 1.7.5.** On appelle application résolvante de  $A$  l'application  $\mathfrak{R}(\cdot, A)$  défini :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\cdot, A) & : \rho(A) \longrightarrow B(H) \\ \lambda & \longmapsto \mathfrak{R}(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}. \end{aligned}$$

### 1.7.3 Classification des points spectraux d'un opérateur auto-adjoint

Soit  $A$  un opérateur auto-adjoint son spectre  $\sigma(A)$  admet la décomposition en plusieurs composantes disjointes :

**1-Le Spectre ponctuel** de  $A$  est l'ensemble :

$$\sigma_P(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) \neq \{0\}\}$$

(l'ensemble des valeurs propre isolés d'ordre fini).

**2-Le Spectre Continu** de  $A$  est l'ensemble :

$$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (A - \lambda I)^{-1}, (A - \lambda I)^{-1} \text{ non borné}\}$$

ou

$$\sigma_c(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \ker(A - \lambda I) = \{0\}, \overline{\text{Range}(A - \lambda I)} = H, \text{Range}(A - \lambda I) \neq H \right\}.$$

**3-Le Spectre résiduel** : de  $A$  est l'ensemble

$$\sigma_r(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \sigma_P(A), \overline{(\lambda I - A)(H)} \neq H \right\}.$$

4- **Le Spectre essentiel** : Le spectre essentiel d'un opérateur linéaire fermé est l'ensemble

$$\sigma_{ess}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - A) \text{ n'est pas un opérateur de Fredholm d'indice } 0\}.$$

6- **Le Spectre approché** : de  $A$  est l'ensemble :

$$\sigma_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n) \subset H : \|x_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (A - \lambda I)x_n = 0\}$$

# Chapitre 2

## Les inverses généralisées

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur le même corps  $\mathbb{k}$  ( $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ) et  $A$  un opérateur linéaire défini de  $E$  dans  $F$ . Nous définissons  $B$  l'inverse généralisée de  $A$ , par solution du système suivant

*Adonn.*

Où  $B$  est un opérateur défini de  $F$  dans  $E$ . Remarquons que le système précédent admet plusieurs solutions.

### 2.1 Inverse généralisée Intérieure

**Définition 2.1.1.** Soit  $B : F \rightarrow E$  un opérateur linéaire, on dit que  $B$  est une inverse généralisée intérieure de  $A$ , si  $ABA = A$ , l'ensemble des inverses de l'opérateur  $A$  est noté par  $A^{(1)}$  ou  $A\{1\}$ .

**Exemple 2.1.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  admet  $B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  
 $B_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ,  $B_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ , ...  
comme inverses généralisées intérieures, car

$$\begin{aligned}
AB_1A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

*L'inverse généralisée intérieure n'est pas unique.*

**Proposition 2.1.** [35] *Soit  $B$  une inverse intérieure de  $A$ , alors*

1.  $(AB)^2 = AB$  et  $(BA)^2 = BA$
2.  $R(AB) = R(A)$  et  $N(A) = N(BA)$

*Démonstration.* 1.

$$\begin{aligned}
ABA &= A \implies ABAB = AB \\
&\implies (AB)^2 = AB.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ABA &= A \implies BABA = BA \\
&\implies (BA)^2 = BA
\end{aligned}$$

$$2.R(A) = R(ABA) \subset R(AB) \subset R(A).$$

$$N(A) \subset N(BA) \subset N(ABA) = N(A). \quad \square$$

**Théorème 2.1.** [35] *Tout opérateur linéaire admet une inverse intérieure.*

**Proposition 2.2.** *Soit  $B$  une inverse intérieure de  $A$ , alors  $(I - BA)$  est un projecteur sur  $N(A)$*

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
(I - BA)^2 &= I - 2BA + (BA)^2 \\
&= I - BA.
\end{aligned}$$

$$(I - BA)v = v - BA v = v, \forall v \in N(A) \text{ (i.e., } R(I - BA) = N(A)\text{)}.$$

□

**Proposition 2.3.** Soit  $B : F \rightarrow E$  une inverse intérieure de  $A$ , alors

$$E = N(A) \oplus R(BA) \text{ et } F = R(A) \oplus N(AB)$$

**Proposition 2.4.** Les propriétés suivantes sont équivalentes

1.  $ABA = A$
2.  $(AB)^2 = AB$  et  $R(AB) = R(A)$
3.  $(BA)^2 = BA$  et  $N(A) = N(BA)$
4.  $(BA)^2 = BA$  et  $E = N(A) \oplus R(BA)$
5.  $(AB)^2 = AB$  et  $F = R(A) \oplus N(AB)$
6.  $(BA)^2 = BA$  et  $N(A) \cap R(A) = \{0\}$

*Démonstration.* 1)  $\implies$  2)  $ABA = A \implies ABAB = AB \implies (AB)^2 = AB$

$$R(A) = R(ABA) \subset R(AB) \subset R(A) \implies R(AB) = R(A). \quad \square$$

**Exemple 2.2.** Soit  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , défini par  $A(x, y, z) = (x, 0, 0)$ .

$B(x, y, z) = (x, y, 0)$  est une inverse intérieure de  $A$

$$-ABA(x, y, z) = AB(x, 0, 0) = A(x, 0, 0) = (x, 0, 0) = A(x, y, z).$$

$$-N(B) = \{(0, 0, c) : c \in \mathbb{R}\};$$

$$-N(A) = N(AB) = \{(0, b, c) : b, c \in \mathbb{R}\};$$

$$-R(B) = \{(a, b, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$-R(A) = R(AB) = \{(a, 0, 0) : a \in \mathbb{R}\}$$

**Proposition 2.5.** Soit  $B$  une inverse intérieure de  $A$ , et soit  $P' = 1 - BA$  et  $Q' = AB$  deux projecteurs tels que  $R(P') = N(A)$  et  $R(Q') = R(A)$ , alors

$$B' = (I + P - P')B(I - Q + Q') = (2I - BA - P')B(I - AB + Q')$$

est une autre inverse de  $A$  satisfait  $I - B'A = P'$  et  $AB = Q'$ .

## 2.2 Inverse extérieure

**Définition 2.2.1.** Soit  $B : F \rightarrow E$  un opérateur linéaire, on dit que  $B$  est une inverse extérieure de  $A$ , si  $BAB = B$  l'ensemble des inverses extérieures de l'opérateur  $A$  est notée par  $A^{(2)}$  ou  $A\{2\}$

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est une inverse extérieure de  $A$ , car

$$\begin{aligned}
BAB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B
\end{aligned}$$

**Proposition 2.6.** *Soit  $B : F \longrightarrow E$  une inverse extérieure de  $A$ , alors*

1.  $(AB)^2 = AB$  et  $(BA)^2 = BA$ .
2.  $R(BA) = R(B)$  et  $N(B) = N(AB)$ .
3.  $E = N(BA) \oplus R(B)$ ,  $F = R(AB) \oplus N(B)$ .

**Proposition 2.7.** [35] *Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1.  $BAB = B$ ,
2.  $(BA)^2 = BA$  et  $R(BA) = R(B)$ ,
3.  $(BA)^2 = BA$  et  $E = N(BA) \oplus R(B)$ ,
4.  $(BA)^2 = BA$  et  $N(B) = N(AB)$ ,
5.  $(AB)^2 = AB$  et  $F = N(B) \oplus R(AB)$ ,
6.  $(AB)^2 = AB$  et  $N(A) \cap R(B) = \{0\}$ .

## 2.3 Inverse généralisée

Soit  $B : F \longrightarrow E$  un opérateur linéaire, on dit que  $B$  est une inverse généralisée de  $A$ , si  $BAB = B$  et  $ABA = A$ . Si  $B$  est une inverse généralisée de  $A$ , alors

$$B \in A^{(1)} \cap A^{(2)}.$$

**Proposition 2.8.** *Tout opérateur linéaire admet une inverse généralisée.*

**Exemple 2.3.** *On rappelle que  $C([0, 1])$  est l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[0, 1]$ . Soit  $A : C([0, 1]) \longrightarrow C([0, 1])$  un opérateur linéaire tel que*

$$A(x(t)) = x(t^2), \text{ on définit } B \text{ de } C([0, 1]) \text{ dans lui même par } B(x(t)) = x(\sqrt{t}).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} ABA(x(t)) &= AB(x(t^2)) = A(x(t)); \\ \text{et } BAB(x(t)) &= BA\left(x\sqrt{t}\right) = B(x(t)). \end{aligned}$$

**Proposition 2.9.** Soit  $B$  une inverse généralisée de  $A$ , alors ,

1.  $(AB)^2 = AB$  et  $(BA)^2 = BA$
2.  $N(B) = N(AB)$  et  $N(A) = N(BA)$
3.  $R(AB) = R(A)$  et  $R(BA) = R(B)$ .

D'autre part,  $E = N(A) \oplus R(B)$ ,  $F = N(B) \oplus R(A)$ .

**Remarque 2.1.** Si  $B$  est une inverse généralisée de  $A$ , alors  $AB$  est un projecteur sur  $R(A)$  et  $BA$  est un projecteur sur  $R(B)$ . On suppose que

$$E = T \oplus N(A) \text{ et } F = R(A) \oplus S.$$

**Théorème 2.2.** Soient  $P$  et  $Q$  deux projecteurs sur  $N(A)$ ,  $R(A)$  respectivement tels que  $N(P) = T$ ,  $N(Q) = S$ . Alors le système suivant

$$\begin{cases} AXA = A \\ XAX = X \\ AX = Q \\ XA = I - P \end{cases}$$

admet une solution unique, on le note par  $A_{P,Q}$ .

*Démonstration.*  $X = (XA)X = (I - P)X = YAX = YQ = YAY = Y$ . □

**Proposition 2.10.** [34] Les propriétés suivantes sont équivalentes

1.  $B$  est une inverse généralisée  $A$ .
2.  $(AB)^2 = AB$ ,  $F = N(B) \oplus R(A)$ .
3.  $(BA)^2 = BA$ ,  $E = N(A) \oplus R(B)$ .
4.  $(AB)^2 = AB$ ,  $N(B) = N(AB)$  et  $R(A) = R(AB)$ .
5.  $(BA)^2 = BA$ ,  $R(B) = R(BA)$  et  $N(A) = N(BA)$ .
6.  $B = B_{T,S} = \hat{A}^{-1}Q$  où  $\hat{A} = A_{/T}$ ,  $E = T \oplus N(A)$ ,  $F = R(A) \oplus S$ , tel que  $Q$  est un projecteur sur  $R(A)$ .
7.  $B$  est une inverse intérieure de  $A$ , s'il vérifie :  $BA(x) = x, \forall x \in T$  et  $B(y) = 0$  ;  $\forall y \in S. B(y_1 + y_2) = B(y)$  tels que  $y_1 \in R(A)$ ;  $\forall y_2 \in S$ .
8.  $B = B_{T,S} = (I - P)B_1Q$  tels que  $AB_1A = A$ ,  $P$  et  $Q$  sont des projecteurs sur  $N(A)$  et  $R(A)$  respectivement.

*Démonstration.* On utilise les propositions 6 et 10. □

**Proposition 2.11.** [34] Soient  $B_1, B_2$  deux inverse intérieure de  $A$ , on pose

$$AB_1 = Q_1, AB_2 = Q_2, I - P_1 = B_1A \text{ et } I - P_2 = B_2A, \text{ Alors}$$

$$a) B_1AB_2 = A_{P_1, Q_2}^\neq$$

$$b) A_{P_1, Q_1}^\neq = A_{P_1, Q_2}^\neq AA_{P_2, Q_1}^\neq$$

*Démonstration.* a)  $AB_1AB_2 = AB_2 = Q_2, I - B_1AB_2A = I - B_1A = P_1.$

$$b) A_{P_1, Q_1}^\neq = B_1AB_1 = (B_1AB_2)A(B_2AB_1) = A_{P_1, Q_2}^\neq AA_{P_2, Q_1}^\neq$$
 □

## 2.4 Inverse intérieure topologique

### 2.4.1 Inverse droite intérieure topologique

Dans tous ce que suit  $E$  et  $F$  sont des espaces vectoriels topologiques  $\overline{R(A)}$  est la fermeture de  $R(A)$  dans  $F$ ,  $Q$  est un projecteur sur  $F$  tels que :  $Q \in B(F)$  et  $R(Q) = \overline{R(A)}$ . On écrit alors,

$$F = \overline{R(A)} \oplus S, G_Q = R(A) \oplus S = R(A) \oplus N(Q).$$

Maintenant on considère

$$A : E \longrightarrow G_Q \text{ et } Q^- = Q/G_Q. \text{ Si } B_{Q^-} : G_Q \longrightarrow E$$

est une inverse intérieure de  $A$  et  $AB_{Q^-} = Q^-$ , alors  $B_{Q^-}$  est dit inverse droite intérieure topologique.

Soit  $B$  une inverse intérieure de  $A$ , si  $AB$  est un projecteur (continu) sur  $R(A)$  dans  $G_Q$  on a par le (théorème 2.2)

$$B_{Q^-} = B(1 - AB + Q^-)$$

est une inverse droite intérieure topologique.

Nous utilisons la notation  $A_{d,Q}$  pour l'inverse droite intérieure topologique.

