

UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES
Département D'informatique

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE



Une introduction à l'estimation d'erreur à posteriori pour les méthodes des éléments finis

Domaine : Mathématiques et Informatiques

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Fondamentales et Appliqué

Présenté par :

MOUME SAFA

Devant le jury:

Président : Doudi Nadjat

Rapporteurs : Habita Khaled

Examineurs : Beggas Mohammed

Prof. université -D'EL OUED

Prof. université - D'EL OUED

Prof. université -D'EL OUED

Dédicace

Nous dédions le fruit de nos efforts à ceux qui ont beaucoup souffert pour nous rendre joyeux et heureux .

A ceux qui se sont sacrifiés pour nous mettre sur la voie de connaissance et de savoir :

Nos tendres parents .

Nous dédions également ce travail à ceux qui nous ont permis d'accéder à ce cher succès :

Nos professeurs à qui , nous exprimons nos sincères reconnaissances et considérations .

Nous dédions ,enfin, ce grand labeur scientifique,à ceux qui nous ont côtoyées durant le cycle universitaire :

Nos chers amis

Moume Safa



Remerciements

Je remercie d'abord et avant tout le bon Dieu qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Je remercie mon encadreur Mr Habita Khaled Professeur à l'université de Al oued qui a accepté de prendre en charge mon travail de mémoire de magister.

A tous les enseignants qui m'ont accordé leurs temps, leur éclairage scientifique et leur soutien moral durant ma carrière académique

A messieurs les membres du jury qui ont accepté de disposer de leurs temps pour juger ce travail.

J'adresse toute mon affection à ma famille et mon parents, et en particulier à mon frère Mostafa et mon seurs qui ont toujours fait beaucoup pour moi que je puisse réaliser ce travail.merci pour votre soutien et vos encouragements durant toutes ces années. Je tiens également à remercier sans oublier toute ma grande famille petits et grands tout on espérant du dieu qu'il nous unisse pour le bien .

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

Notations générales	v
Introduction	vi
1 Principes fondamentaux	1
1.1 Introduction	1
1.2 Rappel d'analyse fonctionnelle	2
1.2.1 Quelques espaces fonctionnels	2
1.2.2 Espaces de Sobolev et normes	4
1.2.3 Quelques inégalités utilisées	6
1.2.4 Formule de Green	7
1.2.5 Théorème de Lax-Milgram	7
1.3 Notations et propriétés de méthode des éléments finis dans $2D$	8
1.3.1 Propriétés d'approximation	10
1.3.2 Méthode de Galerkin	10
1.4 Principales caractéristiques de posteriori erreur estimation	10
1.4.1 Un opérateur de quasi-interpolation	10
1.4.2 Les fonctions de Bulle	11
1.4.3 Les sauts des fonctions continues par morceaux	12
1.5 Conclusion	12
2 Étude d'existence et l'unicité par FV et résolution numérique par MEF	13
2.1 Introduction	13
2.2 Le problème du modèle :	13
2.3 Formulation variationnelle	14
2.4 Discrétisation par l'élément finis du problème (2.1)	16
2.4.1 Partitions d'éléments finis	18
2.4.2 Espace d'éléments finis	19
2.4.3 Les éléments de référence	19
2.4.4 Les fonctions de base	20
2.4.5 Discrétisation de la formulation faible	25
2.4.6 Approximation interne générale	26
2.4.7 Estimateur d'erreur	27

2.5	Conclusion	29
-----	----------------------	----

3

Estimations résiduelles d’erreur à posteriori

30

3.1	Introduction :	30
3.2	L’équivalence de l’erreur et du résidu	31
3.3	Orthogonalité de Galerkin	31
3.4	Une représentation L^2 du résidu	32
3.5	Une borne supérieure sur l’erreur	32
3.6	Une borne inférieure sur l’erreur	34
3.6.1	Estimation de résidu intérieur " r "	35
3.6.2	Estimation de résidu bord " R "	37
3.6.3	Preuve des bords bilatéraux sur l’erreur	39
3.7	Estimations d’erreur à posteriori	40
3.8	Conclusion	41

Bibliographie

43

TABLE DES FIGURES

2.1	Diamètre diam (K) et rondeur $\rho(K)$ d'un triangle K	17
2.2	La fonction de base φ_i en deux dimensions, la fonction tente, la fonction a la valeur 1 uniquement sur un seul nœud x_j et disparaît sur tous les autres nœuds.	21
2.3	Les fonctions de bulle intérieure et de bord sur un patch d'éléments triangulaires . .	23

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Notation fondamental dans τ	9
2.1	Paramètre des formes de τ	19

NOTATIONS GÉNÉRALES

$\forall$	: pour tout
$\mathbb{N}$	: ensemble des nombres naturels
$\mathbb{R}^N$	: ensemble des nombres réels de dimension N
Ω	: un ouvert dans $\mathbb{R}^N$, borné
$ \cdot $	: valeur absolue ou semi-norme
$\ v\ _2$	: norme de v dans $\mathbf{L}^2$
$ v _{1,\beta,K}$	: semi-norme Sobolev de v dans $W^{1,\beta}(K)$
$\ v\ _{m,K}$	: norme Sobolev de v dans $H^1(K)$
$\ v\ _{1,\beta,K}$	: norme Sobolev de v dans $W^{1,\beta}(K)$
$\ v\ $	: norme de v dans l'espace où est posé le problème, par exemple 1 : $\ v\ = \ v\ _{1,\Omega}$
∇u	: gradient de u tel qu'égal $\sum_{i=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$
Δu	: $\text{div } \nabla$, laplace opérateur
Γ	: limite de Ω censé être lipshitz-continué
Γ_D	: partie de Dirichlet dans Ω , supposé non-vide
Γ_N	: partie de Neumann dans Ω , peut être vide
$\partial\Omega$	: Γ ou $\bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_D$
τ	: partition de Ω
$\mathbf{L}_{loc}^1$	: espace des fonctions intégrable localement
$\partial^\alpha u$	: dérivée partielle d'ordre α
$\max$	: maximale
$\sup$	: supérieures
$\inf$	: inférieures
$\dim$	: dimension
P	: ensemble polynomial
$p, q, r, \dots$	: fonctions scalaires avec des valeurs $\mathbb{R}$
$u, v, w, \dots$	: champs vectoriels avec des valeurs $\mathbb{R}^N$

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans la solution numérique de problèmes pratiques de physique ou d'ingénierie telle que, par exemple, la dynamique des fluides de calcul, l'élasticité ou la simulation de dispositifs à semi-conducteurs, on rencontre souvent la difficulté que la précision globale de l'approximation numérique soit détériorée par des singularités locales telles que, par exemple, des singularités résultant de coins rentrants, couches intérieures ou bords, ou fronts pointus comme des chocs. Un remède évident est d'affiner la discrétisation près des régions critiques, c'est-à-dire de placer plus de points de grille où la solution est moins régulière. La question est alors de savoir comment identifier ces régions et comment obtenir un bon équilibre entre les régions raffinées et non raffinées de sorte que la précision globale soit optimale.

Un autre problème étroitement lié consiste à obtenir des estimations fiables de la précision de la solution numérique calculée. Estimations d'erreur a priori telles que fournies par exemple par l'analyse d'erreur standard pour les méthodes des éléments finis ou par différences finies sont souvent insuffisantes, car elles ne fournissent que des informations sur le comportement d'erreur asymptotique et nécessitent des hypothèses de régularité sur la solution qui ne sont pas satisfaites en présence de singularités comme décrit ci-dessus.

Ces considérations montrent clairement la nécessité d'un estimateur d'erreur qui peut à posteriori être extrait de la solution numérique calculée et des données du problème. Bien entendu, calcul l'estimation d'erreur à posteriori devrait être beaucoup moins coûteux que le calcul de la solution numérique. De plus, l'estimateur d'erreur doit être local et doit fournir des limites supérieures et inférieures fiables pour l'erreur vraie dans une norme spécifiée par l'utilisateur. Dans ce contexte, il convient de noter que les bords supérieurs globaux sont suffisantes pour obtenir une solution numérique avec une précision inférieure à une tolérance prescrite. Bords inférieurs locaux, cependant, il est nécessaire de s'assurer que la grille est correctement affinée afin que l'on obtienne une solution numérique avec une tolérance prescrite en utilisant un nombre (presque) minimal de points de grille. Pour accomplir cette tâche, il ne suffit pas que l'estimateur d'erreur à posteriori ait le même comportement asymptotique que les estimations d'erreur a priori standard.

Dans ce travail, nous proposons et étudions un estimateur d'erreur à posteriori de type résiduel pour

l'approximation linéaire par les éléments finis du **problème linéaire non-homogène mixtes de Dirichlet et Neumann**.

Dans le premier chapitre, nous allons discuter quelques concepts et propriétés liés à la méthode des éléments finis et résiduelle estimation à posteriori erreur que nous mentionnons : méthode de Galerkin, opérateur de quasi-interpolation, fonctions de bulle, ...etc.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution réel par la formulation variationnelle et la solution approxima par l'élément finis en $2D$.

Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré pour étude l'estimation résiduelle, il s'agit de normes L^2 pondérées des résidus d'éléments et de bords. Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré pour étude l'estimation résiduelle, il s'agit de normes L^2 pondérées des résidus d'éléments et de bords. Le dernier chapitre de ce mémoire est consacré pour étude l'estimation résiduelle, il s'agit de normes L^2 pondérées des résidus d'éléments et de bords. Ces termes sont obtenus par une intégration par partie par élément. Pour le problème du modèle, l'opérateur de trace est la dérivée normale. Les facteurs de pondération sont des puissances appropriées du maillage local. Les pouvoirs reflètent les différentes exigences de régularité pour les solutions fortes et faibles. Jusqu'à des constantes multiplicatives, les estimations résiduelles fournissent des bornes supérieures et inférieures pour l'erreur de la solution discrète calculée. Les bornes supérieures sont globales par rapport au domaine de calcul. Les limites inférieures sont locales en ce que l'indicateur d'erreur attribué à un élément est limité par l'erreur sur l'élément donné et les voisins adjacents. La nature différente des limites supérieures et inférieures a une raison structurelle. Les bornes supérieures sont basées sur la stabilité du problème variationnelle et utilisent l'inverse de l'opérateur différentiel qui est un opérateur global. En revanche, les bornes inférieures sont basées sur la continuité du problème variationnelle et utilisent l'opérateur différentiel lui-même qui est un opérateur local. Finira ce travail par une conclusion générale et quelques perspectives de travail.

1 PRINCIPES FONDAMENTAUX

1.1	Intoduction	1
1.2	Rappel d'analyse fonctionnelle	2
1.2.1	Quelques espaces fonctionnels	2
1.2.2	Espaces de Sobolev et normes	4
1.2.3	Quelques inégalités utilisées	6
1.2.4	Formule de Green	7
1.2.5	Théorème de Lax-Milgram	7
1.3	Notations et propriétés de méthode des éléments finis dans $2D$	8
1.3.1	Propriétés d'approximation	10
1.3.2	Méthode de Galerkin	10
1.4	Principales caractéristiques de posteriori erreur estimation	10
1.4.1	Un opérateur de quasi-interpolation	10
1.4.2	Les fonctions de Bulle	11
1.4.3	Les sauts des fonctions continues par morceaux	12
1.5	Conclusion	12

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons des concepts de base sur les espaces utilisés dans les chapitres 2, 3 et nous présenterons aussi des propriétés et notations importantes pour la méthode des éléments finis dans dimension deux et résiduelles estime a posteriori erreur estimation.

1.2 Rappel d'analyse fonctionnelle

1.2.1 Quelques espaces fonctionnels

Espaces des fonctions continues

On définit la fonction suffisamment lisse v et $\alpha \in \mathbb{N}^N$ un multi-index, nous désignons ses dérivées partielles

$$D^\alpha v = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_N} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \quad (1.1)$$

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{R}^N$ et on définit quelque espace utilisé comme $C(\overline{\Omega})$ est un espace de Banach avec la norme

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)| : x \in \Omega\} \equiv \max\{|v(x)| : x \in \overline{\Omega}\}.$$

Plus généralement, pour un entier non-négatif m , nous définissons :

$$C^m(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) : D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{avec} \quad |\alpha| \leq m\};$$

Est un espace de Banach avec la norme

$$\|v\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Nous avons également.

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{m=0}^\infty C^m(\overline{\Omega}) \equiv \{v \in C(\overline{\Omega}) : v \in C^m(\overline{\Omega}) \quad \forall m = 0, 1, \dots\};$$

En définis par toute fonction v sur Ω son support

$$\text{supp } v = \overline{\{x \in \Omega : v(x) \neq 0\}}$$

Tel que

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } v \subset \subset \Omega\}$$

Remarque 1.1 La condition " $\text{supp } \varphi \subset \Omega$ " est une condition non-triviale, car " $\text{supp } \varphi$ " est fermée et Ω est ouverte. Les fonctions satisfaisant cette condition disparaissent à la frontière de Ω avec toutes leurs dérivées.

Espaces Lebesgue

Soit Ω dans $\mathbb{R}^n$, pour $p \in [1, +\infty)$ on a

$L^p(\Omega)$ est un espace des fonctions linéaire et mesurables

$v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est constitué par toutes les fonctions mesurables essentiellement bornées

$v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf_{\mu(\Omega')=0} \sup_{x \in \Omega \setminus \Omega'} |v(x)| < \infty$$

Étant donné deux fonctions $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$, le théorème de Gauss pour les intégrales donne pour chaque multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ l'identité

$$\int_{\Omega} D^\alpha \varphi \psi dx = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \int_{\Omega} \varphi D^\alpha \psi.$$

Cette identité motive la définition des dérivées faibles :

Nous avons donné deux fonctions intégrables $\varphi, \psi \in L^1(\Omega)$ et un multi-index $\alpha \in \mathbb{N}^n$, ψ si équivalent l'identité :

$$\int_{\Omega} \psi \rho dx = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \int_{\Omega} \varphi D^\alpha \rho$$

Vaut pour toutes les fonctions $\rho \in C_0^\infty(\Omega)$. Dans ce cas, nous écrivons.

$$\psi = D^\alpha \varphi.$$

Remarque 1.2 Pour les fonctions lisses, les notions de dérivées classiques et faibles coïncident.

Cependant, il existe des fonctions qui ne sont pas différentiables au sens classique, mais qui ont une dérivée faible.

Définition 1.2.1 Soit Ω un ensemble ouvert non-vidé dans $\mathbb{R}^n$ $v, w \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors w est appelé α^{me} dérivé faible de v si

$$\int_{\Omega} v(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.2)$$

D'autre par, on définit la 1^{re} dérivée partielle faible de w_i par rapport à x_i comme

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} w_i \varphi(x), \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

1.2.2 Espaces de Sobolev et normes

L'espace de Sobolev $w^{m,p}(\Omega)$ est un tout l'ensemble des fonctions $v \in \mathbf{L}_{loc}^1(\Omega)$, pour chaque multi-indice α et $|\alpha| \leq m$ telle que $D^\alpha v$ existe et $D^\alpha v \in \mathbf{L}^p(\Omega)$.

