

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique



Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie mécanique

Spécialité : Energétique et Énergies renouvelables

Thème

**Etude de la convection de Rayleigh Bénard par
la méthode Lattice Boltzman**

Devant le jury composé de :

Mr. MENECEUR Redah	Président
Mr. LETEYEM Fathi	Examineur
Mr. ATIA Med ELhadi	Examineur
Dr. BOUKHARI Ali	Encadreur

Présenté par :

- ZAHOUANI Khair Eddine
- BERREHOUMA Med saleh

2016-2017

Remerciements

En premier lieu nous remercions Dieu tout puissant, qui nous a donné le courage, la force et la volonté pour réaliser ce modeste travail.

Nos sincères et chaleureux remerciements à Mr. Boukhari Ali pour son aide, son appui moral et ses qualités humaines.

Nous tenons à remercier nos parents car ce travail représente un petit fruit de leur souffrance et qui sans eux nous ne pouvons traverser ces longues années d'études et de travail.

J'adresse mes vifs remerciements à tous les professeurs ayant contribué à notre formation trouvent ici notre profonde reconnaissance pour ses conseils, ses encouragements et ses qualités humaines.

Enfin, nous remercions tous ce qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

**Zehouani Khair eddine
BERREHOUMA Med saleh**

DEDICACE

C'est avec toute mon affection que

je dédie ce modeste travail :

*A celui qui m'a donné vie et qui m'as apporté sans cesse
son amour, mon père.*

*A Ma très chère mère qui m'a apporté sans cesse amour,
soutien et encouragement ; et qu'elle trouve ici l'expression
de mes vives reconnaissances.*

Mes très chères frères et sœurs.

*A tout mes amis, et en particulier : BERREHOUMA Med saleh, Behir Badr eddine,
Oun Brahim, Debbar Brahim et tous les étudiants du Département de génie
mécanique Deuxième année de Master de l'année 2017*

Zehouani Khair eddine

DEDICACE

C'est avec toute mon affection que

je dédie ce modeste travail :

A celui qui m'a donné vie et qui m'a apporté sans cesse

son amour, mon père.

A Ma très chère mère qui m'a apporté sans cesse amour,

soutien et encouragement ; et qu'elle trouve ici l'expression

de mes vives reconnaissances.

Mes très chères frères et sœurs.

*A tout mes amis, et en particulier : Ghernoug M^{ed} sallama , Zehouani Khair eddine,
Chekima Khalel , Redouani hamza , Debbar Brahim , Guerfi Abdel ghani et tous les
étudiants du Département de génie mécanique Deuxième année de Master de l'année*

2017

Berrehouma Mouhammed Salah

Sommaire

Remerciements	i
Dédicace	ii
Sommaire	iii
Table des figures	v
Liste des tableaux	vii
Nomenclature	viii
Introduction générale	1

Chapitre I : Généralités et revue bibliographique

I- Généralités	3
I-1 Transfer de chaleur par convection naturelle	4
I.1.1 Lois fondamentales de la dynamique.	4
I.1.2 Approximation de Boussinesq.....	5
I.1.3 Le nombre de Prandtl.....	5
I.1.4 Le nombre de Rayleigh.....	5
I.1.5 Le nombre de Nusselt.....	5
I-2 La convection naturelle en milieu confiné	6
I -2.1 La cavité aux parois verticales différentiellement chauffées.....	7
I -2.2 La convection naturelle de Rayleigh-Bénard: cavité aux parois horizontale différentiellement chauffées.....	8
I-3 Domaines d'apparition de la convection de Rayleigh-Bénard	10
I-4 Revue bibliographique	12

Chapitre II : Modèle mathématique

II.1 Equations gouvernantes	19
II.1.1 L'équation de continuité.....	19
II.1.2 Les équations de quantité de mouvement	19
II.1.3 L'équation de l'énergie.....	20
II.2 Modèle mathématique du problème étudié	20
II.2.1 Equations dimensionnelles.....	20
II.2.2 Equations adimensionnelles	23

Chapitre III : Méthode de Boltzmann sur réseau (LBM)

III.1 Introduction	25
III .2 Equations aux dérivées partielles générales	25
III.3 Méthodes traditionnelles en dynamique des fluides	26
III.4 Méthode de Boltzmann	26
III.4.1 Théorie cinétique.....	28
III.4.2 Équation de Boltzmann.....	29
III.4.3 Approximation BGK.....	29
III.5 Cadre de base de la méthode de Boltzmann sur réseau	31
I.5.1 Réseaux et vitesses discrètes.....	31

III.5.2 Fonction de distribution d'équilibre et variables macroscopiques.....	31
III.5.3. Processus de collision-propagation.....	34
III.5.4. Viscosité.....	35
III.5.5 Incorporation du terme force.....	35
III.5.6 Conditions aux limites.....	36
III.5.7 Développement multiéchelle de Chapman-Enskog.....	39
III.6 .Hydrodynamique LBM.....	41
III.6.1 Modèle complètement incompressible.....	42
III.6.2 Modèle incompressible de He et Luo.....	42
III.6.3. Modèle compressible conventionnel.....	42
III.7. Modèles LBM thermiques.....	42
III.7.1 Extension aux écoulements non-isothermes.....	42
III.7.2 Modèle du scalaire passif.....	42
III.7.3 Modèle énergétique.....	43
III.7.4 Modèle énergétique simplifié.....	44
III.8. Méthode LBM dans le cadre de CFD.....	44
III.8.1 Dynamique des fluides et au-delà.....	44
III.8.2 Méthode LBM via les méthodes conventionnelles.....	44
III.8.3 Avantages de la méthode LBM.....	45
III.9. Conclusion.....	45
<u>Chapitre IV : Résultats et discussion</u>	
IV- a) - Validation des calculs	46
IV.1 Régime permanent.....	46
IV.2 Régime transitoire.....	50
IV- b) - Effet du maillage.....	50
IV- c) . Instabilité de R-B dans les cavités simples en air $Pr=0.71$	51
IV- d) . Instabilité de R-B dans les cavités simples en eau $Pr=7.01$.....	57
IV- e) Limites et diagramme de stabilité.....	61
Conclusion et recommandation.....	62
Références bibliographiques.....	63
Résumé en français.....	67
Résumé en anglais.....	67
Résumé en arabe.....	67

Table des figures

I.1	Convection naturelle le long d'une plaque plane verticale	4
I.2	Cavité aux parois verticales différentiellement chauffées.....	7
I.3	Champs dynamiques et thermiques expérimentaux au sein	8
I.4	Convection naturelle de Rayleigh-Bénard.....	9
I.5	La circulation du Gulf Stream.....	10
I.6	Densité de l'eau de mer selon sa température et sa salinité.....	11
I.7	Température et salinité sont à la base de la circulation thermohaline.....	12
I.8	Canal rainuré périodiquement.....	13
I.9	Géométrie considérée dans la référence.....	13
I.10	Géométrie du problème.....	14
I.11	Configuration du problème.....	14
I.12	Géométrie du problème.....	15
I.13	Géométrie du problème.....	16
I.14	Géométrie de la référence.....	17
I.15	Géométrie du problème.....	17
I.16	Géométrie du problème.....	18
II.1	Conditions aux limites et lieux des sondes choisies arbitrairement.....	22
III.1	Différences entre les deux types d'approches numériques.....	26
III.2	Les différences approches numériques en mécanique des fluides.....	27
III.3	Schéma de réseau discrétisé par le modèle D2Q9.....	33
III.4	Représentation schématique du mouvement de particules	36
IV.1	Distribution de la température dans différentes stations de l'enceinte.....	48
IV.3	Comparaison des isothermes.....	50
IV.4	La transition de la température près de la paroi chaude.....	52
IV.5	La transition de la température près de la paroi chaude	52
IV.6	La transition de la température près de la paroi chaude	52
IV.7	Les lignes courant présentant deux zones de recirculation symétriques...	53
IV.8	Températures isothermes dans la cavité de rapport d'aspect 2.....	53
IV.9	Contours des vitesses dans la cavité de rapport d'aspect 2.....	53
IV.10	Spectre de l'énergie de la vitesse U.....	54
IV.11	La transition de la température près de la paroi chaude	54
IV.12	La transition de la température près de la paroi chaude	55
IV.13	La transition de la température près de la paroi chaude	55
IV.14	Lignes de courant tracées pour une cavité de rapport d'aspect 0.5.....	55
IV.15	Isothermes de la convection R-B à $Ra_{cr}=130 \times 10^3$	56
IV.16	Iso-valeurs de vitesse à $Ra_{cr}=130 \times 10^3$ $V_m = 0.019$	56
IV.17	Evolution temporelle de la température adimensionnelle.....	57
IV.18	Evolution temporelle de la vitesse adimensionnelle.....	57
IV.19	La transition de la température adimensionnelle.....	57
IV.20	Lignes de courant pour le cas de convection R-B.....	58
IV.21	Les lignes isothermes pour le cas de convection.....	58

IV.22	Iso-valeurs de la vitesse adimensionnelle.....	59
IV.23	Spectre de l'énergie de la vitesse U.....	59
IV.24	La transition de la vitesse u près de la paroi chaude.....	60
IV.25	Evolution temporelle de la vitesse adimensionnelle v.....	60
IV.26	Historique de la température adimensionnelle.....	60
IV.27	Lignes de courant pour le cas étudié.....	61
IV.28	Lignes isothermes calculées à $Ra_{\square} = 109.695 \times 10^3$	61
IV.29	Iso-valeurs de la magnitude du vecteur de vitesse.....	61
IV.30	Diagramme de stabilité Ra_{cr} vs. Rapport d'aspect de la cavité.....	62

Liste des tableaux

III.1 : Propriétés des modèles LBM couramment utilisés.....	32
IV.1 : Comparaisons des résultats obtenus pour $\mathbf{Ra} = \mathbf{1}^4$	48
IV.2 : Comparaisons des résultats obtenus pour $\mathbf{Ra} = \mathbf{1}^5$	48
IV.3 : Comparaisons des résultats obtenus pour $\mathbf{Ra} = \mathbf{1}^6$	49
IV.4 : Effect du maillage sur les grandeurs maximales.....	51
IV.5 : Effect du maillage sur les paramètres critiques ($\mathbf{Ra}_c$, $\mathbf{Fr}_c$).....	51
IV.6 : Valeurs critiques du nombre de Rayleigh pour l'air et l'eau.....	62

Nomenclature

Cp:	Chaleur spécifique à pression constante [J/kg.K].
fr:	Fréquence critique [Hz].
Fi:	Force suivant la direction i par unité de volume, N.m ⁻³ .
g:	Accélération de la pesanteur, m ² .s ⁻¹ .
H:	Hauteur de la cavité .
i,j:	Coordonnées logiques des points [-].
K:	Conductivité thermique, W. m ⁻¹ . K ⁻¹ .
L,l:	Longueur de la cavité et du composant électronique, m.
$\overline{Nu}$:	Nombre de Nusselt moyen [-].
n:	Nombre entier [-].
p' :	Pression hydrodynamique, Pa.
p:	Pression totale, Pa.
Pr _a :	Nombre de Prandtl [-], $Pr = \frac{\nu_a}{\alpha_a} = 0.71$.
Pr _e :	Nombre de Prandtl [-], $Pr = \frac{\nu_e}{\alpha_e} = 7.01$.
Q:	Puissance, W.
RA:	Rapport d'aspect [-], RA=L /H .
Ra:	Nombre de Rayleigh [-], $Ra = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\alpha_{a,e}\nu_{a,e}}$.
T:	Température dimensionnelle, K.
t:	Temps dimensionnel, s.
U,V:	Composantes de la vitesse adimensionnelles [-] .
U,v:	Composantes de la vitesse dimensionnelles, m. s ⁻¹ .
X,Y:	Coordonnées cartésiennes adimensionnelles [-] .
x,y:	Coordonnées cartésiennes dimensionnelles, m.

Symboles grecs

α :	Diffusivité thermique, $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.
β :	Coefficient d'expansion thermique à pression constante, K^{-1} .
ϕ :	Variable dépendante [-].
μ :	Viscosité dynamique, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.
ν :	Viscosité cinématique, $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.
θ :	Température adimensionnelle [-].
r :	Masse volumique, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
τ :	Temps adimensionnel [-].
ψ :	Fonction de courant adimensionnelle [-].
$\Delta\tau$:	Incrément du temps adimensionnel [-].
ΔT :	Différence de température, K.
Γ :	Coefficient de diffusivités, [-].

Indices et exposants

air :	Air.
cr :	Valeur critique.
eau :	Eau.
s:	Solide.
0:	Valeur initiale.
*:	Valeur adimensionnelle.

Acronymes

CFD :	Dynamique des Fluides Numérique (Computational Fluid Dynamics).
CFL :	Courant-Friedrichs-Lewy.
LBM :	la méthode de lattice Boltzmann.
EDP :	Équation différentielle partielle.
LGA :	Lattice gas automata.
BGK :	Bhatnagar, Gross et Krook.
MRT :	multiple relaxation times.
DFT :	Transformée de Fourier Discrète(Discret Fourier Transform).

Chapitre I

Généralités et revue bibliographique

Introduction générale

La présence des phénomènes de convection naturelle dans bon nombre de systèmes industriels a fait croître aujourd'hui l'intérêt porté par la communauté scientifique pour cette branche de l'aérothermique. L'état des connaissances montre un besoin important de compréhension de l'environnement thermique de ces systèmes en vue d'arriver à une prévision correcte des circulations de fluides et des transferts de chaleur à l'intérieur de géométries de plus en plus complexes.

À plus court terme, les études actuelles tendent à répondre directement ou indirectement à des problématiques d'économie d'énergie. L'enjeu devient double quand ces phénomènes de convection naturelle ont lieu à proximité de matériaux composites dont les performances mécaniques sont fortement liées à l'environnement thermique dans lequel ils sont placés. Ce type d'écoulement est rencontré dans le ventre mou, les caissons de voilure ou encore les compartiments d'entrée d'air des aéronefs. Devant cette nécessité, Airbus, le Limsi et l'Onera se sont réunis autour du projet MAEVA II et les thèses de Marie-Laure Toulouse [1] et Ludovic Perrin [2], inscrite dans ce projet fédérateur, s'est intéressée plus particulièrement à l'étude du refroidissement des packs de conditionnement d'air placés dans le ventre mou. Dans ce cas, les écoulements de convection naturelle sont générés par la présence d'un obstacle chauffant à l'intérieur d'une cavité. Ces travaux ont ainsi permis de caractériser le comportement dynamique et thermique des écoulements dans diverses configurations et ainsi apporter une base de données servant de référence à la validation de codes de calculs de recherche ou industriels avec pour but futur d'optimiser ces circuits de ventilations en évitant les trop coûteuses modifications successives testées en vol.

Ainsi, par le biais de plusieurs simulations numériques au moyen de la méthode de Lattice Boltzmann sur Réseau on a étudié l'effet du confinement sur la topologie de l'écoulement généré par un chauffage de la paroi inférieure à une température constante en régime laminaire, qui représente le cas d'un écoulement industriel tel que celui rencontré au sein d'un capteur solaire plan sans obstacles, ou dans le mouvement convectif manifestant dans la couche atmosphérique du globe terrestre, ainsi que dans les écoulements engendrés par le mouvement thermo halin dans les océans.

Généralités et revue bibliographique

I- Généralités :

Les écoulements induits par une différence de température au sein d'un système sont rencontrés dans bon nombre d'applications industrielles et requièrent une compréhension physique fine des phénomènes en jeu pour optimiser de tels environnements thermiques. De plus, ces écoulements se produisent souvent en milieu confiné, en régime fortement instationnaire et proche ou au-delà de la région de transition laminaire-turbulent. La maîtrise de ces transferts thermiques complexes nécessite l'utilisation d'outils expérimentaux mais également numériques adaptés à l'étude et/ou la prévision de tels phénomènes.

La configuration qui sera présentée par la suite et sur laquelle l'étude sera basée, fait apparaître un obstacle chauffant à bords vifs au sein d'une cavité parallélépipédique dont les parois haute et basse sont refroidies. Les phénomènes thermiques induits appartiennent donc à la famille des écoulements de convection naturelle en milieu confiné. Ce chapitre se consacrera à dresser un état de l'art des travaux et avancées réalisés sur ce type d'écoulement. De plus, la position et la géométrie de la source de chaleur vont générer des circulations de fluides qui peuvent être reliées à diverses formes de convection naturelle et plus particulièrement à deux grandes familles d'écoulements que sont la cavité aux parois verticales différentiellement chauffées et la cavité de type Rayleigh-Bénard caractéristique d'une couche fluide chauffée par le bas, selon que l'on considère respectivement les zones de la cavité présentes de chaque côté du cylindre ou celle présente au-dessus de ce dernier.

Cette synthèse bibliographique ciblera les points essentiels concernant les différents types de convection naturelle et leurs problématiques associées sans souci d'exhaustivité. Le but est dans un premier temps de cerner les difficultés inhérentes à ce genre de phénomènes pris séparément pour ensuite aborder leurs interactions éventuelles à travers diverses configurations étudiées dans la littérature.

Ce chapitre s'articulera donc autour de trois principaux axes centrés sur les écoulements de convection naturelle en milieu clos. Un bref rappel des principes physiques fondamentaux sera exposé en premier lieu dans le but d'appréhender les lois, hypothèses et nombres adimensionnels permettant de décrire ce type de phénomène. Ensuite, le bilan se poursuivra avec l'exposé des deux cas classiques de convection naturelle que sont la cavité aux parois verticales différentiellement chauffées et le problème de Rayleigh-Bénard. Enfin, la dernière partie de ce chapitre traitera les cas de convection naturelle autour d'obstacles chauffants localisés ou non sur les parois de la cavité. Les différentes sections seront abordées à la fois sous l'angle expérimental et numérique et la problématique concernant l'apparition d'instabilités thermo-convectives au sein de tels systèmes tiendra lieu de fil conducteur tout au long de ce chapitre.

I-1 Transfer de chaleur par convection naturelle:

Pour aborder le cas classique du phénomène de la convection naturelle au travers une plaque plane verticale isotherme. Soit une plaque plane verticale de longueur L et de dimension infinie dans la direction Y , placée dans un fluide tel qu'il soit au repos au loin. Cette plaque est chauffée de manière isotherme à la température T_+ et soit T_∞ la température du fluide en $X \rightarrow \infty$ telle que $T_\infty < T_+$, figure I.1. Les propriétés thermophysiques du fluide sont supposées constantes à l'exception de sa masse volumique ρ dont les variations sont à l'origine du phénomène de convection naturelle. Le fluide se dilate le long de la plaque sous l'effet de la chaleur faisant diminuer sa masse volumique. Apparaît ainsi une force motrice volumique (poussée d'Archimède) s'opposant à la force de frottement due à la viscosité du fluide et créant l'ascension de ce dernier. La différence de température avec le réservoir de fluide froid situé à l'infini entraîne une recirculation naturelle du fluide comme schématisé sur la figure I.1.

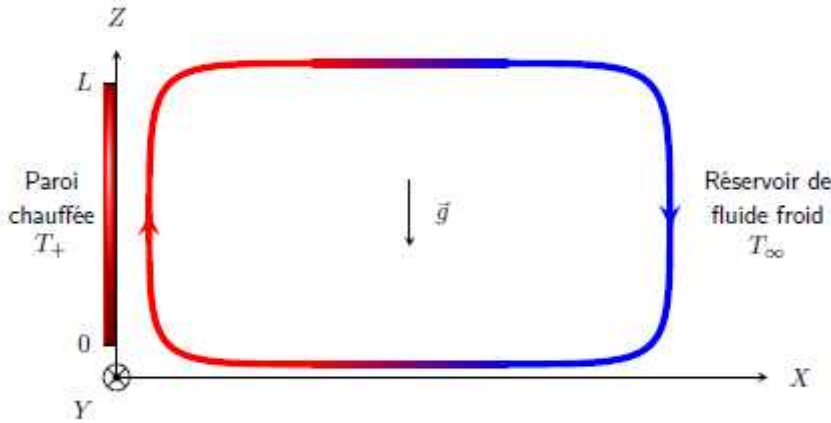


Figure I.1: convection naturelle le long d'une plaque plane verticale chauffée et mécanisme thermique responsable du comportement du fluide.