**Proposition 2.12.** [35] Soit  $Q$  un projecteur sur  $\overline{R(A)}$ , alors  $A$  admet une inverse droite intérieure topologique si et seulement s'il existe un opérateur linéaire, noté par  $A_{d,Q}$  vérifiant

$A_{d,Q} : R(A) \oplus N(Q) \longrightarrow E$  tel que  $AA_{d,Q}A = A$  sur  $E$  et  $AA_{d,Q} = Q$  sur  $R(A) \oplus N(Q)$ .

Soient  $E$  et  $F$  des espaces de dimension finie, où  $F$  est un espace de Hilbert et  $Q$  est le projecteur orthogonal sur  $R(A)$ , alors  $A$  admet une inverse droite intérieure topologique  $A_{d,Q}$ ;  $AA_{d,Q}A = A$  sur  $E(AA_{d,Q}) = AA_{d,Q}$

## 2.4.2 Inverse gauche intérieure topologique

Soit  $A$  un opérateur défini sur  $D(A) \subset E$  dans  $F$  tel que  $E$  un espace vectoriel topologique.

**Définition 2.4.1.** Soit  $D(A) \subset E$ , on dit que le domaine de  $A$  est décomposable par rapport au projecteur  $P \in B(E)$  si  $D(A) \subset R(P)$ ,  $\forall x \in D(A), P(x) \in N(A)$  et  $D(A) \cap N(P)$  dense dans  $N(P)$  Dans ce cas nous appelons  $C_r = D(A) \cap N(P)$ , le support de  $A$ .

**Définition 2.4.2.** Soit  $B$  une inverse intérieure de  $A$ , si  $BA$  admet une extension au projecteur  $(1 - P) \in B(E)$  tel que  $R(1 - P) = \overline{R(BA)}$ , alors on dit que  $B$  est une inverse gauche intérieure topologique. Nous utilisons la notation  $A_{g,P}$  pour l'inverse gauche intérieure topologique.

**Théorème 2.3.** Soit  $A : D(A) \rightarrow F$  un opérateur linéaire. Si  $U = A_{g,P}$ , alors  $D(A)$  est décomposable par rapport à  $P$ .

*Démonstration.*  $\forall z \in N(A)$ ,  $UA_z = (1 - P)_z = 0 \implies \forall z \in N(A); P_z = z$ .

Donc,

$$N(A) \subset R(P) . UA_z = (1 - P)_z = 0; \forall z \in D(A) \implies P_z = z - UA_z, \forall z \in D(A) \implies AP_z = A_z - AUA_z = 0; \forall z \in D(A)$$

. Alors,  $P_z \in N(P), \forall z \in D(A)$  .

Nous avons.  $\overline{R(UA)} = N(P)$  . donc,  $D(A) \cap N(P)$  est dense dans  $N(P)$  .  $\square$

**Théorème 2.4.** Si le domaine de  $A$  est décomposable par rapport au projecteur  $P \in B(E)$ , Alors  $A$  admet une inverse gauche intérieure topologique

*Démonstration.* Soit  $U'$  une inverse intérieure de  $A$ , on écrit  $P' = I - U'A$ .

Soit  $\tilde{P}$  la restriction de  $P$  à  $D(A)$  Par la proposition 14  $U = (2I - U'A - \tilde{P})U'$  et  $UA = I - \tilde{P}$  Aussi,  $R(UA) = N(P) = N(P) \cap D(A) = C_P$ , qui est dense dans

$N(P) = R(I - P)$ . Si  $E$  et  $F$  sont des espaces de dimensions finies, où  $E$  est un espace de Hilbert, soit  $P$  le projecteur orthogonal sur  $N(A)$ , alors  $A$  admet une inverse gauche intérieur topologique  $A_{g,p}$ , qui vérifie :  $\{AA_{g,p}A = A, (AA_{g,p})^* = AA_{g,p}\}$ .  $\square$

## 2.5 Inverse généralisée topologique

**Définition 2.5.1.** Soit  $A : D(A) \subset E \rightarrow F$  un opérateur linéaire, si  $U$  vérifie :

1.  $U$  est une inverse droite intérieure topologique de  $A$
2.  $U$  est une inverse gauche intérieure topologique de  $A$
3.  $UAU = U$ . Alors,  $U$  est dit inverse généralisée topologique, on le note par  $A_{P,Q}^*$ .

**Théorème 2.5.** [35] Soit  $A : D(A) \rightarrow W$  un opérateur linéaire, si le domaine de  $A$  est décomposable par rapport au projecteur  $P \in B(E)$  et s'il existe un projecteur  $Q$  sur  $\overline{R(A)}$ , alors  $A$  admet l'inverse généralisée topologique unique (relatif au choix de  $P$  et  $Q$ ) noté par  $A_{P,Q}^*$  et vérifie :

- 1)  $D(A_{P,Q}^*) = R(A) \oplus N(Q)$ ,
- 2)  $R(A_{P,Q}^*) = C_p(A)$ ,
- 3)  $N(A_{P,Q}^*) = N(Q)$ ,
- 4)  $A_{P,Q}^*Ax = x - Px$ , pour tout  $x \in D(A)$ . et
- 5)  $AA_{P,Q}^*y = Qy$ , pour tout  $y \in D(A_{P,Q}^*)$ .

**Théorème 2.6.** [35] Soit  $A \in B(E, F)$  on suppose que  $N(A)$  admet un supplémentaire topologique dans  $E$  et  $\overline{R(A)} = R(A)$  admet un supplémentaire topologique dans  $F$ , soit  $P$  un projecteur sur  $N(A)$  dans  $E$  et  $Q$  un projecteur sur  $R(A)$  dans  $F$ , alors  $A$  admet l'inverse généralisée topologique unique notée par  $A_{P,Q}^*$  qui vérifie les conditions suivantes :

- 1)  $AA_{P,Q}^*A = A$  sur  $E$
- 2)  $A_{P,Q}^*AA_{P,Q}^* = A_{P,Q}^*$  sur  $F$
- 3)  $A_{P,Q}^*Ax = x - Px$ , pour tout  $x \in E$
- 4)  $AA_{P,Q}^*y = Qy$ , pour tout  $y \in F$ .

*Démonstration.* On définit  $A_{P,Q}^*$  par :  $A_{P,Q}^*Ax = x; x \in N(P)A_{P,Q}^*y = A_{P,Q}^*y_1$ ,

$A_{P,Q}^*y_2 = 0$  où  $y = y_1 + y_2, y_1 \in R(A)$  et  $y_2 \in N(Q)$ . Il est évident que l'inverse généralisée est unique. □

**Remarque 2.2.**  $A_{P,Q}^*$  dans ce cas est une application continue. Ci-après on présente quelques méthodes de calcul des inverses généralisées.

## 2.6 Inverse généralisé de Moore- Penrose

Ce genre d'inverses généralisés est le plus important, car il conserve une bonne partie des propriétés des inverses ordinaires, telle que l'unicité de l'inverse, les propriétés de symétrie et beaucoup d'autres qui font concept central en algèbre linéaire, analyse numérique et dans diverses applications.

### 2.6.1 a- L'inverse de Moore-Penrose d'un opérateur linéaire

Soient  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  des espaces de Hilbert.

**Proposition 2.13.** *Soient  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  et  $\mathcal{R}(A) = \overline{\mathcal{R}(A)}$ , Il existe l'inverse généralisé unique de  $A$ , on le note par  $A^+$ , qui vérifie les équations suivantes :*

$$\left\{ \begin{array}{l} XAX = X \quad \dots \quad (1) \\ AXA = A \quad \dots \quad (2) \\ XA = I - P_{\mathcal{N}(A)} \quad \dots \quad (3) \\ AX = P_{\mathcal{R}(A)} \quad \dots \quad (4) \end{array} \right.$$

$A^+$  est appelé l'inverse de Moore-Penrose de l'opérateur  $A$ .

*Démonstration.*  $\mathcal{N}(A)$  et  $\mathcal{R}(A)$  sont des sous espace fermé dans  $\mathcal{H}_1$  et  $\mathcal{H}_2$  alors ils existent deux projecteurs

Orthogonaux  $P_{\mathcal{N}(A)}$  et  $P_{\mathcal{R}(A)}$  sur  $\mathcal{N}(A)$  et  $\mathcal{R}(A)$  respectivement, tels que

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(P_{\mathcal{N}(A)}) = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(A)^\perp$$

Et

$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(P_{\mathcal{R}(A)}) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$$

Par (1-6-3)  $A^+$  existe et  $A^+$  défini par :

$$A^+(y) = 0; \forall y \in \mathcal{R}(A)^\perp \text{ et } A^+y = (A/\mathcal{R}(A^*))^{-1}y; \forall y \in \mathcal{R}(A). \quad \square$$

### 2.6.2 b- L'inverse de Moore-Penrose d'une matrice

Soit  $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$ , on définit  $\underline{A}^+ : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  par  $\underline{A}^+(y) = 0; \forall y \in \mathcal{R}(A)^\perp$  et  $\underline{A}^+(y) = (\underline{A}/\mathcal{R}(A^*))^{-1}y; \forall y \in \mathcal{R}(A)$ .

Remarquons que  $A^+$  est un inverse généralisé de  $A$ .

**Proposition 2.14.** *Soit  $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$ , alors*

$$a) A^+Ax = 0, \forall x \in \mathcal{N}(A) \text{ et } A^+Ax = x, \forall x \in \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^+).$$

- b)  $AA^+ = 0, \forall y \in \mathcal{R}(A)^\perp$  et  $AA^+y = y, \forall y \in \mathcal{R}(A)$ .  
c)  $AA^+$  est le projecteur orthogonal sur  $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^+)$   
d)  $AA^+$  est le projecteur orthogonal sur  $\mathcal{R}(A)$  dans  $\mathbb{C}^n$ .

*Démonstration.* a)  $Ax = 0; \forall x \in \mathcal{N}(A) \implies A^+Ax = 0; \forall x \in \mathcal{N}(A)$ .

Et

$$Ax \in \mathcal{R}(A); \forall x \in \mathcal{R}(A^*) \implies A^+Ax = (A/\mathcal{R}(A^*))^{-1}Ax = x; \forall x \in \mathcal{R}(A^*).$$

$$b) \forall y \in \mathcal{R}(A)^\perp \implies A^+y = 0, \forall y \in \mathcal{R}(A) \implies AA^+y = y, \forall y \in \mathcal{R}(A)^\perp$$

Et

$$\forall y \in \mathcal{R}(A) \implies A^+y = (A/\mathcal{R}(A^*))^{-1}y \implies AA^+y = A(A/\mathcal{R}(A^*))^{-1}y = y$$

$$c) \text{ Nous avons, } \mathcal{R}(A^+A) = \mathcal{R}(A^+)$$

Appliquons a) de la Proposition (2-1-5) on trouve

$$A^+A \text{ est un projecteur de } \mathcal{R}(A^+) \text{ sur } \mathbb{C}^m$$

Soient  $x, x' \in \mathbb{C}^n$ , nous avons

$$x = x_1 + x_2, x' = x'_1 + x'_2, \text{ tels que } x_1, x'_1 \in \mathcal{N}(A) \text{ et } x_2, x'_2 \in \mathcal{R}(A^*)$$

$$\begin{aligned} \langle A^+A, x' \rangle &= \langle A^+A(x_1 + x_2), x'_1 + x'_2 \rangle \\ &= \langle A^+Ax_1, x'_1 \rangle + \langle A^+Ax_1, x'_2 \rangle + \langle A^+Ax_2, x'_1 \rangle + \langle A^+Ax_2, x'_2 \rangle = \langle x_1, x'_1 \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x, A^+Ax' \rangle &= \langle x_1 + x_2, A^+A(x'_1 + x'_2) \rangle \\ &= \langle x_1, A^+Ax'_1 \rangle + \langle x_1, A^+Ax'_2 \rangle + \langle x_2, A^+Ax'_1 \rangle + \langle x_2, A^+Ax'_2 \rangle = \langle x_1, x'_1 \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } (A^+A)^* = A^+A$$

d) De même façon, nous montrons que  $A^+A$  est le projecteur orthogonal sur  $\mathcal{R}(A)$

□

**Définition 2.6.1.** *l'inverse généralisé de Moore :* Si  $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$ , alors  $A^+$

l'unique généralisé qui vérifie les équations suivantes :

$$1) A^+A = P_{\mathcal{R}(A^+)}$$

$$2) AA^+ = P_{\mathcal{R}(A)}$$

**Définition 2.6.2.** *l'inverse généralisé de Penrose :*  $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$ , alors  $A^+$  est

la solution unique du système suivant :

$$(s) \begin{cases} XAX = X & \dots & (1) \\ AXA = A & \dots & (2) \\ (XA)^* = XA & \dots & (3) \\ (AX)^* = AX & \dots & (4) \end{cases}$$

**Théorème 2.7.** *Les deux définitions précédentes sont équivalentes .*

*Démonstration.* supposons que,  $A^+A = P_{\mathcal{R}(A^*)}$  et  $AA^+ = P_{\mathcal{R}(A)}$  , on applique (c) et (d) de (2.1.5),

alors :  $A^+A$  et  $AA^+$  sont des projecteurs orthogonaux.