Pour $p = 2$ on a $H^m(\Omega) \equiv w^{m,2}(\Omega)$.

Espace H^m

$$H^m(\Omega) = \{\varphi \in \mathbf{L}^2(\Omega) : D^\alpha \varphi \in \mathbf{L}^2(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ avec } \alpha_1 + \dots + \alpha_N \leq m\}.$$

On voit que $H^0 = \mathbf{L}^2(\Omega)$.

$H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire et la norme induite :

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_0 \quad \text{et} \quad \|u\|_m = \sqrt{(u, u)_m}$$

$$|\varphi|_m = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N, \alpha_1 + \dots + \alpha_N = m} \|D^\alpha \varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|\varphi\|_m = \left\{ \sum_{l=0}^m |\varphi|_l^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^N, \alpha_1 + \dots + \alpha_N = m} \|D^\alpha \varphi\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.2.2 Espaces H_0^m :

On définit H_0^m comme l'adhérence dans H^m de $\mathbf{D}(\Omega)$, ensemble des fonctions de classe C^∞ et à support compact dans Ω . plus exactement et de manière générale, $W_0^{m,p}$ est l'adhérence de $\mathbf{D}(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}$. La définition ci-dessus correspond donc au cas $p = 2$.

Espace H^1

$$H^1(\Omega) = \{u \in \mathbf{L}^2(\Omega), \forall i = 1, \dots, n; \frac{\partial u}{\partial x_i} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\}$$

Muni du produit scalaire :

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} \left(uv + \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$$

Espace H_0^1

Par définition de $H_0^1(\Omega)$, et en prenant en compte une remarque précédente :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

On voit que sur cet espace, la condition de Dirichlet est satisfaite automatiquement, sur tout le $\Gamma = \partial\Omega$. La frontière Γ est généralement partitionnée en deux sous-frontières Γ_D et Γ_N sur les quelles satisfait les conditions de Dirichlet et Neumann respectivement : $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$,

$$H_D^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}.$$

et on à

$$H_0^1(\Omega) \subset H_D^1(\Omega) \subset H^1(\Omega).$$

Théorème 1.2.1 Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière " suffisamment régulière " alors on a l'inclusion : $H^m(\Omega) \subset C^K(\overline{\Omega})$ pour $K < m - \frac{n}{2}$

Trace

On définit l'application

$$\gamma_0 : u \in C^\infty(\overline{\Omega}) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega).$$

L'application γ_0 se prolonge de manière unique, et de façon continue à l'espace $H^1(\Omega)$, on appelle l'opérateur γ_0 , " l'application trace " .

L'opérateur γ_0 n'est pas surjectif sur $\mathbf{L}^2(\partial\Omega)$, l'image $\gamma_0(H^1(\Omega))$ est notée $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

On étend ainsi l'application γ_0 à

$$\gamma_0 : u \in H^1(\Omega) \mapsto \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

De sorte que :

1. L'application γ_0 est surjective.
2. Le noyau de γ_0 est l'espace $H_0^1(\Omega)$.

On définit alors

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{g \in \mathbf{L}^2(\partial\Omega), \text{ tel que } \exists v \in H^1(\Omega), \gamma_0(v) = g \text{ sur } \partial\Omega\};$$

En d'autres termes

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) = \{g \in \mathbf{L}^2(\Gamma) : g = v|_\Gamma \text{ pour certains } v \in H^1(\Omega)\}.$$

Muni de la norme

$$\|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} = \inf_{v \in H^1(\Omega) \text{ } \gamma_0(v)=g; } \|v\|_{1,\Omega}$$

Autre définition

$$\|g\|_{\frac{1}{2},\Gamma} = \inf \{ \|v\|_1 : v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = g \}.$$

Notez que tous les dérivés doivent être compris au sens faible.

Théorème 1.2.2 (Théorème de Trace)

Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 , on définit l'application trace γ_1

$$H^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbf{L}^2(\partial\Omega) \cap C(\overline{\partial\Omega})$$

$$v \mapsto \gamma_1(v) = \frac{\partial v}{\partial n}|_{\partial\Omega};$$

Avec $\frac{\partial v}{\partial n} = \nabla u \cdot n$. Cette application γ_1 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\partial\Omega)$. En particulier, il existe un constant $C > 0$ tel que, pour toute fonction $v \in H^2(\Omega)$, on a :

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{\mathbf{L}^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

1.2.3 Quelques inégalités utilisées

Inégalité de Hölder

Soit (p, q) un couple de $[1, +\infty]^2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. L'application suivant :

$$\mathbf{L}^p(\Omega) \times \mathbf{L}^q(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(u, v) \mapsto \int_{\Omega} u(x)v(x)dx.$$

Est bilinéaire continue à valeurs dans $\mathbf{L}^1(\Omega)$

$$\|uv\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \leq \|u\|_{\mathbf{L}^p(\Omega)} \|v\|_{\mathbf{L}^q(\Omega)};$$

Inégalité de Cauchy Schwartz

Soit H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ et $\|\cdot\|_H$ une norme induite du produit scalaire, $\forall v, u \in H$ on a

$$|\langle u, v \rangle_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H.$$

Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ouvert borné, alors il existe $c_\Omega = C^{te}(\Omega) > 0$ tel que

$$\|u\|_2 \leq c_\Omega \|\nabla u\|_2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

Donc $\|\nabla u\|_2$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1}$. Autrement dit, $\int_\Omega \nabla u \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_2$.

Inégalités de Friedrichs

Les inégalités suivantes sont fondamentales :

$$\|u\|_2 \leq c'_\Omega |u| \quad \forall u \in H_D^1(\Omega). \quad (1.3)$$

Le constant c'_Ω dépend du domaine Ω et sont proportionnelles à son diamètre.

1.2.4 Formule de Green

Sois Ω un ouvert borné régulier de classe C^2 et $\partial\Omega$ Lipschitzienne. Si $u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x) dx = - \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v(\sigma) d\sigma.$$

Ou, $n = (n_i)_{1 \leq i \leq n}$ est le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ d'érigé vers l'extérieur.

1.2.5 Théorème de Lax-Milgram

Nous décrivons une théorie abstraite pour obtenir l'existence et l'unicité de la solution d'une formulation variationnelle dans un espace de Hilbert V . Rappelons qu'un espace de Hilbert est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire, noté $\langle x, y \rangle$, qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire, notée $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. (un espace vectoriel normé est complet si toute suite de Cauchy est une suite convergente dont la limite appartient à cet espace). Nous considérons une formulation variationnelle du type : trouver $u \in V$ tel que $a(u, v) = L(v)$ pour toute fonction $v \in V$. Les hypothèses sur a et L sont :

- 1** $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur V , c'est-à-dire que $v \rightarrow L(v)$ est linéaire de V dans $\mathbb{R}$ il existe $C > 0$ tel que :

$$|L(v)| \leq C \|v\| \quad \text{pour tout } v \in V;$$

2 $a(.,.)$ est une forme bilinéaire sur V , c'est-à-dire que $u \rightarrow a(u, v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $v \in V$, et $v \rightarrow a(u, v)$ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ pour tout $u \in V$;

3 $a(.,.)$ est continue, c'est-à-dire qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$|a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad u, v \in V ;$$

4 $a(.,.)$ est coercive (ou elliptique), c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ tel que :

$$a(u, u) \geq C \|u\|^2 \text{ pour tout } u \in V.$$

Théorème 1.2.3 (Théorème de Lax-Milgram)

Soit V un espace de Hilbert réel, $L(.)$ une forme linéaire continue sur V , $a(.,.)$ une forme bilinéaire continue coercive sur V . Alors la formulation variationnelle admet une unique solution. De plus, cette solution dépend continûment de la forme linéaire L .

Proposition 1.1 On se place sous les hypothèses de Théorème 1.2.3 de Lax-Milgram. On suppose en plus que la forme bilinéaire est symétrique $a(u, v) = a(v, u)$ pour tout $u, v \in V$. Sois $J(v)$ l'énergie définie pour $v \in V$ par :

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - L(v).$$

Sois $u \in V$ la solution unique de la formulation variationnelle. Alors u est aussi l'unique point de minimum de l'énergie, c'est-à-dire que.

$$J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

Réciproquement, si $u \in V$ est un point de minimum de l'énergie $J(v)$, alors u est la solution unique de la formulation variationnelle.

1.3 Notations et propriétés de méthode des éléments finis dans 2D

Les discrétisations par l'élément fini sont basées sur des partitions du domaine Ω en sous-domaines simples non-chevauchants. La collection de ces sous-domaines s'appelle une partition et est étiquetée τ .

Les membres de τ , c'est-à-dire les sous-domaines, sont appelés éléments et sont étiquetés K .

1 τ doit satisfaire aux conditions suivantes :

— $\Omega \cup \Gamma$, c'est l'union de tous les éléments dans τ

- Chaque $K \in \tau$ est soit un triangle où un parallélogramme pour $N = 2$
- **La recevabilité** chaque deux éléments dans τ sont disjoints ou partagent un sommet ou une arête si $N = 3$, est un visage complet
- **La forme de la régularité** pour tout élément K , le rapport de son diamètre h_K pour le diamètre de la ρ_K de la plus grande boule inscrit dans K est borné indépendamment de K .

Codage	Définition
$\mathcal{N}_K$	Les sommets ou les nœuds de K
$\mathcal{E}_K$	Les arêtes ou faces de K
$\mathcal{N}_\tau$	Les sommets de tous les éléments en τ c'est-à-dire : $\mathcal{N}_\tau = \bigcup_{K \in \tau} \mathcal{N}_K$
$\mathcal{E}_\tau$	Les arêtes ou faces des tous les éléments en τ , c'est-à-dire : $\mathcal{E}_\tau = \bigcup_{K \in \tau} \mathcal{E}_K$
$\mathcal{N}_E$	Les sommets d'une arête ou d'une face $E \in \mathcal{E}_\tau$
$\mathcal{N}_{\tau,\Gamma}$	Les sommets sur la frontière
$\mathcal{N}_{\tau,\Gamma_D}$	Les sommets sur la frontière de Dirichlet
$\mathcal{N}_{\tau,\Gamma_N}$	Les sommets sur la frontière de Neumann
$\mathcal{N}_{\tau,\Omega}$	Les sommets à l'intérieur de Ω
$\mathcal{E}_{\tau,\Gamma}$	Les arêtes ou faces contenues dans la frontière
$\mathcal{E}_{\tau,\Gamma_D}$	Les bords ou les visages contenus dans le bord Dirichlet
$\mathcal{E}_{\tau,\Gamma_N}$	Les bords ou les visages contenus dans le bord Neumann
$\mathcal{E}_{\tau,\Omega}$	Les arêtes ou des faces ayant au moins une extrémité à l'intérieur de Ω

 TABLE 1.1 – Notation fondamental dans τ

2 Avec cette notation, nous définissons les espaces d'éléments finis par

$$\mathfrak{S}^{k,-1}(\tau) = \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \varphi|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \tau\}.$$

$$\mathfrak{S}^{k,0}(\tau) = \mathfrak{S}^{k,-1}(\tau) \cap C(\overline{\Omega}).$$

$$\mathfrak{S}_0^{k,0}(\tau) = \mathfrak{S}^{k,0}(\tau) \cap H_0^1(\Omega) = \{\varphi \in \mathfrak{S}^{k,0}(\tau) : \varphi = 0 \text{ dans } \Gamma\}.$$

$$\mathfrak{S}_D^{k,0}(\tau) = \mathfrak{S}^{k,0}(\tau) \cap H_D^1(\Omega) = \{\varphi \in \mathfrak{S}^{k,0}(\tau) : \varphi = 0 \text{ dans } \Gamma_D\}.$$

Notez que K peut être 0 pour le premier espace, mais doit être au moins 1 pour les autres espaces.

1.3.1 Propriétés d'approximation

Les espaces d'éléments finis définis, ci-dessus satisfont aux propriétés d'approximation suivantes

$$\begin{aligned} \inf_{\varphi_\tau \in \mathbb{S}^{k-1}(\tau)} \|\varphi - \varphi_\tau\|_0 &\leq ch^{k+1} |\varphi|_{k+1} \quad \varphi \in H^{k+1}(\Omega), k \in \mathbb{N}; \\ \inf_{\varphi_\tau \in \mathbb{S}^{k,0}(\tau)} \|\varphi - \varphi_\tau\|_j &\leq ch^{k+1-j} |\varphi|_{k+1} \quad \varphi \in H^{k+1}(\Omega), j \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N}^*; \\ \inf_{\varphi_\tau \in \mathbb{S}^{k,0}(\tau)} \|\varphi - \varphi_\tau\|_j &\leq ch^{k+1-j} |\varphi|_{k+1} \quad \varphi \in H^{k+1}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), j \in \{0, 1\}, k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

1.3.2 Méthode de Galerkin

On se place maintenant sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} V \text{ est un espace de Hilbert.} \\ a : \text{forme bilinéaire continué et coercive, } L \in V' \end{cases} \quad (1.4)$$

Remarque maintenant, a n'est pas nécessairement symétrique par les hypothèses [1.4]

On considère le problème :

$$\begin{cases} u \in V \\ a(u, v) = L(v), v \in V \end{cases} \quad (1.5)$$

Par le théorème de **Lax-Milgram 1.2.3**, il y a existence et unicité de $u \in V$ solution de (1.5).

On se donne $V_\tau \subset V$, tel que $\dim V_\tau < +\infty$, et on cherche à résoudre le problème approché :

$$(P_\tau) \begin{cases} u_\tau \in V_\tau \\ a(u_\tau, v_\tau) = L(v_\tau), \forall v_\tau \in V_\tau. \end{cases} \quad (1.6)$$

Par le théorème de **Lax-Milgram 1.2.3**, on a immédiatement :

Théorème 1.3.1 *Sous les hypothèses, si $V_\tau \subset V$ et $\dim V_\tau = N$, il existe un unique $u_\tau \in V_\tau$ solution de (1.6).*

1.4 Principales caractéristiques de posteriori erreur estimation

1.4.1 Un opérateur de quasi-interpolation

Pour tout ensemble mesurable $\omega \subset \mathbb{R}^2$ avec mesure positive et toute fonction intégrable φ on définit la moyenne de φ sur ω par

$$\bar{\varphi}_\omega = \frac{1}{\mu_2(\omega)} \int_\omega \varphi; \quad (1.7)$$

où μ_N désigne la mesure de Lebesgue standard dans $\mathbb{R}^N$. Avec cette notation, nous définissons un opérateur de quasi-interpolation $I_\tau : H_D^1(\Omega) \rightarrow \mathfrak{S}_D^{1,0}(\tau)$ par

$$I_\tau \varphi = \sum_{x \in \mathcal{N}_{\tau, \Omega} \cup \mathcal{N}_{\tau, \Gamma_N}} \bar{\varphi}_{\omega_x} \lambda_x; \quad (1.8)$$

Notez que $I_\tau \varphi$ est défini pour chaque fonction intégrable φ .