I.1.1 Lois fondamentales de la dynamique:

Les équations générales qui régissent la convection naturelle sont celles de la mécanique des fluides. La différence essentielle qui fait l'originalité de ce phénomène concerne la présence de forces volumiques faisant intervenir le terme de gravité $\sim g$ dans la formulation du problème.

Les équations de départ sont donc :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (1.1a)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \rho (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} P + \mu \Delta \vec{U} \quad (1.1b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) T = \frac{\lambda}{\rho c_p} \Delta T \quad (1.1c)$$

correspondant respectivement à l'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité), à l'équation de conservation de quantité de mouvement (ou équations de Navier-Stokes) et à l'équation de la chaleur (ou équation de l'énergie) sous l'hypothèse de fluide incompressible.

I.1.2 Approximation de Boussinesq:

Considérant le phénomène de convection naturelle, la variation de la masse volumique du fluide en fonction de la température est donnée par l'expression suivante :

$$\rho = \rho_{\infty} [1 - \beta(T - T_{\infty})] \quad (1.2)$$

L'hypothèse de Boussinesq est généralement utilisée pour traiter un problème de convection naturelle et en simplifier la formulation. Ainsi, les variations de la masse volumique du fluide sont prises en compte uniquement dans le terme moteur des équations de Navier-Stokes donc dans le terme de poussée d'Archimède. L'application de cette approximation se limite aux cas où les différences de température sont suffisamment faibles pour que $\beta(T - T_{\infty}) \ll 1$.

En considérant donc que la masse volumique du fluide reste constante dans tous les autres termes et en faisant intervenir la pression motrice $P_m = P - \rho_{\infty}gz$, le système d'équations devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (1.3a)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = \frac{1}{\rho_{\infty}} \vec{\nabla} P_m - \beta(T - T_{\infty}) \vec{g} + \nu \Delta \vec{U} \quad (1.3b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) T = \alpha \Delta T \quad (1.3c)$$

I.1.3 Le nombre de Prandtl :

Qui exprime le rapport entre la viscosité cinématique ν et la diffusivité thermique α du fluide. Il caractérise l'importance relative des effets visqueux et thermiques et ne dépend que des propriétés du fluide.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (1.4)$$

I.1.4 Le nombre de Rayleigh:

Qui exprime le ratio des forces de poussée par les effets visqueux et de diffusion thermique. Il caractérise la vigueur de la convection naturelle en prenant en compte les propriétés du fluide.

$$Ra = \frac{g L^3 \Delta T}{\nu} = Gr \cdot Pr \quad (1.5)$$

I.1.5 Le nombre de Nusselt:

Enfin, pour caractériser les transferts de chaleur entre la plaque et le fluide environnant, l'introduction d'un autre groupement sans dimension appelé nombre de Nusselt est souvent utilisé. Il représente le rapport entre le flux transmis réellement vers la plaque et le flux qui serait transmis en régime purement conductif :

$$Nu = \frac{\phi_{réel}}{\phi_{c}} = \frac{[-\partial / \partial x]_{x=0}}{(T_p - T_{\infty})/L} = \frac{h_c L}{\lambda} \quad (1.6)$$

avec h_c le coefficient d'échange convectif local. Le nombre de Nusselt global est alors défini en intégrant le coefficient d'échange sur la surface de la plaque.

Le cas académique de la plaque plane verticale chauffée a permis de poser les lois et les principes fondamentaux régissant le phénomène de convection naturelle et de mettre en relief les paramètres caractéristiques représentatifs essentiels en ce qui concerne la description d'un écoulement de ce type. La section suivante sera donc consacrée à la convection naturelle en milieu confiné à travers deux configurations classiquement abordées dans la littérature : la cavité aux parois verticales différentiellement chauffées et le problème de Rayleigh-Bénard en cavité. L'interaction entre ces deux phénomènes sera présentée ensuite avec les écoulements en cavité autour d'obstacles chauffés.

I-2 La convection naturelle en milieu confiné :

Les années 1950 ont vu apparaître les premières études approfondies sur les écoulements de convection naturelle se développant à l'intérieur de cavités et concernant principalement le cas de la cavité aux parois verticales différentiellement chauffées qui fera l'objet du paragraphe suivant. En 1988, Ostrach [3] dresse un premier constat des études réalisées sur les écoulements induits par une différence de température au sein d'un milieu confiné, mettant l'accent sur l'intérêt scientifique et technologique de tels phénomènes mais également sur le challenge physique et mathématique qu'entraîne l'apparition de ces écoulements complexes. La nature de la convection naturelle impose le caractère fortement couplé des variations dynamiques et thermiques. De plus, l'aspect confiné de l'écoulement rend l'étude du problème interne considérablement plus complexe que celle d'un écoulement externe et libre. Ostrach [3] met alors en évidence le fait que le fluide n'est pas seulement affecté par la couche limite thermique se développant le long de la source chaude mais également par celles se formant sur les autres frontières du domaine. Ainsi, la couche limite motrice reste confinée, encerclant le *coeur* de la cavité qui est alors influencé non seulement par les autres conditions aux limites mais également par cette même couche limite thermique qui interagit alors avec le fluide loin de la source. En retour, le *coeur* interagit lui aussi avec la couche limite thermique, créant le couplage précédemment cité entre thermique et dynamique.

Cette forte interaction rend l'étude de tels phénomènes difficiles, d'autant plus que les écoulements de convection naturelle sont connus comme étant fortement sensibles aux conditions aux limites du domaine, ce qui rend délicat toute comparaison entre différentes configurations dites similaires.

Deux grandes familles d'écoulements aux comportements très spécifiques se distinguent avec d'un côté la cavité aux parois verticales différentiellement chauffées et d'autre part le problème de Rayleigh-Bénard caractéristique cette fois-ci d'une couche fluide chauffée par le bas. Il est important de bien connaître leurs caractéristiques car ces phénomènes apparaissent souvent de manière simultanée et couplée dans le cas d'écoulements de convection naturelle autour d'obstacles chauffés à l'intérieur d'une cavité.

I -2.1 La cavité aux parois verticales différenciellement chauffées :

Cette configuration a vu apparaître les prémices de l'étude des écoulements de convection naturelle en milieu confiné et se compose d'un assemblage dans une tranche 2D de deux parois verticales opposées et portées à des températures différentes alors que les autres parois sont supposées adiabatiques comme présentées sur la figure I.2. La hauteur de la cavité est notée H et sa largeur L .

La différence de température entre la source chaude et la source froide ($T_+ - T_-$), même faible, entraîne une mise en mouvement du fluide par convection naturelle comme dans le cas de la plaque plane verticale chauffée et placée en milieu libre. Le fluide subit donc une ascension le long de la paroi chaude avant d'impacter la paroi haute puis redescendre en suivant la paroi froide. Se crée alors une recirculation au milieu de la cavité avec une zone morte au centre.

Les travaux de Eckert *et al.* en 1961 [4] suivis de ceux de Newell *et al.* [5] quelques années plus tard furent parmi les premiers à relever différents régimes d'écoulement, fonctions du nombre de Grashof et du rapport d'aspect définissant la géométrie de la cavité H/L , et ceci par voie expérimentale et numérique.

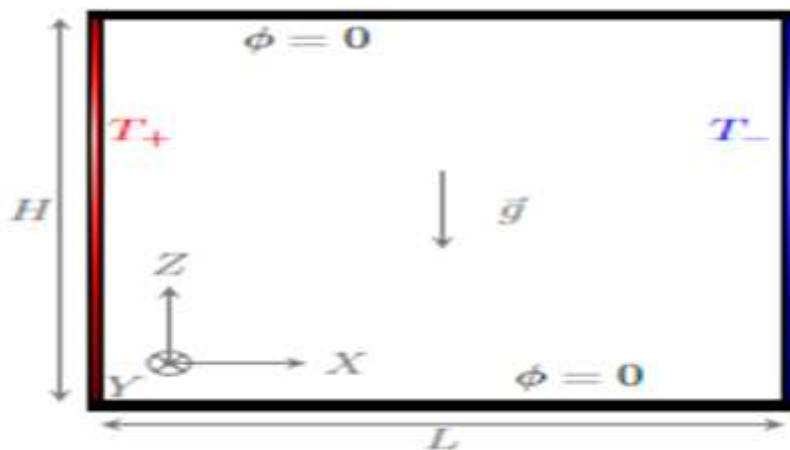
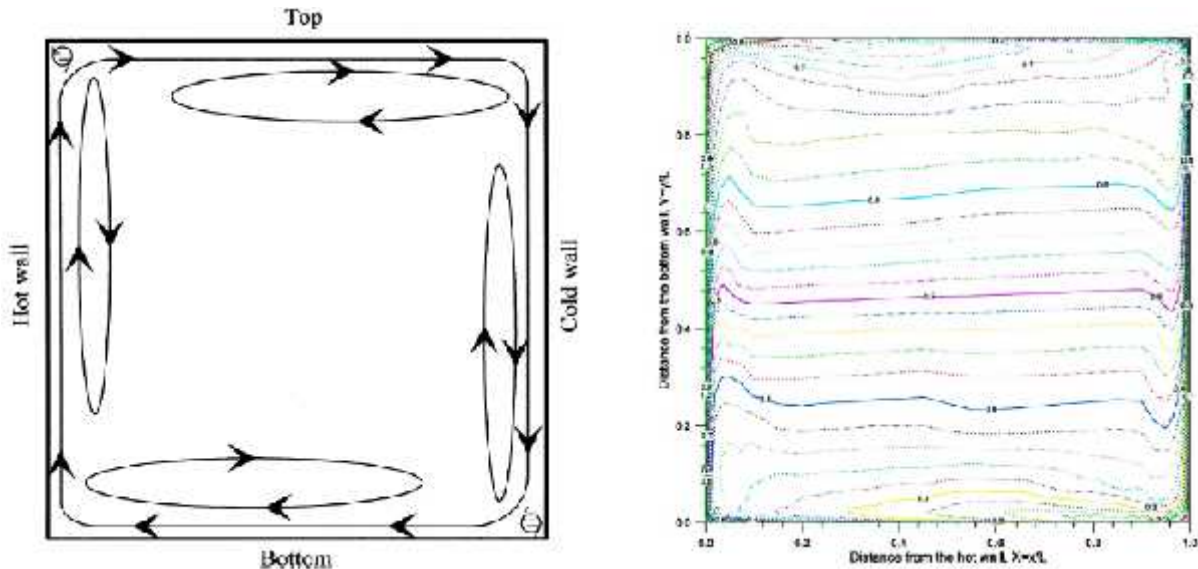


Figure I.2: cavité aux parois verticales différenciellement chauffées

L'analyse détaillée des couches limites thermiques le long des parois chaudes et froides a permis de mettre en évidence l'apparition de structures intermittentes basse fréquence au niveau de la paroi chaude, se propageant dans la couche limite et interagissant avec les ondes en présence avant d'être éjectées vers l'intérieur de la cavité dès la mi-hauteur dans la partie haute. La couche limite froide reste quant à elle purement laminaire au Rayleigh considéré. D'autre part, l'évaluation précise des grandeurs moyennes montre un écart de comportement de l'écoulement par rapport au cas possédant des parois purement adiabatiques avec la présence de recirculations secondaires proches des parois haute et basse de la cavité ainsi qu'une stratification en température dans le coeur de la cavité.

Dans cette gamme de nombres de Rayleigh, des effets dits non-Boussinesq sont relevés et perturbent l'écoulement au niveau des couches limites verticales. En 2000, Tian *et al.* [6, 7] réalise une étude similaire pour un écoulement faiblement turbulent à $R_{aH} = 1.58 \times 10^9$ et note également des phénomènes instationnaires dans la couche limite thermique chaude avec des fluctuations indépendantes de la vitesse et de la température dans une gamme de fréquences comprises entre [0.1Hz – 0.2Hz].



(a) Schéma des structures présentes dans l'écoulement

(b) Distribution de températures

Figure I.3 :Champs dynamiques et thermiques expérimentaux au sein d'une cavité carrée aux parois verticales différenciellement chauffées à $R_H = 1.58 \times 10^9$ [6, 7].

Enfin, en 2004, Salat *et al.* [8] ont dressé un bilan comparatif des résultats obtenus sur cette même configuration de cavité carrée différenciellement chauffée et issus d'expériences et de simulations numériques. Les conditions aux parois précises mesurées expérimentalement ont été intégrées en tant que conditions aux limites dans les simulations 2D et 3D, LES et DNS, abandonnant ainsi l'hypothèse de parois horizontales parfaitement adiabatiques dans le but d'être plus représentatif des conditions réelles appliquées dans l'expérience comme le suggérait déjà en 1994 Le Quéré [9]. Ces travaux ont également permis de montrer que, bien que comparable dans certaines configurations et dans certaines coupes du plan d'étude, les simulations 3D donnaient de bien meilleurs résultats que leurs homologues 2D, confirmant une fois de plus que le confinement de l'écoulement induit un fort couplage dynamique et thermique entre les différentes frontières qu'une approche purement 2D ne peut complètement prévoir.

I -2.2 La convection naturelle de Rayleigh-Bénard : cavité aux parois horizontales différenciellement chauffées :

La cavité aux parois horizontales différenciellement chauffées ou problème de Rayleigh-Bénard dans le cas où la paroi du bas est maintenue à une température plus chaude que celle du haut, fait également partie des phénomènes classiques observés en convection naturelle. Le système se présente alors sous la forme de deux plaques horizontales de longueur infinie et séparées d'une distance H .

Une température plus importante est appliquée sur la plaque du bas par rapport à celle du haut créant ainsi une configuration où la couche fluide est chauffée par le bas. Contrairement au cas énoncé dans le paragraphe précédent, l'apparition de la convection naturelle ne se produit qu'au-delà d'un seuil caractérisé par un nombre de Rayleigh critique et se fait au détriment de la perte de stabilité de la solution à vitesse nulle et à température linéaire. En effet, pour $Ra_H < 1707.76$, la solution présente un écoulement au repos, un champ de température stratifié et par conséquent un régime de transfert de chaleur purement conductif entre les deux plaques.

Lorsque $Ra_H > Ra_{H_c}$, un écoulement cellulaire se met en place avec l'établissement de rouleaux contra-rotatifs et donc une perte de stabilité.

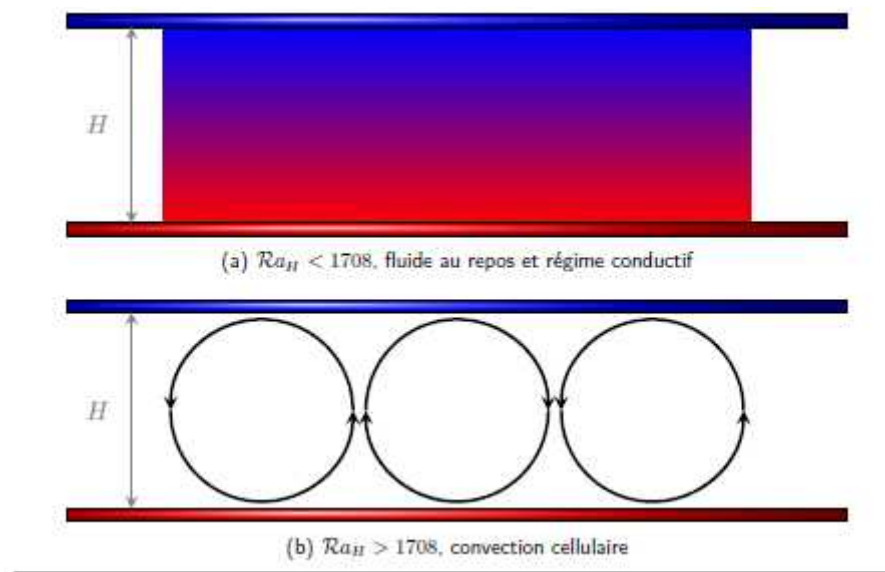


Figure I.4: convection naturelle de Rayleigh-Bénard

Le comportement particulier de cet écoulement a été largement étudié depuis Henri Bénard et Lord Rayleigh car il trouve applications dans de nombreux domaines industriels tels que la thermique de l'habitat, l'électronique, les collecteurs solaires... l'apparition de la convection cellulaire favorisant les transferts de chaleur entre les deux plaques. D'autre part, des études supplémentaires ont mis en relief les différences de comportement introduites avec la mise en place de parois verticales en fonction de la nature de celles-ci :

- parois verticales adiabatiques :

Catton [10] montre que le nombre de Rayleigh critique vaut 3449. L'adjonction de parois verticales adiabatiques nécessite donc un apport de chaleur plus important pour déclencher la convection que dans le cas de plaques infinies. D'autre part, cette valeur du Rayleigh critique est confirmée par les résultats expérimentaux obtenus par Heitz et al. [11] :

- parois verticales conductrices :

le nombre de Rayleigh critique est de l'ordre de 7000 d'après les résultats numériques de Davis [12] et expérimentaux de Stork et al. [13].

Les études plus récentes de Pallares et al. [14,15] s'attachent à la description en 3 dimensions des écoulements présents dans une cavité cubique chauffée par le bas. Ces travaux numériques mettent en évidence la complexité des structures présentes dans l'écoulement. Dans le cas de parois latérales adiabatiques, et pour $R_{\text{eff}} \leq 6 \times 10^4$, on observe la présence de 7 structures d'écoulement dont la stabilité intrinsèque dépend des nombres de Prandtl et Rayleigh. Pour des parois latérales conductrices, seulement 3 des 7 structures sont présentes en régime laminaire.

I-3 Domaines d'apparition de la convection de Rayleigh-Bénard :

La circulation du Gulf Stream s'inscrit dans une circulation globale, la circulation thermohaline, qui relie tous les courants océaniques majeurs de la Terre, qu'ils soient froids ou chauds, de surface ou de profondeur. On peut résumer les interrelations par les documents suivants (les courants de surface sont chauds, en rouge, et les courants profonds sont froids, en bleu).

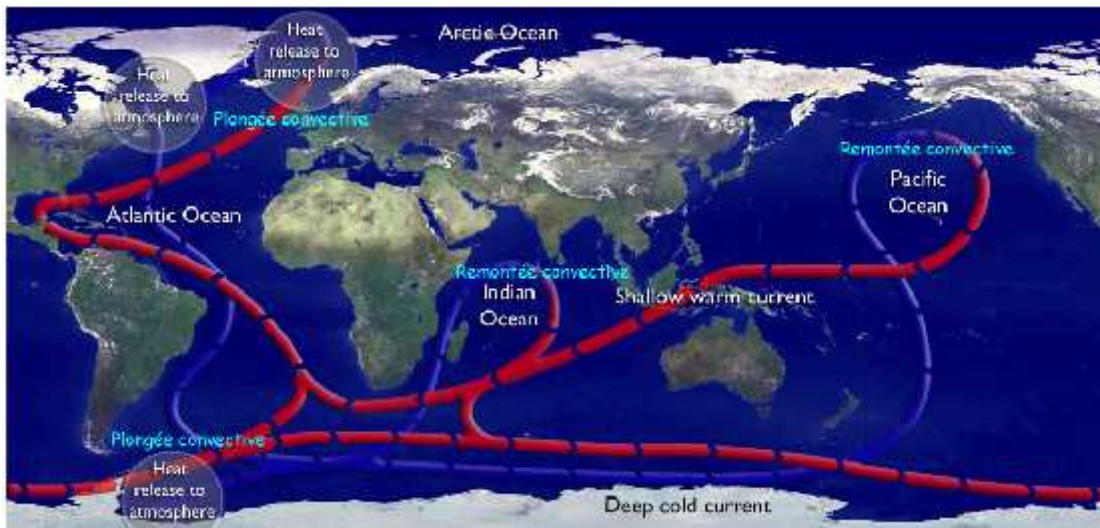


Figure I.5: la circulation du Gulf Stream

La principale zone de plongée convective d'eau de mer se situe au niveau de la mer de Norvège et au large de l'Islande (la deuxième zone, très minoritaire, se trouve près de l'Antarctique, en mer de Wedell). La dérive nord-atlantique apparaît donc comme le principal

fournisseur d'eau de surface par sa plongée en Mer du Norvège. Or, cette dérive est alimentée par les eaux du Gulf Stream. [16].