D'autre part,

$$A^+AA^+ = P_{\mathcal{R}(A^*)}A^+ = P_{\mathcal{R}(A^+)}A^+ = A^+.$$

Et

$$AA^+A = P_{\mathcal{R}(A)}A = A$$

Enfin,  $A^+$  est une solution du système (s).

Réciproquement, si  $A^+$  est une solution du système (s) alors,

$$\text{Nous avons, } AA^+A = A \implies A^+AA^+A = A^+A \implies (A^+A)^2 = A^+A$$

Par (1-7-1) on a

$$(A^+A)^* = A^+A \text{ et } \mathcal{R}(A^+A) = \mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*)$$

Donc,  $A^+A = P_{\mathcal{R}(A^*)}$  .

De la même façon, nous montrons que  $AA^+ = P_{\mathcal{R}(A)}$ . □

**Remarque 2.3.** *On montre que  $A^+$  est une solution unique du système (s) On suppose que l'on a  $A_1^+, A_2^+$  deux inverses de Penrose de  $A$*

$$\begin{aligned} A_1^+ &= A_1^+AA_1^+ = A_1^+(AA_1^+)^* = A_1^+(A_1^+)^*A^* = A_1^+(A_1^+)^*A^*A_2^+A^* \\ &= A_1^+(AA_1^+)^*(AA_2^+)^* = A_1^+(AA_1^+)(AA_2^+) = A_1^+AA_2^+ \\ &= A_1^+AA_2^+AA_2^+ = (AA_1^+)^*(A_2^+A)^*A_2^+ = A^*(A_1^+)^*A^*(A_2^+)^*A_2^+ \\ &= A^*(A_2^+)^*A_2^+ = (A_2^+A)^*A_2^+ = (A_2^+A)A_2^+ = A_2^+. \end{aligned}$$

**Proposition 2.15.** *Soient  $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$ ;  $\lambda \in \mathbb{C}$ , alors :*

- a)  $(A^+)^+ = A$
- b)  $(A^+)^* = (A^*)^+$
- c)  $(\lambda A)^+ = A^+\lambda^+$  tels que si  $\lambda \neq 0$ , alors  $\lambda^+ = \frac{1}{\lambda}$  et si  $\lambda = 0$ . alors  $\lambda^+ = 0$ .
- d)  $A^* = A^*AA^+ = A^+AA^*$ .
- e)  $A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$ .
- f)  $(A^*A)^+ = A^+(A^*)^+$ .
- g)  $(UAV)^+ = V^*A^+U^*$ , tels que  $U$  et  $V$  des matrices unitaires

*Démonstration.*

$$a)(A^+)^+ : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m \forall x \in \mathcal{R}(A^*); (\underline{A}^+)^+x = ((\underline{A}/_{\mathcal{R}(A^*)})^{-1})^+x = ((\underline{A}/_{\mathcal{R}(A^*)})^{-1})^+x = \underline{A}x$$

Et

$$\forall x \in \mathcal{R}(A^*)^\perp; (\underline{A}^+)^+ x = 0, \text{ Donc } (A^+)^+ = A.$$

$$\text{b) } \forall y \in \mathcal{R}(A^*), (\underline{A}^+)^+ y = (\underline{A}^*/_{\mathcal{R}(A)})^{-1} y = ((\underline{A}/_{\mathcal{R}(A^*)})^{-1})^* y = (\underline{A}^+)^* y.$$

D'autre part,

$$\mathcal{N}((A^*)^+) = \mathcal{R}(A^*)^\perp; \mathcal{N}((A^+)^*) = \mathcal{R}(A^+)^\perp = \mathcal{R}(A^*)^\perp.$$

c) Évident.

$$\text{d) } A^+ A A^* = P_{\mathcal{R}(A^*)} A^* = A^* \text{ et } A^* A A^+ = A^* P_{\mathcal{R}(A)} = A^*$$

Puisque  $A^+ A$  et  $A A^+$  sont des projecteurs orthogonaux sur  $\mathcal{R}(A^*)$  et  $\mathcal{R}(A)$  respectivement .

$$\text{e) } A^*(A A^*)^+ = A^* A^{*+} A^+ = A^* A^{+*} A^+ = (A^+ A)^* A^+ = A^+ A A^+ = A^+$$

D'autre part,

$$(A^* A)^+ A^* = A^+ A^{*+} A^* = A^* A^{*+} A^* = A^+ (A A^+)^* = A^+ A A^+ = A^+$$

f) Il suffit de vérifier que la matrice  $A^+ (A^*)^+$  est une solution du système de Penrose suivant :

$$(s1) \begin{cases} X (A^* A) X = X \\ (A^* A) X (A^* A) = A \\ (X (A^* A))^* = X (A^* A) \\ ((A^* A) X)^* = (A^* A) X \end{cases}$$

g) Il suffit de vérifier que la matrice  $V^* A^+ U^*$  est une solution du système de Penrose suivant :

$$(s11) \begin{cases} X (U A V) X = X \\ (U A V) X (U A V) = A \\ (X (U A V))^* = X (U A V) \\ ((U A V) X)^* = (U A V) X \end{cases}$$

□

**Proposition 2.16.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{m,n}(\mathbb{C})$ , alors :

1.  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A A^+) = \mathcal{R}(A A^*)$ .
2.  $\mathcal{R}(A^+) = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^+ A) = \mathcal{R}(A^* A)$ .
3.  $\mathcal{R}(I - A A^+) = \mathcal{N}(A A^+) = \mathcal{R}(A^* A)^\perp$ .
4.  $\mathcal{R}(I - A^+ A) = \mathcal{N}(A^+ A) = \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^\perp$ .

**Théorème 2.8.** Soit  $A \in \mathbb{C}_r^{m,n}(\mathbb{C})$ , si  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  est une base de  $\mathcal{R}(A^*)$  et  $\{w_1, w_2, \dots, w_{n-r}\}$  est une base de  $\mathcal{N}(A^*)$ , alors  $A^+ = [v_1, v_2, \dots, v_r, 0, \dots, 0][A v_1, A v_2, \dots, A v_r, w_1, w_2, \dots, w_{n-r}]^{-1}$

En utilisons la définition de  $A^+$ , nous trouvons

$$\begin{aligned} A^+[Av_1, \dots, Av_r, w_1, w_2, \dots, w_{n-r}] &= [A^+Av_1, \dots, A^+Av_r, A^+w_1, A^+w_2, \dots, A^+w_{n-r}] \\ &= [v_1, v_2, \dots, v_r, 0, \dots, 0] \end{aligned}$$

Autre part,

$\{Av_1, Av_2, \dots, Av_r, w_1, w_2, \dots, w_{n-r}\}$  est une base de  $\mathbb{C}^n$ , donc

$$A^+ = [v_1, v_2, \dots, v_r, 0, \dots, 0][Av_1, \dots, Av_r, w_1, w_2, \dots, w_{n-r}]^{-1}$$

**Exemple 2.4.** Calcul de  $A^+$

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ est une base de } \mathcal{R}(A^*)$$

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$A^+ \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^+ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nous devons maintenant calculer la base de  $\mathcal{R}(A)^\perp$

On remarque que  $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$ ,

Nous obtenons

$$x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{donc, } A^+ \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad A^+ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$$

Donc

$$A^+ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons,  $\mathbb{C}^4 = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$

$$\text{Donc, } A^+ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1}.$$

# Chapitre 3

## Inverse de Drazin

### 3.1 Préliminaires et définitions

**Indice d'une matrice :**

Soit  $k$  un entier non négatif.

**Définition 3.1.1.** On appelle indice de la matrice  $A$  le plus petit entier positif  $k$  tel que  $\text{rang}(A^{k+1}) = \text{rang}(A^k)$ , (range de  $A$  c'est le nombre des vecteurs linéairement indépendants soit les colonnes où lignes).

**Exemple 3.1**  $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ , soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  :

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = 0 \\ -\alpha + 4\beta = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = 4\beta \end{cases} \longrightarrow \alpha = \beta = 0,$$

alors  $\text{rang}(A) = 2$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$$

$\text{rang}(A^2) = \text{rang}(A)$ , donc  $\text{ind}(A) = 1$ .

**Définition 3.1.2.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{m,n}$  d'indice  $k$ , on dit que la matrice  $A^D$  d'ordre  $n$  est

l'inverse de Drazin de  $A$  si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} AA^D = A^D A, \\ A^D AA^D = A^D, \\ A^k A^D A = A^k. \end{cases}$$

**Proposition 3.1.** Si  $A^D$  est l'inverse de Drazin de la matrice  $A$ , on a les égalités suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad A^k A^D A = A^k,$$

$$(2) \quad AA^D A^k = A^k,$$

$$(3) \quad A^{k+1} A^D = A^k,$$

$$(4) \quad A^D A^{k+1} = A^k.$$

*Démonstration.* (1)  $\implies$  (2)

$$\begin{aligned} A^k &= A^k A^D A = A.A.A\dots AA^D A \\ \underbrace{AAA\dots A^D A^2}_{k-1} &= \underbrace{AAA\dots A^D A^3}_{k-2} \\ &= \dots = AAA^D A^{k-1} = AA^D A^k. \end{aligned}$$

(2)  $\implies$  (1) Evident.

(2)  $\implies$  (3) (On a (2)  $\implies$  (1)  $\implies$  (4))

$$\begin{aligned} AA^D A^k &= A^k \implies A^k = A^k A^D A \\ &= A^k (AA^D) = A^{k+1} A^D. \end{aligned}$$

(3)  $\implies$  (4)

$$\begin{aligned} A^k &= A^{k+1} A^D = A^k AA^D = A^k A^D A = A^{k-1} AA^D A \\ &= A^{k-1} A^D A^2 = \dots = A^D A^{k+1}. \end{aligned}$$

□

**Proposition 3.2.** a)  $(A^*)^D = (A^D)^*$ .

$$b) (A^t)^D = (A^D)^t.$$

$$c) (A^l)^D = (A^D)^l \text{ si } l = 1, 2, \dots, l \in \mathcal{N}$$

d) Si  $A$  est indice  $k$ ,  $A^l$  est indice 1.

$$e) (A^D)^D = A \text{ si et seulement si } A \text{ est } \text{ind}(A) = 1.$$

$$f) \left( (A^D)^D \right)^D = A^D.$$

**Proposition 3.3.**  $A^D$  est une inverse de  $A$ ,  $\text{ind}(A) = k$ , alors

$$A^k(A^D)^{k+1} = A^D.$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} A^k(A^D)^{k+1} &= A^k(A^D)^k A^D = (AA^D)^k A^D \\ &= AA^D A^D \\ &= A^D AA^D = A^D. \end{aligned}$$

□

## 3.2 Groupe inverse

**Définition 3.2.1.** [2] Si  $\text{ind}(A) = 1$ , alors  $A^D$  est noté par  $A^\#$ , où  $A^g$ , est dit groupe inverse.

**Définition 3.2.2.** Le groupe inverse d'une matrice carrée  $A$  est une matrice carrée notée  $A^\#$ , qui satisfait les conditions suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} A^\# AA^\# = A^\# \\ A^\# A = AA^\# \\ AA^\# A = A. \end{array} \right.$$

**Remarque 3.1.** Si  $A$  est idempotente, alors  $A = A^\#$ .

*Démonstration.* Soit  $A$  une matrice idempotente, alors

$$\begin{aligned} A &= A^2 A^\# = AA^\# = A(A^\#)^2 A \\ &= A^2 (A^\#)^2 = A(A^\#)^2 \\ &= A^\# \end{aligned}$$

□

**Théorème 3.1.** [52] Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , alors  $A^\#$  si et seulement si  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2)$

*Démonstration.* Si  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^2) \implies \text{ind}(A) = 1 \implies A^\#$  existe. Si

$$\begin{aligned} A^\# \text{ existe} &\implies A^2 A^\# = A \\ &\implies RA^2 = R(A) \\ &\implies \text{rang}(A) = \text{rang} A^2 \end{aligned}$$

□

**Théorème 3.2.** [37] Soit  $A^2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice d'indice 1, alors

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^\neq) .$$

*Démonstration.* On a

$$\text{rang}(A^\neq) = \text{rang}(A^\neq A A^\neq) \leq \text{rang}(A A^\neq) \leq \text{rang}(A), \dots(1).$$

et

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A A^\neq A) \leq \text{rang}(A^\neq A) \leq \text{rang} A^\neq \dots(2),$$

d'après (1) et (2) on a  $\text{rang}(A^\neq) = \text{rang}(A)$ . □

**Corollaire 3.1.** Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice non singulière, alors  $\text{ind}(A) = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice non singulière, alors

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(I_n) = n \implies \text{rang}(A) = \text{rang}(A^0) = n \implies \text{ind}(A) = 0. \quad \square$$

**Corollaire 3.2.** Si  $A$  est un élément idempotent, alors  $\text{ind}(A) = 1$ .

*Démonstration.*

$$A \text{ est idempotent} \implies A^2 = A$$

$$\implies \text{rang}(A) = \text{rang} A^2$$

$$\implies \text{ind}(A) = 1. \quad \square$$

**Théorème 3.3.** [37] Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est une matrice symétrique d'indice 1, alors  $A^\neq = (A^\neq)^\star$ .