1.4.2 Les fonctions de Bulle

Pour chaque élément K et chaque arête E , on définit les fonctions de bulle ψ_K et ψ_E par :

$$\psi_K = \alpha_K \prod_{x \in \mathcal{N}_K} \lambda_x \quad (1.9)$$

Avec

$$\alpha_K = \begin{cases} 27 & \text{si } K \text{ un triangle ;} \\ 256 & \text{si } K \text{ un parallélogramme ;} \\ 16 & \text{si } K \text{ un tétraèdre ;} \\ 54 & \text{si } K \text{ un parallélépipède ;} \end{cases} \quad (1.10)$$

Et

$$\psi_E = \beta_E \prod_{x \in \mathcal{N}_E} \lambda_x. \quad (1.11)$$

avec

$$\beta_E = \begin{cases} 4 & \text{si } E \text{ est un segment de ligne ;} \\ 27 & \text{si } E \text{ est un triangle ;} \\ 16 & \text{si } E \text{ est un parallélogramme ;} \end{cases} \quad (1.12)$$

Proposition 1.2 *Les fonctions ψ_K et ψ_E ont les propriétés suivantes :*

$$\text{supp} \psi_K = K, \quad 0 \leq \psi_K \leq 1, \quad \max_{x \in K} \psi_K(x) = 1. \quad (1.13)$$

$$\text{supp} \psi_E = \omega_E, \quad 0 \leq \psi_E \leq 1, \quad \max_{x \in E} \psi_E(x) = 1. \quad (1.14)$$

De plus, les estimations inverses suivantes sont valables pour toutes les fonctions linéaires ou bilinéaires φ :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_E &\leq c_{I,3} \|\psi_E^{\frac{1}{2}} \varphi\|_E; & \|\varphi\|_K &\leq c_{I,1} \|\psi_K^{\frac{1}{2}} \varphi\|_K; \\ \|\nabla(\psi_E \varphi)\|_{\omega_E} &\leq c_{I,4} h_E^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_E; & \|\nabla(\psi_K \varphi)\|_K &\leq c_{I,2} h_K^{-1} \|\varphi\|_K \\ \|\psi_E \varphi\|_{\omega_E} &\leq c_{I,5} h_E^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_E. \end{aligned}$$

Les constantes $c_{I,1}, c_{I,2}, c_{I,3}, c_{I,4}, c_{I,5}$ ne dépendent que du paramètre de forme de τ .

1.4.3 Les sauts des fonctions continues par morceaux

Avec chaque bord E , nous associons un vecteur d'unité n_E . Pour les bords intérieurs $E \in \mathcal{E}_\Omega$ son orientation est arbitraire, pour les bords $E \in \mathcal{E}$ sur la limite l'orientation est choisie tel que n_E montre à l'extérieur de Ω . Pour toute fonction continue par morceaux φ et tout bord intérieur E , nous notons $\mathbb{J}_E(\varphi)$ le saut de φ à travers E dans la direction de n_E

$$\mathbb{J}_E(\varphi)(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(x - tn_E) - \lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(x + tn_E) \quad \forall x \in E; \quad (1.15)$$

Notez que $\mathbb{J}_E(\varphi)$ dépend de l'orientation de n_E mais que les expressions de la forme $\mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla \varphi)$ sont indépendantes de celle-ci.

1.5 Conclusion

La plupart de ces concepts sont très basiques pour les chapitres suivants, en particulier la fonction de bulle qui est la base d'estimation à posteriori d'erreur résiduelle, nous allons montrerons au chapitre 3.



2 ÉTUDE D'EXISTANCE ET L'UNICITÉ PAR FV ET RÉOLUTION NUMÉRIQUE PAR MEF

2.1	Introduction	13
2.2	Le problème du modèle :	13
2.3	Formulation variationnelle	14
2.4	Discrétisation par l'élément finis du problème (2.1)	16
2.4.1	Partitions d'éléments finis	18
2.4.2	Espace d'éléments finis	19
2.4.3	Les éléments de référence	19
2.4.4	Les fonctions de base	20
2.4.5	Discrétisation de la formulation faible	25
2.4.6	Approximation interne générale	26
2.4.7	Estimateur d'erreur	27
2.5	Conclusion	29

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons faire une étude sur l'existence et l'unicité de solution exact u par la formulation variationnelle de **problème linéaire non-homogène mixte Dirichlet-Neumann**, mais dans la deuxième partie, nous allons discuter la résolution numérique du même problème par la méthode des éléments finis.

2.2 Le problème du modèle :

En tant que problème de modèle, nous considérons le problème linéaire non-homogène avec des conditions aux limites mixtes de Dirichlet-Neumann par suite :

$$(P) : \begin{cases} -\Delta u + \alpha u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{sur } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.1)$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné régulier avec un Lipchitz bord $\partial\Omega$, les données sont supposées être lisses pour $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, $g \in \mathbf{L}^2(\Gamma_N)$ et α est un constant positive ($\alpha > 0$), Γ_D et Γ_N sont supposés être disjoints c'est-à-dire $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ avec $\overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_D} = \partial\Omega$. L'unité vers l'extérieur vecteur normal à $\partial\Omega$ est dénoté par n est appartient à l'espace $[\mathbf{L}^\infty(\partial\Omega)]^n$.

2.3 Formulation variationnelle

1 Étape 1

Pour $f \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ et $v \in C_0^\infty(\Omega)$ on a

$$-\int_{\Omega} (\Delta u) v dx + \alpha \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

En utilisant la formule de Green 1.2.4, donc

$$\int_{\Omega} f v dx = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + \alpha u v) dx - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma$$

D'après la condition $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ sur Γ_N telle que g est la fonction de trace, alors

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad (p.p)$$

Et on a

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g v d\sigma$$

Par ailleurs $u = 0$ sur Γ_D alors on définit l'espace V comme

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\};$$

c'est-à-dire $v \in H_{0,D}^1$. Donc nous allons chercher maintenant $u \in H_{0,D}^1$ qui satisfait

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + \alpha u v) dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g v d\sigma, \quad \forall v \in H_{0,D}^1 \quad (2.2)$$

Le problème (2.2) s'appelle la **formulation faible** ou **formulation variationnelle de (2.1)**

2 Étape 2

Pour exister l'unique solution faible $u \in V$ on appliqué le **théorème de Lax-Milgram 1.2.3** dans l'espace $V = H_{0,D}^1(\Omega)$ avec la forme bilinéaire et continué

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + \alpha uv) dx, \quad \forall v \in V; \quad (2.3)$$

Et la forme linéaire $L : v \rightarrow \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v dx$

— **Continuité de $a(.,.)$** :

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v + \alpha uv) dx$$

Donc

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} uv dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| dx + \alpha \int_{\Omega} |u| |v| dx \quad \forall u, v \in V \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de **Cauchy Schwartz (1.2.3)** peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \alpha C^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2 \max(1, \alpha C^2) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2 \max(1, \alpha C^2) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in V \end{aligned}$$

où C est la constante de **Poincaré**

Alors, comme $\|u\|_{H^1(\Omega)} \equiv \|u\|_{H_{0,D}^1(\Omega)}$

Pour $u \in H_{0,D}^1(\Omega)$;

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{H_{0,D}^1(\Omega)} \cdot \|v\|_{H_{0,D}^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_{0,D}^1(\Omega) ;$$

Donc $a(.,.)$ est continué

— **Coercivité de $a(.,.)$** :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} u^2 dx \quad \forall u \in V \\ &\geq \min(1, \alpha) \|u\|_{H_{0,D}^1(\Omega)}^2 \\ &\geq C \|u\|_{H_{0,D}^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, $a(.,.)$ est coercive en V .

— Continuité de $L(\cdot)$: En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz (1.2.3)

$$\begin{aligned}
 |L(v)| &= \left| \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g v d\sigma \right| \quad \forall v \in V \\
 &\leq \int_{\Omega} |f| |v| dx + \int_{\Gamma_N} |g| |v| d\sigma \\
 &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{L^2(\Gamma_N)}.
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Poincaré (1.2.3)

$$\begin{aligned}
 &\leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \cdot \|\nabla v\|_{L^2(\Gamma_N)} \\
 &\leq \max \left(C \|f\|_{L^2(\Omega)}, C \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \right) \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Gamma_N)} \right) \\
 &\leq M \left(\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Gamma_N)} \right)
 \end{aligned}$$

Donc $L(\cdot)$ est continué

Nous avons montré que $a(\cdot, \cdot)$ et $L(\cdot)$, vérifient les hypothèses de **théorème de Lax-Milgram 1.2.3**. Alors le problème (2.1) admet une solution unique faible sur V tel que $u \in H_{0,D}^1(\Omega)$.

2.4 Discrétisation par l'élément finis du problème (2.1)

Dans la méthode des éléments finis, la construction du sous-espace discret nécessite la discrétisation préalable du domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en éléments géométriques simples. Contrairement au cas d'un intervalle de $\mathbb{R}$, la discrétisation d'un domaine de $\mathbb{R}^2$ est un problème technique difficile et la qualité de ce maillage, est essentielle pour la qualité de l'approximation.

Définition 2.4.1 Soit donc Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et considérons un maillage de τ formé par des triangles K vérifiant les critères suivants :

1. Les éléments $K \subset \tau$ du maillage doivent recouvrir le domaine, i.e. leur union est égale à τ
2. L'intersection de deux éléments distincts doit satisfaire :

$$K \cap K' = \begin{cases} \emptyset; \\ un \quad \text{sommet}; \\ un \quad \text{côté}; \end{cases} \quad (2.4)$$

3. Équivalente, affine : pour $K \in \tau$;

$h_K = \text{diam}(K) \doteq \sup_{x,y \in K} \|x - y\|$ et ρ_K est le diamètre de la boule maximale inscrite en K , la

triangulation est dite régulière, s'il existe une constante C_τ avec

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq C_\tau \quad \forall K \in \tau \quad \text{telque} \quad C_\tau = \max_{K \in \tau} \frac{h_K}{\rho_K} \quad (2.5)$$

Enfin, la largeur de maille est introduite comme

$$h \doteq \max_{K \in \tau} h_K.$$

Le diamètre d'un triangle K est noté h_K et le diamètre du plus grand cercle qui peut être inscrit en K est noté ρ_K . La régularité du triangle est mesurée par le rapport

$$k_K = \frac{h_K}{\rho_K} \quad (2.6)$$

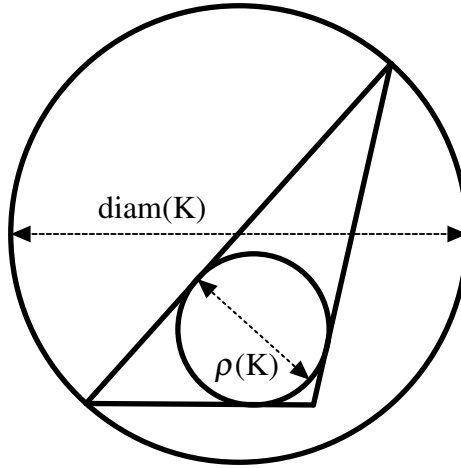


FIGURE 2.1 – Diamètre **diam(K)** et rondeur $\rho(K)$ d'un triangle K

Patches d'éléments

Aux fins de l'analyse d'erreur à posteriori, il sera utile de considérer les propriétés de certains patches locaux d'éléments. Soit τ une partition régulière de Ω en triangles soit K tout élément de la partition. Le sous-domaine $\tilde{K}$ se compose de l'élément K avec les éléments partageant au moins un sommet commun avec K :

$$\tilde{K} = \left\{ \bigcup K', K' \in \tau : \overline{K'} \cap \overline{K} \text{ est non vide} \right\} \quad (2.7)$$

Le sous-domaine $\tilde{K}$ est appelé patch associé à l'élément K . Le lecteur peut trouver utile à ce stade de noter que la notation $\tilde{\bullet}$ sera utilisée tout au long pour désigner un patch d'éléments associés à une

entité •. Les dimensions du patch $\tilde{K}$ sont mesurées en fonction des quantités

$$h_{\tilde{K}} = \max_{K' \subseteq \tilde{K}} h_{K'} \quad (2.8)$$

Et

$$\rho_{\tilde{K}} = \min_{K' \subseteq \tilde{K}} \rho_{K'} \quad (2.9)$$

Tandis que la régularité du patch est mesurée

$$k_{\tilde{K}} = \frac{h_{\tilde{K}}}{\rho_{\tilde{K}}}; \quad (2.10)$$

La régularité de la partition τ est héritée par les patches.

Définition 2.4.2 Une triangulation K est dite **quasi-uniforme** si elle est régulière et qu'il existe un constant $C_{qu} > 0$ tel que :

$$\frac{\max_{K \in \tau} h_K}{\min_{K \in \tau} \rho_K} \leq C_{qu} \quad \forall K \in \tau \quad (2.11)$$

2.4.1 Partitions d'éléments finis

Sommets et arêtes

Une partition τ nous associons les ensembles $\mathcal{N}$ et $\mathcal{E}$ de tous les sommets et arêtes, respectivement de tous les éléments de τ . Un indice $K, \Omega, \Gamma, \Gamma_D, \Gamma_N$ ou $\mathcal{N}$ ou $\mathcal{E}$ indique que seuls ces sommets ou arêtes, respectivement, sont considérés qui sont contenus dans l'ensemble d'index correspondant. De même, $\mathcal{N}_E$ désigne l'ensemble des sommets d'une arête donner E . L'union de toutes les arêtes dans $\mathcal{E}$ est notée Σ est appelée le squelette de τ .

Pour chaque élément ou arête $S \in \tau \cup \mathcal{E}$, nous désignons h_S son diamètre. Notez que la régularité de forme de τ implique que pour tous les éléments K et K' et tous les bords E et E' qui partagent au moins un sommet, les rapports $\frac{h_K}{h_{K'}}$, $\frac{h_E}{h_{E'}}$, et $\frac{h_k}{h_E}$ sont délimités d'en bas et d'en haut par des constantes qui ne dépendent que du paramètre de forme C_τ de τ .