On voit immédiatement que le Gulf Stream occupe une place prépondérante dans cette circulation. On peut donc, en extrapolant, affirmer que le Gulf Stream alimente les courants océaniques profonds de la Terre entière (par l'intermédiaire de la dérive nord-atlantique).

Les moteurs de la circulation thermohaline :

Les deux moteurs principaux sont la température et la salinité de l'eau de mer :

- **la température** : la chaleur spécifique de l'eau de mer est 4 fois plus élevée que celle de l'air. Ainsi, les premiers 10 mètres d'eau peuvent emmagasiner autant de chaleur que toute l'épaisseur d'atmosphère au-dessus ! Les océans sont donc de formidables réservoirs de chaleur. Cette quantité de chaleur emmagasinée dépend de la latitude (plus importante à l'équateur), des saisons (plus importante en été) et de la couverture nuageuse (plus importante par ciel dégagé) : en moyenne, près de l'équateur, ce flux de chaleur est de l'ordre de +200 à +250 W/m² (contre +40 W/m² aux hautes latitudes).

==> Une augmentation de température diminue la densité de l'eau.

- **la salinité** : elle varie selon les océans (l'Atlantique est plus salé que le Pacifique, par exemple), mais elle reste généralement comprise entre 33 g/L et 37 g/L. La salinité est plus importante à l'équateur qu'aux pôles.

==> Une augmentation de salinité augmente la densité de l'eau.

Température et salinité ont donc des effets contraires sur la densité de l'eau de mer. Le document ci-dessous traduit la relation entre la température et la salinité dans la définition de la densité de l'eau de mer :

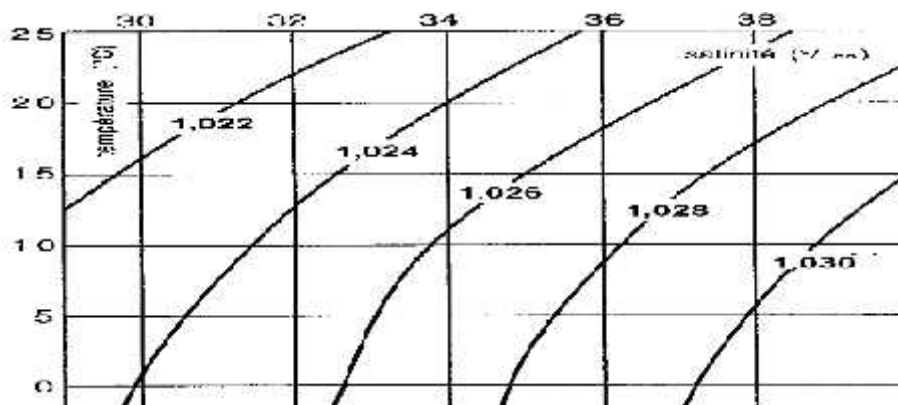


Figure I.6:Densité de l'eau de mer selon sa température et sa salinité [17] .

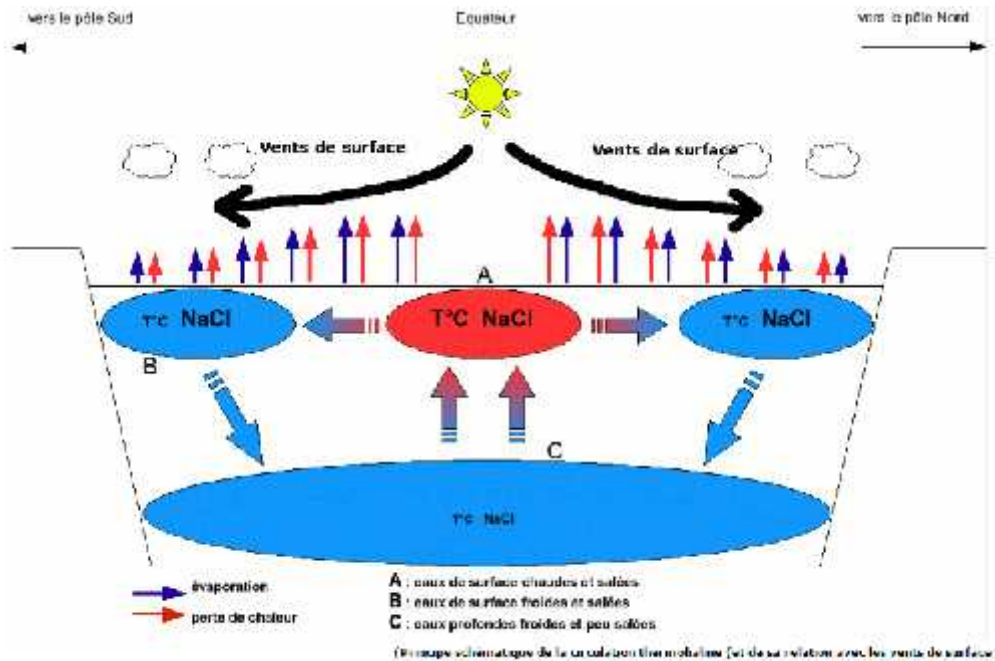


Figure I.7: Température et salinité sont à la base de la circulation thermohaline.

Contrairement à une idée largement répandue, le mouvement de convection océanique ne s'initie pas à l'équateur par les masses d'eau chaudes de surface, mais par les eaux froides de surface des hautes latitudes (*notées B*). Leur température n'est plus suffisante pour contrer les effets de la salinité : la densité augmente alors et les eaux plongent vers le fond : c'est la plongée convective. Nous verrons plus loin les raisons précises de cette augmentation de densité [17].

I-4 Revue bibliographique :

Après cette préface, nous exposons chronologiquement quelques travaux disponibles dans la littérature qui traitent l'écoulement avec transfert de chaleur par convection naturelle, forcée et mixte dans les enceintes et les canaux.

Patera et Mikic [18] ont introduit le concept de l'accroissement du transfert de chaleur basé sur l'excitation des instabilités de la couche de cisaillement dans les écoulements internes séparés (Figure I.8) L'exploitation des instabilités naturelles demande : la création d'un système avec séparation d'écoulement, la détermination d'une fréquence de résonance et l'excitation de cette fréquence avec une modulation appropriée .Les mouvement résultants à grande échelle conduisent à un mélange latéral et à un accroissement très grand du transfert thermique. La méthode est applicable en écoulements laminaires ou turbulents. Un triple accroissement du transfert thermique a été obtenu lorsque l'écoulement est modulé par la fréquence naturelle du système.

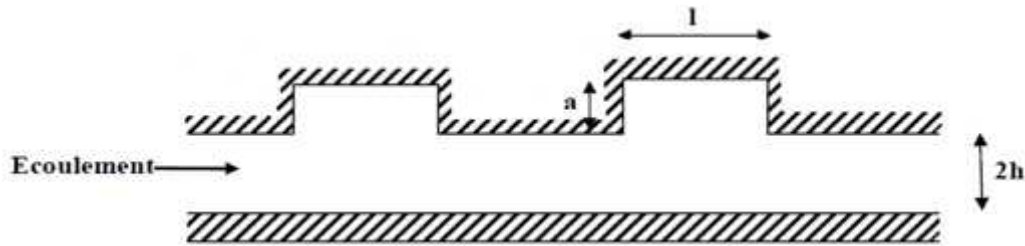


Figure I.8: canal rainuré périodiquement [18].

Davalath et Bayazitoglu [19] ont étudié le transfert de chaleur conjugué développé par l'écoulement entre deux plaques parallèles. La plaque inférieure contient des sources de chaleur (Figure I.9). Les caractéristiques du transfert de chaleur de la zone de recirculation près des blocs (sources) sont présentées. Aussi, l'espace optimal entre les sources de chaleur pour une quantité de flux et une température maximale fixée a été déterminé.

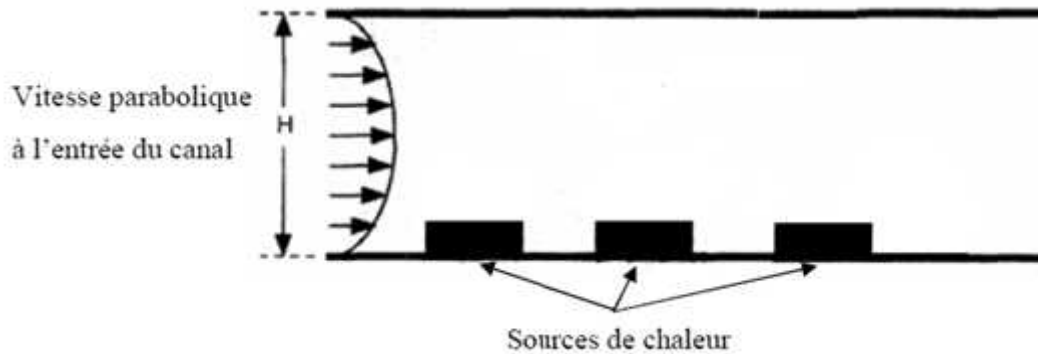


Figure I.9: géométrie considérée dans la référence [19].

Keyhani [20] ont étudié expérimentalement la convection naturelle dans une enceinte verticale ayant un rapport d'aspect égal à 16.5 , la paroi gauche est isotherme, la paroi droite est partitionnée en onze sections non chauffées et onze sections chauffées. La distribution de la température et les images de visualisations indiquent que la stratification thermique est le facteur principal qui influe sur les températures des sections chauffées. Ainsi, il apparaît que le régime turbulent est atteint lorsque le nombre de Rayleigh modifié ($Ra^*=Ra.Nu$) est compris entre 9.3×10^1 et 1.9×10^1 .

Kang et Jaluria [21] ont fait une étude expérimentale de la convection naturelle d'un module chauffé monté sur des surfaces horizontale et verticale. Les mesures obtenues montrent que la distribution de température dans l'écoulement varie avec la puissance et l'épaisseur de la source .Pour le rapport de forme du module $H/L < 0.4$ (épaisseur/longueur) et le nombre de Grashof $Gr=2.6 \times 10^6$, le nombre de Nusselt moyen $\overline{N}$ calculé à partir d'une surface verticale est supérieur à celui d'une surface horizontale ; le cas contraire a été obtenu pour $H/L > 0.5$ et $Gr=2.6 \times 10^6$.

Yeong [22] ont étudié numériquement le développement quantitatif de la convection naturelle instationnaire dans une enceinte carrée contenant un corps solide carré localisé au centre (Figure I.10). La méthode des multi domaines a été utilisée pour traiter le

milieu hétérogène .La cavité est chauffée par le bas et refroidie par le haut et les parois verticales sont adiabatiques. Les résultats ont été obtenus pour une gamme du nombre de Rayleigh de 103-106. Lorsque le nombre de Rayleigh est faible, l'écoulement et la distribution de la température présentent une symétrie entre les deux parois horizontales. Pour des valeurs du nombre de Rayleigh intermédiaires, l'écoulement est stationnaire et change de structure. Pour une grande valeur du nombre de Rayleigh, l'écoulement devient instationnaire. La variation temporelle du nombre de Nusselt moyen à travers les parois isothermes de la cavité et le corps solide a été présentée pour différents nombres de Rayleigh.

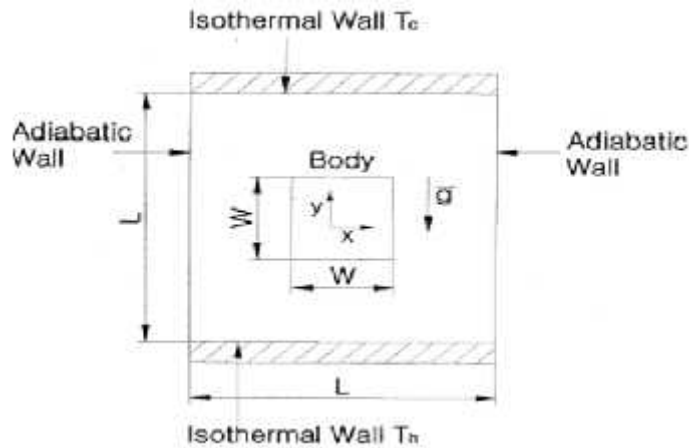


Figure I.10 : géométrie du problème [22].

Chung [23] ont simulé numériquement l'influence des blocs chauffés sur l'écoulement du transfert de chaleur d'un cylindre oscillatoire placé à l'entrée d'un canal (Figure I.11) . La méthode ALE (An Arbitrary Lagrangian Eulerian Method) a été adaptée pour modéliser l'écoulement. La formulation des éléments finis a été appliquée pour résoudre les équations gouvernantes. L'effet du nombre de Reynolds, l'amplitude et les fréquences d'oscillations sur les caractéristiques du transfert de chaleur des blocs chauffés a été examiné. Les résultats obtenus montrent que pour des fréquences d'oscillations du cylindre, le transfert de chaleur dans les blocs chauffés s'améliore.

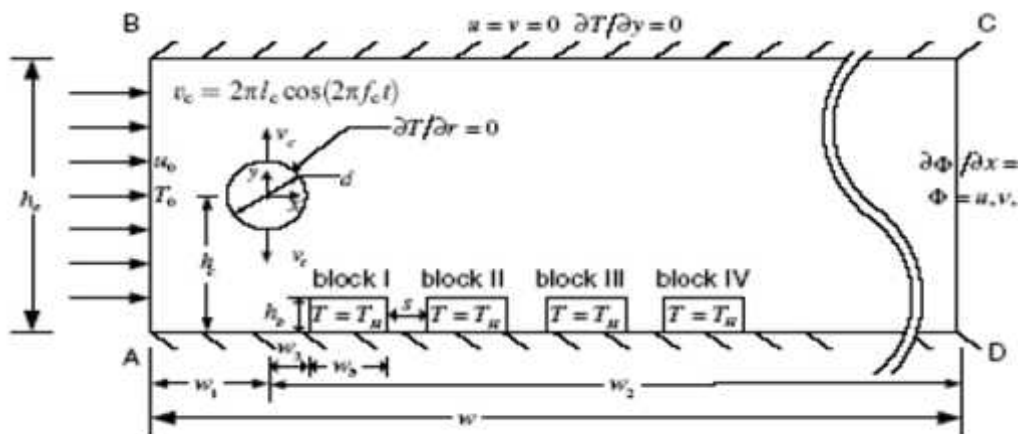


Figure I.11 : configuration du problème [23].

Jin [24] ont étudié la convection naturelle instationnaire dans une enceinte tournante autour de son axe horizontal, qui contient trois sources de chaleur montées sur la paroi inférieure (Figure I.12). Trois phénomènes physiques ont été observés : oscillation unipériodique, oscillation multi périodique et oscillation chaotique. L'évolution de l'écoulement dans l'état mobile et l'état rotationnelle a été étudiée. La rotation conduit à un déséquilibre entre les cellules qui tournent dans le sens horaire et les cellules qui tournent dans le sens antihoraire, une augmentation du transfert de chaleur dans les mauvaises conditions, une réduction des oscillations du nombre de Nusselt et une amélioration des performances dans chaque cycle. La distribution optimale des sources de chaleur dans un fluide en rotation est identique que celle dans l'état stationnaire s'ils ont les mêmes directions de circulation.

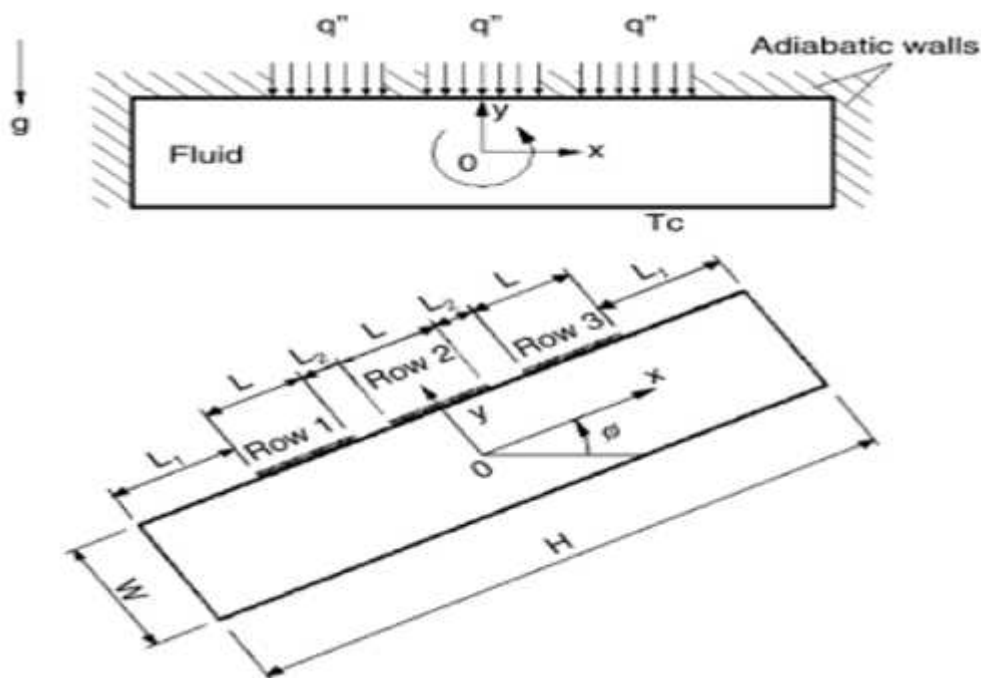


Figure I.12 : géométrie du problème [24].

Skout [25] ont exploré numériquement, à l'aide de la méthode des différences finies, la route vers le chaos suivie par le système lorsque le nombre de Rayleigh Ra augmente. Ils montrent que plus sa valeur est grande, plus les résultats sont sensibles aux choix des pas d'espace et de temps. L'attracteur transite d'un point limite à un cycle limite via une bifurcation de Hopf pour une valeur comprise de Ra entre 1.1×10^5 et 1.12×10^5 . Quand Ra continue d'augmenter, l'attracteur traverse une cascade sous harmonique. Un chaos semble apparaître lorsque ce nombre devient de l'ordre de 1.13×10^5 .

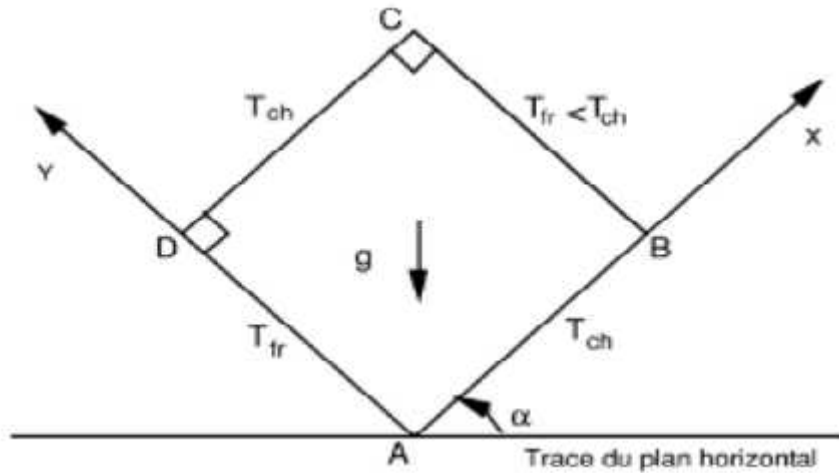


Figure I.13 : géométrie du problème [25].

Weisman [26] ont étudié les écoulements d'air dans une cavité rectangulaire différentiellement chauffée à grand écart de température. Les équations asymptotiques de l'approximation du faible nombre de Mach sont celles obtenues par Paolucci par filtrage des ondes sonores. La transition à l'instationnaire des solutions a été étudiée par simulation numérique, à l'aide d'un code volumes finis basé sur une méthode à pas fractionnaire, dérivée des méthodes de projection en incompressible. Lorsque les propriétés physiques du fluide sont supposées constantes, la transition se produit suivant un schéma classique de passage d'une bifurcation de Hopf. Lorsque la viscosité dépend de la température suivant la loi de Sutherland, et que le nombre de Prandtl est constant, la transition est très différente.