*Démonstration.* Comme  $A = 6$  est un groupe inverse de  $A$ , et  $A = A^\star$ , alors

$$\begin{aligned} (A^\neq)^\star A &= (A^\neq)^\star A^\star \\ &= A^\star (A^\neq)^\star = A (A^\neq)^\star, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A^\neq)^\star A (A^\neq)^\star &= (A^\neq)^\star A^\star (A^\neq)^\star \\ &= ((A^\neq) A (A^\neq))^\star = (A^\neq)^\star = A^\neq, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A (A^\neq)^\star A &= A^\star (A^\neq) A^\star \\ &= (A (A^\neq) A)^\star = A^\star = A. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.3.** Pour toute matrice  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , telle que  $\text{ind}(A) = 1$ , alors  $(A^\neq)^\neq = A$ .

### 3.3 Propriétés des inverses de Drazin

1. Si  $A$  est inversible  $\implies \text{ind}(A) = 0$ .
2. Si  $A$  est une matrice non singulière, alors  $\text{ind}(A) = 0$ .
3.  $A^D A$  et  $AA^D$  sont des projecteurs sur  $R(A)$ .
4.  $R(A^D) = R(A^k)$ ,  $N(A^D) = N(A^k)$ , tel que  $\text{ind}(a) = k$ .
5. Si  $A$  est idempotent, alors  $A = A^D$ .
6. Si  $A$  d'indice  $k$ , alors  $(A^l)$  d'indice 1 et  $(A^l)^\# = (A^D)^l$ .
7. Si  $A$  d'indice  $k$ , alors  $R(A^D) = R(A^l)$ ,  $N(A^D) = N(A^l)$ , pour tout  $l \geq k$ .

### 3.4 Autres propriétés d'inverses de Drazin

**Lemme 3.1.** [46] Pour tout opérateur  $A \in B(H)$ ,  $R(A)$  est fermé si et seulement s'il existe  $X \in B(H)$  tel que  $AXA = A$ .

**Lemme 3.2.** [46] Soit  $A \in B(H)$ , s'il existe un entier positif  $k$  et un opérateur  $X \in B(H)$ , tel que  $AX = XA$ ,  $XAX = X$  et  $A^{k+1}X = A^k$ , alors  $R(A^k) = R(A^{k+1})$  et  $R(A^k)$  est fermé.

*Démonstration.* En général  $R(A^{k+1}) \subset R(A^k)$ , puisque  $A^{k+1}X = A^k$  implique  $R(A^k) \subset R(A^{k+1})$ , donc  $R(A^k) = R(A^{k+1})$ , comme  $AX = XA$ ,  $XAX = X$  et

$$\begin{aligned} A^k &= A^{k+1}X = A^k X A \\ &= A^k X A X A = A^k X^2 A^2 = A^k X^2 A A X A \\ &= A^k X^3 A^3 = \dots = A^k X^k A^k. \end{aligned}$$

D'après le lemme précédent  $R(A^k)$  est fermé. □

**Lemme 3.3.** Soit  $A \in B(H)$  et  $\text{ind}(A) = k$ . Si  $A^D$  est l'inverse de Drazin de  $A$ . Alors  $R(A^D) = R(A^k)$ .

*Démonstration.* Comme

$$A^D A A^D = A^D$$

et

$$A A^D = A^D A,$$

on trouve

$$A^D = A^k (A^D)^{k+1},$$

alors  $R(A^D) \subset R(A^k)$ . D'autre part  $AA^D = A^D A$  et  $A^{k+1}A^D = A^k$ , on peut écrire

$A^k = A^{k+1}A^D$ , alors  $R(A^k) \subset R(A^D)$ . Donc  $R(A^D) \subset R(A^k)$ , et  $R(A^k) = R(A^D)$ .  $\square$

**Théorème 3.4.** [37] Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , tel que  $ind(A) = k$ , alors  $ind(A) = ind(A^*)$ .

*Démonstration.* Comme  $ind(A) = k$ , on a par définition  $rang(A^{k+1}) = rang(A^k)$ ,

$$(A^n)^* = (A^*)^n,$$

et

$$rang(A) = rang(A^*),$$

ce qui entraînent

$$rang(A^{k+1}) \text{ et } rang(A^k) = rang((A^k)^*) = rang((A^*)^k).$$

Ce qui implique

$$rang((A^*)^{k+1}) = rang((A^*)^k), \text{ alors}$$

$\square$

**Théorème 3.5.** Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , tel que  $ind(A) = k$ , alors

$$rang(A) = rang(A^D).$$

*Démonstration.* D'autre part, on a

$$\begin{aligned} rang(A^D) &= rang(A^D AA^D) \\ &\leq rang(AA^D) \\ &\leq rang(A), \dots(1). \end{aligned}$$

Et d'autre part

$$\begin{aligned} rang(A) &= rang(AA^D A) \\ &\leq rang(A^D A) \\ &\leq rang(A^D) \dots(2). \end{aligned}$$

D'après (1) et (2) on déduit que  $rang(A) = rang(A^D)$ .  $\square$

**Corollaire 3.4.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice, telle que  $ind(A) = k > 1$ , alors

$$ind(A) = ind(A^t).$$

*Démonstration.* Comme  $\text{ind}(A) = k$  implique  $\text{rang}(A^{k+1}) = \text{rang}(A^k)$ ,  
d'après la formule  $((A)^n)^t = ((A)^t)^n$  on a  $((A)^{k+1})^t = ((A)^t)^{k+1}$ ,  
 $((A)^k)^t = ((A)^t)^k$  et  $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^t)$  implique

$$\begin{aligned}\text{rang}(A^{k+1}) &= \text{rang}\left(\left(A^{k+1}\right)^t\right) \\ &= \text{rang}\left(\left(\left(A\right)^t\right)^{k+1}\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\text{rang}(A^k) &= \text{rang}\left(\left(A^k\right)^t\right) \\ &= \text{rang}\left(\left(A\right)^t\right)^k\end{aligned}$$

alors on trouve  $\text{rang}\left(\left(A\right)^t\right)^{k+1} = \text{rang}\left(\left(A\right)^t\right)^k$

qui implique  $\text{ind}(A^t) = \text{ind}(A) = k$ . □

**Théorème 3.6.** [34] Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice hermitienne d'indice  $k$  alors,

$$\text{ind}(A) = \text{ind}(A^*) = \text{ind}(AA^*) = \text{ind}(A^*A).$$

**Corollaire 3.5.** Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  une matrice normale d'indice  $k$ , alors,

$$\begin{aligned}\text{ind}(A) &= \text{ind}(A^*) \\ &= \text{ind}(AA^*) = \text{ind}(A^*A).\end{aligned}$$

**Théorème 3.7.** Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  est une matrice symétrique d'indice  $k$  tel que  $k > 1$ ,  
alors,  $A^D = (A^D)^T$ .

*Démonstration.* Comme  $A$  est une matrice symétrique, alors  $A = A^t$ ,

$$\begin{aligned}\left(A^D\right)^t A &= \left(A^D\right)^t A^t = \left(AA^D\right)^t = \left(A^D A\right)^t \\ &= A^t \left(A^D\right)^t \\ &= A \left(A^D\right)^t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(A^D\right)^t A \left(A^D\right)^t &= \left(A^D\right)^T A^t \left(A^D\right)^t \\ &= \left(A^D A A^D\right)^t = \left(A^D\right)^t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(A^{k+1} A^D\right)^t &= \left(A^t\right)^{k+1} \left(A^D\right)^t \\ &= \left(A^{k+1}\right)^t \left(A^D\right)^t = \left(A^{k+1} A^D\right)^t \\ &= \left(A^k\right)^t = \left(A^t\right)^k = A^k.\end{aligned}$$

□

**Théorème 3.8.** [35] Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , alors  $\frac{1}{\lambda}$  est une valeur propre de  $A^D$ .

*Démonstration.*  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$  alors

$$\begin{aligned}
Ax &= \lambda x, (x \neq 0) \implies A^D Ax = \lambda A^D x \\
&\implies AA^D x = \lambda A^D x \\
&\implies A^D AA^D x = \lambda A^D A^D x \\
&\implies A^D x = \lambda A^D A^D x \\
&\implies y = \lambda A^D y \text{ tel que } y = A^D x, \\
&\implies A^D y = \frac{1}{\lambda} y.
\end{aligned}$$

□

**Lemme 3.4.** Soit  $A$  une algèbre, l'inverse au sens de Drazin de tout élément  $a \in A$  est unique.

*Démonstration.* Soit  $a \in A$  et  $b$  une inverse de Drazin de  $a$  d'indice  $k_1$ ,  $c$  une inverse de Drazin de  $a$  d'indice  $k_2$ . Si  $k_1 < k_2$ , alors  $b$  est d'indice  $k_1$ .

On a

$$\begin{aligned}
b &= bab = b(ab)^{k_2} = b^{k_2+1} a^{k_2} \\
&= b^{k_2+1} a^{k_2} ca = b^{k_2+1} a^{k_2} (ca)^{k_2+1} = b^{k_2+1} a^{2k_2+1} c^{k_2+1} ..
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c &= cac \\
&= (ca)^{k_2} ca^{k_2} c^{k_2+1} = a^{k_2} (ba) c^{k_2+1} \\
&= a^{k_2} (ba)^{k_2} c^{k_2+1} = b^{k_2+1} a^{2k_2+1} c^{k_2+1}.
\end{aligned}$$

Donc  $b = c$ , alors l'inverse de Drazin de  $a$  est unique. □

### 3.5 L'inverse de Drazin d'une matrice carrée

**Théorème 3.9.** [8] Pour toute matrice carrée  $A$ , il existe une matrice unique  $X$  de telle sorte que

$$(1) \quad A^k = A^{k+1} X,$$

pour  $k$  un entier positif.

$$(2) \quad X^2 A = X,$$

$$(3) \quad AX = XA.$$

*Démonstration.* Si  $A = 0$  est la matrice nulle, alors  $A$  et  $X = 0$  satisfont (1), (2) et (3).

Supposons  $A \neq 0$  est toute matrice  $n \times n$ . Alors il existe  $n^2$  scalaires des  $d_1, \dots, d_t$ , pas tous nuls, de telle sorte que

$$\sum_{i=1}^t d_i A^i = 0,$$

où  $t \leq n^2 + 1$ , or le  $A^i$  peut être considéré comme vecteurs avec  $n^2$  éléments, et  $d_k$  le premier coefficient non nul. On peut écrire

$$(4) \quad A^k = A^{k+1}U$$

où

$$U = -\frac{1}{d_k} \left( \sum_{i=1+k}^t d_i A^{i-k-1} \right)$$

où  $U$  est un polynôme en  $A$ ,  $U$  et  $A$  commute. En outre, la multiplication de deux côtés de (4) par  $AU$  donne

$$A^k = A^{k+2}U^2 = A^{k+3}U^3 = \dots,$$

Et ainsi

$$(5) \quad A^k = A^{k+m}U^m$$

pour tout  $m \geq 1$ . Soit  $X = A^k U^{k+1}$ . Ensuite, pour ce choix de  $X$ ,

$$A^{k+1}X = A^{2k+1}U^{k+1} = A^k$$

et

$$X^2 A = A^k U^{k+1} A^k U^{k+1} A = (A^{2k+1} U^{k+1}) U^{k+1} = A^k U^{k+1} = X,$$

par utilisation de (5).

En outre,  $X$  et  $A$  commute  $U$  et  $A$  aussi. Ainsi, les conditions (1), (2) et (3) sont valables

pour cette  $X$ .

Pour montrer que  $X$  est unique, supposons que  $Y$  est également un solution de (1), (2) et (3), où  $X$  correspond à un  $k_1$  d'exposant et  $Y$  correspondent à un exposant dans  $k_2$  (1). Laissez  $\hat{y} = \max(k_1, k_2)$ . Ensuite, il suit en utilisant (1), (2), (3) et (5) :

$$\begin{aligned} X &= X^2A = X^3A^2 = \dots = X^{\hat{y}+1}A^{\hat{y}} = X^{\hat{y}+1}A^{\hat{y}+1}Y \\ &= XAY = \dots = XA^{\hat{y}+1}Y^{\hat{y}+1} = A^{\hat{y}}Y^{\hat{y}+1} \\ &= \dots = AY^2 = Y^2A = Y \end{aligned}$$

Ce qui nous donne l'unicité.

Nous allons appeler la matrice unique de  $X$  dans le théorème (3.4) l'inverse de Drazin de  $A$  et on écrit  $X = A^D$ , on appelle aussi le plus petit entier  $k$  l'indice de  $A$ .

Ce  $A^D$  est une inverse généralisée de  $A$  est apparente par notant que (1) est vérifiée avec  $k = 1$  lorsque  $X = A^{-1}$  existe et également (2) et (3) tenir. Observez, par ailleurs, que dans générale (1) peut être réécrite comme

$$(6) \quad A^k X A = A^k$$

et (2) devient  $XAX = X$ , par utilisation de (3), de sorte que l'équation définissant dans Théorème (3.1.1) peuvent être considérées comme une alternative à celles utilisées pour  $A^+$  dans laquelle  $AXA = A$  est remplacée par (6), (2) reste inchangée, et

$$(1^*) \quad (AX)^H = AX,$$

et

$$(2^*) \quad (XA)^H = XA$$

sont remplacées par la condition de (3) que  $A$  et  $X$ .