Dépend du sinus du plus petit angle de τ et qui est appelé paramètre de forme de τ , pour chaque élément K , chaque arête E et chaque sommet x nous associons les ensembles suivants :

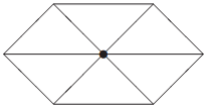
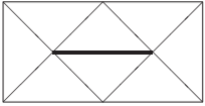
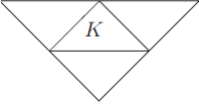
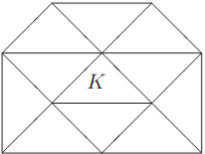
Définition	Illustration	Définition	Illustration
$\sigma_x = \bigcup_{x \in \mathcal{N}_E} E$		$\omega_x = \bigcup_{x \in \mathcal{N}_{K'}} K'$	
$\tilde{\omega}_E = \bigcup_{\mathcal{N}_E \cap \mathcal{N}_{K'} \neq \emptyset} K'$		$\omega_E = \bigcup_{E \in \mathcal{E}_{K'}} K'$	
$\tilde{\omega}_K = \bigcup_{\mathcal{N}_K \cap \mathcal{N}_{K'} \neq \emptyset} K'$		$\omega_K = \bigcup_{\mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_{K'} \neq \emptyset} K'$	

TABLE 2.1 – Paramètre des formes de τ

2.4.2 Espace d'éléments finis

Définition 2.4.3 On définit l'espace d'éléments finis des fonctions polynomiales par morceaux d'ordre $k \geq 1$ sur le maillage τ avec

$$\mathfrak{S}^{k,-1} \doteq \{ \varphi \in C(\overline{\Omega}) : \varphi|_K \in P_k \quad \forall K \in \tau \}. \quad (2.12)$$

Définition 2.4.4 Soit $V_\tau = \mathfrak{S}^{k,-1}$ Alors V_τ est un sous-espace de $H^1(\Omega)$

Preuve 2.4.1 Tout élément v_τ de $\mathfrak{S}^{k,-1}$ appartient à $C(\overline{\Omega}) \cap H^1(K)$ pour tout $K \in \tau$. D'après le théorème de recollement de Sobolev, il vient que $v_\tau \in H^1(\Omega)$ et donc $\mathfrak{S}^{k,-1} \subset H^1(\Omega)$

2.4.3 Les éléments de référence

Dans la mise en œuvre et l'analyse des méthodes des éléments finis, un élément important est joué par les éléments de référence. L'élément de référence pour les éléments triangulaires peut être choisi

pour être.

$$\widehat{K} = \{(\widehat{x}, \widehat{y}) : 0 \leq \widehat{x} \leq 1; 0 \leq \widehat{y} \leq 1 - \widehat{x}\}$$

Chaque élément triangulaire K peut être considéré comme l'image du triangle de référence $\widehat{K}$ sous une transformation inversée continue affine $\mathcal{F}_K$. La transformation peut être écrite sous la forme

$$\mathcal{F}_K(\widehat{x}) = A_K \widehat{x} + B_K. \quad (2.13)$$

Où A_K est une matrice et B_K est un vecteur. La régularité de l'élément K signifie que le A_K est non singulier, et il existe un constant C qui ne dépend que du paramètre de régularité k_K tel que

$$\begin{cases} \|A_K\| \leq Ch_K \\ \|A_K^{-1}\| \leq C\rho_K^{-1} \\ C\rho_K^2 \leq |\det(A_K)| \leq Ch_K^2 \end{cases} \quad (2.14)$$

Où $\|\cdot\|$ est une norme matricielle.

2.4.4 Les fonctions de base

Soit

$$\mathfrak{S}_0^{1,0}(\tau) = \{\varphi \in C(\overline{\Omega}) \mid \forall K \in \tau : \varphi|_K \in P_1\} \cap H_0^1(\Omega) \quad (2.15)$$

est un espace des éléments finis, et

$$N = \dim \mathfrak{S}_0^{1,0}(\tau)$$

avec $K \in \tau$, x_i^α tel que $1 \leq i \leq 3$ désigne les trois sommets de K et $\varphi|_K$ est uniquement déterminé par les valeurs de x_i^α . Comme dans le cas unidimensionnel, nous construisons maintenant une base linéaire élément par l'élément $\{\varphi_i\}_{i=1..N}$ de $\mathfrak{S}_0^{1,0}(\tau)$ avec la propriété de Lagrange

$$\delta_{i,j} = \varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.16)$$

où $x_j \in \mathbf{N}_K \doteq \{x_j : x_j \text{ est un sommet d'un élément } K \in \tau\}$.

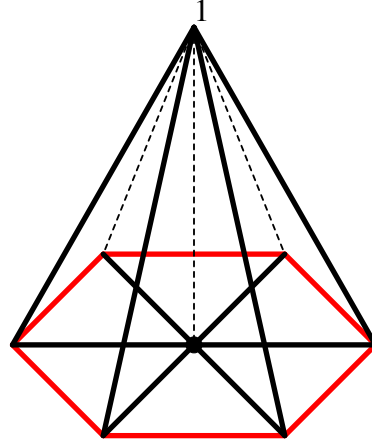


FIGURE 2.2 – La fonction de base φ_i en deux dimensions, la fonction tente, la fonction a la valeur 1 uniquement sur un seul nœud x_j et disparaît sur tous les autres nœuds.

Les fonctions coordonnées barycentriques de K

Sois $K \in \tau$ être arbitraire. On définit les fonctions. (**les indices sont pris modulo 3**)

$$\lambda_{\alpha,i}(x) = \frac{\det [x_{i+1}^\alpha - x, x_{i+1}^\alpha - x_{i+1}^\alpha]}{\det [x_{i+1}^\alpha - x_i^\alpha, x_{i+1}^\alpha - x_{i+1}^\alpha]}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.17)$$

Les fonctions (2.17) sont appelées coordonnées barycentriques de K et on la propriété :

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_{\alpha,i} = 1$$

Pour un arbitraire $x_j \in \mathcal{N}_K \doteq \{x_j : x_j \text{ est un sommet d'un élément } K \in \tau\}$ nous définissons

$$\omega_j = \bigcup_{K \in \tau, x_j \in K} K$$

et

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \notin \omega_j; \\ \lambda_{\alpha,j} & \text{pour } x \in K \subset \omega_j \text{ et } x_j = x_i^\alpha; \end{cases} \quad (2.18)$$

Comme nous pouvons le voir sur la Figure [2.2], le patch de triangles ω_j (rouge) est égale au support de $\varphi_j(x)$.

les fonctions de base nodale

En résumé, on peut dire que les fonctions $\varphi_j(x)$ sont continues et linéaires par morceaux, prendre la valeur 1 dans x_j et disparaître dans tous les autres points $x_j \in \mathcal{N}_K$, on plut :

$$\mathfrak{S}_D^{1,0} = \text{span} \{ \varphi_j : 1 \leq j \leq N \}$$

Tiens et les fonctions φ_j sont appelées "**base nodale**" de $\mathfrak{S}_D^{1,0}$.

Chaque sommet $x \in \mathcal{N}$, nous associons sa fonction de base nodale λ_x qui est uniquement défini par les conditions

$$\lambda_x \in \mathfrak{S}^{1,0}(\tau), \quad \lambda_x(x) = 1, \quad \lambda_x(y) = 0, \quad \forall y \in \mathcal{N} \setminus \{x\}.$$

Lemme 2.4.1 *Les fonctions de base nodale ont les propriétés suivantes :*

$$0 \leq \lambda_x \leq 1; \quad \text{supp} \lambda_x = \omega_x.$$

$$\sum_{x \in \mathcal{N}_K} \lambda_x = 1 \quad \text{sur } K; \quad \sum_{x \in \mathcal{N}_E} \lambda_x = 1 \quad \text{sur } E.$$

Les fonctions de bulle

Un rôle clé sera joué par certaines fonctions non-négatives prises en charge localement et communément appelées fonctions de bulle. Les deux types de fonctions de bulles sont des fonctions de bulle intérieures, pris en charge sur un seul élément et les fonctions de bulle de bord prises en charge sur une paire d'éléments.

Pour commencer, il est pratique de définir les fonctions de bulle sur l'élément de référence, et pour construire plus tard les fonctions de bulles sur l'élément physique en utilisant l'approche par l'éléments finis standard basée sur le mappage de l'élément de référence à l'élément physique.

Par les éléments triangulaires :

Que l'élément de référence triangulaire soit choisi comme

$$\widehat{K} = \{(\widehat{x}, \widehat{y}) : 0 \leq \widehat{x} \leq 1; 0 \leq \widehat{y} \leq 1 - \widehat{x}\} \quad (2.19)$$

Et introduire les coordonnées barycentriques, ou zone sur l'élément de référence défini par

$$\widehat{\lambda}_1 = \widehat{x}; \quad \widehat{\lambda}_2 = \widehat{y}; \quad \widehat{\lambda}_3 = 1 - \widehat{x} - \widehat{y}. \quad (2.20)$$

La fonction de bulle intérieure $\widehat{\psi}_K$ est définie

$$\widehat{\psi}_K = 27 \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2 \widehat{\lambda}_3 \quad (2.21)$$

Et les trois fonctions de bulle de bord sont données

$$\widehat{\psi}_{E,1} = 4 \widehat{\lambda}_2 \widehat{\lambda}_3; \quad \widehat{\psi}_{E,2} = 4 \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_3; \quad \widehat{\psi}_{E,3} = 4 \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2; \quad (2.22)$$

Les fonctions de bulle intérieure et de bord sur un patch d'éléments triangulaires sont illustrées dans la figure [2.3].

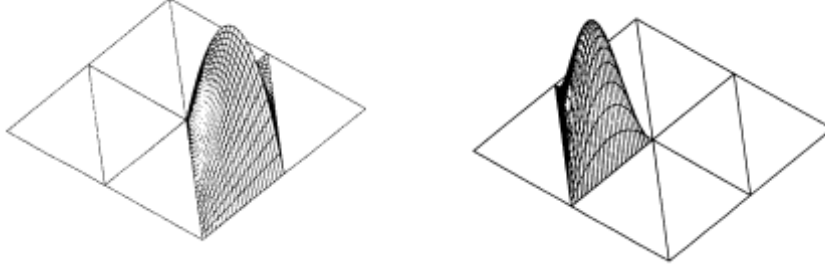


FIGURE 2.3 – Les fonctions de bulle intérieure et de bord sur un patch d'éléments triangulaires

Le but principal des fonctions de bulle intérieures est de localiser les résidus dans un seul élément. Par exemple, si le résidu intérieur r défini dans 3.6.2, est multiplié par la fonction de bulle intérieure ψ_K pour l'élément, puis $w_K = r\psi_K$ disparaît sur la frontière de l'élément, par conséquent w_K peut être étendue au domaine entier en affectant sa valeur à zéro sur les éléments restants, si la fonction r est suffisamment lisse, alors la fonction étendue w_K est longue jusqu'à l'espace des déplacements admissibles V .

Il sera utile de considérer l'effet de la multiplication par la fonction de bulle ψ_K sur la norme d'un résidu. Le résultat suivant montre que sur l'élément de référence sous certaines hypothèses supplémentaires, la norme est conservée jusqu'à une constante.

Ce résultat préliminaire, concernant l'élément de référence, servira alors de base à une estimation de l'élément physique.

Lemme 2.4.2 *Soit $\hat{p} \subset H^1(\hat{K})$ un sous-espace de dimension finie et soit $\hat{\psi}_K$ la fonction de bulle intérieure sur l'élément de référence $\hat{K}$. Alors, pour tout $\hat{w}_K \in \hat{p}$ il existe une constante $\hat{C}$ telle que*

$$\hat{C}^{-1} \|\hat{w}_K\|_{\mathbf{L}^2(\hat{K})}^2 \leq \int_{\hat{K}} \hat{\psi}_K \hat{w}_K^2 d\hat{x} \leq \hat{C} \|\hat{w}_K\|_{\mathbf{L}^2(\hat{K})}^2 \quad (2.23)$$

et

$$\hat{C}^{-1} \|\hat{w}_K\|_{\mathbf{L}^2(\hat{K})} \leq \|\hat{\psi}_K \hat{w}_K\|_{H^1(\hat{K})} \leq \hat{C} \|\hat{w}_K\|_{\mathbf{L}^2(\hat{K})} \quad (2.24)$$

où la constante $\hat{C}$ ne dépend que de l'élément de référence.

Preuve 2.4.2 *Grâce à la non-finité des fonctions de bulle à l'intérieur de l'élément, on voit facilement que :*

$$\hat{w}_K \mapsto \left\{ \int_{\hat{K}} \hat{\psi}_K \hat{w}_K^2 d\hat{x} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\hat{w}_K \mapsto \|\hat{\psi}_K \hat{w}_K\|_{H^1(\hat{K})}$$

Les deux définissent des normes sur l'espace de dimension finie $\hat{p}$. Les résultats découlent alors immédiatement du fait que toutes les normes sur un espace de dimension finie sont équivalentes.

L'étape suivante consiste à construire des fonctions de bulle sur les éléments physiques. Pour chaque élément $K \in P$. Sois $\mathcal{F}_K : \hat{K} \mapsto K$ défini les fonctions de bulle sur l'élément K

$$\psi_K = \hat{\psi}_K \circ \mathcal{F}_K^{-1}; \quad \psi_E = \hat{\psi}_E \circ \mathcal{F}_K^{-1} \quad (2.25)$$

Si la partition P est régulière, alors, il s'ensuit que le mappage $\mathcal{F}_K$ satisfait :

$$\begin{cases} \|D\mathcal{F}_K\|_{\mathbf{L}^\infty(\hat{K})} \leq Ch_K \\ \|D\mathcal{F}_K^{-1}\|_{\mathbf{L}^\infty(\hat{K})} \leq C_{k_K/\rho_K} \\ C\rho_K^2 \leq \|\mathbf{J}_K\|_{\mathbf{L}^\infty(\hat{K})} \leq Ch_K^2 \end{cases} \quad (2.26)$$

où $\mathbf{J}_K$ et $D\mathcal{F}_K$ désignent, respectivement la matrice jacobienne et la matrice jacobienne de transformation $\mathcal{F}_K$. Les éléments sont construits à partir du sous-espace p sur l'élément de référence de la même manière que les fonctions de retrait décrites précédemment.

$$p = \{\hat{w}_K \circ \mathcal{F}_K^{-1} : \hat{w}_K \in \hat{p}\}. \quad (2.27)$$

Le résultat suivant montre que la fonction de bulle intérieure sur l'élément physique a des propriétés analogues à celles décrites pour l'élément de référence dans le lemme 2.4.2.

Théorème 2.4.1 Il existe un constant C tel que $\forall w_K \in p$ on a

$$C^{-1} \|w_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \leq \int_K \psi_K w_K^2 dx \leq C \|w_K\|_{\mathbf{L}^2(K)}^2 \quad (2.28)$$

et

$$C^{-1} \|w_K\|_{\mathbf{L}^2(K)} \leq \|\psi_K w_K\|_{\mathbf{L}^2(K)} + h_K |\psi_K w_K|_{H^1(K)} \leq C \|w_K\|_{\mathbf{L}^2(K)} \quad (2.29)$$

où le constant C est indépendante de w_K et h_K .