Song [27] ont étudié numériquement le comportement thermique de l'écoulement de l'air dans une enceinte rectangulaire de rapport d'aspect $A = L/H = 4$, chauffée en bas à une température qui varie sinusoïdalement avec le temps ($T = T_{m0} + \varepsilon \Delta T \sin(2\pi f t)$), où T_{m0} est la température moyenne, ε est l'amplitude d'oscillation, ΔT est la différence de température et f est la fréquence d'oscillation. L'objectif de ce travail était de savoir l'influence de cette condition sur le seuil de l'instabilité thermique et sur les performances du transfert de chaleur de la convection oscillatoire cellulaire près des conditions critiques. Pour examiner l'effet de l'échauffement dans plusieurs conditions, l'inclinaison de l'enceinte a été considérée (voir Figure I.14). Les résultats montrent que la modulation de la paroi inférieure avec une haute amplitude et/ou avec une basse fréquence mène à une stabilité relative. En conclusion, cette étude présente plus de détail concernant la structure de l'écoulement et également l'amélioration du coefficient de transfert local, qui sont des paramètres utiles pour la compréhension du mécanisme de modulation.

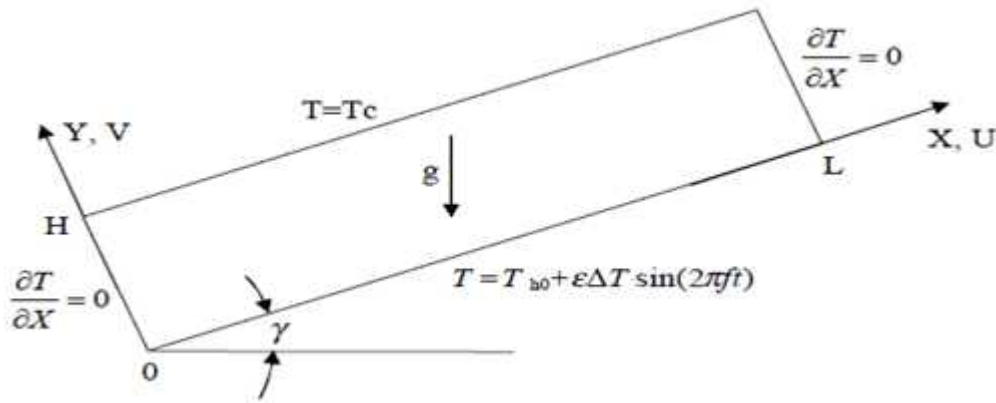


Figure I.14 : géométrie de la référence [27].

Wakashima [28] ont obtenus numériquement une solution idéale dite «Benchmark» de la convection naturelle tridimensionnelle de l'air dans une enceinte cubique, chauffée différentiellement par les deux parois verticales et les autres sont adiabatiques. Les calculs ont été effectués pour trois nombres de Rayleigh 10^4 , 10^5 et 10^6 . La méthode de résolution est **TSM** (time space method) proposée par Saitoh en 1991. Cette méthode est basée sur la discrétisation du quatrième ordre des termes spatiaux et troisième ordre en arrière des termes temporels. La stabilité numérique de cette méthode est assurée et le choix du pas de temps est arbitraire. Ce travail peut être utilisé pour valider les performances et l'exactitude de n'importe quelle méthode numérique.

Nateghi et Armfield [29] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité ouverte inclinée (voir Figure **I.15**) pour les deux régimes (transitoire et permanent). Les résultats de simulation ont été présentés sur une gamme du nombre de Rayleigh de 10^5 - 10^1 , les angles d'inclinaison varient de 0° - 90° et le nombre de Prandtl $Pr=0.7$. Le régime est stationnaire pour les faibles nombres de Rayleigh pour tous les angles, puis il devient instationnaire pour des nombres de Rayleigh un peu plus grand. Le nombre de Rayleigh critique a été obtenu pour chaque angle d'inclinaison.

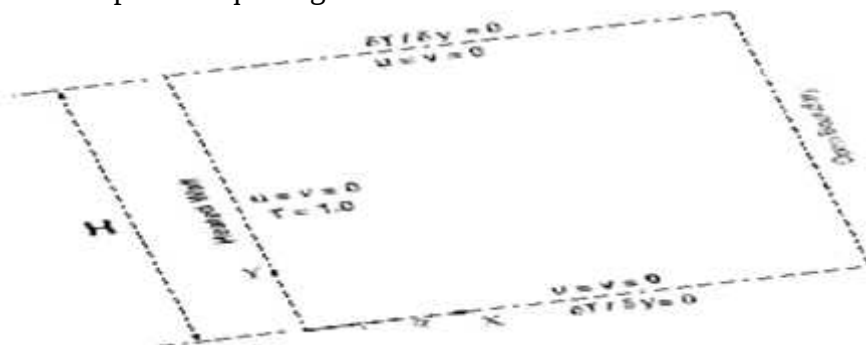


Figure I.15 : géométrie du problème [29].

Kalabin [30] ont étudié numériquement la convection naturelle oscillatoire dans une enceinte carrée inclinée. L'une des parois verticales est maintenue à une température constante et la température de l'autre paroi variée sinusoïdalement avec le temps. Les deux autres parois sont adiabatiques (Figure I.16). Les équations de Navier–Stokes avec l'approximation de Boussinesq ont été résolues numériquement par utilisation de la méthode des volumes finis pour un nombre de Rayleigh égal à 5×10^5 et un nombre de Prandtl $Pr=1$ sur une large gamme des fréquences d'oscillations. La dépendance du transfert de chaleur avec les fréquences d'oscillations a été investiguée pour différents angles d'inclinaisons. Il apparaît dans certains paramètres du problème, qu'il est possible de transférer la chaleur de la paroi froide vers la paroi chaude.

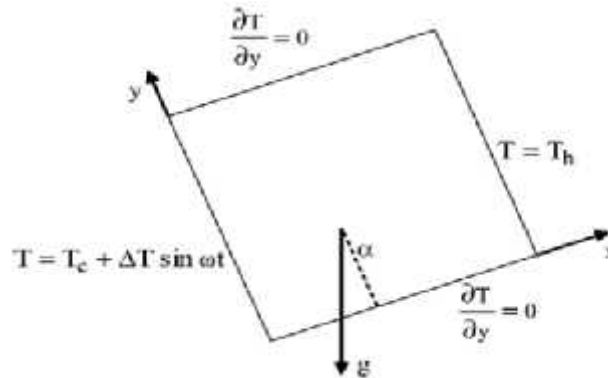


Figure I.16 : géométrie du problème [30]

L'objectif de cette étude est la détermination des instabilités hydrodynamiques et thermiques qui apparaissent pour une certaine valeur du nombre de Rayleigh critique, Ra_{cr} , lors du passage de l'air dans un capteur solaire plan, supposé confiné dans une enceinte rectangulaire (cavité), ayant un rapport d'aspect variable dans l'intervalle 0.5, 1.0, 2.0, 3.0 et 4. Ainsi, analyser l'effet de l'espace de confinement sur la valeur de Ra_{cr} . Cette étude permettra de donner des informations aux expérimentateurs et industriels sur les valeurs de Ra_{cr} et les différentes bifurcations obtenues pour la géométrie considérée, afin d'optimiser les échanges de chaleur dans ces applications industrielles et de mieux comprendre les phénomènes apparaissant dans la nature.

Notre mémoire est divisé en quatre chapitres. Le premier déjà été décrit auparavant et a été consacré aux généralités et à la présentation d'une revue bibliographique. Le second explique en détails la géométrie, le modèle mathématique ainsi que les conditions initiales et aux limites du problème étudié. Le troisième chapitre concerne la discrétisation des équations aux dérivées partielles gouvernantes et la méthode numérique utilisée pour les résoudre. Dans le dernier chapitre, nous avons présenté nos résultats et les discussions, suivie d'une conclusion et recommandation.

Chapitre II

Modèle mathématique

Modèle mathématique

II.1 Equations gouvernantes:

Les équations qui gouvernent le phénomène de convection naturelle dans l'enceinte sont :

II.1.1 L'équation de continuité:

Elle déduite du principe de conservation de masse et s'exprime sous forme tensorielle comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0 \quad (II.1)$$

(j=1, 2, 3 : indice de sommation)

Pour un fluide Newtonien incompressible, l'équation (II.1) se réduit à :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (II.2)$$

II.1.2 Les équations de quantité de mouvement :

D'après la deuxième loi fondamentale de la dynamique, le taux temporaire de changement de quantité de mouvement d'une particule fluide est égal à la somme des forces extérieures sur cette particule. L'équation de la dynamique sous forme tensorielle s'écrit alors comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] - F_i = \frac{\partial (\rho u_j u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) \quad (II.3)$$

où :

$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i)$: Représente le taux de variation de la quantité de mouvement.

$\frac{\partial (\rho u_j u_i)}{\partial x_j}$: Représente le taux nette de transport de quantité de mouvement suivant la direction i, par mouvement du fluide.

F_i : Représente les force du volume suivant la direction i.

$\frac{\partial}{\partial x_i}$: Représente les forces dues à la pression.

$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$: Représente les forces nettes de viscosité.

L'équation (II.3) représente la conservation de quantité de mouvement (équation de Navier Stokes) d'un fluide visqueux incompressible pour un régime transitoire.

II.1.3 L'équation de l'énergie :

Elle est obtenue par l'application du premier principe de la thermodynamique. Cette équation pour un fluide Newtonien incompressible, s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j T) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + q \quad (II.4)$$

$$\text{où : } \alpha = \frac{K}{\rho c_p}$$

α : La diffusivité thermique.

K : La conductivité thermique.

c_p : La chaleur spécifique à pression constante.

q : La génération de chaleur par unité de volume (densité de chaleur volumétrique).

II.2 Modèle mathématique du problème étudié:**II.2.1 Equations dimensionnelles:**

Considérons l'équation de quantité de mouvement suivant y qui est parallèle au vecteur de gravité g .

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial} (u v) + \frac{\partial}{\partial} (w) \right] = -\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial} \left(\mu \frac{\partial}{\partial y} \right) - \rho g \quad (II.5)$$

Sachant que :

$$P' = P + \rho_0 g \quad (II.6)$$

Avec :

P' : Pression hydrodynamique.

P : Pression totale.

$\rho_0 g$: Pression hydrostatique.

On a encore :

$$-\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} + \rho_0 g \quad (II.7)$$

Rajoutant aux deux membres de l'équation (II.7) le terme (ρg) on obtient :

$$-\frac{\partial}{\partial y} + (-\rho g) = -\frac{\partial}{\partial y} + (\rho_0 - \rho)g \quad (II.8)$$

On écrit le terme droite de l'équation (II.8) sous la forme :

$$-\frac{\partial}{\partial} + (\rho_0 - \rho)g$$

Négligeant la P' mais considérant que p est la pression hydrodynamique.

On considère l'hypothèse de Boussinesq qui exige que :

$\rho = \rho_0$ dans tous les termes des équations de mouvement, sauf dans le terme de gravité ($-\rho g$), et en supposant que la masse volumique varie linéairement avec la température. En faisant un développement de Taylor d'ordre 1 de la masse volumique, on obtient :

$$\rho = \rho_0 + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P (T - T_0) + O(\Delta T^2) \quad (\text{II.8 .a})$$

$$\rho = \rho_0 + \frac{1}{\rho_0} \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P \rho_0 (T - T_0) + O(\Delta T^2) \quad (\text{II.8 .b})$$

Où :

$$\rho - \rho_0 = -\beta \rho_0 (T - T_0) \quad (\text{II.9})$$

$$\beta = - \left. \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P \quad (\text{II.10})$$

β : Le coefficient d'expansion thermique.

En substituant l'équation (II.10) dans (II.8) on aura :

$$-\frac{\partial}{\partial x} + (\rho_0 - \rho)g = -\frac{\partial}{\partial x} + \rho_0 g (T - T_0) \quad (\text{II.10})$$

Avec les hypothèses du fluide Newtonien incompressible, l'hypothèse de Boussinesq est vérifiée, la convection naturelle bidimensionnelle se modélise alors comme suit : A $t=0$, le fluide est à la température ambiante et il est immobile.

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} = 0 \text{ et } T = T_0$$

Pour $t>0$, les sources de chaleur provoquant la convection dans l'enceinte (voir figure **II.3**), on a :

) **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.12})$$

) **Equation de quantité de mouvement suivant la direction X :**

$$\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u u) + \frac{\partial}{\partial y} (v u) \right] = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (\text{II.13})$$

Avec les conditions aux limites :

Suivant X :

A $x=0$ et $x=L$; $0<y<H$; $u=0$ (parois solides)

Suivant Y :

A $y=0$ et $y=H$; $0<x<L$; $u=0$ (parois solides)

) **Equation de quantité de mouvement suivant la direction Y :**

$$\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u v) + \frac{\partial}{\partial y} (v^2) \right] = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial}{\partial y} \right) + \rho_0 g (T - T_0) \quad (\text{II.14})$$

Suivant X :

A $x=0$ et $x=L$; $0 < y < H$; $v=0$ (parois solides)

Suivant Y :

A $y=0$ et $y=H$; $0 < x < L$; $v=0$ (parois solides).

) **Equation de l'énergie :**

$$\rho_0 c_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u T) + \frac{\partial}{\partial y} (v T) \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q \quad (\text{II.15})$$

Les deux parois verticales et supérieures de l'enceinte sont maintenues à la température ambiante et la paroi inférieure est adiabatique, alors on a :

Suivant X :

A $x = 0$ et $x = L$; $0 < y < H$; $T = T_0$

Suivant Y :

A $y = 0$; $0 < x < L$; $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ (paroi adiabatique)

$y = H$; $0 < x < L$; $T = T_0$

Les conditions aux limites sont illustrées dans la figure II.1.

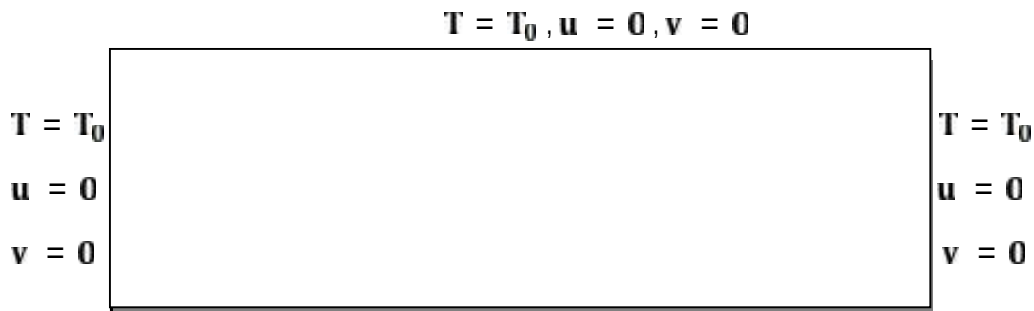


Figure II.1 : conditions aux limites et lieux des sondes choisies arbitrairement.

Pour déterminer la nature du régime d'écoulement, on a choisi quelques locations dans le domaine de calcul pour suivre l'évolution temporelle de la vitesse et la température.

II.2.2 Equations adimensionnelles :

Au lieu de parler des coordonnées x, y d'une particule à l'instant t , de composante u, v d'une vitesse et de pression p , nous utiliserons de nouvelles variables définies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{H}, Y = \frac{y}{H}, \tau = \frac{t}{(H^2/\alpha_a)} \\ U &= \frac{u}{(\alpha_a/H)}, V = \frac{v}{(\alpha_a/H)}, P = \frac{p}{\rho_0(\alpha_a/H)} \\ \theta &= \frac{T - T_c}{(T_c - T_f)}, V^\square = \frac{V}{V_a} \end{aligned} \quad (II.16)$$

L'emploi des variables réduites dans les équations (II.12-II.15) permet de s'approcher de la réalité des phénomènes physiques, car leurs existences et leurs déroulements sont indépendants du système d'unités de mesure utilisé. Les équations adimensionnelles deviennent alors :

$$At = 0, \text{ à } U = V = \theta = 0$$

Pour $\tau > 0$, on a :

) **Equation de continuité :**

$$\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial} = 0 \quad (II.17)$$

) **Equation de quantité de mouvement suivant la direction X :**

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + P \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right\} \quad (II.18)$$

) **Equation de quantité de mouvement suivant la direction Y :**

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial Y} + P \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right\} + R \cdot P \cdot \theta \quad (II.19)$$

) **Equation d'énergie :**

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial X} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) + S \quad (II.20)$$

Avec les conditions aux limites :

$$\text{À } X = 0, \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad U = V = 0, \quad \theta = 0$$

$$\text{À } X = 4, \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad U = V = 0, \quad \theta = 0.$$

$$\text{À } Y = 0, \quad 0 \leq X \leq 4, \quad U = V = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$$

$$\text{À } Y = 1, \quad 0 \leq X \leq 4, \quad U = V = 0, \quad \theta = 0.$$

Les équations (II.17-20) sont appelées équations adimensionnelles .Elles sont sans dimensions et ne font intervenir maintenant que deux nombres adimensionnels qui sont:

Le nombre de Rayleigh : $R = \frac{g \Delta T H^3}{\alpha}$,

Et le nombre de Prandtl :

$Pr = \frac{\nu_a}{\alpha_a} = 0.71$; pour l'air

Et

$Pr = \frac{\nu_e}{\alpha_e} = 7.01$; pour l'eau.

Chapitre III

Méthode de Boltzmann sur réseau (LBM)

Méthode de Boltzmann sur réseau (LBM)

III.1 Introduction:

Récemment, la méthode de Boltzmann sur réseau (LB) a été appliquée avec succès pour simuler les écoulements fluide et les phénomènes de transport [31]. À la différence des méthodes conventionnelles utilisées en CFD, la méthode LB est fondée sur les modèles microscopiques et les équations cinétiques mesoscopiques dans lesquels le comportement collectif des particules dans un système est employé pour simuler la mécanique des milieux continus. En raison de cette nature cinétique, la méthode LB s'est avérée particulièrement utile dans les applications impliquant la dynamique interfaciale et les frontières complexes, par exemple les écoulements multiphasiques ou multi composants [32,33]. Dans ce chapitre, nous présenterons en détail la méthodologie et les notions générales de la méthode LB ainsi que les différents modèles utilisés en écoulements isothermes et athermes. Les détails de l'application de modèles bien sélectionnés de la méthode LB fera l'objet des chapitres suivants.

III.2 Equations aux dérivées partielles générales:

La forme la plus pertinente des équations aux dérivées partielles écrites pour une variable d'intérêt dépendante de l'espace et du temps $\phi(\vec{x}, t)$ obéit au principe de conservation générale:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) + S \quad (\text{III.1})$$

où Γ est le coefficient de diffusion et S un terme source. Les quantités Γ et S sont spécifiques à la signification particulière de la variable ϕ .

Les quatre termes de l'équation différentielle générale sont le terme transitoire, le terme de convection, le terme de diffusion et le terme source. La variable dépendante ϕ peut servir pour une variété de différentes quantités, comme la fraction massique (concentration), la température ou l'enthalpie, la vitesse, l'énergie cinétique turbulente... En conséquence, pour chaque variable ϕ , une signification appropriée est donnée aux coefficients Γ et S .

Lorsque ϕ est le vecteur vitesse $\vec{u}$, cette équation projetée sur les axes du repère choisi donne deux ou trois équations (selon que le problème est 2D ou 3D), ces équations sont connues sous le nom d'équations de Navier-Stokes (N-S) incompressibles, écrites originalement par Claude Navier en 1823 et améliorées après par George Stokes. Les équations de Navier-Stokes expriment une loi de conservation locale pour la quantité de mouvement du système.

De façon plus générale, la recherche et l'ingénierie en simulation de dynamique des fluides (CFD) sont basées sur la résolution des équations aux dérivées partielles (PDE en anglais "Partial Differential Equation") (équation (III.1)).