Comme on le verra ci-après la démonstration du lemme (3.4), factorisations de rang plein de  $A$  peuvent être utilisés efficacement dans la construction de  $A^D$ , □

**Lemme 3.5.** *on a  $B, C \in \mathbb{C}^{r \times r}$  Pour toute factorisation*

$$A = BC, A^D = B[(CB)D]^2 C.$$

*Démonstration.* On remarque que pour toute matrice carrée  $A$  et  $k$  entiers positifs, nous devons homme  $m$  et  $n$ ,  $(A^D)^m = A^n = (A^D)^{m-n}$  si  $m > n$  et  $A^{m+n}(A^D)^n = A^m$  si  $m \geq k$  et  $k =$  indice  $A$ .

Notons  $k$  le plus grand de l'indice de  $BC$  et de la Indice de  $CB$ .

$$\begin{aligned}
A^D &= (BC)^D = (BC)^{k+1} [(BC)^D]^{k+2} = B(CB)^k C [(BC)^D]^{k+2} \\
&= B [(CB)^D]^{k+2} (CB)^{2k+2} C [(BC)^D]^{k+2} \\
&= B [(CB)^D]^{k+2} C (BC)^{2k+2} [(BC)^D]^{k+2} \\
&= B [(CB)^D]^{k+2} C (BC)^k \\
&= B [(CB)^D]^{k+2} (CB)^k C \\
&= B [(CB)^D]^2 C.
\end{aligned}$$

Supposons maintenant que  $A = B_1 C_1$  est une factorisation de rang plein où

$$\text{rang}(A) = r_1.$$

Formant la matrice  $C_1 B_1$ , de  $r_2$  dans  $r_1$  puis soit  $C_1 B_1$  est inversible, ou  $C_1 B_1 = 0$ , et le  $\text{rang}(C_1 B_1) = r_2$  où  $0 < r_2 < r_1$ .

Dans le premier cas, avec  $C_1 B_1$  inversible,  $(C_1 B_1)^D = (C_1 B_1)^{-1}$  sorte que

$$A^D = B_1 (C_1 B_1)^{-2} C_1,$$

par le lemme (3.5), où

$$(C_1 B_1)^D = [(C_1 B_1)^{-1}]^2.$$

D'autre part, si  $C_1 B_1 = 0$  alors  $(C_1 B_1)^D = 0$  et donc  $A^D = 0$  de nouveau en utilisant le lemme (3.5).

Enfin, si  $\text{rang}(C_1 B_1) = r_2$ ,  $0 < r_2 < r_1$ , alors pour tout factorisation préservant le rang  $C_1 B_1 = B_2 C_2$ , nous avons

$$(C_1 B_1)^D = B_2 [(C_2 B_2)^D]^2 C_2$$

de sorte que  $A^D$  le même chose dans le lemme (3.5) devient

$$A^D = B_1 B_2 [(C_2 B_2)^D]^3 C_2 C_1.$$

Le même argument vaut maintenant  $C_2 B_2$  qui est, soit  $C_2 B_2$  est non singulière et

$$[(C_2 B_2)^D]^3 = (C_2 B_2)^{-3},$$

ou  $C_2 B_2 = 0$  et donc  $A^D = 0$ , ou le rang  $(C_1 B_1) = r_3$  où  $0 < r_3 < r_2$  et  $C_2 B_2 = B_3 C_3$  le même rang factorisation et complet à Lemme (3.5) qui peut être appliquée.

$$\text{rang}(B_i C_i) \geq \text{rang}(C_i B_i) = \text{rang}(B_{i+1} C_{i+1}), i = 1, 2, \dots,$$

alors soit  $B_m C_m = 0$  pour un indice  $m$ , et ainsi de  $A^D = 0$ , ou  $\text{rang}(B_m C_m) = \text{rang}(C_m B_m) > 0$  pour un indice  $m$ , dans ce cas,

$$(B_m C_m)^D = B_m (C_m B_m)^{-2} C_m.$$

Et ainsi

$$(7) \quad A^D = B_1 B_2 \dots B_m (C_m B_m)^{-m-1} C_m C_{m-1} \dots C_1$$

dans le lemme (3.5). Observer, par ailleurs, que  $A = B_1 C_1$ ,

$$A_2 = B_1 C_1 B_1 C_1 = B_1 B_2 C_2 C_1 \dots, A^m = B_1 B_2 \dots B_m C_m C_{m-1} \dots C_1$$

et

$$(8) \quad A^{m+1} = B_1 B_2 \dots B_m (C_m B_m) C_m C_{m-1} \dots C_1$$

nous avons  $A^m = A^{m+1} = 0$ , où  $A^D$  former dans (7), chaque  $B_i$  a rang colonne plein et chaque  $C_i$  a rang ligne,

$$B_{m-1} + \dots B_1 + A^m C_1 + \dots C_{m-1} + = B_m C_m$$

et

$$B_m + \dots B_1 + A^{m+1} C_1 + \dots C_m + = C_m B_m.$$

Par conséquent, dans les deux cas, nous avons  $\text{rang}(A^m) = \text{rang}(A^{m+1})$ .

En outre, il suit dans les deux cas que (1) est valable pour  $k = m$  et ne tient pas pour tout  $k < m$ .

Cela revient à dire,  $k$  dans (1) est la plus petite entier positif tel que  $A^k$  et  $A^{k+1}$  avoir le même rang. □

**Exemple 3.1.** Si  $A$  est une matrice singulière

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

On écrit comme la factorisation de rang plein

$$A = B_1 C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

alors

$$C_1 B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

est une matrice non singulière, alors  $A$  possède un indice , et

$$A^D = B_1(C_1 B_1)^{-2} C_1 = \frac{1}{64} \begin{pmatrix} 6 & -26 & 30 \\ 3 & 35 & -33 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour le cas spécial des matrices avec un indice nous avons :

$$(9) \quad AA^D A = A, A^D A A^D = A^D, AA^D = A^D A,$$

$$\text{pour que (10) } (A^D)^D = A$$

Par la dualité dans les rôles de  $A$  et  $A^D$ . Inversement, si (10) tient, puis les premières et dernières relations dans (9) sont définies dans les relations (2) et (3) est appliqué à  $(A^D)^D$  et  $A^D$ , et la deuxième relation dans ( est simplement (2) pour  $A^D$  et  $A$ . par conséquent, (10) détient si et seulement si  $A$  possède un indice.

Dans ce cas particulier, l'inverse de Drazin de  $A$  est un inverse du groupe de  $A$  et il en résulte du lemme (3.5) que pour toute factorisation de rang plein  $A = BC$ ,

$$A^\# = B(CB)^{-2}C.$$

## 3.6 Extension au matrices rectangulaires

L'inverse de Drazin une matrice  $A$ , tel que défini dans Théorème(3.4), existe seulement si  $A$  est carrée, et une question évidente est de savoir comment cette définition peut être étendue à des matrices rectangulaires.

Une solution à ce problème est d'observer que, si  $B$  est un  $m \times n$  avec  $m > n$ , par exemple, alors  $B$  peut être augmentée par des colonnes  $m - n$  de zéros pour former une matrice carrée  $A$ .

Maintenant formant  $A^D$  nous pourrait alors prendre ces colonnes de chose qui correspondent à l'emplacement des colonnes de  $B$  en  $A$  comme une définition de " L'inverse de Drazin " de  $B$ .

Comme on le voit dans l'exemple suivant, cependant, la difficulté de cette approche est qu'il existe des  $\binom{m}{m-n}$  comme matrices  $A$ , obtenu en considérant tous possible arrangements de  $n$  colonnes de  $B$  (prises sans permutations) et les  $m - n$  colonnes de zéros, et qui annonce peut être différent dans chaque cas.

**Exemple 3.2.** Si  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  et

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

puis

$$(A_1)^D = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 0 & 10 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}, (A_2)^D = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}, (A_3)^D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -13 & 0 \end{bmatrix}$$

sont obtenues en appliquant le lemme (3.4) pour les matrices  $A_i = BC_i$  où

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observez dans l'exemple (3.1) que les colonnes non nulles de chaque matrice  $(A_i)^D$  correspond au produit  $B[(C_i B)^D]^2$ . En conséquence, en utilisant les colonnes non nulles de  $(A_i)^D$  pour définir le "Inverse de Drazin" de  $B$  implique que la matrice résultante est une fonction de  $C_i$ .

Que ces matrices sont déterminés de façon unique par un ensemble d'équations définissant et sont des cas particuliers d'une classe de inverses généralisé es qui peut être construit pour toute matrice  $B$  sera du théorème (3.5).

**Théorème 3.10.** [15] Pour toute matrice  $B$  ( $m \times n$ ) et toute matrice  $W$  ( $n \times m$ ), il existe une matrice  $X$  unique, de telle sorte que

$$(1.1) \quad (BW)^k = (BW)^{k+1}XW, \text{ pour } k \text{ un entier positif.}$$

$$(1.2) \quad XWBWX = X.$$

$$(1.3) \quad BWX = XWB.$$

*Démonstration.* Soit  $X = [B(WB)^D]^2$ , avec

$$XW = [B(WB)^D]^2 W = (BW)^D$$

par le lemme (3.4), (1.1) détient avec  $k$  l'indice de  $BW$ . Aussi,

$$XWBWX = [B(WB)^D]^2 WBWB [(WB)^D]^2 = B [(WB)^D]^2 = X$$

et

$$BW X = BW B [(WB)^D]^2 WB = XWB,$$

de telle sorte que (1.2) et (1.3) détiennent.

Pour " montrer que  $X$  est unique, nous pouvons procéder comme dans la preuve du théorème(3.4).

Ainsi, supposons  $X_1$  et  $X_2$  sont des solutions de (1.1), (1.2) et (1.3) correspondant à des nombres entiers positifs  $k_1$  et  $k_2$  respectivement, dans (1.1).

Puis, avec  $k = \max(k_1, k_2)$  il en résulte que

$$\begin{aligned} X_1 &= X_1 W B W X_1 = B W X_1 W X_1 = (B W)^2 (X_1 W)^2 X_1 \\ &= \dots = (B W)^k (X_1 W)^k X_1 = (B W)^{k+1} + X_2 W (X_1 W)^k X_1 \\ &= X_2 (W B)^{k+1} W (X_1 W)^k X_1 \\ &= X_2 W B W (B W)^k (X_1 W)^k X_1 \\ &= X_2 W B W X_1. \end{aligned}$$

où suite d'une manière similaire avec

$$\begin{aligned} X_2 &= X_2 W B W X_2 = X_2 W X_2 W B = X_2 (W X_2)^2 (W B)^2 \\ &= \dots = X_2 (W X_2)^{k+1} (W B)^{k+1} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} X_2 W B W X_1 &= X_2 (W X_2)^{k+1} (W B)^{k+1} W B W X_1 \\ &= X_2 (W X_2)^{k+1} W (B W)^{k+1} X_1 W B \\ &= X_2 (W X_2)^{k+1} W (B W)^k B \\ &= X_2 (W X_2)^{k+1} (W B)^{k+1} = X_2 \end{aligned}$$

Par conséquent, avec  $X_1 = X_2$  la solution de (1.1), (1.2) et (1.3) est unique.

La matrice unique  $X$ , dans le théorème (3.1.2) sera appelé l'inverse de Drazin de  $B$   $W$ -pondéré et sera écrit en que  $X = (B W)^D$

Le choix de la nomenclature  $W$ -pondéré inverse de Drazin  $B$  est facilement visible en notant que, avec

$$(B W)^D = B [(W B)^D]^2,$$

puis  $(B W)^D = B^D$  lorsque  $B$  est carré et  $W$  est la matrice d'identité.

En outre, plus généralement observer que, avec la bande  $B$  et  $(BW)^D$  de la même taille et avec  $W$  et  $WBW$  la taille de la  $B^H$ , la relation

$$BW(B_W)^D = (B_W)^DWB$$

dans (1.3) peut être considéré comme une généralisation de la condition de commutativité, et

$$(B_W)^DWBW(B_W)^D = (B_W)^D$$

dans (1.2) est analogue à (2) lorsqu'il est écrit sous la forme  $XAX = X$ .