Preuve 2.4.3 Le résultat suit en mappant sur le domaine de référence $\hat{K}$, en appliquant le lemme 2.4.2 et un argument d'échelle.

Le rôle de la fonction de bulle de bord est d'étendre les quantités définies sur les interfaces des éléments, telles que les résidus de saut à la paire d'éléments partageant l'interface, le résultat suivant est analogue au lemme 2.4.2

Et cela, montre que l'extension préserve les normes, la encore jusqu'à une constante.

Lemme 2.4.3 Soit $\hat{E} \subset \partial\hat{K}$ est un bord et soit $\hat{\psi}_E$ la fonction de bulle de bord correspondante, défini sur $\hat{E}$, alors il existe une constante $\hat{C}$ telle que $\forall \hat{w}_E \in \hat{p}$ on a

$$\hat{C}^{-1} \|\hat{w}_E\|_{\mathbf{L}^2(\hat{E})}^2 \leq \int_{\hat{E}} \hat{\psi}_E \hat{w}_E^2 d\hat{s} \leq \hat{C} \|\hat{w}_E\|_{\mathbf{L}^2(\hat{E})}^2 \quad (2.30)$$

et

$$\|\widehat{\mathcal{C}}_E \widehat{w}_E \widehat{\psi}_E\|_{H^1(\widehat{K})} \leq \widehat{C} \|\widehat{\psi}_E\|_{\mathbf{L}^2(\widehat{E})} \quad (2.31)$$

Dans (2.30) et (2.31) les constantes $\widehat{C}$ sont indépendantes de la fonction $\widehat{\psi}_E$.

Preuve 2.4.4 La preuve est basée sur l'équivalence de normes sur un espace de dimension finie, ce résultat a l'analogue suivant sur l'élément physique.

Théorème 2.4.2 Soit $E \subset \partial K$ est un bord et soit w_E la fonction de bulle de bord correspondante. Soit $p(E)$ l'espace de dimension finie des fonctions définies sur E obtenu en mappant $\widehat{p}(\widehat{E}) \subset H^1(\widehat{E})$, alors il existe un constant C tel que.

$$C^{-1} \|w_E\|_{\mathbf{L}^2(E)}^2 \leq \int_E \psi_E w_E^2 ds \leq C \|w_E\|_{\mathbf{L}^2(E)}^2 \quad (2.32)$$

et

$$h_K^{-\frac{1}{2}} \|\psi_E w_E\|_{\mathbf{L}^2(K)} + h_K^{\frac{1}{2}} |\psi_E w_E|_{H^1(K)} \leq C \|w_E\|_{\mathbf{L}^2(E)} \quad (2.33)$$

où le constant C est indépendante de w_E et h_K .

2.4.5 Discrétisation de la formulation faible

Dans la formulation faible (2.2), u et v appartiennent à $V = H_D^1$ qui est un espace fonctionnel de dimension infinie. La méthode de Galerkin consiste à proposer une version discrétisée du problème sur un sous-ensemble de dimension finie $V_\tau \subset V$:

Trouver $u_\tau \in V_\tau = \mathfrak{S}_D^{1,0}$ tel que $\forall v_\tau \in V_\tau$;

$$\int_\Omega (\nabla u_\tau \cdot \nabla v_\tau + \alpha u_\tau v_\tau) = \int_\Omega f v_\tau + \int_{\Gamma_N} g v_\tau \quad \forall v_\tau \in \mathfrak{S}_D^{1,0} \quad (2.34)$$

En notant $(\varphi_i)_{i=1..n}$ une base de V_τ , de dimension N , on peut écrire la décomposition de u_τ sur cette base :

$$u_\tau = \varphi_0 + \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j; \quad \text{pour } \varphi_0|_{\Gamma_D} = 0.$$

où les $u_j = u(x_j)$ sont N coefficients inconnus. Par linéarité, la formulation faible devient :

$$\forall i \in [1, N] \quad a(u_\tau, \varphi_i) = L(\varphi_i) \quad (2.35)$$

Alors

$$\forall v_\tau \in V_\tau, \quad \sum_{j=1}^N u_j \int_\Omega (\nabla \varphi_j \cdot \nabla v_\tau + \alpha \varphi_j v_\tau) = \int_\Omega f v_\tau + \int_{\Gamma_N} g v_\tau \quad \forall v_\tau \in \mathfrak{S}_D^{1,0} \quad (2.36)$$

Comme cette équation est linéaire et que $(\varphi_i)_i$ est une base de V_τ , elle équivalente au système linéaire suivant :

$$\forall i \in [1, N], \quad \sum_{j=1}^N u_j \int_\Omega (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + \alpha \varphi_i \varphi_j) = \int_\Omega f \varphi_i + \int_{\Gamma_N} g \varphi_i \quad (2.37)$$

Le problème discret (2.34) est équivalent à un système linéaire d'équations avec N équations et inconnues. Les systèmes qui doivent être résolu :

$$AU = L$$

$$\begin{pmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & \cdots & a(\varphi_1, \varphi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a(\varphi_N, \varphi_1) & a(\varphi_N, \varphi_2) & \cdots & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(\varphi_1) \\ L(\varphi_2) \\ \vdots \\ L(\varphi_N) \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

Tel que

$$A_{i,j} = \int_{\Omega} (\nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j + \alpha \varphi_i \varphi_j).$$

$$L_i = \int_{\Omega} f \varphi_i + \int_{\Gamma_N} g \varphi_i.$$

2.4.6 Approximation interne générale

Nous considérons à nouveau le cadre général du formalisme variationnelle introduit au section 2.3. Étant donné un espace de Hilbert V , une forme bilinéaire continue et coercive $a(u, v)$, et une forme linéaire continue $L(v)$, on considère la formulation variationnelle :

$$\text{trouver } u \in V \text{ telque } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V. \quad (2.39)$$

Dont on sait qu'elle admet une unique solution par le Théorème 1.2.3 de Lax-Milgram. **L'approximation interne** de (2.2) consiste à remplacer l'espace de Hilbert V par un sous-espace de dimension finie V_{τ} , c'est-à-dire à chercher la solution de :

$$\text{trouver } u_{\tau} \in V_{\tau} \text{ telque } a(u_{\tau}, v_{\tau}) = L(v_{\tau}) \quad \forall v_{\tau} \in V_{\tau}. \quad (2.40)$$

La résolution de l'approximation interne (2.40) est facile comme le montre le lemme suivant.

Lemme 2.4.4 *Sois V un espace de Hilbert réel, et V_{τ} un sous-espace de dimension finie. Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur V , et $L(v)$ une forme linéaire continue sur V . Alors l'approximation interne (2.40) admet une unique solution. Par ailleurs, cette solution peut s'obtenir en résolvant un système linéaire de matrice définie positive (et symétrique si $a(u, v)$ est symétrique.)*

Preuve 2.4.5 *L'existence et l'unicité de $u_{\tau} \in V_{\tau}$, solution de (2.40), découle du Théorème 1.2.3 de Lax-Milgram appliqué à V_{τ} . Pour mettre le problème sous une forme plus simple, on introduit une base*

$(\varphi_j)_{1 \leq j \leq N_\tau}$ de V_τ . Si $u_\tau = \sum_{j=1}^{N_\tau} u_j \varphi_j$, on pose $U_\tau = (u_1, \dots, u_{N_\tau})$ le vecteur dans $\mathbb{R}^{N_\tau}$ des coordonnées de u_τ . Le problème (2.40) est équivalent à :

$$\text{trouver } U_\tau \in \mathbb{R}^{N_\tau} \text{ tel que } a\left(\sum_{j=1}^{N_\tau} u_j \varphi_j, \varphi_i\right) = L(\varphi_i) \quad \forall 1 \leq i \leq N_\tau.$$

Ce qui s'écrit sous la forme d'un système linéaire

$$AU = L. \quad (2.41)$$

Avec, pour $1 \leq i, j \leq N_\tau$

$$(A)_{i,j} = a(\varphi_j, \varphi_i), \quad (L)_i = L(\varphi_i).$$

La coercivité de la forme bilinéaire $a(u, v)$ entraîne le caractère défini positif de la matrice A , et donc son inversibilité. En effet, pour tout vecteur $U \in \mathbb{R}^{N_\tau}$, on a

$$AU \cdot U \geq \nu \left\| \sum_{j=1}^{N_\tau} u_j \varphi_j \right\|^2 \geq C|U|^2 \text{ avec } C > 0.$$

Car toutes les normes sont équivalentes en dimension finie ($|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^{N_\tau}$). De même, la symétrie de $a(u, v)$ implique celle de A . Dans les applications mécaniques la matrice A est appelée matrice de rigidité. Le problème matriciel (2.41) possède donc une unique solution.

2.4.7 Estimateur d'erreur

Enfin, l'estimateur d'erreur est introduit. Pour réduire les détails techniques, nous supposons que Ω est un domaine polygonal convexe, cette exigence est importante pour diviser le domaine en triangles affines.

Le lemme suivant, du à " **Jean C  a** ", montre que la distance entre la solution exacte u et la solution approch  e u_τ est major  e uniformément par rapport au sous-espace V_τ par la distance entre u et V_τ .

Théorème 2.4.3 (Lemme de C  a) : La forme bil  neaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue coercitive sur $H^k(\Omega)$ avec

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_{H^k(\Omega)} \|v\|_{H^k(\Omega)} \quad (2.42)$$

Et

$$a(u, u) \geq \gamma \|u\|_{H^k(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^k(\Omega) \text{ et } 0 < \gamma \leq C. \quad (2.43)$$

Soit $\mathfrak{S}_D^{k,0} \subset H^k(\Omega)$ être un sous-espace de dimension finie et f une fonction linéaire continue sur $H^k(\Omega)$. Sois $u_\tau \in \mathfrak{S}_D^{1,0}$ être la solution de :

$$a(u_\tau, v) = f(v) \quad \forall v \in \mathfrak{S}_D^{k,0} \text{ et } u \in H^k(\Omega)$$

tel que

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H^k(\Omega)$$

Et satisfait, alors l'estimation est

$$\|u - u_\tau\|_{H^k(\Omega)} \leq \frac{C}{\gamma} \inf_{v_\tau \in \mathcal{S}_D^{k,0}} \|u - u_\tau\|_{H^k(\Omega)}. \quad (2.44)$$

Preuve 2.4.6 Puisque $V_\tau \subset V$, on déduit, par soustraction des formulations variationnelles (2.39) et (2.40), que

$$a(u - u_\tau, w_\tau) = 0 \quad \forall w_\tau \in V_\tau.$$

En choisissant $w_\tau = u_\tau - v_\tau$ on obtient

$$v \|u - u_\tau\|^2 \leq a(u - u_\tau, u - u_\tau) = a(u - u_\tau, u - v_\tau) \leq M \|u - u_\tau\| \|u - v_\tau\|.$$

D'où l'on déduit (2.44).

Théorème 2.4.4 (H^1 -erreur) : Soit $u \in H_0^1(\Omega)$ être la faible solution de l'équation (2.1). La solution du problème discret (2.34) est $u_\tau \in \mathcal{S}_D^{1,0}$, si $\forall \in H^2(\Omega)$, nous avons l'estimation d'erreur :

$$\|u - u_\tau\|_{H^1(\Omega)} \leq c_1 h |u|_{H^2(\Omega)}. \quad (2.45)$$

La constante c_1 ne dépend que de C_τ , Ω et de coefficient dans l'équation différentielle α .

Théorème 2.4.5 (L^2 - erreur) : Sois les hypothèses du théorème 2.4.4 vérifiées $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^2(\Omega)$.

Ensuite, l'estimation d'erreur est :

$$\|u - u_\tau\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 h |u|_{H^2(\Omega)}. \quad (2.46)$$

La constante c_2 ne dépend que de C_τ , Ω et de coefficients dans l'équation différentielle α .

Pour la norme $H^1(\Omega)$ -norme et $L^2(\Omega)$ -norme, l'opérateur I_τ a les propositions d'approximation suivantes :

Proposition 2.1 Soit $k \in \mathbb{N}$, alors pour tout $u \in H^{k+1}(\Omega)$ les estimations d'interpolation

$$\|u - I_\tau^k u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_1 h^{k+1} |u|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

$$\|u - I_\tau^k u\|_{H^1(\Omega)} \leq c_2 h^k |u|_{H^{k+1}(\Omega)}$$

Maintenez, où $h \doteq \max_{K \in \tau} h_K$. Les constantes c_1 et c_2 ne dépendent que de C_τ , Ω et k .

Proposition 2.2 *Les estimations d'erreur suivantes sont valables pour tous les éléments $K \in \tau$, toutes les arêtes $E \in \mathcal{E}$ et toutes les fonctions $u \in H_D^1(\Omega)$*

$$\|u - I_\tau u\|_K \leq c_{A,1} h_K \|\nabla u\|_{\tilde{\omega}_K},$$

$$\|u - I_\tau u\|_E \leq c_{A,2} h_E^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{\tilde{\omega}_E}.$$

Les constantes $c_{A,1}$ et $c_{A,2}$ ne dépendent que du paramètre de forme de τ .

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons obtenu deux résultats très importants pour estimer l'erreur à posteriori de type résiduel, qui sont la solution faible et approximative par la méthode des éléments finis de le problème (2.1), qui sont considérés comme le lien de liaison pour le chapitre suivant.



3 ESTIMATIONS RÉSIDUELLES D'ERREUR À POSTERIORI

3.1	Introduction :	30
3.2	L'équivalence de l'erreur et du résidu	31
3.3	Orthogonalité de Galerkin	31
3.4	Une représentation L^2 du résidu	32
3.5	Une borne supérieure sur l'erreur	32
3.6	Une borne inférieure sur l'erreur	34
3.6.1	Estimation de résidu intérieur " r "	35
3.6.2	Estimation de résidu bord " R "	37
3.6.3	Preuve des bords bilatéraux sur l'erreur	39
3.7	Estimations d'erreur à posteriori	40
3.8	Conclusion	41

3.1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous décrivons l'une des différentes possibilités d'estimation d'erreur à posteriori ont appel ' estimation résiduelle ', afin de garder la présentation aussi simple, qui estime l'erreur de la solution numérique calculée par une norme appropriée de son résidu par rapport à la forme forte de l'équation différentielle.

Nous respectivement $u \in H_D^1(\Omega)$ et $u_\tau \in \mathfrak{S}_D^{1,0}(\tau)$ les solutions exactes des problèmes (2.2) et (2.1). Respectivement, dans ce qui suit, nous voulons borner l'erreur $\nabla(u - u_\tau)$ de dessus et de dessous par des quantités calculables qui n'impliquent que u_τ , la solution du problème discret, et f et g , les données de l'équation différentielle.