III.3 Méthodes traditionnelles en dynamique des fluides:

Classiquement, un problème fluide est résolu en utilisant les équations aux dérivées partielles (EDP) qui le gouvernent, comme les équations de N-S. La plupart des méthodes de résolutions traditionnelles (méthode d'éléments finis: EF, méthode de différences finies: DF, méthode de volumes finis: VF, ...) en CFD sont basées sur la résolution ou bien de formes différentielles ou intégrales des équations aux dérivées partielles. Ces méthodes sont basées sur les techniques de discrétisation, elles partent des EDP et les discrétisent par éléments finis, par différences finies ou par volumes finis généralement en maillages réguliers. Les solutions approchées qui en découlent sont donc basées sur les échelles de discrétisation spatiale et temporelle. Les schémas de ces méthodes sont utilisés pour convertir les EDPs en des systèmes algébriques moyennant les conditions initiales et aux limites. Ces équations algébriques sont résolues itérativement jusqu'à ce que la condition de convergence soit vérifiée.

III.4 Méthode de Boltzmann :

Récemment, la méthode LBM a connu une utilisation croissante par les scientifiques et ingénieurs comme outil alternatif aux moyens de résolution numérique conventionnels pour les équations de Navier-Stokes. La méthode LBM et son ancêtre LGA (en expression anglaise: lattice gas automata), au contraire des approches conventionnelles, sont des approches mésoscopiques fondées sur la théorie cinétique. L'équation, de Boltzmann résout des équations mésoscopiques pour la moyenne d'ensemble d'une distribution de particules fluides en mouvement et interaction dans un réseau discret. Une analyse multi-échelle est ensuite effectuée pour retrouver ou remonter vers les quantités macroscopiques. La figure III.1 décrit la différence entre les procédures de résolution des EDPs utilisées par les approches conventionnelles et la méthode de Boltzmann.

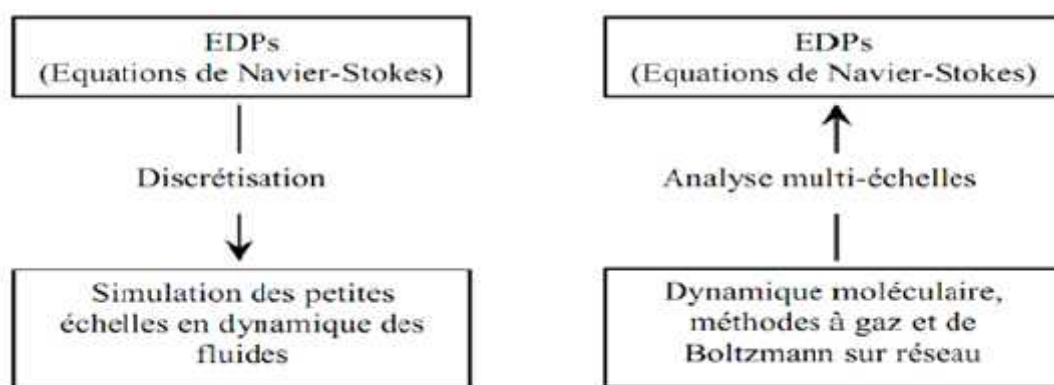


Figure III.1 : Différences entre les deux types d'approches numériques

La méthode de dynamiques moléculaire (Molecular dynamics) est aussi une méthode particulière, elle résout la dynamique d'un système fluide à l'échelle microscopique. Elle intègre les équations de mouvement de Newton pour un nombre de molécules donné en se basant sur un potentiel intermoléculaire. Toutefois, les simulations par cette technique sont très coûteuses en temps et mémoire de stockage, ce qui limite le nombre de particules à simuler [34]. La simulation directe de Monte

Carlo est une méthode pseudo-particulaire sans réseau et en conjonction avec la dynamique Newtonienne. Les méthodes à gaz et de Boltzmann sur réseau traitent les écoulement en termes de particules fictives à grains grossiers qui stationnent en des noeuds sur une grille maillée (réseau) ou effectuent des translations et collisions imposées par le comportement global du fluide. Les approches Navier-Stokes résolvent les équations aux dérivées partielles en milieux continus qui expliquent la conservation locale de la masse, de quantité de mouvement et de l'énergie. Ces trois méthodes ont leurs plages de validité à différents nombres de Knudsen (où le nombre de Knudsen Kn est défini au § 1.3.8). Notons aussi que les modèles des milieux continus basés sur les équations de NS et d'Euler sont généralement valables lorsque $Kn < 0,01$, et peuvent être étendus au régime d'écoulement glissant ($0,01 < Kn < 0,1$) par un traitement approprié des conditions aux limites. Alors que, le modèle de particules discrètes basée sur l'équation de Boltzmann régit presque tous les régimes d'écoulement ($Kn < 100$). Sans aucun doute, les approches numériques basées sur l'équation de Boltzmann trouvent un champ plus large d'applications pratiques.

La figure III.2 montre différentes approches numériques couramment employées en simulation de mécanique des fluides. Le domaine d'applicabilité de chaque méthode est défini par le nombre de Knudsen. De l'approche dynamique moléculaire à l'approche dynamique de Navier-stokes, l'échelle du système augmente (donc le nombre de Knudsen diminue), l'efficacité numérique par volume est améliorée mais la complexité est réduite.

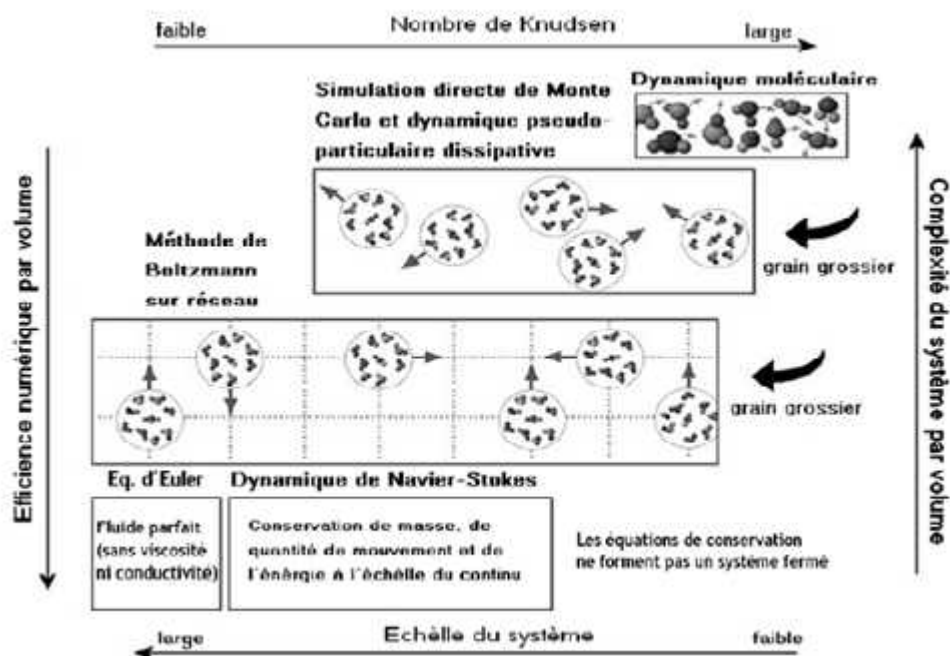


Figure III.2 : Les différences approches numériques en mécanique des fluides avec leurs domaines d'applicabilité (d'après [35], avec révision).

La méthode de Boltzmann sur réseau s'avère mésoscopique (entre microscopique et macroscopique), elle utilise des agglomérats de molécules qui se déplacent selon un maillage donné, et l'information macroscopique est obtenue à

l'aide d'un traitement collectif.

III.4.1 Théorie cinétique:

La théorie cinétique est fondée sur les hypothèses fondamentales suivantes: Le nombre de molécules est très grand, le libre-parcours moyen des molécules est beaucoup plus grande que la taille de la molécule (Knudsen élevé), les molécules se déplacent constamment et aléatoirement avec une distribution de vitesse, les collisions inter particules et particules-murs sont élastiques, pas de forces inter particulaires et les particules (ou molécules) obéissent aux lois de mouvement de Newton.

La théorie cinétique des gaz cherche à expliquer le comportement macroscopique d'un gaz à partir des caractéristiques des mouvements des particules qui le composent. Elle permet de donner une interprétation microscopique aux notions de température (c'est une mesure de l'agitation des particules, plus précisément de leur énergie cinétique) et de pression (la pression exercée par un gaz sur une paroi résulte des chocs des particules sur cette dernière).

Soit une particule isolée de masse m en mouvement dans un tube (de longueur L et surface de base A) à la vitesse c_x (dans la direction x) et qui vient heurter continuellement les bases du tube. En supposant [36] que les chocs sont parfaitement élastiques, la force F résultante à l'une des extrémités du tube est égale au taux de changement de la quantité de mouvement de la particule pendant l'intervalle de temps $\Delta t = 2L/c_x$ (temps nécessaire pour que la particule revienne à sa position initiale), soit $mc_x - (-mc_x) = 2mc_x$. L'intégration de la loi de Newton ($F = m dc/dt$) donne $\Delta F = 2m c_x$, c-à-d $F = mc_x^2/L$. En supposant absentes les interactions entre particules (particules libres et indépendantes: gaz idéal dilué) et que les composantes de la vitesse sont égales dans les trois directions (c-à-d. $c^2 = 3c_x^2$), le résultat peut être généralisé pour N particules et la force totale est donc $F = Nm c^2/3L$. La pression exercée sur la base du tube est la force par unité de surface, $P = F/A = Nm c^2/3LA = Nm c^2/3V$, où V est le volume du tube. Il en résulte que $P = (m c^2/2)(2N/3V)$. Ce modèle simple de gaz idéal pour le mouvement de molécules où on néglige la taille des particules et les collisions inter particulaires, il est bien remarqué que la pression à l'échelle macroscopique est liée à l'énergie cinétique du système à l'échelle microscopique.

D'autre part, il a été établi expérimentalement pour un gaz, loin des points critiques, la relation $P V = nRT$, où $n = N/N_A$ est le nombre de mole,

$R = 8.314510 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ est la constante des gaz, $N_A = 6.0221367 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ est le nombre d'Avogadro. En introduisant la constante de Boltzmann $k = R/N_A = 1.3806568 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$, il en résulte que la température du système à l'échelle macroscopique est, elle aussi, liée à son énergie cinétique à l'échelle microscopique, $m c^2/2 = 3/2 kT$.

III.4.2 Équation de Boltzmann:

L'équation de Boltzmann est due au physicien Autrichien Ludwig Eduard Boltzmann (1844—1906) qui était célèbre pour ses contributions fondamentales dans

les domaines de la mécanique statistique et de la thermodynamique statistique. En mécanique statistique [36], la fonction de distribution $f(\vec{x}, \vec{\zeta}, t)$ d'une particule simple donne la probabilité de trouver au temps t une particule à une position donnée $\vec{x}$ et ayant une vitesse $\vec{\zeta}$. Le nombre probable de particules se trouvant dans l'étendue $\vec{x} \pm d\vec{x}$ et d'une vitesse entre $\vec{\zeta} \pm d\vec{\zeta}$ est donné par $f(\vec{x}, \vec{\zeta}, t) d\vec{x} d\vec{\zeta}$. Soit $\vec{F}$ une force externe (moyennement faible par rapport aux forces intermoléculaires).

En incrémentant le temps de t à $t+dt$, il existe des particules qui partent de $(\vec{x}, \vec{\zeta})$ et arrivent à $(\vec{x} + d\vec{x}, \vec{\zeta} + d\vec{\zeta})$. En raison du phénomène de collision durant le temps dt , il existe un nombre de particules qui partent de $(\vec{x}, \vec{\zeta})$ et n'arrivent pas à $(\vec{x} + d\vec{x}, \vec{\zeta} + d\vec{\zeta})$, soit $\Gamma^{(+)} d\vec{x} d\vec{\zeta} dt$, et un autre nombre de particules partant quelque part autre que $(\vec{x}, \vec{\zeta})$ mais y arrivent, soit $\Gamma^{(-)} d\vec{x} d\vec{\zeta} dt$. En conséquence, la variation de la fonction de distribution pendant le temps dt est régie par l'équation suivante:

$$f(\vec{x} + d\vec{x}, \vec{\zeta} + d\vec{\zeta}, t + dt) d\vec{x} d\vec{\zeta} - f(\vec{x}, \vec{\zeta}, t) d\vec{x} d\vec{\zeta} = (\Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)}) d\vec{x} d\vec{\zeta} dt \quad (\text{III.2})$$

Le développement en séries de Taylor au premier ordre du terme de gauche de cette équation autour de $f(\vec{x}, \vec{\zeta}, t)$ donne:

$$\left[d\vec{x} \nabla_{\vec{x}} f + d\vec{\zeta} \nabla_{\vec{\zeta}} f + \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) dt \right] f(\vec{x}, \vec{\zeta}, t) d\vec{x} d\vec{\zeta} = (\Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)}) d\vec{x} d\vec{\zeta} dt \quad (\text{III.3})$$

Ce qui donne l'équation de Boltzmann:

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \vec{\zeta} \nabla_{\vec{x}} f + \frac{\vec{F}}{m} \nabla_{\vec{\zeta}} f = \Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)} \quad (\text{III.4})$$

L'opérateur de collision $\Gamma^{(+)} - \Gamma^{(-)}$, conventionnellement noté $\Omega(f, f)$, est entre autre un terme de gain-perte dû à la collision dans le volume défini autour de $\vec{x}$. Sa forme complète est un terme intégral-différentiel bilinéaire en f qui rend l'équation de Boltzmann particulièrement compliquée. Une simplification majeure et efficace a été apportée en 1954 par l'approximation de Bhatnagar, Gross et Krook [37].

III.4.3 Approximation BGK :

L'approximation BGK a été introduite comme un modèle simplifié de l'opérateur de collision de l'équation de Boltzmann. Le modèle qui en découle est couramment désigné par le modèle à simple temps de relaxation "SRT: Single Relaxation Time". Une particule dans le fluide dont l'état est décrit par la fonction de distribution f , relaxe vers son état d'équilibre dans un temps τ . L'opérateur de collision prend la nouvelle forme simplifiée:

$$\Omega(f, f) = -\frac{f - f^e}{\lambda} \quad (\text{III.5})$$

Où λ est une échelle de temps typique associée à la relaxation à l'équilibre local, il dépend évidemment de la nature du fluide, donc de sa viscosité. L'équation de Boltzmann tenant compte de l'approximation BGK (notée LBGK) devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \vec{\zeta} \cdot \nabla_x f + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{\zeta}} f = -\frac{f - f^e}{\lambda} \quad (\text{III.6})$$

Cette équation peut être discrétisée selon des directions $\vec{e}_k$ spécifiées, on aura:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_k + \vec{e}_k \cdot \nabla_x f_k + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \nabla_{\vec{e}} f_k = -\frac{f_k - f_k^e}{\lambda} \quad (\text{III.7})$$

C'est une équation aux dérivées partielles linéaire en présence d'un terme force, les deux premiers termes de gauche désignent le terme d'advection et décrivent le processus de propagation, le troisième terme de gauche représente la contribution d'un terme force extérieur et le terme de droite décrit le processus de collision.

La forme discrétisée (en second ordre dans l'espace et le temps) la plus employée pour l'équation (III.7) sans terme force est:

$$f_k(\vec{x} + \Delta \vec{x}, t + \Delta t) - f_k(\vec{x}, t) = -\frac{f_k - f_k^e}{T} \quad (\text{III.8})$$

$$\text{Où } \Delta \vec{x} = \Delta t \vec{e}_k, \text{ c\`a d } \vec{e}_k = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{e} \quad T = \frac{\lambda}{\Delta t}$$

Dans le modèle BGK, il est supposé que toutes les échelles relaxent de la même façon pendant le temps de relaxation, selon les conditions initiales et aux limites [32] ce qui va induire des oscillations non physiques de faible longueur d'onde et dégrade la stabilité du schéma numérique. Historiquement, le succès de la méthode de Boltzmann est en grande partie fondé sur l'approximation BGK. Ce modèle est souvent employé pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles [31]. Dans ce modèle le fluide est conçu pour adopter un comportement légèrement compressible pour résoudre l'équation de pression à faibles nombres de Mach. Le modèle BGK a été amélioré continuellement dans de nombreuses tentatives résultant en de nouveaux modèles (modèle MRT: multiple relaxation times [36], modèle entropique, modèle régularisé [38]) pour améliorer la stabilité et/ou l'exactitude numériques pour des problèmes spécifiques, ou bien pour représenter des phénomènes physiques additionnels. Le modèle BGK reste donc le modèle du choix dans beaucoup de situations, en raison de sa simplicité d'exécution aussi bien que de précision.

III.5 Cadre de base de la méthode de Boltzmann sur réseau:

En raison de la diversité de modèles dans la méthode de Boltzmann, nous allons plutôt nous focaliser dans cette section sur les plus employés par les scientifiques et

ingénieurs.

III.5.1 Réseaux et vitesses discrètes:

Dans la méthode LBM, la notion de réseaux ou arrangements est importante. La terminologie commune est basée sur la définition de la dimension D ($D1 \equiv 1D, D2 \equiv 2D, D3 \equiv 3D$) du problème à étudier et le nombre de vitesses discrètes employées Q_m , désigné par DnQ_m . Le domaine de calcul est subdivisé avec maillage carré uniforme ($\Delta x = \Delta y = \Delta z$) résultant en un nombre de noeuds dit réseau. La connectivité entre les noeuds du réseau est assurée par des vitesses discrètes dans les directions des axes et les directions diagonales. Les particules se déplacent à la vitesse $\vec{e}_{k=0}, m^{-1}$ transportant l'information f_k . Pour un problème bidimensionnel et un réseau à 9 vitesses $\vec{e}_{k=0,8}$, (voir tableau III.1), nous avons:

$$[\vec{e}]_k = [\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_5, \vec{e}_6, \vec{e}_7, \vec{e}_8]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Pour un problème fluide tridimensionnel, utilisant un réseau à 15 vitesses discrètes $\vec{e}_{k=0,14}$, nous avons:

Un réseau d'étude DnQ_m est caractérisé, donc, par des vitesses de connections discrètes $\vec{e}_{k=0}, m^{-1}$, il est aussi caractérisé par une vitesse du son c_s du réseau et des facteurs de pondération $w_{k=0}, m^{-1}$, ces paramètres définissent parfaitement la fonction de distribution d'équilibre qui sera discutée à la section suivante. Le tableau 2.1 présente les caractéristiques des modèles les plus employés par la méthode LBM pour des problèmes $1D, 2D$ et $3D$. Le réseau $D2Q9$ est schématisé sur la figure III.3, la vitesse $\vec{e}_0$ est placée au centre de la maille.

III.5.2 Fonction de distribution d'équilibre et variables macroscopiques:

Bien qu'historiquement l'équation de Boltzmann LBE dérive de son ancêtre LGA (lattice gas automata) ou méthode des robots (automates) cellulaires, il a été démontré par [39] que l'équation LBE peut dériver rigoureusement de la théorie cinétique des gaz (c'est-à-dire l'équation de Boltzmann) et que nous pouvons, en utilisant l'approximation BGK, remonter aux équations de Navier-Stokes. Cette dernière fera l'objet de la section III.5.7.

Nous allons ici démontrer l'équation LBE-BGK en partant de la fonction de distribution de Maxwell-Boltzmann définie par:

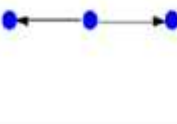
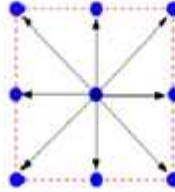
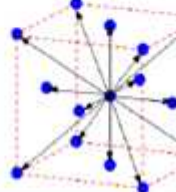
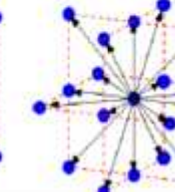
Modèle	D1Q3	D2Q9	D3Q15	D3Q19
c_s^2	1/3	1/3	1/3	1/3
w_k	$2/3^o$ $1/6^+$	$4/9^o$ $1/9^+$ $1/36^x$	$2/9^o$ $1/9^+$ $1/72^x$	$1/3^o$ $1/18^+$ $1/36^x$
$\vec{e}_k$				

Tableau III.1 : Propriétés des modèles LBM couramment utilisés. les exposants o, + et x signifient respectivement : particules au repos, particules se déplaçant le long des axes et particules se déplaçant diagonalement.

$$f^{(0)} = \frac{\rho}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{(\vec{\zeta}-\vec{u})^2}{2R}\right) \quad (\text{III.9})$$

Où R est la constante des gaz, T sa température et D est la dimension du problème (ou degré de liberté de particules)

Intégrons l'équation (III.6), sans terme force, sur un intervalle de temps Δt , on a:

$$f(\vec{x} + \vec{\zeta} \Delta t, \vec{\zeta}, t + \Delta t) = e^{-\Delta t / \lambda} (f(\vec{x}, \vec{\zeta}, t) + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\Delta t} e^{t'/\lambda} f^{(0)}(\vec{x} + \vec{\zeta} t', \vec{\zeta}, t + t') dt') \quad (\text{III.10})$$

En supposant que Δt est faible on a $e^{-\Delta t / \lambda} = 1 - \Delta t / \lambda + O(\Delta t^2)$ et en négligeant les termes en $O(\Delta t^2)$ dans le terme en intégrale de l'équation (III.10), on a:

$$f(\vec{x} + \vec{\zeta} \Delta t, \vec{\zeta}, t + \Delta t) - f(\vec{x} + \vec{\zeta}, t) = -\frac{1}{\lambda} (f(\vec{x} + \vec{\zeta}, t) - f^{(0)}(\vec{x}, \vec{\zeta}, t)) \quad (\text{III.11})$$

Sachant que $T = \lambda / \Delta t$.