Si  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$  est la matrice dans l'exemple (3.1), et

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

puis

$$(B_{W_1})^D = \frac{1}{(91)^2} \begin{bmatrix} 169 & 339 \\ 60 & 169 \\ 87 & 169 \end{bmatrix}, (B_{W_2})^D = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

□

# Chapitre 4

## solvabilité des équation différentielles en utilisant l'inverse de Drazin

### 4.1 Calcul de l'inverse de Drazin en utilisant les valeurs propres

Dans cette section nous montrons que l'inverse de Drazin peut être calculé si les valeurs propres sont connues. Supposons que zéro est une valeur propre de multiplicité  $l$ , et les autres valeurs propres distinctes de zéro  $\lambda_i$  sont multiplicités  $n_i, i = 1, 2, \dots, r$ . Alors, si  $m = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ , Nous avons  $m + l = n$ . Considérons le polynôme caractéristique de degré  $n - 1$  est  $p(\lambda) = \lambda^l(\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_{r-1}\lambda^{r-1})(1)$

pour déterminer les coefficients de  $c(\lambda)$ . Nous résolvons les  $m$  équations suivantes.

$$\frac{1}{\lambda_i} = p(\lambda_i) - \frac{1}{\lambda_i^2} = p'(\lambda_i)(2) \frac{(-1)^{n_i-1}(n_i-1)!}{(\lambda_i)^{n_i}} = p^{(n_i-1)}(\lambda_i). i = 1, 2, \dots, m$$

**Théorème 4.1.** Si  $p(\lambda)$  est défini par (1) et (2), alors  $A^D = p(A)$ .

**Exemple 4.1.** soit  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de  $A$  sont  $\{0, 0, 1, 1\}$ . D'après le Théorème (4.1),  $A^D$  est donné par

$$A^D = A^2 (\alpha_0 I + \alpha_1 A),$$

Où  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  les solutions de

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha_0 + \alpha_1, \\ -1 &= 2\alpha_0 + 3\alpha_1. \end{aligned}$$

Donc  $\alpha_0 = 4$ ,  $\alpha_1 = -3$  et nous avons

$$A^D = A^2(4I - 3A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Exemple 4.2.**  $c(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + 5\lambda + 1)$  l'équation caractéristique de  $C$  est  $\lambda^2 + 5\lambda + 1 = 0$ ,  
 $1 = -\lambda^2 - 5\lambda$ ,

$$\lambda^{-1} = -\lambda - 5, \lambda^{-2} = -5\lambda^{-1} - 1 = -5(-\lambda - 5) - 1 = 5\lambda + 24$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^{-3} = 5 + 24\lambda^{-1} \\ &= 5 + 24(-\lambda - 5) \\ &= -24\lambda - 115 \end{aligned}$$

$$A^D = A^2 p(A) = A^2(-24A - 115).$$

**Exemple 4.3.**  $c(\lambda) = \lambda^2(\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1)$ , puisque  $\lambda \neq 1$   $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = \frac{\lambda^5 - 1}{\lambda - 1}$   
donc  $\lambda^5 = 1$ ,  $\lambda^{-5} = 1$ ,  $\rho(\lambda) = \lambda^{-3} = \lambda^2$ ,  $A^D = A^2 \rho(A) = A^4$ .

**Exemple 4.4.**  $c(\lambda) = \lambda^4(\lambda - 1)^3$   $\rho(\lambda) = \lambda^{-5} = [1 + (\lambda - 1)]^{-5}$  tel que  $(\lambda - 1)^3 = 0$   
En utilisant le théorème binomial, nous avons  $\rho(\lambda) = 1 - 5(\lambda - 1) + 15(\lambda - 1)^2$ .  
 $A^D = A^4 \rho(A) = A^4 [1 - 5(A - 1) + 15(A - 1)^2]$ .

## 4.2 Calcul de l'inverse de Drazin en utilisant la trace

Soit  $A, B$  des matrices  $n \times n$  des nombres complexes, soit  $f$  une fonction vectorielle de variable réelle  $t$ ,  $A$  et  $B$  peuvent tous deux être singulière rang  $(A) = 1$  et  $Tr(A) \neq 0$ , nous avons étudié l'équation

$$Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$$

En utilisant l'inverse de Drazin qui est une nouvelle matrice  $K$  tel que  $K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

Dans cette section nous obtenus ont une nouvelle forme pour la solution générale du système différentielle à coefficients constants singuliers.

Au début on présente une définition, théorème et lemme .

**Définition 4.2.1.** Soit  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , la trace de  $A$  est noté par  $tr(A)$  et donné par

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad \text{tel que}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

**Théorème 4.2.** [11] Si  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\text{rang}(A) = 1$ , alors  $A^D = \frac{A}{\text{Tra}(A)^2}$ , si  $\text{Tr}(A) \neq 0$ ,

alors

$$AA^D - I = K \quad \text{où}$$

$$K = \begin{pmatrix} \frac{-(\text{tra}(A)-a_{11})}{\text{tra}(A)} & \cdots & \frac{a_{1n}}{\text{tra}(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{\text{tra}(A)} & \cdots & \frac{-\text{tra}(A)-(a_{nn})}{\text{tra}(A)} \end{pmatrix}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} AA^D - K &= A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a_{11}}{\text{tra}(A)^2} & \cdots & \frac{a_{1n}}{\text{tra}(A)^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{\text{tra}(A)^2} & \cdots & \frac{a_{nn}}{\text{tra}(A)^2} \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \frac{-(\text{tra}(A)-a_{11})}{\text{tra}(A)} & \cdots & \frac{a_{1n}}{\text{tra}(A)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{\text{tra}(A)} & \cdots & \frac{-\text{tra}(A)-(a_{nn})}{\text{tra}(A)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

**Exemple 4.5.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{Tra}(A) = 8$$

$$A^D = \frac{1}{8^2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AA^D - K = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{-7}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{-5}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver la formule de la solution du système différentielle linéaire, nous introduisons la notation suivante

$\tilde{A}_\lambda = (\lambda A + B)^{-1} A$ ,  $\tilde{B}_\lambda = (\lambda A + B)^{-1} B$ ,  $\tilde{f}_\lambda = (\lambda A + B)^{-1} f$ , où  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $(\lambda A + B)^{-1}$  existe.

### 4.3 Solution de l'équation $x' + Ax = f$

Soit l'équation différentielle  $(E)x' + Ax = f$ , La solution générale est donnée par

$$x = e^{-At} \left( \int e^{At} f(t) dt \right),$$

Si  $A$  est une matrice inversible, alors  $\int e^{-At} dt = A^{-1} e^{-At} + G$ ,  $G$  est une matrice de  $n \times n$ , si  $A$  une matrice non inversible, pour étudier le problème nous utilisons les théorèmes suivantes.

**Théorème 4.3.** [4] Si  $A$  une matrice singulière  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , d'indice  $k$ ,  $A^D$  est l'inverse de Drazin de  $A$ , alors,

$$\int e^{At} dt = A^D e^{At} + (1 - AA^D) t \left[ I + \frac{A}{2} t + \frac{A^2}{3} t^2 + \frac{A^3}{4!} t^3 + \dots + \frac{A^{k-1}}{k!} t^{k-1} \right] + G(\times).$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( A^D e^{At} + (1 - AA^D) t \left[ I + \frac{A}{2} t + \frac{A^2}{3} t^2 + \frac{A^3}{4!} t^3 + \dots + \frac{A^{k-1}}{k!} t^{k-1} \right] + G. \right) \\ &= A^D e^{At} + (1 - AA^D) \left[ I + \frac{A}{2} t + \frac{A^2}{3} t^2 + \frac{A^3}{4!} t^3 + \dots + \frac{A^{k-1}}{k!} t^{k-1} \right] \\ &= \left[ I + \frac{A}{2} t + \frac{A^2}{3} t^2 + \frac{A^3}{4!} t^3 + \dots + \frac{A^{k-1}}{k!} t^{k-1} \right] = e^{At}. \end{aligned}$$

**Corollaire 4.1.** Si  $f(t)$  est un vecteur constant (i.e.,  $f(t) = b$ ), alors l'équation  $x' + Ax = f$  admet une solution de la forme.

$$x = \left\{ A^D + (1 - AA^D) t \left[ I + \frac{A}{2}t + \frac{A^2}{3}t^2 + \frac{A^3}{4!}t^3 + \dots + \frac{A^{k-1}}{k!}t^{k-1} \right] \right\} b.$$

*Démonstration.* La solution de l'équation  $x' + Ax = b$  est donnée par

$$x = e^{-At} \left( \int e^{-At} dt \right) b = e^{-At} \left( A^D e^{At} + (1 - AA^D) t \left[ I + \frac{A}{2}t + \frac{A^2}{3}t^2 + \frac{A^3}{4!}t^3 + \dots + \frac{A^{k-1}}{k!}t^{k-1} \right] \right)$$

□

## 4.4 L'équation différentielle $Ax' + Bx = f$

**Théorème 4.4.** [34] Soient  $A$  et  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , deux matrices singulières, telles que  $AB = BA$ , alors  $y = e^{-A^D B t} AA^D q$  est une solution de l'équation  $Ax' + Bx = 0$  pour tout vecteur  $q$ .

*Démonstration.* Soit  $y = e^{-A^D B t} AA^D q$ , alors

$$\begin{aligned} Ay' &= -AA^D B e^{-A^D B t} AA^D q \\ &= -B e^{-A^D B t} AA^D AA^D q \\ &= -B e^{-A^D B t} AA^D q = -By. \end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.2.** Si  $AB = BA$  et  $A^D A f = f$ , alors

$$y = e^{-A^D B t} \int e^{A^D B t} f(t) dt$$

est une solution particulière de l'équation  $Ax' + Bx = f$ .

*Démonstration.* Soit  $y = e^{-A^D B t} \int e^{A^D B t} f(t) dt$  et  $A^D A f = f$ , alors,

$$\begin{aligned} Ay' &= -AA^D B e^{-A^D B t} \int e^{A^D B t} f(t) dt + f(t) \\ &= -B e^{-A^D B t} \int e^{A^D B t} AA^D f(t) dt + f(t) \\ &= -B e^{-A^D B t} \int e^{A^D B t} f(t) dt + f(t) \\ &= -By + f(t). \end{aligned}$$

□

[34] Soient  $AB = BA$  et  $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ , alors

$$(I - AA^D)BB^D = (I - AA^D).$$

**Lemme 4.1.**

*Démonstration.* Supposons que  $AB = BA$  et  $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ , soit  $A = T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \tilde{N} \end{bmatrix} T^{-1}$  tel que  $J$  est inversible,  $\tilde{N}^k = 0$ . Soit  $B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} T^{-1}$ .  
Si  $AB = BA$ , alors

$$\begin{aligned} AB &= T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \tilde{N} \end{bmatrix} T^{-1} T \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \tilde{N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{bmatrix} JB_1 & JB_2 \\ \tilde{N}B_3 & \tilde{N}B_4 \end{bmatrix} T^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= T \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} T^{-1} T \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & \tilde{N} \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{bmatrix} B_1J & B_2J \\ B_3\tilde{N} & B_4\tilde{N} \end{bmatrix} T^{-1}. \end{aligned}$$

Si  $AB = BA$ , on obtient  $B_1J = JB_1$ ,  $\tilde{N}B_4 = B_4\tilde{N}$ ,  $JB_2 = B_2\tilde{N}$  et  $\tilde{N}B_3 = B_3J$ .

( $\div$ ) si ( $\div$ ) est satisfait, alors  $J^k B_2 = B_2 \tilde{N}^k$ , on trouve  $B_2 = 0$  aussi  $J^k$  est inversible.

aussi  $B_3 J^k = \tilde{N}^k B_3$ , on trouve  $B_3 = 0$ .  $BB^D = T \begin{bmatrix} B_1 B_1^D & 0 \\ 0 & B_4 B_4^D \end{bmatrix} T^{-1}$  et

$(I - AA^D) = T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} T^{-1}$  Si  $B_4$  est inversible, alors  $B_4^D = B_4^{-1}$ , donc

$$\begin{aligned} (I - AA^D)BB^D &= T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} T^{-1} T \begin{bmatrix} B_1 B_1^D & 0 \\ 0 & B_4 B_4^D \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} T^{-1} = (I - AA^D). \end{aligned}$$

Si  $\tilde{N} = 0$ ,  $N(A) \cap N(B) = \{0\}$  implique  $N(B_4) = \{0\}$ . Si  $\tilde{N} \neq 0$ , supposons qu'il existe  $v \neq 0$  tel que  $v \in N(B_4)$ . Alors  $\tilde{N}^p v \in N(B_4)$  pour tout entier  $p \geq 0$   $\tilde{N}B_4 = B_4\tilde{N}$  et

comme  $\tilde{N}$  est nilpotent il existe un entier  $l$  non négatif tel que  $\tilde{N}^l \neq 0$ , mais  $\tilde{N}^{l+1} = 0$ .  
Ce qui implique  $0 \neq \tilde{N}v \in N(A) \cap N(B)$ , donc contradiction.

Donc  $N(B_4) = \{0\}$ , et alors  $B_4$  est inversible.  $\square$

**Théorème 4.5.** [34] Si  $AB = BA$ , alors  $y = e^{-A^D B t} A A^D q$ ,  $q \in \mathbb{C}^n$  est une solution général de l'équation  $Ax' + Bx = 0$ .

*Démonstration.* D'après le théorème précédent, on a  $y = e^{-A^D B t} A A^D q$  pour tout  $q$ , est une solution générale de l'équation  $Ax' + Bx = 0$ . Nous démontrerons que solution  $y$  satisfait l'existence  $b'$  un vecteur  $q$ . Si  $y$  est une solution, alors (6), (7) sont satisfaisants pour  $f = 0$ . Comme  $N(A) \cap N(B) = \{0\}$  donc  $B$  est un et un seul range de  $N$  (d'après lemme 4.1). Alors  $0 = N^k x_2' + N^{k-1} B x_2 = N^{k-1} B x_2$ . donc  $N^{k-1} x_2 = 0$  implique  $0 = N^{k-1} x_2' = B N^{k-2} x_2$ . on continue dans le même manières, on trouve  $B x_2 = 0$ ,  $N x_2 = 0$  et  $(I - A A^D) x_2 = 0$ .