3.2 L'équivalence de l'erreur et du résidu

Pour tout $v \in H_D^1(\Omega)$ les fonctions u et u_τ réalisent l'identité :

$$\begin{aligned} a(u - u_\tau, v) &= a(u, v) - a(u_\tau, v) \\ &= L(v) - a(u_\tau, v) \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \nabla(u - u_\tau) \cdot \nabla v + \alpha(u - u_\tau)v = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v - \int_{\Omega} (\nabla u_\tau \cdot \nabla v + \alpha u_\tau v) \quad (3.1)$$

Le côté droit de l'équation (3.1) définit implicitement le résiduel $\mathcal{R}$ de u_τ comme un élément de l'espace double de $H_D^1(\Omega)$ en fixant pour tout $v \in H_D^1(\Omega)$

$$\langle \mathcal{R}, v \rangle = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma_N} g v - \int_{\Omega} (\nabla u_\tau \cdot \nabla v + \alpha u_\tau v). \quad (3.2)$$

L'inégalité de **Cauchy-Schwarz (1.2.3)** implique pour tout $v \in H_D^1(\Omega)$

$$\frac{1}{1 + C_{\Omega}^2} \|v\|_{1,2} \leq \|\nabla v + \alpha v\|_{1,2} = \sup_{w \in H_D^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{1}{\|\nabla w\|_{1,2}} \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla w + \alpha v w) \leq \|v\|_{1,2} \quad (3.3)$$

Cela correspond au fait que la forme bi-linéaire $v, w \in H_D^1(\Omega) \mapsto \int_{\Omega} (\nabla v \cdot \nabla w + \alpha v w)$ définit une isométrie de $H_D^1(\Omega)$ sur son double espace, et que $\|\nabla \cdot\|$ est la norme énergétique correspondant aux problèmes (2.2) et (2.1).

Les équations (3.1)-(3.3) impliquent l'identité :

$$\|\nabla(u - u_\tau)\| = \sup_{w \in H_D^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\langle \mathcal{R}, w \rangle}{\|\nabla w\|} \quad (3.4)$$

Puisque le terme **sup** dans l'équation (3.4) est la norme du résiduel dans l'espace double de $H_D^1(\Omega)$, nous avons prouvé.

La norme de l'erreur dans $H_D^1(\Omega)$ est égale à la norme du résiduel dans le double espace de $H_D^1(\Omega)$. La plupart des indicateurs d'erreur à posteriori tentent d'estimer cette double norme du résidu par des quantités qui peuvent être plus facilement calculées à partir de f, g et u_τ .

3.3 Orthogonalité de Galerkin

On observe tout d'abord que, de puis $\mathcal{S}_D^{1,0}(\tau) \subset H_D^1(\Omega)$, l'erreur est orthogonale à $\mathcal{S}_D^{1,0}(\tau)$, c'est-à-dire que pour tout $w_\tau \in \mathcal{S}_D^{1,0}(\tau)$ il y a :

$$\int_{\Omega} (\nabla(u - u_\tau) \cdot \nabla w_\tau + \alpha(u - u_\tau)w_\tau) = 0 \quad (3.5)$$

En utilisant les équations (3.1) et (3.2), cela peut être écrit comme

$$\langle \mathcal{R}, w_\tau \rangle = 0 \quad (3.6)$$

Pour tout $w_\tau \in \mathfrak{S}_D^{1,0}(\tau)$, c'est-à-dire que l'espace discret $\mathfrak{S}_D^{1,0}(\tau)$ est contenu dans les noyaux de $\mathfrak{R}$. L'équation (3.6) reflète le fait que la discrétisation (2.34), est conséquente et qu'aucune erreur supplémentaire n'est présentée par intégration numérique ou selon la solution inexacte du problème discret. Elle est souvent appelée "**orthogonalité de Galerkin**".

3.4 Une représentation L^2 du résidu

Pour tout $w \in H_D^1(\Omega)$ intégration par parties, rendement par élément

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{R}, w \rangle &= \int_{\Omega} fw + \int_{\Gamma_N} gw - \sum_{K \in \tau} \int_K (\nabla u_\tau \cdot \nabla w + \alpha u_\tau w) \\ &= \int_{\Omega} fw + \int_{\Gamma_N} gw + \sum_{K \in \tau} \left\{ \int_K (\Delta u_\tau - \alpha u_\tau) w - \int_{\partial K} n_K \cdot \nabla u_\tau w \right\} \\ &= \sum_{K \in \tau} \int_K (f + \Delta u_\tau - \alpha u_\tau) w + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_N}} \int_E (g - n_E \cdot \nabla u_\tau) w - \sum_{E \in \mathcal{E}_{\tau, \Omega}} \int_E \mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau) w. \end{aligned}$$

Ici, n_K désigne l'unité extérieure normale à l'élément K . Notez que u_τ disparaît sur tous les triangles. Par souci de concision, nous définissons les résidus d'élément et de bord

$r : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et $j : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$r|_K = f + \Delta u_\tau - \alpha u_\tau \quad \text{sur chaque } K \in \tau \quad (3.7)$$

$$j|_E = \begin{cases} -\mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau) & \text{si } E \in \mathcal{E}_{\tau, \Omega}; \\ g - n_E \cdot \nabla u_\tau & \text{si } E \in \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_N} \\ 0 & \text{si } E \in \mathcal{E}_{\tau, \Gamma_D} \end{cases} \quad (3.8)$$

En suite, nous obtenons la représentation L^2 suivante du résidu.

$$\langle \mathfrak{R}, w \rangle = \int_{\Omega} rw + \int_{\Sigma} jw; \quad (3.9)$$

Avec l'équation (3.6), cela implique que pour tout $w \in H_D^1(\Omega)$ et tout $w_\tau \in \mathfrak{S}_D^{1,0}(\tau)$

$$\langle \mathfrak{R}, w \rangle = \int_{\Omega} r(w - w_\tau) + \int_{\Sigma} j(w - w_\tau); \quad (3.10)$$

3.5 Une borne supérieure sur l'erreur

Nous fixons une fonction arbitraire $w \in H_D^1(\Omega)$ et choisissons $w_\tau = I_\tau w$ avec l'opérateur de quasi-interpolation de l'équation 1.4.1.

Lemme 3.5.1 *Il existe un constant $M > 0$ tel que pour tout $K \in \tau$ et pour $w \in W^{1,\beta}(K)$ on a :*

$$h_K^2 \|w\|_{0,\beta,\omega_E}^\beta \leq M (\|w\|_{0,\beta,K}^\beta + h_K^\beta \|w\|_{1,\beta,K}^\beta). \quad (3.11)$$

Preuve 3.5.1 Soit $\widehat{K}$ l'élément de référence et $\mathcal{F}_K$ l'application affine de $\widehat{K}$ dans K ; $\mathcal{F}_K(\widehat{x}) = A_K \widehat{x} + B_K$. Pour $w \in W^{1,\beta}(K)$ posons $\widehat{w} = w \circ \mathcal{F}_K$, alors $\widehat{w} \in W^{1,\beta}(\widehat{K})$. Soit t un côté de K alors $\widehat{t} = (\mathcal{F}_K)^{-1}(t)$ est un côté de $\widehat{K}$ et on a :

$$\int_t |w|^\beta dx = \frac{h_t}{h_{\widehat{t}}} \int_{\widehat{t}} |w(\mathcal{F}_K(\widehat{x}))|^\beta d\widehat{x} = h_t \int_{\widehat{t}} |\widehat{w}|^\beta d\widehat{x}$$

d'où :

$$\int_{\omega_E} |w|^\beta dx \leq h_K \int_{\widehat{\omega}_E} |\widehat{w}|^\beta d\widehat{x}. \quad (3.12)$$

L'application trace de $W^{1,\beta}(\widehat{K})$ dans $\mathbf{L}^\beta(\widehat{\omega}_E)$ étant continue alors il existe $M > 0$ tel que

$$\|\widehat{w}\|_{0,\beta,\widehat{\omega}_E}^\beta \leq \widehat{M} \|\widehat{w}\|_{1,\beta,\widehat{K}}^\beta = \widehat{M} (\|\widehat{w}\|_{0,\beta,\widehat{K}}^\beta + \|\widehat{w}\|_{1,\beta,\widehat{K}}^\beta).$$

On utilise les résultats de Ciarlet [1978] :

$$|\widehat{w}|_{0,\beta,\widehat{K}} \leq |\det(A_K)|^{-\frac{1}{\beta}} |w|_{0,\beta,K} \quad (3.13)$$

$$|\widehat{w}|_{1,\beta,\widehat{K}} \leq \|A_K\| |\det(A_K)|^{-\frac{1}{\beta}} |w|_{1,\beta,K}, \quad \|A_K\| \leq M h_K. \quad (3.14)$$

Et

$$|\det(A_K)| \frac{\text{mes}(K)}{\text{mes}(\widehat{K})} = 2 \text{mes}(K).$$

où M désigne une constante indépendante de h et $\|A_K\|$ la norme matricielle de A_K . On a alors :

$$\begin{aligned} \|\widehat{w}\|_{0,\beta,\widehat{\omega}_E}^\beta &\leq M (|w|_{0,\beta,K}^\beta + \|A_K\|^\beta |w|_{1,\beta,K}^\beta) / |\det(A_K)| \\ &\leq M (|w|_{0,\beta,K}^\beta + h_K^\beta |w|_{1,\beta,K}^\beta) / \text{mes}(K) \end{aligned}$$

La triangulation étant supposée régulière, il existe σ_1 et $\sigma_2 > 0$ indépendant de h tels que : $\sigma_1 h_K^2 \leq \text{mes}(K) \leq \sigma_2 h_K^2$ pour tout $K \in \tau$. On a alors :

$$h_K^2 \|w\|_{0,\beta,\omega_E}^\beta \leq M (\|w\|_{0,\beta,K}^\beta + h_K^\beta \|w\|_{1,\beta,K}^\beta). \quad (3.15)$$

L'inégalité de **Cauchy schwartz** pour les intégrales et la proposition 2.2 donnent alors

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}, w \rangle &= \sum_{K \in \tau} \int_K r(w - I_\tau w) + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \int_E j(w - I_\tau w) \\ &\leq \sum_{K \in \tau} \|r\|_K \|w - I_\tau w\|_K + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \|j\|_E \|w - I_\tau w\|_E \\ &\leq \sum_{K \in \tau} \|r\|_{K^{CA,1}} h_K \|\nabla w\|_{\widehat{\omega}_K} + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \|j\|_{E^{CA,2}} h_E^{\frac{1}{2}} \|\nabla w\|_{\widehat{\omega}_E}. \end{aligned}$$

Invoquer l'inégalité de **Cauchy Schwartz** pour les sommes que cela donne

$$\langle \mathcal{R}, w \rangle \leq \max\{c_{A,1}, c_{A,2}\} \left\{ \sum_{K \in \tau} h_K^2 \|r\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} h_E \|j\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{K \in \tau} \|\nabla w\|_{\widehat{\omega}_K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \|\nabla w\|_{\widehat{\omega}_E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Dans la dernière étape, nous observons que la régularité de forme de τ implique

$$\left\{ \sum_{K \in \tau} \|\nabla w\|_{\tilde{\omega}_K}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \|\nabla w\|_{\tilde{\omega}_E}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq C_\tau \|\nabla w\|$$

Avec un constant C_τ constant qui ne dépend que du paramètre de forme de τ et qui tient compte du fait que chaque élément est compté plusieurs fois sur le côté gauche de cette inégalité.

En combinant ces estimations avec l'égalité (3.4), nous obtenons la borne supérieure suivante pour l'erreur

$$\|\nabla(u - u_\tau)\| \leq C^* \left\{ \sum_{K \in \tau} h_K^2 \|r\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}} h_E \|j\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

Avec $C^* = \max\{c_{A,1}, c_{A,2}\} C_\tau$.

Le côté droit de l'équation (3.16) peut être utilisé comme indicateur d'erreur a posteriori car il n'implique que les données connues f et g , la solution u_τ du problème discret et les données géométriques de la partition. L'inégalité (3.16) implique que l'indicateur d'erreur a posteriori est fiable en ce sens qu'une inégalité de la forme "indicateur d'erreur $\leq$ tolérance" implique que l'erreur vraie est également inférieure à la tolérance jusqu'à la constante multiplicative C^* .

Nous voulons prouver que l'indicateur d'erreur est également efficace dans le sens où une inégalité de la forme "indicateur d'erreur $\geq$ tolérance" implique que l'erreur vraie est également supérieure à la tolérance, éventuellement jusqu'à une autre constante multiplicative.

Pour les fonctions générales f et g , l'évaluation exacte des intégrales sur le côté droit de l'équation (3.16) peut être prohibitive, voire impossible.

Les intégrales doivent ensuite être approximées par des formules de quadrature appropriées. Alternativement, les fonctions f et g peuvent être approximées par des fonctions plus simples, par exemple : les fonctions polynomiales par morceaux et les intégrales résultantes peuvent être évaluées exactement. Souvent, les deux approches sont équivalentes.

3.6 Une borne inférieure sur l'erreur

Afin de prouver l'efficacité annoncée, nous remplaçons sur les éléments et les arêtes. Respectivement, pour chaque élément K et pour chaque arête E sur la frontière de Neumann, nous fixons

$$\bar{f}_K = \frac{1}{\mu_2(K)} \int_K f, \quad \bar{g}_E = \frac{1}{\mu_1(E)} \int_E g. \quad (3.17)$$

Définition 3.6.1

$$f_\tau = \sum_{K \in \tau} \bar{f}_K \chi_K, \quad g_{\mathcal{E}} = \sum_{E \in \mathcal{E}_\tau} \bar{g}_E \chi_E \quad (3.18)$$

où χ_A désigne la fonction caractéristique de l'ensemble A

3.6.1 Estimation de résidu intérieur " r "

Définition 3.6.2 Soit $\bar{r}$ une approximation discontinue par morceau du résidu intérieur r sur l'élément K d'un sous-espace de dimension finie et on définit comme :

$$\bar{r} = \bar{f}_K + \Delta u_\tau - \alpha u_\tau$$

La preuve dont l'estimateur fournit une borne bilatérale sur l'erreur vraie utilise l'équation résiduelle (3.10) conjointement avec des choix spéciaux de la fonction w_K

La première tâche consiste à délimiter la quantité $\|r\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ en fonction de la norme de l'erreur vraie évaluée sur un voisinage de l'élément K .

Par exemple, si l'approximation de Galerkin originale se compose de fonctions affines par morceaux sur des éléments triangulaires, alors on utiliserait une approximation affine par morceaux $\bar{r}$ à r sur chaque élément. Notez qu'il n'y a aucune obligation que l'approximation soit continue à travers les frontières des éléments.