Le développement en série de Taylor de $f^{(0)}$ à l'ordre 2 suffit pour remonter aux équations de Navier-Stokes. Nous adoptons pour la suite la notation f^e au lieu de $f^{(0)}$, nous avons:

$$f^e = \frac{\rho}{(2\pi)^{d/2}} \exp\left(-\frac{\vec{\zeta}^2}{2R}\right) \left[1 + \frac{\vec{\zeta} \cdot \vec{u}}{R} + \frac{1}{2} \frac{(\vec{\zeta} \cdot \vec{u})^2}{(R)^2} - \frac{1}{2} \frac{\vec{u}^2}{R}\right] \quad (\text{III.12})$$

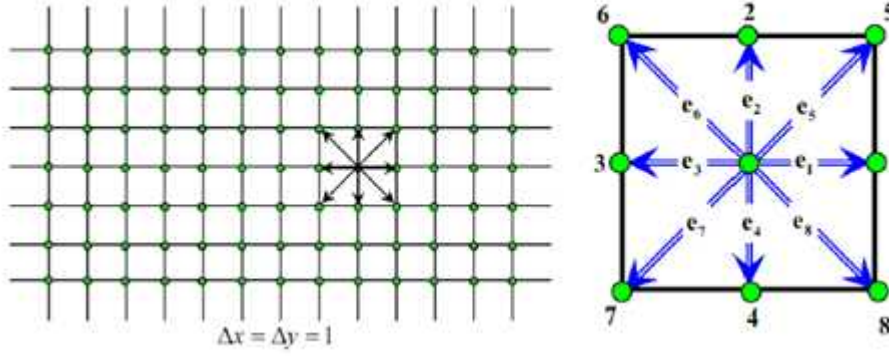


Figure III.3: schéma de réseau discrétisé par le modèle D2Q9. À gauche : réseau LB standard et à droite : modèle D2Q9.

Les variables hydrodynamiques sont les moments de la fonction de distribution f , soit:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} f \\ \vec{\zeta} f \\ \frac{1}{2} (\vec{\zeta} - \vec{u})^2 f \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} f^e \\ \vec{\zeta} f^e \\ \frac{1}{2} (\vec{\zeta} - \vec{u})^2 f^e \end{pmatrix} \quad (\text{III.13})$$

Où $E = \frac{D}{2}$

Pour évaluer numériquement ces variables hydrodynamiques nous avons à discrétiser les espaces de moment $\vec{\zeta}$,

$$\int \psi(\vec{\zeta}) f^e(\vec{x}, \vec{\zeta}, t) = \sum_k W_k \psi(\vec{\zeta}_k) f_k^e(\vec{x}, \vec{\zeta}_k, t) \quad (\text{III.14})$$

Avec de telle discrétisation, les variables hydrodynamiques sont approximées par une formule de quadrature d'un certain degré de précision, soient donc:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho \vec{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \sum_k \begin{pmatrix} f_k \\ \vec{\zeta}_k f_k \\ \frac{1}{2} (\vec{\zeta}_k - \vec{u})^2 f_k \end{pmatrix} = \sum_k \begin{pmatrix} f_k^e \\ \vec{\zeta}_k f_k^e \\ \frac{1}{2} (\vec{\zeta}_k - \vec{u})^2 f_k^e \end{pmatrix} \quad (\text{III.15})$$

Les intégrales de l'équation (III.14) peuvent être évaluées par la quadrature de Gauss [40] comme suit:

$$\int \psi(\vec{\zeta}) \exp\left(-\frac{\vec{\zeta}^2}{2R}\right) d\vec{\zeta} = \sum_k W_k \psi(\vec{\zeta}_k) \exp\left(-\frac{\vec{\zeta}_k^2}{2R}\right) \quad (\text{III.16})$$

Dans ce qui suit on utilisera le réseau D2Q9. Nous pouvons mettre le polynôme

$\phi(\vec{\zeta})$ sous la forme $\phi(\vec{\zeta}) = \zeta_x^m \zeta_y^n$, où ζ_x et ζ_y sont les composantes de $\vec{\zeta}$.

L'intégrale de l'équation (III.14) peut être mise sous la forme:

$$I = (2RT)^{m+n+2} I_m I_n \quad (\text{III.17})$$

Où $I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} \xi^m d\xi$ et $\xi = \zeta_{x,y} / \sqrt{2R}$

et pour évaluer Im nous utilisons la quadrature d'Hermite [40] de troisième ordre, c.à.d.

$I_m = \sum_{i=1,3} \omega_i \xi_i^m$ Les trois abscisses qui en sortent sont
 $\xi_1 = -\sqrt{3/2}$, $\xi_2 = 0$ e $\xi_3 = \sqrt{3/2}$ et les coefficients de pondération correspondant sont

$$\omega_1 = \sqrt{n/6}, \omega_2 = 2\sqrt{n/3} \text{ e } \omega_3 = \sqrt{n/6}$$

L'intégrale de l'équation (III.17) devient:

$$I = 2RT \omega_2^2 \psi(0) + \sum_{i=1,4} \omega_1 \omega_2 \psi(\vec{\zeta}_k) + \sum_{i=5,8} \omega_1^2 \psi(\vec{\zeta}_k) \quad (\text{III.18})$$

Où $\vec{\zeta}_k$ est un vecteur vitesse nul pour $k = 0$, égale à $\sqrt{3R}$ ($\pm 1, 0$) et $\sqrt{3R}$ ($0, \pm 1$) pour $k = 1-4$ et égale à $\sqrt{3R}$ ($\pm 1, \pm 1$) pour $k = 5-8$.

Le domaine est discrétisé en des carées d'unité réseau $\delta x = \sqrt{3R} \delta t$. Si en plus nous sommes intéressés par des problèmes isothermes alors T n'aura pas de signification et nous pouvons ainsi choisir δx pour être une quantité fondamentale, soit $\sqrt{3R} = c = \delta x / \delta t$, ou bien $RT = c^2/3 = c_s^2$, où c_s désigne la vitesse du son du réseau. D'habitude c est prise égale à l'unité, donc $c_s^2 = 1/3$ pour le réseau D2Q9.

En comparant les équations (III.16) et (III.18) nous pouvons identifier les coefficients w_k , soit:

$$W_k = 2\pi \text{ e } \left(\frac{\vec{\zeta}_k^2}{2R} \right) \omega_k \quad (\text{III.19})$$

Où w_k sont données au tableau III.1.

La fonction de distribution d'équilibre de l'équation (III.12) devient donc :

$$f^e(\vec{x}, \vec{e}_k, t) = W_k f_k^e(\vec{x}, \vec{\zeta}_k, t) = \omega_k \rho \left(1 + \frac{3 \vec{e}_k \cdot \vec{u}}{c^2} + \frac{9 (\vec{e}_k \cdot \vec{u})^2}{2 c^4} - \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} \right) \quad (\text{III.20})$$

Où les $\vec{e}_k$ sont définis à la section III.5.1.

L'équation (III.7) peut maintenant être résolue numériquement. La dérivation de la fonction d'équilibre des autres modèles peut se faire avec la même procédure.

III.5.3. Processus de collision-propagation:

L'équation (III.8) comporte deux termes, un terme de collision et un terme de propagation, soit:

$$\underbrace{f_k(\vec{x} + \vec{e}_k \Delta t, t + \Delta t)}_{T \text{ d } p} = \underbrace{f_k(\vec{x}, t)}_{T \text{ d } c} - \frac{1}{T} [f_k - f_k^e] \quad (\text{III.21})$$

son implémentation se fait en deux étapes:

Etape de collision :

Etape de collision : $\tilde{f}_k(\vec{x}, t) = f_k(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_k(\vec{x}, t) - f_k^e(\vec{x}, t)]$

Etape de propagation : $f_k(\vec{x} + \vec{e}_k \Delta t, t + \Delta t) = \tilde{f}_k(\vec{x}, t)$ (III.22)

Où f_k et $\tilde{f}_k$ désignent valeurs avant et après collision respectivement. Il est bien remarqué ici que l'étape de collision est purement locale et que l'étape de propagation est un simple décalage uniforme de l'information qui ne nécessite pas de grand effort de calcul.

III.5.4. Viscosité:

La viscosité ν (en unité réseau) dans la méthode LBM est liée au temps de relaxation τ par la relation (qui sera démontré à la section 2.5.7):

$$\nu = (\tau - 0.5) c_s^2 \Delta t \quad (III.23)$$

La viscosité est positive ce qui impose le choix de $\tau > 0.5$. Cependant dans des la majorité des problèmes étudiés la viscosité est liée aux paramètres moteurs de l'écoulement (nombre de Reynolds, nombre de Rayleigh,...). Un mauvais choix de la valeur de la viscosité peut induire des oscillations non physiques à l'écoulement. Cette contrainte est l'inconvénient majeur de la méthode LBM.

III.5.5 Incorporation du terme force:

Plusieurs travaux ont été menés pour donner pour l'incorporation du terme force défini à l'équation (III.7) la forme la plus appropriée. L'équation LB la plus employée, en présence du terme force, est donnée par:

$$f_k(\vec{x} + \vec{e}_k \Delta t, t + \Delta t) = \tilde{f}_k(\vec{x}, t) - \frac{1}{\tau} [f_k - f_k^e] + \Delta t F_k \quad (III.24)$$

Luo [41] a proposé la forme suivante:

$$F_k = -3\omega_k \rho \vec{e}_k \cdot \vec{F} / c^2 \quad (III.25)$$

Autres ont revu quelques techniques tenant compte du terme force et ont conclu que de meilleurs résultats peuvent être obtenus en adoptant la forme suivante:

$$F_k = 4/c^2 (1 - 1/2T) \vec{e}_k \cdot \vec{F} \quad (III.26)$$

et que la vitesse macroscopique doit être redéfinie au contraire de l'équation (III.15), soit:

$$\rho \vec{u} = \sum_{k=0,8} \vec{e}_k f_k + \frac{\vec{F} \Delta t}{2} \quad (III.27)$$

Des chercheurs ont étudié plusieurs approches traitant le même sujet et ont démontré analytiquement que la forme adéquate pour le terme force doit être

$$F_k = \omega_k (1 - 1/2T) \left(\frac{\vec{e}_k \cdot \vec{u}}{c_s^2} + \frac{\vec{e}_k \cdot \vec{u}}{c_s^4} \vec{e}_k \right) \cdot \vec{F} \quad (III.28)$$

et la vitesse est calculée par l'équation (III.27). L'auteur a démontré que loin de cette forme, des effets discrets du réseau peuvent altérer l'exactitude numérique des résultats. L'application de ce modèle à deux problèmes différents (écoulement laminaire de Poiseuille entraîné par un gradient de pression et un écoulement 2D

transitoire de Taylor vortex) a montré qu'il fournit les meilleurs résultats par comparaison aux autres modèles.

Il a été démontré récemment par Mohamad et al. [42] dans un benchmark sur un problème de convection naturelle que le modèle de l'équation (III.25) fournit également de bons résultats.

III.5.6 Conditions aux limites:

Le traitement des conditions aux limites dans la méthode LBM est de grande importance, puisqu'il influencera l'exactitude et la stabilité du calcul [43,44]. La difficulté provient du fait qu'il n'existe aucune intuition physique sur le comportement de la fonction de distribution de vitesses sur des frontières. Aux frontières nous n'avons que juste l'information macroscopique (par exemple CL de non-glissement) et nous devons traduire cette information sur les fonctions de distribution aux frontières de manière à satisfaire les conditions aux limites spécifiées. De ce fait, il n'y a pas de règle unique et les auteurs proposent différentes solutions.

Cette discussion est faite sur la base de l'exemple du modèle bidimensionnel $D2Q9$ schématisé sur la figure III.3. Nous supposons que le domaine est subdivisé en une grille $n \times m$ carrés de réseau, c'est-à-dire $n+1$ noeuds sur les axes horizontaux et $m+1$ noeuds sur les axes verticaux. Aux frontières, les fonctions de distribution f_k sortantes.

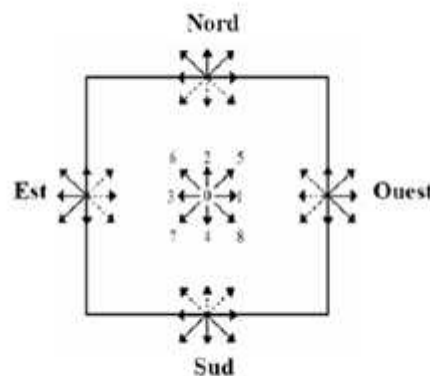


Figure III.4: Représentation schématique du mouvement de particules le long des vitesses discrètes pour le modèle bidimensionnel $D2Q9$. Aux frontières, lignes continues pour les distributions connues (sortantes) et lignes discontinues pour distributions inconnues (entrantes).

Les vecteurs en lignes continues sortant du domaine) sont connues et celles parallèles aux frontières sont déterminées par le processus de propagation. Cependant, les fonctions de distribution f_k entrantes (vecteurs en lignes discontinues entrant au

domaine) restent inconnues. Nous discutons dans cette section les techniques les plus employées dans le traitement conditions aux limites dans la méthode LBM. Ces différentes techniques sont classées en deux grandes familles, selon que la frontière est à nœud mouillé (appartient au fluide, dite aussi frontière libre) ou non (frontière solide).

Frontière à nœud mouillé:

Les frontières à nœud mouillé dénotent les entrées/sorties, les frontières périodiques, les lignes de symétrie et l'infini. Les conditions de frontière libres employées généralement regroupent:

) **Les lignes de symétrie:** Si la frontière Sud de la figure III.3 est une ligne de symétrie, alors les fonctions de distribution $f_k=2,5,6$ sont inconnues et seront déterminées comme suit:

$$f_2(i, 0) = f_4(i, 0) = f_5(i, 0) = f_8(i, 0) \text{ et } f_6(i, 0) = f_7(i, 0) \quad (\text{III.29})$$

Cette solution a été utilisée avec succès par Peng et al. [45] dans un problème de croissance cristalline en configuration de Czochralski et a permis d'obtenir de bons résultats.

) **Les frontières périodiques:** Cette condition est la plus simple à implémenter. Elle est appliquée directement aux fonctions de distribution et non pas aux variables macroscopiques, ce là signifie que les quantités sortantes d'une frontières (exemple Ouest) viennent entrer de la frontière opposée (Est). Dans ce cas, les quantités $f_k=1,5,8$ sortent de l'Ouest et rentrent en Est. Tandis que les quantités $f_k=3,6,7$ qui sortent de l'Est viennent rentrer de l'Ouest. Un terme force uniforme ou un gradient de pression constant peuvent être inclus dans cette condition. Nous avons donc:

$$f_k(0, j) = f_{\bar{k}}(n, j) - \omega_k \frac{\partial}{\partial x} e_{k,x} \quad (\text{III.30})$$

Où k et $\bar{k}$ et $e_{k,x}$ désignent respectivement la direction du vecteur vitesse discrète e_k , son opposée et la composante horizontale du vecteur pour les distributions inconnues.

) **Les frontières infinies ou d'extrapolation:**

Au contraire de la frontière périodique, on peut employer la solution de dérivée nulle pour les frontières d'extrapolation. Nous supposons que les frontières Nord et Ouest sont des frontières d'extrapolation, elles sont exprimées pour la variable macroscopique par $\vec{\partial} / \vec{\partial} = 0$ La solution retenue pour la frontière Nord est:

$$f_{k=4,7,8}(i, m) = f_{k=4,7,8}(i, m - 1) \quad (\text{III.31})$$

et celle pour la frontière Ouest est:

$$f_{k=3,6,7}(n, j) = f_{k=3,6,7}(n - 1, j) \quad (\text{III.32})$$

Dans certains cas, pour de grands rapports de forme (exemple > 20 dans un écoulement dans un canal), on adopte la solution

$$f_{k=4,7,8}(i, m) = 2 f_{k=4,7,8}(i, m - 1) - f_{k=4,7,8}(i, m - 2) \quad (\text{III.33})$$

pour la frontière Nord et

$$f_{k=3,6,7}(n, j) = 2 f_{k=3,6,7}(n-1, j) - f_{k=3,6,7}(n-2, j) \quad (\text{III.34})$$

pour la frontière Ouest. Cependant cette solution n'assure pas la stabilité du schéma numérique pour les faibles rapports de forme.

)] **Les frontières d'entrée/sortie:** Supposant maintenant que la frontière Est est une frontière d'entrée (admission). Dans ce cas, les quantités u_x , u_y et $f_{k=0,1,2,4,5,8}$ sont connues et les quantités ρ , $f_{k=3,6,7}$ sont indéterminées. L'idée est originelle est de façon plus générale résolue par le système d'équations suivant:

$$\begin{aligned} (a) : \rho &= \sum_{k=0,8} f_k \\ (b) : \rho u_x &= \sum_{k=1,8} f_k e_{k,x} \\ (c) : \rho u_y &= \sum_{k=1,8} f_k e_{k,y} \\ (d) : f_k^n |n &= f_k^n |n \end{aligned} \quad (\text{III.35})$$

L'équation (III.35-d) signifie rebond de la partie non équilibrée de la particule impactant normalement sur la frontière. Dans notre cas, le système (III.35) donne:

$$\begin{aligned} (a) : \rho &= \frac{1}{1-u_x} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)] \\ (b) : f_5 &= f_7 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho u_x + \frac{1}{2} \rho u_y \\ (c) : f_8 &= f_6 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{6} \rho u_x - \frac{1}{2} \rho u_y \\ (d) : f_1 &= f_3 + \frac{2}{3} \rho u_x \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

Le système d'équations (III.35) peut être appliqué facilement aux autres frontières. Plus de détails sont disponibles en [46-47].