D'où  $x_2 = 0$  et  $x = x_1$  d'après (7), nous obtenons  $x_1 = e^{-C^D B t} q = e^{-A^D B t} q$  pour tout  $q$  donc  $x = x_1 = A A^D x_1 = e^{-A^D B t} A A^D q$  pour tout  $q$ .  $\square$

**Théorème 4.6.** [15] Si  $AB = BA$  et  $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ . Soit  $k = \text{ind}(A)$ . Si  $f \in C^{(n)}$ , alors l'équation  $Ax' + Bx = f$  admet une solution particulière,  $x = A^D e^{-A^D B t} \int_{\alpha}^t e^{A^D B s} f(s) ds + (I - A A^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (A B^D)^n B^D f^{(n)}$ . telle que  $\alpha$  est arbitraire.

*Démonstration.* Supposons que  $AB = BA$  et  $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ . Soit

$x_1 = A^D e^{-A^D B t} \int_{\alpha}^t e^{A^D B s} f(s) ds$ ,  $x_2 = (I - A A^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (A B^D)^n B^D f^{(n)}$  alors on peut démontrer que

$$A x_1' + B x_1 = (A A^D) f(1) \quad (1)$$

$$A x_2' + B x_2 = (I - A A^D) f(2) \quad (2)$$

on a  $x = x_1 + x_2$ , premièrement nous démontrons (1)

$$\begin{aligned} A x_2' &= A \left( -A^D B x_1 + A^D e^{-A^D B t} e^{A^D B t} f(t) \right) \\ &= -A A^D B x_1 + A A^D f \\ &= -B x_1 + A A^D f. \end{aligned}$$

Nous démontrons (2)

$$\begin{aligned}
Ax'_2 &= A(I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n B^D f^{(n+1)} \\
&= (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^{n+1} f^{(n+1)} \\
&= (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-2} (-1)^n (AB^D)^{n+1} f^{(n+1)} \\
&= (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n f^{(n)} \\
&= (I - AA^D) B \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n B^D f^{(n)} \\
&= (I - AA^D) B (x_2 - B^D f) \\
&= (I - AA^D) Bx_2 + (I - AA^D) BB^D f \\
&= (I - AA^D) Bx_2 + (I - AA^D) f \\
&= -Bx_2 + (I - AA^D) f.
\end{aligned}$$

□

**Théorème 4.7.** [15] On suppose que  $AB = BA$  et  $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ . Alors la solution générale de l'équation  $Ax' + Bx = f$ , est donnée par

$$x = e^{-A^D Bt} AA^D q + A^D e^{-A^D Bt} \int_0^t e^{A^D Bs} f(s) ds + (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n B^D f^{(n)},$$

telle que  $q$  est un vecteur constant,  $k = \text{ind}(A)$  et  $a$  est arbitraire.

**Corollaire 4.3.** Si  $AB = BA$  et  $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ . Alors il existe une solution

$$x(0) = x_0 \text{ de l'équation } Ax' + Bx = f, \text{ si et seulement si}$$

$$x_0 = A^D Aq + (I - AA^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (AB^D)^n f^{(n)}(0),$$

pour tout vecteur  $q$  et  $x_0$  est unique. L'équation  $Ax' + Bx = f$ . Dans cette section nous étudions les conditions nécessaires et suffisantes de l'unicité de la solution de l'équation  $Ax' + Bx = f$ .

**Lemme 4.2.** On suppose  $c$  tel que  $(cA + B)$  est inversible. Alors  $(cA + B)^{-1}A$  et  $(cA + B)^{-1}B$  sont commutes.

*Démonstration.* On suppose qu'un nombre  $c$  tel que  $(cA + B)$  est inversible. Alors  $c[(cA + B)^{-1}A] + [(cA + B)^{-1}B] = I$ . □

**Théorème 4.8.** [11] Si  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  et  $\text{rang}(A) = 1$ , la solution générale du système des équations différentielles linéaires

$$Ax'(t) + Bx(t) = f(t).$$

Est donné par

$$y(t) = e^{+\tilde{A}^D \tilde{B}^D t} (I + K) q.$$

**Théorème 4.9.** [11] L'équation  $Ax' + Bx = 0$ , admet une solution unique avec une condition initiale si et seulement s'il existe un nombre  $c$  tel que  $(cA + B)$  est inversible.

*Démonstration.* On suppose que  $(cA + B)$  est inversible. Alors  $N(A) \cap N(B) = \{0\}$ , donne  $N(A) = N((cA + B)^{-1}A)$  et  $N(B) = N((cA + B)^{-1}B)$ .

Donc  $(cA + B)^{-1}Ax' + (cA + B)^{-1}Bx = 0$ , admet une unique solution d'après le théorème, il est clair que l'équation  $(cA + B)^{-1}Ax' + (cA + B)^{-1}Bx = 0$  est équivalent  $Ax' + Bx = 0$ . Inversement, supposons que  $(cA + B)$  n'est pas inversible pour tout nombre  $c$ . Alors pour tout  $c$  il existe un vecteur  $\varphi_c$  tel que  $(cA + B)\varphi_c = 0$ .

Donc  $x_c = e^{tc}\varphi_c$  est une solution de l'équation  $Ax' + Bx = 0$ .

pour que  $Ax'_c = Ace^{tc}\varphi_c = -e^{tc}B\varphi_c = -Bx_c$ . □

**Théorème 4.10.** supposons que  $Ax' + Bx = 0$  admet une solution unique vérifie la condition initiale, soit  $c$  un nombre tel que  $(cA + B)$  est inversible on définit  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  par  $\tilde{A} = (cA + B)^{-1}A$ ,  $\tilde{B} = (cA + B)^{-1}B$ ,  $\tilde{f}_c = (cA + B)^{-1}f_c$ .

Soit  $k = \text{ind}(\tilde{A})$ . Alors  $Ax' + Bx = f$ ,  $x(0) = x_0$  une solution si et seulement si  $x_0$  est définie par  $x_0 = \tilde{A}\tilde{A}^D q + (1 - e\tilde{A}\tilde{A}^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (\tilde{A}\tilde{B}^D)^n \tilde{B}^D \tilde{f}_c^{(n)}(0)$ ,

pour tout vecteur  $q$ . et une solution particulier  $x = \tilde{A}^D e^{-\tilde{A}^D \tilde{B}^D t} \int_0^t e^{\tilde{A}^D \tilde{B}^D s} \tilde{B}^D \tilde{f}(s) ds + (1 - \tilde{A}\tilde{A}^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (\tilde{A}\tilde{B}^D)^n \tilde{B}^D \tilde{f}^{(n)}$ , tel que  $a$  est arbitraire. La solution générale de l'équation  $Ax' + Bx = f$ , est  $x = e^{-\tilde{A}^D \tilde{B}^D t} \tilde{A}^D q + \tilde{A}^D e^{-\tilde{A}^D \tilde{B}^D t} \int_0^t e^{\tilde{A}^D \tilde{B}^D s} \tilde{B}^D \tilde{f}(s) ds + (1 - \tilde{A}\tilde{A}^D) \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n (\tilde{A}\tilde{B}^D)^n \tilde{B}^D \tilde{f}^{(n)}$ , tel que  $q \in \mathbb{C}^n$ .

**Théorème 4.11.** Soient  $A, B$  deux matrices dans  $\mathbb{C}^{n \times n}$  tel que  $(cA + B)^{-1}$  existe pour tout  $c$ . Alors  $\tilde{A}_c^D \tilde{A}_c$ ,  $\tilde{A}_c^D \tilde{B}_c$ ,  $\tilde{A}_c^D (cA + B)^{-1}$ ,  $\tilde{B}_c^D (cA + B)^{-1}$ ,  $\tilde{A}_c^D \tilde{B}_c^D$  et  $\text{ind}(\tilde{A}_c)$  sont indépendants des  $c$ .

*Démonstration.* Puisque  $\tilde{A}_c \tilde{B}_c = \tilde{B}_c \tilde{A}_c$ , il est clair que  $\tilde{A}_c^D (cA + B)^{-1}$ ,  $\tilde{B}_c^D (cA + B)^{-1}$  et  $\text{ind}(\tilde{A}_c)$  sont indépendants des  $c$ . Supposons que  $(\lambda A + B)$ ,  $(cA + B)$  sont inversibles.

Alors

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_\lambda^D (\lambda A + B)^{-1} &= [(\lambda A + B)^{-1} A]^D (\lambda A + B)^{-1} \\
&= [(\lambda A + B)^{-1} (cA + B) (cA + B)^{-1} A]^D (\lambda A + B)^{-1} \\
&= \left[ ((\lambda A + B) (cA + B)^{-1})^{-1} (cA + B)^{-1} A \right]^D (\lambda A + B)^{-1} \\
&= \left[ ((\lambda A + B) (cA + B)^{-1})^{-1} \tilde{A}_c \right]^D (\lambda A + B)^{-1} \\
&= \tilde{A}_c^D \left[ (\lambda (cA + B)^{-1} A + (cA + B)^{-1} B)^{-1} \right]^D (\lambda A + B)^{-1} \\
&= \tilde{A}_c^D (\lambda (cA + B)^{-1} A + (cA + B)^{-1} B) (\lambda A + B)^{-1} \\
&= \tilde{A}_c^D (cA + B)^{-1} (\lambda A + B) (\lambda A + B)^{-1} \\
&= \tilde{A}_c^D (cA + B)^{-1}
\end{aligned}$$

Donc  $\tilde{A}_c^D (cA + B)^{-1}$  est indépendant de  $c$ . par la même manière nous démontrons que  $\tilde{B}_c^D (cA + B)^{-1}$  est indépendant de  $c$ . Pour tout entier  $k$

$$\begin{aligned}
rang \left( \tilde{A}_\lambda^k \right) &= rang \left[ \left( \lambda \tilde{A}_c + \tilde{B}_c \right)^{-1} \tilde{A}_c \right]^k \\
&= rang \left[ \left( \lambda \tilde{A}_c + \tilde{B}_c \right)^{-k} \tilde{A}_c^k \right] \\
&= rang \left( \tilde{A}_c^k \right)
\end{aligned}$$

donc  $ind \left( \tilde{A}_c \right)$  est indépendant de  $c$ . □

**Exemple 4.6.** *Considérons l'équation différentielle homogène  $Ax' + Bx = 0$ , tel que*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -27 & -22 & -17 \\ 18 & 14 & 10 \end{bmatrix} \quad A \text{ et } B \text{ sont singulières et non}$$

*commutatives. Puisque  $A+B$  est inversible, on pose  $c = 1$  et on multiplie  $Ax' + Bx = 0$  par  $(A + B)^{-1}$  on trouve*

$$\tilde{A}x' + \tilde{B}x = 0 \text{ tel que } \tilde{A} = (A + B)^{-1}A, \tilde{B} = (A + B)^{-1}B$$

$$\tilde{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3 & -5 & -4 \\ 6 & 5 & -2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{B} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ -6 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \text{ il existe un unique solution si}$$

*et seulement si le vecteur initial  $x(0)$  satisfaisant  $(I - \tilde{A} \tilde{A}^D)x(0) = 0$  les valeurs propres de  $\tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont  $(0, 1, 3)$  et  $(0, 1, -2)$  respectivement. On trouve*

$$\tilde{A}^D = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} -27 & -41 & -28 \\ 54 & 77 & 48 \\ -27 & -34 & -14 \end{bmatrix}$$

et  $\tilde{B} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 24 & 19 & 14 \\ -24 & -16 & -8 \\ 12 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ . Par utilisation de l'équation  $(I - \tilde{A}\tilde{A}^D)x(0) = 0$  on

peut calculer  $9x_1(0) + 7x_2(0) + 5x_3(0) = 0$  puisque, les valeurs propres de  $-\tilde{A}^D\tilde{B}$  sont  $\{0, 0, \frac{2}{3}\}$ . Alors  $x(t) = e^{-\tilde{A}^D\tilde{B}t}x(0) = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 18 & 1 - e^{\frac{2}{3}t} & 2(1 - e^{\frac{2}{3}t}) \\ 0 & 28 - 8e^{\frac{2}{3}t} & 16(1 - e^{\frac{2}{3}t}) \\ 0 & 13(e^{\frac{2}{3}t} - 1) & 26e^{\frac{2}{3}t} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix}$

tel que  $x_1(0)$ ,  $x_2(0)$ ,  $x_3(0)$  vérifiant  $9x_1(0) + 7x_2(0) + 5x_3(0) = 0$ . maintenant

considérons l'équation non homogène suivante  $Ax' + Bx = b$ , tel que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -27 & -22 & -17 \\ 18 & 14 & 10 \end{bmatrix} \text{ et } b \text{ est un vecteur constant défini}$$

par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ si } s_k \text{ multiplions } Ax' + Bx = b, \text{ par } (A + B)^{-1}, \text{ on obtient } \tilde{A}x' + \tilde{B}x = \tilde{b}, \text{ tel}$$

que  $\tilde{A} = (A + B)^{-1}A$ ,  $\tilde{B} = (A + B)^{-1}B$ ,  $\tilde{b} = (A + B)^{-1}b = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -11 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix}$ . Si le vecteur

initial satisfait la condition pour l'existence de la solution unique. d'après le théorème 4.11 la solution est donnée par la formule  $x(t) = e^{-\tilde{A}^D\tilde{B}t}\tilde{A}\tilde{A}^Dq + \tilde{A}^De^{-\tilde{A}^D\tilde{B}t}\int_0^t e^{\tilde{A}^D\tilde{B}s}\tilde{b}ds + (1 - \tilde{A}\tilde{A}^D)\tilde{B}^D\tilde{b}$ . Dans ce cas  $\tilde{A}$  est d'indice 1. Si on pose  $t = 0$  on trouve  $(1 - \tilde{A}\tilde{A}^D)(x(0) - \tilde{B}^D\tilde{b}) = 0$  qui est une condition nécessaire et suffisante de l'existence de la solution initiale  $x(0)$ .