L'application du théorème 3.5 donne

$$\|\bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \leq c_{I,1}^2 \int_{\Omega} \psi_K \bar{r}^2 dx. \quad (3.19)$$

La fonction $w_K = \bar{r}\psi_K = (\bar{f}_K + \Delta u_\tau - \alpha u_\tau)\psi_K = \alpha_K(\bar{f}_K + \Delta u_\tau - \alpha u_\tau) \prod_{x \in K \cap \mathcal{N}_\tau} \lambda_x$ disparaît à la frontière de l'élément K et par conséquent, w_K peut être étendu au reste du domaine en tant que fonction continue en définissant sa valeur à l'extérieur de l'élément comme étant nulle. La fonction résultante, encore notée w_K appartient à l'espace V puisque w_K est non nul sur l'élément K et disparaît sur la frontière $\partial\Omega$.

Ainsi, l'insertion de w_K dans l'équation résiduelle (3.10) donne

$$\begin{aligned} a(u - u_\tau, w_K) &= a(u - u_\tau, \bar{r}\psi_K) \\ &= \int_K \psi_K \bar{r} r dx \\ &= \int_K \nabla(u - u_\tau) \cdot \nabla w_K + \alpha(u - u_\tau) w_K. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Et donc nous ajoutons $\int_K (\bar{r} - r)w_K = \int_K (\bar{f}_K - f)w_K$ des deux côtés de cette équation et obtenir

$$\int_K \psi_K \bar{r}^2 dx = \int_K \psi_K \bar{r}(\bar{r} - r) dx + a(u - u_\tau, \bar{r}\psi_K) \quad (3.21)$$

Le premier terme sur le côté droit peut être borné à l'aide de l'inégalité de Cauchy Schwartz 1.2.3

$$\int_K \psi_K \bar{r}(\bar{r} - r) dx \leq \|\psi_K \bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \|\bar{r} - r\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad (3.22)$$

Puis, en appliquant la deuxième partie du théorème 3.5 nous obtenons

$$\|\psi_K \bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(K)} \leq c_{I,2} \|\bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(K)}. \quad (3.23)$$

Le second terme est également traité en appliquant l'inégalité de Cauchy Schwartz (1.2.3)

$$a(u - u_\tau, \bar{r}\psi_K) \leq \|u - u_\tau\|_K \|\psi_K \bar{r}\|_{H^1(K)} \quad (3.24)$$

Puis, en appliquant à nouveau la deuxième par partie du théorème 3.5, nous obtenons

$$\|\psi_K \bar{r}\|_{H^1(K)} \leq c_{I,2} h_K^{-1} \|\bar{r}\|_{L^2(K)}. \quad (3.25)$$

Par conséquent, l'insertion de ces estimations dans l'équation (3.21) donne

$$\int_K \psi_K \bar{r}^2 dx \leq c_{I,2} \|\bar{r}\|_{L^2(K)} \|\bar{r} - r\|_{L^2(K)} + c_{I,2} h_K^{-1} \|\nabla(u - u_\tau)\|_K \|\bar{r}\|_{L^2(K)} \quad (3.26)$$

Cela prouve que

$$h_K \|\bar{r}\|_K \leq c_{I,1}^2 c_{I,2} \|\nabla(u - u_\tau)\|_K + c_{I,1}^2 h_K \|\bar{r} - r\|_K. \quad (3.27)$$

Et rappeler (3.19) conduit à la borne

$$\|\bar{r}\|_{L^2(K)} \leq c_{I,1}^2 \left\{ c_{I,2} h_K^{-1} \|\nabla(u - u_\tau)\|_K + \|\bar{r} - r\|_{L^2(K)} \right\} \quad (3.28)$$

Le bord souhaite sur le résiduel réel découle de cette estimation et d'une

$$\|r\|_{L^2(K)} \leq c_{I,1}^2 \left\{ c_{I,2} h_K^{-1} \|\nabla(u - u_\tau)\|_K + \|\bar{r} - r\|_{L^2(K)} \right\} \quad (3.29)$$

En suite, nous considérons un bord intérieur arbitraire $E \in \mathcal{E}_\Omega$ et insérons la fonction

$$w_E = -\mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau) \psi_E = -\beta_E \mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau) \prod_{x \in E \cap \mathcal{N}_\tau} \lambda_x \quad (3.30)$$

Dans l'équation (3.10). Compte tenu des équations (3.1) et (3.2), cela donne

$$\begin{aligned} \int_E \mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau)^2 \psi_E &= \int_E j w_E \\ &= \int_{\omega_E} (\nabla(u - u_\tau) \cdot \nabla w_E - \alpha(u - u_\tau) w_E) - \int_{\omega_E} r w_E \\ &= \int_{\omega_E} (\nabla(u - u_\tau) \cdot \nabla w_E - \alpha(u - u_\tau) w_E) - \sum_{K \subset \omega_E} \int_K \bar{r} w_E - \sum_{K \subset \omega_E} \int_K (r - \bar{r}) w_E. \end{aligned}$$

La proposition 1.8 implique pour le côté gauche de cette équation

$$\int_E \mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau)^2 \psi_E \geq c_{I,3}^{-2} \|\mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau)\|_E^2 \quad (3.31)$$

Et pour les trois termes sur son côté droit

$$\begin{aligned} a(u - u_\tau, w_E) &= \int_{\omega_E} (\nabla(u - u_\tau) \cdot \nabla w_E - \alpha(u - u_\tau) w_E) \\ &\leq \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\omega_\tau} \|\nabla w_E\|_{\omega_E} \\ &\leq \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\omega_\tau} c_{I,4} h_E^{-\frac{1}{2}} \|\mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau)\|_{L^2(E)} \end{aligned}$$

Comme nous l'avons pour la deuxième partie

$$\begin{aligned} \sum_{K \subset \omega_E} \int_K \bar{r} w_E &\leq \sum_{K \subset \omega_E} \|\bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(K)} \|w_E\|_{\mathbf{L}^2(K)} \\ &\leq \sum_{K \subset \omega_E} \|\bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(K)} \cdot c_{I,5} h_E^{\frac{1}{2}} \|\mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau)\|_{H^1(E)}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \sum_{K \subset \omega_E} \int_K (r - \bar{r}) w_E &\leq \sum_{K \subset \omega_E} \|r - \bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(K)} \|w_E\|_{\mathbf{L}^2(K)} \\ &\leq \sum_{K \subset \omega_E} \|r - \bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(K)} c_{I,5} h_E^{\frac{1}{2}} \|\mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau)\|_{\mathbf{L}^2(E)} \end{aligned}$$

Cela donne

$$c_{I,3}^{-2} \|\mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau)\|_{\mathbf{L}^2(E)} \leq c_{I,4} h_E^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\omega_E} + \sum_{K \subset \omega_E} c_{I,5} h_E^{\frac{1}{2}} \|\bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(K)} + \sum_{K \subset \omega_E} c_{I,5} h_E^{\frac{1}{2}} \|r - \bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(K)}$$

En combinant cette estimation avec l'inégalité (3.28), nous obtenons

$$h_E^{\frac{1}{2}} \|\mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau)\|_{\mathbf{L}^2(E)} \leq c_{I,3}^2 [c_{I,4} + c_{I,1}^2 c_{I,2} c_{I,5}] \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\omega_E} + c_{I,3}^2 c_{I,5} [1 + c_{I,1}^2] \sum_{K \subset \omega_E} h_K \|r - \bar{r}\|_{\mathbf{L}^2(K)}. \quad (3.32)$$

3.6.2 Estimation de résidu bord " R "

Enfin, nous fixons une arête E sur la frontière de Neumann, notons $K \subset \tau$ et on défini

$$R = g_E - n_E \cdot \nabla u_\tau$$

Il reste à estimer le bord résiduelle $\|R\|_{\mathbf{L}^2(E)}$ en fonction de la norme de l'erreur vraie évaluée sur la paire d'éléments partageant l'arête E . L'argument procède de façon analogue au traitement du résidu intérieur.

Soit $\bar{R}$ une approximation du résidu bord ou des sauts à partir d'un espace de dimension finie approprié. Par exemple, si l'approximation de Galerkin originale a été construite en utilisant des fonctions affines par morceaux sur des triangles, alors on sélectionnerait $\bar{R}$ pour être la valeur moyenne de R sur l'arête E . Comme précédemment, il est obligatoire que l'approximation soit continue entre les bords différents. La première partie du théorème 2.4.3 montre que

$$\|\bar{R}\|_{\mathbf{L}^2(E)}^2 \leq c_{I,3}^2 \int_E \psi_E \bar{R}^2 ds \quad (3.33)$$

Soit $\tilde{\omega}_E$ le sous-domaine de Ω consistant en l'union du côté E et de la paire d'éléments K et K' , disons, partageant le côté commun E .

La fonction $w_E = \bar{R}\psi_E = (\bar{g}_E - n_E \cdot \nabla u_\tau)\psi_E$ disparaît à la frontière du sous-domaine $\tilde{\omega}_E$ et est continue. L'extension de w_E de zéro à l'ensemble du domaine Ω donne une fonction w_E à partir de l'espace V . L'équation résiduelle (3.10), avec ce choix de w_E , donne

$$a(u - u_\tau, \bar{R}\psi_E) = \int_{\tilde{\omega}_E} \psi_E r \bar{R} dx + \int_E \psi_E R \bar{R} ds \quad (3.34)$$

Fin donc

$$\int_E \psi_E \bar{R}^2 ds = \int_E \psi_E \bar{R}(\bar{R} - R) ds + a(u - u_\tau, \psi_E \bar{R}) - \int_{\tilde{\omega}_E} \psi_E r \bar{R} ds \quad (3.35)$$

Chacun de ces termes est traité à l'aide du théorème 2.4.3 et de l'inégalité de Cauchy Schwartz. Le premier terme est estimé

$$\begin{aligned} \int_E \psi_E \bar{R}(\bar{R} - R) ds &\leq \|\psi_E \bar{R}\|_{\mathbf{L}^2(E)} \|\psi_E(\bar{R} - R)\|_{\mathbf{L}^2(E)} \\ &\leq c_{I,3}^2 \|\bar{R}\|_{\mathbf{L}^2(E)} \|\bar{R} - R\|_{\mathbf{L}^2(E)} \end{aligned}$$

Tandis que le second terme est traité en faisant valoir

$$\begin{aligned} a(u - u_\tau, \psi_E \bar{R}) &\leq c_{I,4} \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\tilde{\omega}_E} \|\psi_E \bar{R}\|_{H^1(\tilde{\omega}_E)} \\ &\leq c_{I,4} h_E^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\tilde{\omega}_E} \|\bar{R}\|_{\mathbf{L}^2(E)} \end{aligned}$$

Et le terme final est borné

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\omega}_E} \psi_E r \bar{R} ds &\leq \|r\|_{\mathbf{L}^2(\tilde{\omega}_E)} \|\psi_E \bar{R}\|_{\mathbf{L}^2(\tilde{\omega}_E)} \\ &\leq c_{I,5} h_E^{\frac{1}{2}} \|r\|_{\mathbf{L}^2(\tilde{\omega}_E)} \|\bar{R}\|_{\mathbf{L}^2(E)} \end{aligned}$$

En conséquence de ces estimations et le bord (3.33), nous concluons que :

$$\|\bar{R}\|_{\mathbf{L}^2(E)} \leq c_{I,3}^2 \left\{ \|\bar{R} - R\|_{\mathbf{L}^2(E)} + c_{I,4} h_E^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\tilde{\omega}_E} + c_{I,5} h_E^{\frac{1}{2}} \|r\|_{\mathbf{L}^2(\tilde{\omega}_E)} \right\} \quad (3.36)$$

À son tour, cela conduit à l'estimation souhaitée pour le résiduel $\|R\|_{\mathbf{L}^2(E)}$ à partir de l'inégalité du triangle et en appliquant l'estimation (3.29) pour les internes résiduels intérieurs de l'erreur vraie, donnant

$$\|R\|_{\mathbf{L}^2(E)} \leq C \left\{ h_E^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\tilde{\omega}_E} + h_E^{\frac{1}{2}} \|\bar{r} - r\|_{\mathbf{L}^2(\tilde{\omega}_E)} + \|\bar{R} - R\|_{\mathbf{L}^2(E)} \right\} \quad (3.37)$$

Résumant ces évolutions, nous avons prouvé.

Théorème 3.6.1 *Soit r et R désignent les résidus intérieurs et bords associés à l'approximation par les éléments finis construite à partir du sous-espace V_h . Supposons que $\bar{r}$ et $\bar{R}$ sont des approximations continues par morceaux des résidus intérieurs et bords construits à partir de sous-espaces de dimension finie. Puis*

$$\|r\|_{\mathbf{L}^2(K)} \leq c_{I,1}^2 \left\{ c_{I,2} h_K^{-1} \|\nabla(u - u_\tau)\|_K + \|\bar{r} - r\|_{\mathbf{L}^2(K)} \right\} \quad (3.38)$$

et

$$\|R\|_{\mathbf{L}^2(E)} \leq C \left\{ h_E^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\tilde{\omega}_E} + h_E^{\frac{1}{2}} \|\bar{r} - r\|_{\mathbf{L}^2(\tilde{\omega}_E)} + \|\bar{R} - R\|_{\mathbf{L}^2(E)} \right\}. \quad (3.39)$$

où C un positif dépendant uniquement de la régularité de forme des éléments et de la sélection des sous-espaces de dimension finie utilisés pour approximer les résidus intérieurs et bords.

3.6.3 Preuve des bords bilatéraux sur l'erreur

Les bornes sur les résidus

$$\|r\|_{\mathbf{L}^2(K)} \leq c_{I,1}^2 \left\{ c_{I,2} h_K^{-1} \|\nabla(u - u_\tau)\|_K + \|\bar{r} - r\|_{\mathbf{L}^2(K)} \right\} \quad (3.40)$$

et

$$\|R\|_{\mathbf{L}^2(E)} \leq C \left\{ h_E^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\tilde{\omega}_E} + h_E^{\frac{1}{2}} \|\bar{r} - r\|_{\mathbf{L}^2(\tilde{\omega}_E)} + \|\bar{R} - R\|_{\mathbf{L}^2(E)} \right\}. \quad (3.41)$$

Données dans le théorème 3.6.1 sont utilisée dans l'analyse de l'efficacité de l'estimateur d'erreur comme suite.

Tout d'abord, il est nécessaire de sélectionner les sous-espaces de dimension finie avec les quels rapprocher les résidus intérieurs et bords. Le résidu intérieur r , bord à un seul élément, est donné par :

$$r = f + \Delta u_\tau - \alpha u_\tau$$

Maintenant, l'approximation des éléments finis u_τ est construite à partir d'un supspace de dimension finie composé de polynômes (retrait).

Ainsi, l'approximation $\bar{r}$ de l'élément en résiduel K peut être construite à partir du sous-espace de dimension finie couvert par des fonctions de forme $w_\tau|_K$ et $\Delta w_\tau|_K$ où w_τ appartient au sous-espace d'élément fini $\mathcal{S}_D^{1,0}$.