Frontière mur/rigide:

La condition frontière rigide la plus simple et la plus commune en LBM est la condition de rebond. Quand une particule heurte une frontière rigide, elle rebrousse chemin dans la même direction d'arrivée. C'est à dire, si la frontière Nord est un mur fixe par rapport à l'écoulement fluide on a:

$$f_4(i, m) = f_2(i, m) = f_8(i, m) = f_6(i, m) \text{ e } f_7(i, m) = f_5(i, m) \quad (\text{III.37})$$

Plus généralement, cette solution s'appelle "rebond à plein trajet" et est exprimée par $f_k = f_{\bar{k}}$, où k et $\bar{k}$ sont deux directions opposées sur la frontières. Cette solution de traitement est très simples et mène à la conservation de la masse et la quantité de mouvement. Cependant, il a été démontré que toutes ces conditions aux limites produisent des vitesses de glissement non nulles et que cette solution est juste de premier ordre. Ceci va altérer la propriétés du second ordre en précision de la méthode LB. Pour le rebond à plein trajet, la vitesse de glissement induite est donnée par est la

$$u_g = \frac{2u_c}{3n^2} [(2\tau - 1)(4\tau - 3) - 3n] = O(1/n), \text{ où } u_c$$

vitesse centrale (voir [46]), τ est le temps de relaxation et n est la résolution du maillage. Plusieurs autres approches ont été adoptées parallèlement à cette solution et qui sont du second ordre, tel que le "rebond à mi-trajet" qui produit une vitesse de glissement donnée par, $u_g = \frac{u_c}{3(n-1)^2} [4\tau(4\tau - 5) + 3] = O(1/n^2)$ et le rebond de la partie non équilibrée. Mentionnons qu'il existe d'autres solutions de traitement des conditions aux limites de types frontière rectiligne (mur) et curviligne

III.5.7 Développement multiéchelle de Chapman-Enskog:

La procédure de Chapman-Enskog a été utilisée pour résoudre l'équation du transport de Boltzmann. Soit ϵ un paramètre (très petit de l'ordre de l'unité de temps) dans l'espace physique, il peut jouer le rôle du nombre de Knudsen. La procédure de Chapman-Enskog consiste à l'introduction de différentes échelles de temps $t_k = \epsilon^k t$ et d'espace $x_k = \epsilon^k x$ ($k \geq 1$) pour différencier entre l'échelle de temps Boltzmann et l'échelle de temps d'Euler (entre autre). Nous avons donc:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots \quad \frac{\partial}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots \quad (\text{III.38})$$

$$D_k = \frac{\partial}{\partial t} + e_k \cdot \nabla_x = \epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + e_k \cdot \nabla_{x1} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + O(\epsilon^2) \quad (\text{III.39})$$

Et

$$f_k = f_k^{(0)} + \epsilon f_k^{(1)} + \epsilon^2 f_k^{(2)} + \dots \quad (\text{III.40})$$

Où $f_k^{(0)} = f_k^e$ la p éq ée d f_k e $f_k^n = \epsilon f_k^{(1)} + \epsilon^2 f_k^{(2)}$ sa partie non-équilibrée

En appliquant le développement de Taylor en Δt à l'équation (III.9), on obtient:

$$f_k(\vec{x} + \Delta \vec{x}, t + \Delta t) - f_k(\vec{x}, t) = \left[f_k + \Delta t D_k(f_k) + \frac{\Delta t^2}{2} D_k^2(f_k) + O(\Delta t^3) - f_k \right] \quad (\text{III.41})$$

Ce qui donne

$$f_k(\vec{x} + \Delta \vec{x}, t + \Delta t) - f_k(\vec{x}, t) = \left[D_k + (f_k) + \frac{\Delta t}{2} D_k^2(f_k) + O(\Delta t^2) \right] \Delta t \quad (\text{III.42})$$

Remplaçons les équations (III.40) et (III.42) dans l'équation (III.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (D_k + \frac{\Delta t}{2} D_k^2 + O(\Delta t^2)) \left[f_k^{(0)} + \epsilon f_k^{(1)} + \epsilon^2 f_k^{(2)} + O(\epsilon^2) \right] = \\ - \frac{1}{\Delta t} \left[f_k^{(0)} + \epsilon f_k^{(1)} + \epsilon^2 f_k^{(2)} + O(\epsilon^2) - f_k^e \right] \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

Sachant que

$$\begin{aligned} D_k + \frac{\Delta t}{2} D_k^2 + O(\Delta t^2) \approx \epsilon \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + e_k \cdot \nabla_{x1} \right) + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \frac{\Delta t}{2} \epsilon^2 \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + e_k \cdot \nabla_{x1} \right)^2 + \\ O(\epsilon^2 + \Delta t^2) = D_{k,1} + \frac{\Delta t}{2} D_{k,2} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} O(\epsilon^2 + \Delta t^2) \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

Nous collectons les termes de même ordre en ϵ et nous retenons les termes d'ordres inférieurs à 2, nous obtenons une série d'équations de Boltzmann pour différentes échelles de temps.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \epsilon^0: f_k^{(0)} &= f_k^e + O(\Delta t^2) \\
 (b) \quad \epsilon^1: D_{k,1}(f_k^{(0)}) &= -\frac{1}{\Delta t} f_k^{(1)} + O(\Delta t^2) \\
 (c) \quad \epsilon^2: \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial t_2} + D_{k,1}(f_k^{(1)}) + \frac{\Delta t}{2} D_{k,2}(f_k^{(0)}) &= -\frac{1}{\Delta t} f_k^{(2)} + O(\Delta t^2)
 \end{aligned} \tag{III.45}$$

Réécrivons l'équation (III.45-c) en tenant compte de (III.45-b), on obtient:

$$\frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial t_2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) D_{k,1}(f_k^{(1)}) = -\frac{1}{\Delta t} f_k^{(2)} + O(\Delta t^2) \tag{III.46}$$

Nous obtenons le nouveau système d'équations:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \epsilon^0: f_k^{(0)} &= f_k^e + O(\Delta t^2) \\
 (b) \quad \epsilon^1: D_{k,1}(f_k^{(0)}) &= -\frac{1}{\Delta t} f_k^{(1)} + O(\Delta t^2) \\
 (c) \quad \epsilon^2: \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial t_2} + (1 - 1/2) D_{k,1}(f_k^{(1)}) &= -\frac{1}{\Delta t} f_k^{(2)} + O(\Delta t^2)
 \end{aligned} \tag{III.47}$$

Calculons les moments d'ordre zéro des équations (III.47-b) et (III.47-c) en sommons sur l'indice k:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \frac{\partial}{\partial t_1} + V_1(\rho \vec{u}) &= O(\Delta t^2) \\
 (b) \quad \frac{\partial}{\partial t_2} &= O(\Delta t^2)
 \end{aligned} \tag{III.48}$$

Multiplions l'équation (III.48-a) par Δt et (III.48-b) par Δt^2 et sommons, cela donne l'équation de continuité:

$$(\epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2}) \rho + \epsilon \Delta t_1 (\rho \vec{u}) = \frac{\partial}{\partial t} + \Delta t (\rho \vec{u}) = 0 \tag{III.49}$$

Maintenant, calculons les moments d'ordre zéro des équations (III.47-b) et (III.47-c) en sommant sur l'indice k:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t_1} + V_1 \Delta t_1^{(0)} O(\Delta t^2) \\
 (b) \quad \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t_2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Delta t_1 \sum_k \vec{e}_{k,x} \vec{e}_{k,y} f_k^{(0)} O(\Delta t^2)
 \end{aligned} \tag{III.50}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 \sum_k \vec{e}_{k,x} \vec{e}_{k,y} f_k^{(1)} &= \sum_k \vec{e}_{k,x} \vec{e}_{k,y} (-\Delta t) D_{k,1}(f_k^{(0)}) = \\
 &= -\Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t_1} \prod_x^{(0)} + \Delta t_1 \prod_x^{(1)} \right)
 \end{aligned}$$

Sachant que

$$\prod_x^{(0)} = \sum_k \vec{e}_{k,x} \vec{e}_{k,y} f_k^{(0)} = \rho u_x u_y l e$$

$$\prod_x^{(1)} = \sum_k \vec{e}_{k,x} \vec{e}_{k,y} f_k^{(0)} = \rho c_s^2 (\delta_x u_z + \delta_y u_x + \delta_z u_y)$$

Donc l'équation (III.50-a) devient :

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t_1} + V_1 (\rho u_x u_y + \rho c_s^2 l) = O(\Delta t^2) \quad (III.51)$$

et après avoir négligé les terme en $O(u^2)$ c.à.d. $O(M^2)$ l'équation (III.50-b) devient :

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t_2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) (c_s^2 \Delta t) \frac{\partial}{\partial x} (\rho \vec{u}) = O(\Delta t^2 + M^2) \quad (III.52)$$

Multiplions l'équation (III.51) par $\frac{\partial}{\partial x}$ et (III.52) par $\frac{\partial}{\partial x}$ et sommons, donne l'équation de la quantité de mouvement:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla (\rho u_x u_y) = -\nabla p + \nu \nabla^2 (\rho \vec{u}) \quad (III.53)$$

Avec $p = \rho c_s^2$ est la pression , donc obéit à une équation d'état du type gaz parfait et ν est la viscosité cinématique définie par la relation.

$$\nu = \left(1 - \frac{1}{2}\right) c_s^2 \Delta x^2 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Delta x^2 / \Delta t$$

III.6 .Hydrodynamique LBM:

La dérivation des équations de Navier-Stokes incompressibles à la section précédente fait intervenir le nombre de Mach ($Ma = |u|/c_s$), l'erreur de troncature est de l'ordre de $O(Ma^2)$. Cette contrainte restreint l'utilisation du modèle BGK au écoulements incompressibles. Cependant, la méthode LBM résout, originalement, des problèmes compressibles. Plusieurs travaux ont été conduits pour réduire ou éliminer la compressibilité introduite par le schéma LBM lui même (choix de la densité d'équilibre par exemple) ou des compressibilités artificielles dues à la procédure de discrétisation. Les modèles développés les plus employés dans la dynamique des fluides par la méthode LBM sont les suivants:

III.6.1 Modèle complètement incompressible :

Dans ce modèle l'idée est basé sur le fait que le modèle LBGK est un schéma artificiellement compressible et utilisé pour résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles dans les limites de densité quasi-constante. L'auteur procède à une redéfinition de la fonction de distribution d'équilibre basée sur la pression. Le modèle a prouvé une amélioration de la stabilité même pour des temps de relaxation très

proches de 0.5. Le modèle a été utilisé pour la simulation d'écoulements turbulents [48] et a permis l'obtention de bons résultats par comparaison à la méthode de volumes finis. La fonction de distribution d'équilibre est exprimée par:

$$f_k^e = \begin{cases} -4\sigma \frac{p}{c^2} + s_0(\vec{u}), & k = 0 \\ \lambda \frac{p}{c^2} + s_k(\vec{u}), & k = 1 - 4 \\ \gamma \frac{p}{c^2} + s_k(\vec{u}), & k = 5 - 8 \end{cases} \quad (\text{III.54})$$

$$\text{Avec } s_k(\vec{u}) = \omega_k \left(\frac{3 \vec{e}_k \cdot \vec{u}}{c^2} + \frac{9 (\vec{e}_k \cdot \vec{u})^2}{2 c^4} - \frac{1 \vec{u}^2}{2 c^2} \right) e \quad (\sigma, \lambda, \gamma) = \left(\frac{5}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{1} \right)$$

Les variables macroscopiques, pression et vitesse, sont calculées comme suit:

$$\begin{cases} p = \frac{c^2}{4\sigma} [\sum_{k=0,8} f_k + s_0(\vec{u})] \\ \vec{u} = \sum_{k=0,8} f_k \vec{e}_k \end{cases} \quad (\text{III.55})$$

III.6.2 Modèle incompressible de He et Luo:

Dans ce modèle, les effets de compressibilité sont réduites effectivement par élimination des termes en $O(\text{Ma}^2)$ au cours la dérivation des équations de Navier-Stokes. La fonction de distribution d'équilibre de ce modèle est exprimée par:

$$f_k^e = \omega_k \rho + \rho_0 s_k(\vec{u}), \quad k = 0 - 8 \quad (\text{III.56})$$

et les variables macroscopiques sont déduites par:

$$\begin{cases} \rho = \sum_{k=0,8} f_k \\ \rho_0 \vec{u} = \sum_{k=0,8} f_k \vec{e}_k \end{cases} \quad (\text{III.57})$$

III.6.3. Modèle compressible conventionnel:

C'est le modèle de l'équation (III.20), il est la base de la plus part des travaux basés sur la méthode LB. Théoriquement, les modèles sont les plus appropriés pour des écoulements laminaires ou transitoires.

Cependant le modèle compressible conventionnel a été employé avec succès dans de nombreuses applications complexes (laminaire et transitoire) et a permis l'obtention de bons résultats [49].

III.7. Modèles LBM thermiques:

III.7.1 Extension aux écoulements non-isothermes:

La méthode LBM a été utilisée au début pour des problèmes d'hydrodynamique.

L'extension vers les écoulements non isothermes a été limitée au début à des nombres de Prandtl fixés, $\text{Pr}=1$. Un des premiers modèles est l'approche multi-vitesses (multi-speed approach). Les difficultés rencontrées sont généralement la limitation et particulièrement l'emploi des termes d'ordres supérieurs dans la fonction de distribution d'équilibre, des vitesses additionnelles sont nécessaires pour calculer la température, juste la distribution de la densité est utilisée [50]. Les problèmes d'instabilités numériques et la gamme étroite de la variation de la température limitent son domaine d'application. D'autres efforts ont été, ensuite, menés pour des nombres de Prandtl arbitraire [49]. L'approche du scalaire passif fournit une solution

alternative employant une fonction de distribution séparée. Les problèmes thermiques sont ainsi résolus par une double-population permettant l'emploi de nombre de Prandtl arbitraire.

III.7.2 Modèle du scalaire passif:

L'approche scalaire passif utilise le fait que la température macroscopique satisfait la même équation d'évolution qu'une grandeur scalaire passive si la dissipation thermique et les travaux de compression dus à la pression sont négligeables. Le modèle thermique scalaire passif utilise une fonction de distribution indépendante de la distribution de densité. L'avantage principal est l'amélioration de la stabilité numérique [51]. En outre, l'exactitude du modèle du scalaire passif a été vérifiée par plusieurs études. L'équation de diffusion de la chaleur sans terme source dans ce modèle est écrite sous la forme:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla = \alpha \nabla^2 T \quad (\text{III.58})$$

Avec α la diffusivité du milieu fluide.

Une nouvelle fonction de distribution g est choisie pour l'équation de Boltzmann correspondante au champ scalaire. L'évolution de la distribution de température g obéit à l'équation (III.8). La distribution d'équilibre correspondante dans un modèle $D2Q4$ est donnée par:

$$g_k^e = \omega_k T(x, t) \left(1 + \frac{2\vec{e}_k \cdot \vec{u}}{c^2} \right), \quad k = 1 - 4 \quad (\text{III.59})$$

Le traitement des conditions aux limites est affecté selon qu'il s'agisse de conditions de Types Neumann ou Dirichlet. Cette partie sera traitée au chapitre suivant. Évidemment, ce modèle devient plus utile si la dissipation thermique et les travaux de compression dus à la pression peuvent être correctement incorporés au modèle.

III.7.3 Modèle énergétique:

Ce modèle est intéressé à l'intégration de la dissipation visqueuse et les travaux de compression dus à la pression dans un modèle à distribution séparée. Le modèle développé est similaire à celui du scalaire passif mais il simule directement l'équation de l'énergie incorporant les deux termes de dissipation et de compression. L'évolution de la distribution g du champ scalaire permet de retrouver l'équation l'énergie à l'échelle macroscopique suivante:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{u} \rho) = \nabla \cdot (\rho \nabla(\epsilon)) + \rho [(\vec{u} \cdot \nabla + \nabla \cdot \vec{u}) \epsilon - p \nabla \cdot \vec{u}] \quad (\text{III.60})$$

et la distribution d'équilibre correspondante, dans un modèle $D2Q9$, est exprimée par:

$$g_{k=0-8}^e = \omega_k \rho \left[\frac{3(\vec{e}_k^2 - \vec{u}^2)}{2c^2} + 3 \left(\frac{3\vec{e}_k^2}{2c^2} - 1 \right) \frac{(\vec{e}_k \cdot \vec{u})}{c^2} + \frac{9}{2} \frac{(\vec{e}_k \cdot \vec{u})^2}{c^4} \right] \quad (\text{III.61})$$

Un nouveau traitement des conditions aux limites a été adopté à cette formulation.

III.7.4 Modèle énergétique simplifié:

Le modèle énergétique proposé par He et al. présente une forme complexe due à la présence de termes en gradient de vitesse dans l'équation d'évolution de la fonction

de distribution du champ thermique. Aussi des chercheurs utilisent le fait qu'en écoulements incompressibles la dissipation visqueuse et les travaux de compression du sa la pression peuvent être négligés. En omettant ces termes dans l'équation d'évolution tracée par He et autres, les résultats seront faussés puisque ces termes sont utilisés pour déterminer les équations macroscopiques. La procédure de Chapman-Enskog a été appliquée pour redéfinir le temps de relaxation en absence des termes de dissipation visqueuse et les travaux de compression.

L'équation d'évolution reste la même qu'en LB standard celle de l'équation (III.8), la distribution d'équilibre est aussi conservée celle de l'équation (III.61) et le temps de relaxation est redéfini par:

$$\tau = \frac{2}{3} \left(\tau_0 - \frac{1}{2} \right) c^2 \Delta t \quad (\text{III.62})$$

Les effets de compressibilité ont été vérifiés et trouvés négligeables par comparaison au modèle complètement incompressible (section 2.6.1).

III.8.Méthode LBM dans le cadre de CFD:

III.8.1 Dynamique des fluides et au-delà:

La méthode LBM par sa diversité de modèles s'impose progressivement comme une alternative sérieuse aux méthodes traditionnelles pour la mécanique numérique des fluides. Dans les deux dernières décennies, la méthode LBM a été utilisée pour la simulation des écoulements classiques et d'intérêt courant.

Plusieurs exercices ont été établis pour des problèmes de convection naturelles Bidimensionnels et tridimensionnels et leurs interactions avec le rayonnement. Les résultats qui en découlent montrent un degré élevé de prédictibilité pour la méthode.

III.8.2 Méthode LBM via les méthodes conventionnelles:

Le maillage uniforme devient lassant pour les grands nombres caractéristiques de l'écoulement. Avec les méthodes conventionnelles, une des plus importantes solutions est l'accélération des algorithmes de calcul par les techniques multi-grilles. Ces techniques permettent une convergence exponentielle des schémas numériques. La méthode LBM utilise généralement le maillage uniforme, sa flexibilité lui permet d'incorporer les techniques multi-grilles. Une autre technique d'accélération linéaire (par rapport à un paramètre) a été proposée dans le modèle SRT et puis étendue dans le modèle MRT. Ce schéma a prouvé une bonne stabilité et permet l'obtention de mêmes résultats pour des maillages grossiers.

La méthode LBM dans sa forme standard est basée sur un maillage cartésien. De nouveaux modèles pour d'autres systèmes de coordonnées (tels que l'axisymétrique) ont été proposés récemment.

L'application de la méthode LBM a été étendue à la simulation des écoulements turbulents, elle peut être combinée par le modèle $K - \epsilon$ et le modèle LES. Pour ce dernier, la méthode LBM présente une propriété potentielle, c'est que le tenseur taux de déformation est une grandeur locale qui est déduite du moment d'ordre 2 de la partie non-équilibrée de la distribution de la densité, contrairement aux méthodes

conventionnelles où ce tenseur est calculé par différence finies. La méthode LBM présente une grande flexibilité d'être couplée aux méthodes conventionnelles telles que les méthodes d'éléments finis ou volumes finis.

III.8.3 Avantages de la méthode LBM :

L'accroissement de l'intérêt des scientifiques et ingénieurs à la méthode LBM est prouvé par les avantages suivants: (i) le solveur NS (malgré sa complexité) doit traiter les termes convectifs non-linéaires; dans le modèle LBM les limites de convection sont linéaires et manipulées par décalage uniforme de données (le fameux Streaming process!). (ii) Pour l'écoulement incompressible, le solveur NS doit résoudre l'équation de Poisson; dans la méthode LBM, la pression est obtenue par une équation d'état et de transmission de données est toujours locale ce qui est très avantageux pour les calculs parallèles (diminution du CPU). (iii) habituellement dans les méthodes de discrétisation la stabilité est satisfaite par le bon choix des pas de temps et d'espace; dans la méthode LBM, le nombre de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) est égal à 1. (iv) le solveur NS emploie habituellement des procédures itératives (équations algébriques) pour obtenir une solution convergée; les modèles LBM sont habituellement explicites et n'ont pas besoin de procédures itératives (opérations algébriques de décalage uniforme de l'information). En raison de la nature cinétique de l'équation de Boltzmann, la physique liée à l'interaction de niveau moléculaire peut être incorporée plus facilement dans le modèle et la méthode reste toujours flexible pour incorporer tous les phénomènes physiques additionnels. Le calcul nodal dans la méthode LBM est intéressant pour le calcul parallèle. Numériquement, la méthode est de second ordre en espace et temps.