On calcule (31)  $9x_1(0) + 7x_2(0) + 5x_3(0) + 1 = 0$ . Puisque  $b$  est constant. L'intégral (30) peut être évaluée à l'aide de la formule (4). puisque  $\tilde{A}^D\tilde{B}$ ,  $\tilde{A}$ ,  $\tilde{B}$  sont d'indices. La formule (4) est simplifiée  $\int_0^t e^{\tilde{A}^D\tilde{B}s}\tilde{b}ds = \left\{ \tilde{A}^D\tilde{B}(e^{\tilde{A}^D\tilde{B}t} - I) + (I - \tilde{A}\tilde{A}^D\tilde{B}^D) \right\} \tilde{b}$ . évaluer (34) donne

$$x(t) = e^{\tilde{A}^D\tilde{B}t} \left( x(0) - \tilde{B}^D\tilde{b} \right) + \tilde{B}^D\tilde{b} + \tilde{A}^D \left( 1 - \tilde{B}\tilde{B}^D \right) t\tilde{b}.$$

En substituant (33) en (30) et en simplifiant, nous trouvons que la solution finale est

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\frac{1}{18}e^{\frac{2}{3}t}(x_2(0) + 2x_3(0)) - \frac{13}{18}x_2(0) - \frac{4}{9}x_3(0) - \frac{2}{9} - t, \\ x_2(t) &= -\frac{4}{9}e^{\frac{2}{3}t}(x_2(0) + 2x_3(0)) - \frac{13}{9}x_2(0) + \frac{8}{9}x_3(0) + \frac{2}{9} + 2t, \\ x_3(t) &= -\frac{13}{18}e^{\frac{2}{3}t}(x_2(0) + 2x_3(0)) - \frac{13}{18}x_2(0) - \frac{4}{3}x_3(0) - \frac{10}{9} - t, \end{aligned}$$

Où

$$x_1(0)$$

*a* été éliminée en utilisant (35).

# Bibliographie

- [1] A.Belhadi. A, Mansour and A, selmi, Some Drazin invertible elements in Banach algebras and applications to operator equations solutions, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, N 42-July 2019 (to appear).
- [2] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville, Generalized Inverses, theory and application, Springer-Verlag New York, Inc.(2003) .
- [3] R. Bhaskara, C. Meyer, The Theory of Generalized inverse over commutative Rings. London and New York. 2002.
- [4] R. Bhatia, Matrix Analysis, springer-Verlag, New York, (1997), graduate texts in Mathematics.
- [5] B.A.Brnes, Common operator property of the linear operators RS and SR, Pro. Amer.
- [6] S.R.Caradus, Operator theory of the pseudo inverse.Queen's papers in pure and Appl.Math. No.38(1974) .
- [7] G. Cassier, Generalized Toeplitz operators, restriction to invariant subspaces and similarity problems, Journal of operator theory, 53 : 01(2005), p. 49-89.
- [8] N. Castro-Gonzalez, JJ. Koliha, New additive results for the g-Drazin inverse. Proc Roy Soc Edinburgh 2004 ; 134 : 1085-1097.
- [9] M. Catral, D. D. Olesky And P. Van. Den. Driessche. Block Representations of the Drazin inverse of Bibaritime Matrix.
- [10] J. Chen, H. Zhu, Drazin Invertibility of Product and Difference of Idempotents in a Ring. Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 210096, China.
- [11] S.L.Compell and C.D.Meyer, Generalzed Inverses of Linear Transformations. Pitman. London.1979 ; Dover Publications, Inc. NewYork.1991.

- [12] S. L. Campbell, C. D. Meyer, N. J. Rose, Applications of the Drazin Inverse to Linear Systems of Differential Equations with Singular Constant Coefficients. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 31(3), 411-425. doi :10.1137/0131035 (1976).
- [13] DS. Cvetkovic-Ilic, Liu XJ and YM. Wei, Some additive results for the generalized Drazin inverse in a Banach algebra. *Elect J Linear Algebra* 2011 ; 22 : 1049-1058.
- [14] CY. Deng, Generalized Drazin inverses of anti-triangular block matrices. *J Math Anal Appl* 2010 ; 368 : 1-8.
- [15] CY. Deng, Cvetkovic-Ilic DS, YM. Wei. Some results on the generalized Drazin inverse of operator matrices. *Linear Multilinear Algebra* 2010 ; 58 : 503-521.
- [16] CY. Deng, YM. Wei, Perturbation of the generalized Drazin inverse. *Electron J Linear Algebra* 2010 ; 21 : 85-97.
- [17] CY. Deng, YM. Wei, New additive results for the generalized Drazin inverse. *J Math Anal Appl* 2010 ; 370 : 313-321
- [18] D. S. Djordjevic, D. S. (2007). Explicit solution of the operator equation  $A^*X+X^*A=B$ . *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 200(2), 701-704. doi :10.1016/j.cam.2006.01.023
- [19] DS. Djordjevic, YM. Wei. Additive results for the generalized Drazin inverse. *J Aust Math Soc* 2002 ; 73 : 115-125.
- [20] R.G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert spaces, *proc. Amer. Math.Soc.*, 17 (1966), 413-415.
- [21] R. G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert spaces. *pro. Amer. Math. Soc*, 17(1966), 413-415.
- [22] M.P. Drazin, Pseudo inverse in associative rings and semi groups, *Amer. Math. Monthly* 65 (1958), 506-514.
- [23] E. Heinz, Beitrage zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Ann.* 123 (1951) 415-438.
- [24] (5)H.Heuser, *Funktional analysis*, 2nd ed. Teubner.1986.
- [25] Y. Jiang. Y. Wen. And Q. Zeng. Generalizations of Cline's Formula For Three Generalized inverses. *Revista De La Union Matematica Argentina*. vol. 58. No, 1, 2017. page 127-134.
- [26] E. Kaniuth, *A Course in Commutative Banach Algebras*. New York, NY, USA : Springer-Verlag, 2009.

- [27] J.J. Koliha, A generalized Drazin inverse. *Glasgow Math J* 1996 ; 38 : 367-381.
- [28] MZ. Kolundzija, D. Masic, DS. Djordjevic, Further results on the generalized Drazin inverse of block matrices in Banach algebras. *Bull Malays Math Sci Soc* 2015 ; 38 : 483-498.
- [29] YH. Liao, JL. Chen, J. Cui, Cline's formula for the generalized Drazin inverse. *Bull Malays Math Sci Soc* 2014 ; 37 : 37-42. Solvabilité de certaines classes d'équations d'opérateurs dans les espaces de Banach 99
- [30] H.F. Lian and Q.P. Zeng, An extension of Cline's formula for a generalized Drazin inverse. *Turkish. J. Math.*40(2016).161-165.MR 3438793.
- [31] XJ. Liu, SX. Wu, YM. Yu, On the Drazin inverse of the sum of two matrices. *J Appl Math* 2011, doi :10.1155/2011/831892.
- [32] S. Mecheri. A. Mansour. On the operator equation  $AXB-XD=E$ . *Lobachevskii journal of mathematics*, vol. 30. N3 (2009). 224-228.
- [33] D. Masic, A note on Cline's formula for the generalized Drazin inverse. *Linear Multilinear Algebra* 2015 ; 63 : 1106-1110.
- [34] D. Masic, DS. Djordjevic, Formula for the generalized Drazin inverse of a block matrix in terms of Banachiewicz-Schur forms. *J Math Anal Appl* 2014 ; 413 : 114-120.
- [35] D. Masic, DS. Djordjevic, Several expressions for the generalized Drazin inverse of a block matrix in a Banach algebra. *Appl Math Comput* 2013 ; 220 : 374-381.
- [36] M.Z.Nashed, *Generalized Inverses, Theory and application*, Academic Press, Ny(1976) .
- [37] J. R. Nicolas, A Note On Computing the Drazin Inverse, *Linear Algebra And its Applications* 15, 95-98, (1978).
- [38] M. Nikuie ; M. K. Mirnia ; Y. Mahmoudi ; Some results about the index of matrix and Drazin inverse. *Mathematical Sciences*. vol. 4. No. 3 (2010) 283- 294.
- [39] R. Penrose. J., A. Todd. *A Generalized Inverse For Matrices*. St. John's. College. Cambredge.(1954). 406-413.
- [40] V. Rakocevic, A note on a theorem of I. Vidav, *Publ. Inst. Math. (Beograd)* 68(82) (2000), 105-107.
- [41] M. Rosenblum. On operator equation  $AX-XB=Q$ . *Duke. Math.J* 23(1956). 263-269

- [42] Christoph Schmoeger, On the operator equations  $ABA = A^2$  and  $BAB = B^2$  Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série, tome 78(92) (2005), 127-133.
- [43] A. Schweinsberg. The Operator equation  $AX-XB=C$  with normal  $A$  and  $B$ . Pac.J. Math. 102(1982), 447.
- [44] I. Vidav, On idempotent operators in a Hilbert space Publ.Inst. Math.(Beograd)4(18) (1964) , 157-163.
- [45] Z. Wang, J.L. Chen, Pseudo Drazin inverses in associative rings and Banach algebras. Linear Algebra Appl 2012. 437.1332-1345. 100 A. Belhadi
- [46] G. Weiss. The Fuglede commutativity theorem module the Hilbert-schmidt classe. II J.. Operator theory 5(1981). 3-16.
- [47] H.Zakraoui and S.Guedjiba, On algebraic properties of generalized inverses of matrices, International journal of Algebra. 2(2008) , 633-643.
- [48] Q.P. Zeng, and H.J. Zhong. New results on common properties of products  $AC$  and  $BA$ , J. Math. Anal. Appl. 427(2015),830-840. MR 3323010.
- [49] . Zhu, J.L. Chen, P. Patrcio, Representations for the pseudo Drazin inverse of elements in a Banach algebra. Taiwanese J Math 2015 ; 19 : 349-362
- [50] G.F. Zhuang, J.L. Chen, D.S. Cvetkovic-Ilic and Y.M. Wei. Additive property of Drazin invertibility of elements in a ring. Linear Multilinear Algebra, 60 :901-910, 2012.
- [51] H. Zou, Di. Masic, J. Chen, Generalized Drazin invertibility of the product and sum of two elements in a Banach algebra and its applications. Turk J Math(2017) 41 : 548 - 563. doi :10.3906/mat-1605-8.
- [52] **H. Bomaza, B. colas**, S. collion, M. dellinger, Z. faget, L. lazzarini, F. schffhauer ; Mathématique L3 Analyse, Cours complet avec 600 tests et exercices corrigés ; PERON Education, 10 Juin 2009.

## ملخص

من المعروف أن المصفوفة أو المؤثر تقبل معكوسا اذا كانت سريعة ومحددها غير معدوم. ومع ذلك في العديد من مجالات الرياضيات التطبيقية نحن بحاجة الى بعض أنواع المعكوسات لمصفوفات شاذة او محددها غير معدوم او حتى مستطيلة.

ونخص بالدراسة حلول المعادلات التفاضلية باستعمال معكوس درازا للمصفوفات الشاذة.

## الكلمات المفتاحية

المؤثرات الخطية والمحدودة، معكوس معمم، معكوس درازا، المعادلات التفاضلية.

---

## Résumé

Il est bien connu qu'une matrice (ou un opérateur) a une inverse, si elle est carré et de déterminant est non nul. Cependant, dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées on a besoin de quelques types d'inverser particules d'une matrice singulière or déterminant est non nul ou même rectangulaires.

Et beaucoup plus on s'intéressés à l'étude la solvabilité des équations différentielles en utilisant L'inverse de **Drazin** d'une matrice singulière.

## Mots clés

Les opérateurs linéaires et bornés, l'inverse généralisé l'inverse de **Drazin**, les équations différentielles.

---

## Abstract

It is well known that a matrix (or an operator) accepts an inverse, if it's fast and it's determinant non-zero, However in many fields of applied mathematics we need some types of inversions for irregular or finites matrices that are not absent or even rectangular.

And we specify in our study solutions of differential equations using an inverse of **Drazin** of a singular matrix.

## Key words

Linear and finite operators, generalized inverse, **Drazin** inverse, differentials equations.