De même, le sous-espace de dimension finie utilisé pour approximer le résidu de bord peut être construit d'une manière implicite similaire. Par conséquent, le terme de perturbation $r - \bar{r}$ se réduit à la forme $f - \bar{f}_K$.

Le terme de perturbation $R - \bar{R}$ pour le résidu de bord disparaît réellement sur les bords intérieurs et se réduit à $g - \bar{g}_E$ sur la frontière extérieure de Neumann.

Par conséquent :

$$\|r\|_{\mathbf{L}^2(K)} \leq c_{I,1}^2 \left\{ c_{I,2} h_K^{-1} \|\nabla(u - u_\tau)\|_K + \|\bar{r} - r\|_{\mathbf{L}^2(K)} \right\} \quad (3.42)$$

et

$$\|R\|_{\mathbf{L}^2(E)} \leq C \left\{ h_E^{-\frac{1}{2}} \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\tilde{\omega}_E} + h_E^{\frac{1}{2}} \|\bar{r} - r\|_{\mathbf{L}^2(\tilde{\omega}_E)} + \|\bar{R} - R\|_{\mathbf{L}^2(E)} \right\}. \quad (3.43)$$

L'indicateur d'erreur local $\eta_{\mathcal{R},K}$ associé à l'élément K peut alors être borné par :

$$\eta_{\mathcal{R},K}^2 \leq C_* \left\{ \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\omega_K}^2 + h_K^2 \|f - \bar{f}_K\|_{L^2(\omega_K)}^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{K,\Gamma_N}} h_E \|g - \bar{g}_E\|_{L_E^2}^2 \right\} \quad (3.44)$$

où le constant C_* ne dépend que de la régularité C_τ de l'élément. L'estimation montre que l'indicateur d'erreur est local dans un certain sens, dans la mesure où les termes figurant à droite n'impliquent que des contributions de l'élément réel et de ses voisins immédiats.

3.7 Estimations d'erreur à posteriori

Les résultats de ce chapitre peuvent être résumés comme suit :

Théorème 3.7.1 Notons respectivement u et u_τ les solutions uniques des problèmes (2.2) et (2.34).

Pour chaque élément $K \in \tau$ définir l'indicateur d'erreur résiduel à posteriori $\eta_{\mathcal{R},K}$ par

$$\eta_{\mathcal{R},K} = \left\{ h_K^2 \|\bar{f}_K + \Delta u_\tau\|_K^2 + \frac{1}{2} \sum_{E \in \mathcal{E}_{K,\Omega}} h_E \|\mathbb{J}_E(n_E \cdot \nabla u_\tau)\|_E^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{K,\Gamma_N}} h_E \|\bar{g}_E - n_E \cdot \nabla u_\tau\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} ; \quad (3.45)$$

où $\bar{f}_K$ et $\bar{g}_E$ sont les moyennes de f et g sur K et E , respectivement, définies dans l'équation (3.17).

Il existe deux constantes C^* et C_* , qui ne dépendent que du paramètre de forme de τ , de sorte que les estimations

$$\|\nabla(u - u_\tau)\| \leq C^* \left\{ \sum_{K \in \tau} \eta_{\mathcal{R},K}^2 + \sum_{K \in \tau} h_K^2 \|f - \bar{f}_K\|_K^2 + \sum_{E \in \mathcal{E}_{\Gamma_N}} h_E \|g - \bar{g}_E\|_E^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.46)$$

et

$$\eta_{\mathcal{R},K}^2 \leq C_* \left\{ \|\nabla(u - u_\tau)\|_{\omega_K}^2 + \sum_{K' \subset \omega_K} h_{K'}^2 \|f - \bar{f}_{K'}\|_{K'}^2 + \sum_{E \subset \mathcal{E}_{K,\Gamma_N}} h_E \|g - \bar{g}_E\|_{L_E^2}^2 \right\} \quad (3.47)$$

Tenir pour tous les éléments $K \in \tau$.

Remarque 3.1

Le facteur $\frac{1}{2}$ multipliant le deuxième terme dans $\eta_{\mathcal{R},K}$ tient compte du fait que chaque bord intérieur est compté deux fois lors de l'addition de tous $\eta_{\mathcal{R},K}^2$. Notez que $\Delta u_\tau - \alpha u_\tau = 0$ sur tous les triangles.

Remarque 3.2

Le premier terme de $\eta_{\mathcal{R},K}$ est lié au résidu de u_τ par rapport à la forme forte de l'équation différentielle. Les deuxièmes et troisièmes termes de $\eta_{\mathcal{R},K}$ sont liés à l'opérateur de frontière qui est canoniquement associé à la forme forte et faible de l'équation différentielle. Ces termes limites sont cruciaux lorsque l'on considère les discrétisations d'éléments finis d'ordre intérieur comme cela est fait ici.

Remarque 3.3

Les termes $h_K \|f - \bar{f}_K\|_K$ et $h_E^{\frac{1}{2}} \|g - \bar{g}_E\|_E$ dans les estimations du théorème 3.7.1 sont souvent appelés oscillation des données. Lors de la définition de l'indicateur d'erreur avec les données d'origine f et g , ils apparaissent uniquement dans la limite inférieure de l'erreur.

Nous avons choisi de baser l'indicateur d'erreur sur les données discrètes $\bar{f}_K$ et $\bar{g}_E$, car cela facilite son calcul pratique

Proposition 3.1 *Les termes d'oscillation des données sont en général des perturbations d'ordre supérieur des autres termes. Dans des situations particulières, cependant, ils peuvent être dominants. Pour voir cela, supposons que τ contient au moins un triangle, choisissez un triangle $K_0 \in \tau$ et une fonction de $\mathbf{C}^\infty$ non nul avec prise en charge dans K_0 et considérons le problème (2.1) avec $f = -\Delta \rho_0 + \alpha \rho_0$ et $\Gamma_D = \Gamma$. Depuis $\int_{K_0} f = -\int_{K_0} (\Delta \rho_0 - \alpha \rho_0) = 0$ et $f = 0$ à l'extérieur K_0 , on a $\bar{f}_K = 0$ pour tous $K \in \tau$. Depuis $\int_{\Omega} f v_\tau = -\int_{K_0} (\Delta \rho_0 v_\tau - \alpha \rho_0 v_\tau) = -\int_{K_0} \rho_0 (\Delta v_\tau - \alpha v_\tau) = 0$ pour tous $v_\tau \in \mathbf{S}_D^{1,0}(\tau)$, la solution exacte du problème (2.34) est u_τ . Par conséquent, nous avons $\eta_{K,K} = 0$ pour tous $K \in \tau$, mais $\|\nabla(u - u_\tau)\| \neq 0$. Cet effet n'est pas borné à l'approximation particulière de f considéré ici.*

Puisque ρ_0 est complètement arbitraire, nous rencontrerons toujours des difficultés similaires tant que nous n'évaluerons pas $\|f\|_K$ exactement, ce qui en général est impossible. De toute évidence, ce problème est résolu lors de l'affinage ultérieur du maillage.

3.8 Conclusion

L'erreur résiduelle pour l'estimation d'erreur à posteriori est basée sur la résolution de problèmes résiduels locaux pour l'erreur. L'estimateur est assez sensible au choix du sous-espace utilisé pour approximer le problème. En particulier, l'utilisation d'un espace complet de polynômes n'est pas appropriée, car l'estimateur résultant peut donner des résultats totalement incompatibles avec l'erreur réelle.



CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette mémoire nous avons fait une étude sur des techniques d'estimation d'erreur à posteriori de type résiduel. Bien qu'il existe différentes approches de l'adaptabilité et de l'estimation d'erreur à posteriori, elles sont toutes. Ils sont tous basés sur quelques principes communs. Notre objectif principal est d'élaborer clairement ces principes de base et, ainsi, de donner des lignes directrices pour le développement de schémas adaptatifs pour de nouveaux problèmes.

Dans le chapitre 3, nous présentons l'estimation d'erreur à posteriori de type résiduel plus fréquemment utilisé dans le cadre d'un problème de modèle simple, avec la discrétisation par l'élément fini conforme linéaire ou bilinéaire de problème linéaire non-homogène avec les conditions aux bords mixtes de Dirichlet et Neumann. L'intention est de présenter les principes de base de l'estimation d'erreur à posteriori en utilisant un minimum de notation et de techniques.

Le rôle principal de l'estimation d'erreur à posteriori, qu'elle est donner des informations globales et locales sur l'erreur de la solution numérique et qui peuvent être facilement calculées à partir de la solution numérique donnée et les données de l'équation différentielle.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **A. Bendali.** Méthode des éléments finis .
- [2] **A. Grégoire.** Analyse numérique et optimisation.
- [3] **Raviart P.A. Thomas J.M,** Introduction à l'analyse numerique des equations aux derivees partielles (Masson,2ed,1988)
- [4] **R. Verfurth.** A posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques. J. Comput. Appl. Math. 50 (1994) 67-83.
- [5] **R. Verfurth.** A Posteriori Error Estimation Techniques for Finite Element Methods. Oxford University Press. Oxford, 2013.
- [6] **R. Verfurth.** Adaptive Finite Element Methods.Lecture Notes Winter Term 2013/14
- [7] **Vincent Manet** Méthode des éléments finis
- [8] **Mark Ainsworth .J.Tinsley Oden.**A posteriori error estimation in finite element analysis .
- [9] **Christine Bernardi** . L'analyse a posteriori et ses applications ,laboratoire Jacques-Louis Lions C.N.R.S, et université Pierre et Marie Curie.
- [10] **Wilfrid Houedanou** . Analyse d'erreur a posteriori pour quelques méthodes d'éléments finis mixtes pour le problème de transmission. Stokes-Darcy : Discrétisations isotrope et anisotrope.
- [11] **Mr Medjahed Abdelouhab.** Mémoire magister estimation d'erreur a posteriori de discretisations elements finis en elasticite endommageable .
- [12] **Mekbel Fawzi.** Mémoire magister, etude paramétrique d'un indicateur d'erreur de contact à posteriori pour les problèmes tridimensionnels.
- [13] **Zuqi Tang.** Doctorat de l'université Lill 1, estimateurs d'erreur a posteriori résiduels en éléments finis pour la résolution de problèmes d'électromagnétisme enformulations potentielles.
- [14] **Michel Cazenave.** Méthode des éléments finis approche pratique en mécanique des structures
- [15] **F.-C. Otto and G. Lube. Göttingen.** A Posteriori Estimates for a Non-Overlapping Domain. Received March 31, 1998 ; revised November 17, 1998 . Decomposition Method
- [16] **Eric Blayo.Janvier 2010.** Notes de cours sur la méthode des éléments finis .
- [17] **Martin Vohralík.** A posteriori error estimates for efficiency and error control in numerical simulations. Université Pierre et Marie Curie-Paris 6.

- [18] **Nadir Arada**. Master EDP et applications ,méthode des Éléments Finis .Université de Jijel
Département de Mathématiques.
- [19] **S. Funken. D. Praetorius - P. Wissgott** Efficient Implementation of Adaptive P1-FEM in Mat-
lab .
- [20] **Susanne Hammer**. Residual-Based A Posteriori Error Estimators for two-dimensional Adaptive
Finite Element Methods for the Poisson Equation. Universität Zürich .
- [21] **Patrick Hild and Serge Nicaise** A posteriori error estimations of residual type for Signorini's
problem. Université de Franche-Comté, Laboratoire de Mathématiques de Besançon, UMR CNRS
6623 16 route de Gray, 25030 Besançon, France, e-mail : hild@math.univ-fcomte.fr and Université
de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, MACS, ISTV, F-59313 - Valenciennes Cedex 9, France,
e-mail : snicaise@univ-valenciennes.fr.
- [22] **Adil Majdoubi**. Thèse de doctorat. Analyse d'Erreur a Posteriori pour des Approximations non
Conformes des Equations aux Dérivées Partielles .
- [23] **Grégoire ALLAIRE**.Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles .
- [24] **Vincent Manet** . Méthode des éléments finis .
- [25] Analyse numérique et optimisation . Département de Mathématiques Appliquées.
- [26] **Pavel Solin**. Partial differential equations and the finite element method . The university of texas
at et paso academy of sciences of the czech republic.
- [27] **Jacques Baranger. Hassan El amri** . Estimateurs a posteriori d'erreur pour le calcul adaptatif
d'écoulements quasi-newtoniens .
- [28] **P. G. Ciarlet [1978]** . The Finite Element Method for Elliptic Problems. Studies in Mathematics
and its Applications, Volume 4 ; North-Holland.

Résumé

Dans ce mémoire nous avons présenté une analyse d'estimation erreur à posteriori de type résiduel pour l'approximation linéaire par méthode des éléments finis du problème **linéaire non homogène mixtes de Dirichlet et Neumann** dans l'espace bidimensionnelle.

Ils sont basés sur l'évaluation des résidus locaux par rapport à la forme forte de l'équation différentielle, sur la solution des problèmes locaux avec les conditions aux bords de **Neumann** et sur la solution des problèmes locaux avec les conditions aux bords de **Dirichlet**.

Et produisent des bornes supérieures globales et locales inférieures pour l'erreur vraie.

Mots clés : Estimateurs d'erreur résiduelle à posteriori - méthode de l'élément fini dans la deuxième dimension - bornes supérieures d'erreur - bornes inférieures d'erreur.

ملخص

قدمنا في هذه الأطروحة تحليلاً لتقدير الخطأ الخلفي للنوع المتبقي بالتقريب الخطي لطريقة العناصر المنتهية للمسألة المختلطة الخطية غير المتجانسة لنيومان ودریکلي في البعد الثاني وتستند على تقييم المخلفات المحلية، فيما يتعلق بالصيغة القوية للمعادلة التفاضلية، وعلى حل المشكلات المحلية مع شروط حدود نيومان وكذلك حل المشكلات المحلية بشروط دریکلي. واستنتاج الحدود العليا القصوى والمحلية الدنيا للخطأ الحقيقي.

الكلمات المفتاحية: تقدير الخطأ البعدي الخلفي المتبقي - طريقة العناصر المنتهية في البعد ٢ - الحدود العليا للخطأ - الحدود الدنيا للخطأ.

Abstract

In this thesis we have presented an analysis of a posteriori error estimation of residual type for the linear approximation by finite element method of the **mixed non homogeneous linear problem of Dirichlet and Neumann** in two-dimensional space.

They are based on the evaluation of local residuals with respect to the strong form of the differential equation, on the solution of local problems with Neumann boundary conditions, and on the solution of local problems with Dirichlet boundary conditions.

And produce lower global and local upper bounds for true error.

Key words : Residual a posteriori error estimators - method the finite element in the second dimension - upper bounds of error - lower bounds of error .