III.9. Conclusion:

Dans ce chapitre nous avons présenté le cadre de base de la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM). Nous avons aussi présenté les modèles dynamiques et thermiques les plus employés par la méthode LBM et leur propriétés. En fin, Nous avons discuté la position de la méthode via les méthodes conventionnelles dans le champ de la simulation de la dynamique des fluides. Le chapitre suivant sera consacré à la des résultats obtenus en utilisant la méthode LBM.

Chapitre IV

Résultats et discussion

Résultats et discussion

IV- a) - Validation des calculs:

IV.1 Régime permanent :

Afin d'élaborer une comparaison constructive et objective des résultats obtenus par nos simulations numériques avec des travaux expérimentaux disponibles dans la littérature, et de donner des interprétations aux phénomènes observés, il est utile de valider au préalable le code de calcul.

Une première comparaison a été effectuée avec des travaux dite « solution de benchmark » présentée par **A.Bouttout**[52] et **M. Hortmann** [53]. Ces travaux considèrent une enceinte carrée, chauffée différentiellement, remplie d'air ($Pr = 0.71$). Pour ce cas, ils examinent un maillage uniforme de tailles 40×40 et 80×80 noeuds pour des nombres de Rayleigh $Ra = 10^4$, $Ra = 10^5$ et $Ra = 10^6$.

Les résultats sont représentés dans le tableau IV.1 tel que :

$|\psi_m|$: La fonction de courant maximale.

U_m : La vitesse maximale U à $X = 1/2$.

V_m : La vitesse maximale V à $Y = 1/2$

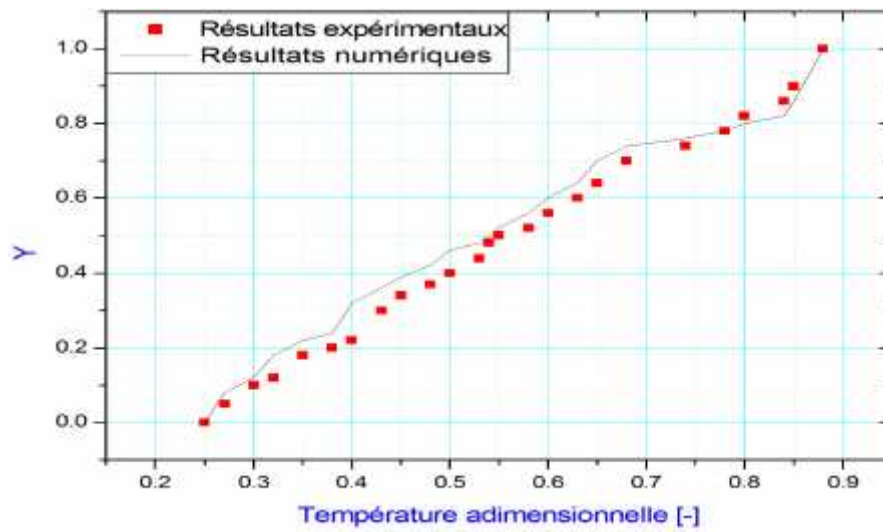
$\overline{Nu}$: Le nombre de Nusselt moyen.

Une deuxième comparaison avec un travail expérimental investigué par Chen et al. [54], où il considère une enceinte rectangulaire ayant un rapport d'aspect $L/H=2$ contient de l'eau, dont le nombre de Prandtl $Pr = 7$.

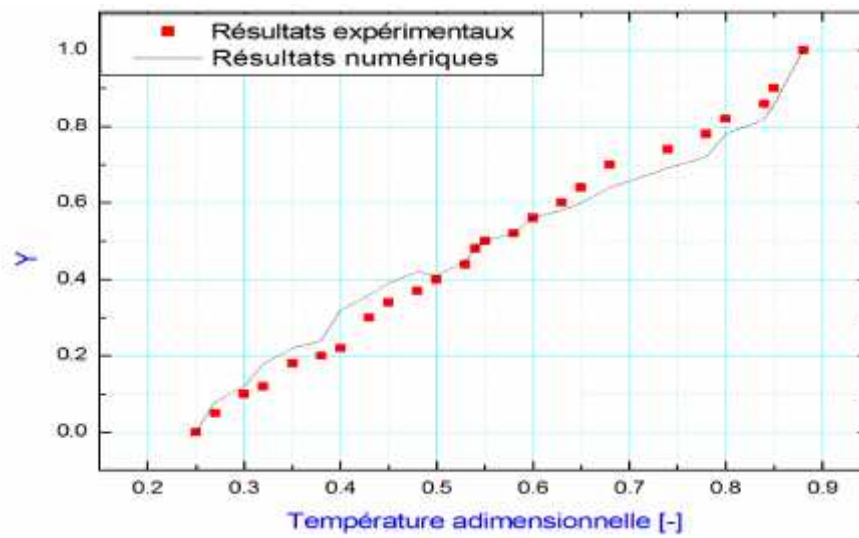
Les figures IV.1.1, IV.1.2, IV.1.3 et IV.1.4 montrent que nos profils de températures sont en bon accord avec les données expérimentales [54]. Notons qu'il est difficile de maintenir les parois horizontales aux conditions adiabatiques, pour cela nous remarquons un gradient de température issu des mesures non nul près des bords supérieurs et inférieurs (voir par exemple la figure IV.1 (a)). Nous remarquons que nos calculs sont bon accord avec ceux mentionnés auparavant, et les erreurs relatives de calculs ne dépassent 5%.

Une autre validation a été faite avec une solution benchmark de **Wakashima** [28] de la convection naturelle tridimensionnelle dans une enceinte cubique (rapport d'aspect égale à 1) qui contient de l'air ($Pr = 0.71$), chauffée différentiellement et les autres parois sont adiabatiques. Pour obtenir les mêmes valeurs, nous transformons notre système d'équations gouvernantes de telles façons qu'il sera similaire de **Wakashima** [28], c à d, les mêmes variables adimensionnelles.

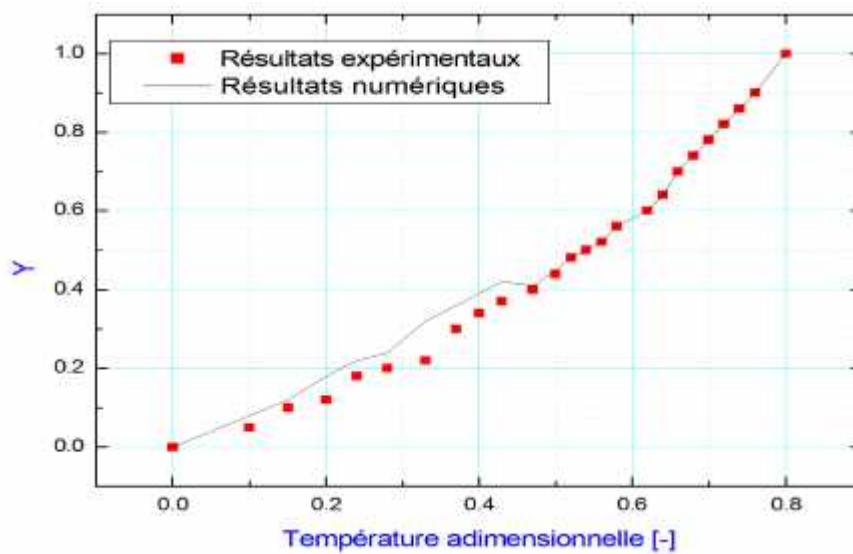
Les isothermes, la vorticité, les lignes de courants et les contours des vitesses sont présentés dans les figure IV.2 et IV.3, qui sont en bon accord avec ceux de **Wakashima** [28].



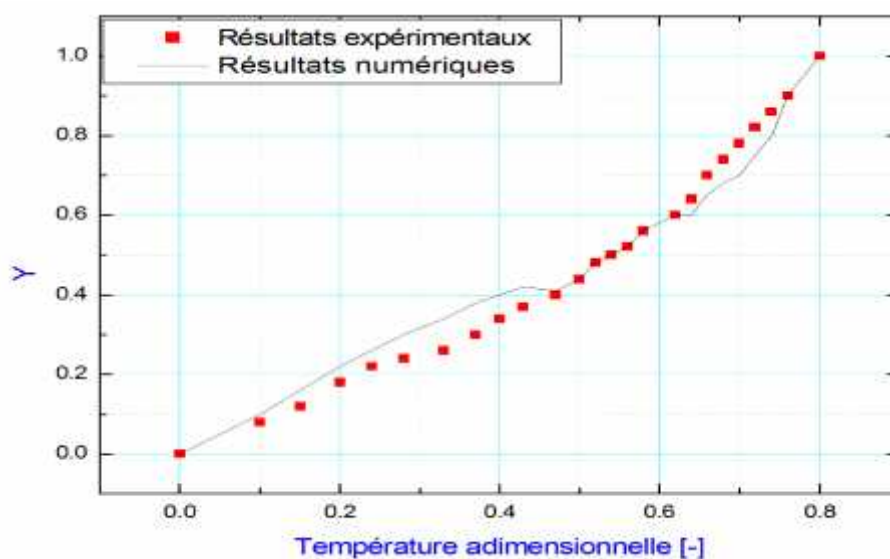
(a) : $X=0.25$



(b) : $X=0.75$



(c): $X=1.25$



(d): $X=1.75$

Figure IV.1 : Distribution de la température dans différentes stations de l'enceinte.

Comparaison avec les résultats expérimentaux [54], pour $Ra = 10^4$. (a),(b),(c),(d).

Maillage	Nos calculs	A. Bouttout [52]	Hortmann et al. [53]
40× 4	2.2112	2.2053	2.2436
8 × 8	2.2342	2.2214	2.2446

Tableau IV.1 : Comparaisons des résultats obtenus pour $Ra = 10^4$ à le nombre de Nusselt moyen

Maillage	Nos calculs	A. Bouttout[52]	Hortmann et al. [53]
40× 4	4.5693	4.5222	4.6165
8 × 8	4.5106	4.4958	4.5255

Tableau IV.2 : Comparaisons des résultats obtenus pour $Ra = 10^5$ à le nombre de Nusselt moyen

Maillage	Nos calculs	A. Bouttout[52]	Hortmann et al. [53]
40 × 4	9.3050	9.2591	9.4216
8 × 8	9.7045	8.8918	8.7980

Tableau IV.3 : Comparaisons des résultats obtenus pour $Ra = 10^6$ à le nombre de Nusselt moyen.

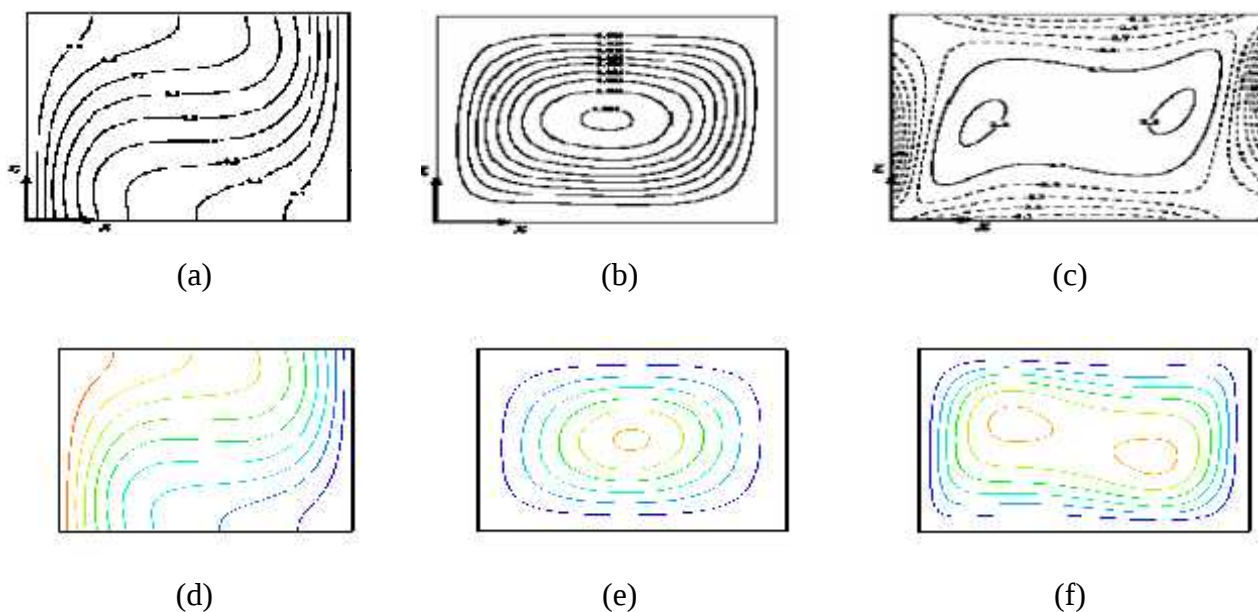


Figure IV.2 : Comparaison des isothermes, verticité et la fonction de courant respectivement de gauche à droite pour, $Ra=10^4$ (a),(b),(c) Wakashima[28] ; (d),(e),(f) le présent travail.

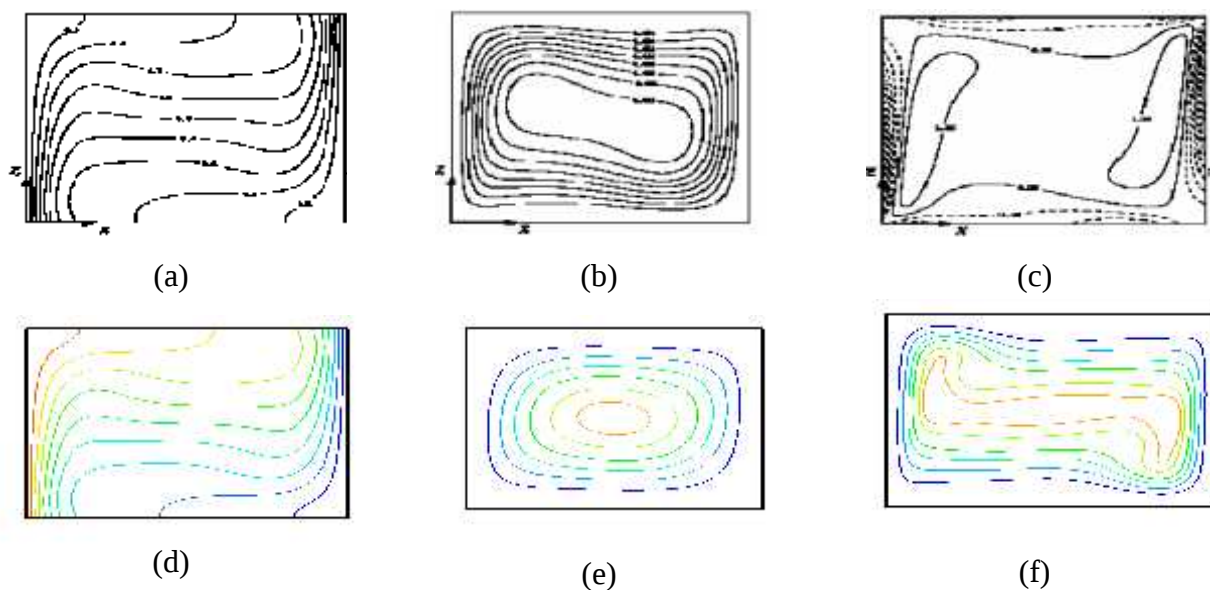


Figure IV.3 : Comparaison des isothermes, verticité et la fonction de courant respectivement de gauche à droite pour, $Ra=10^5$ (a),(b),(c) Wakashima[28] ; (d),(e),(f) le présent travail.

IV.2 Régime transitoire :

Le code de calcul a été aussi validé dans le régime instationnaire avec le travail de Semma et al. [55]. Cette étude considère une enceinte carrée contenant un fluide ayant un nombre de Prandtl $Pr=0.01$. Les résultats des simulations numériques de cette configuration sont disponibles dans la littérature, précisément le travail de Larroudé et al. 1994 [56], basé sur une approximation spectrale. Pour un faible nombre de Rayleigh, la solution est stationnaire et la fonction de courant est composée de deux cellules contres-rotatifs. La première transition apparaît à $Ra=3500$ [55] et autour de $Ra \approx 3000$ avec la méthode spectrale (Larroudé et al. [56]). Cette transition est illustrée dans les figures IV.5 et IV.6. Nous remarquons que l'écoulement bifurque entre deux branches : la première correspond une solution symétrique et l'autre correspond la solution asymétrique. Ce dernier se développe vers un régime permanent symétrique après un temps long.

La deuxième transition vers un écoulement oscillatoire apparaît à $Ra=17500$ et autour de $Ra=20000$ obtenue à l'aide de la méthode spectrale. La solution asymétrique garde la même structure et la cellule dominante varie entre une forme quasi circulaire et une forme circulaire déformée, avec des cellules secondaires qui se développent près des coins. Nous constatons que nos résultats sont en bon accord avec les travaux cités auparavant.

IV- b) . Effet du maillage :

L'étude a été menée pour trois maillages : 100×40 , 202×82 et 302×102 noeuds. Le tableau IV.4 montre la variation des grandeurs maximales (ψ_m , U_m , V_m) avec la taille du maillage lorsque le régime d'écoulement dans l'enceinte est permanent ($Ra=10^4$). Le tableau IV.5 montre que plus la valeur du nombre de Rayleigh est élevée, plus les résultats sont sensibles aux choix des pas d'espaces. Le maillage 100×40 noeuds est insuffisant pour bien cerner quantitativement les paramètres critiques (Ra_c , Fr_c). Pour minimiser le temps et le coût de calcul nous choisissons le maillage 202×82 noeuds. Le pas du temps adimensionnel DT varie dans la gamme de 10^{-4} - 5×10^{-6} en fonction de l'augmentation du Ra , pour la stabilité de la solution obtenue.

Maillage	ψ_m	U_m	V_m
100×40	1.6159×10^{-2}	16.102×10^{-2}	23.815×10^{-2}
202 ×82	0.882×10^{-2}	8.515×10^{-2}	12.69×10^{-2}
302×102	0.0041×10^{-2}	0.537×10^{-2}	0.94×10^{-2}

Tableau IV.4 : Effect du maillage sur les grandeurs maximales (ψ_m , U_m , V_m), pour

$Ra = 10^4$, Dans ce cas, le régime d'écoulement est laminaire permanent.

Maillage	R_c	F_c
100×40	150×10^4	48
202 ×82	80×10^4	32
302×102	50×10^4	9.6

Tableau IV.5 : Effet du maillage sur les paramètres critiques (Ra_c , Fr_c). Dans ce cas, le régime d'écoulement est transitoire (oscillatoire).

IV- c) . Instabilité de R-B dans les cavités simples en air $Pr=0.71$:

Ratio d'aspect = 2. et $R_c = 72,99 \times 10^3$.

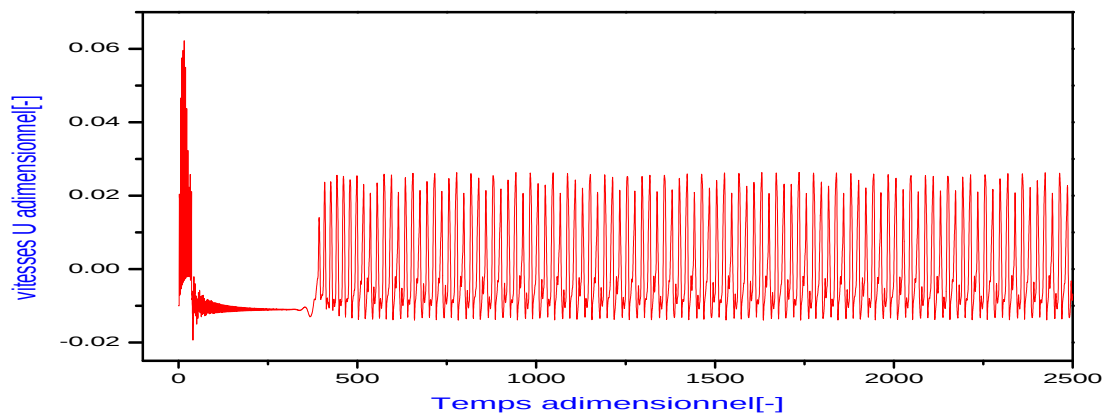


Figure IV.4 : La transition de la vitesses U près de la paroi chaude vers le régime oscillatoire.

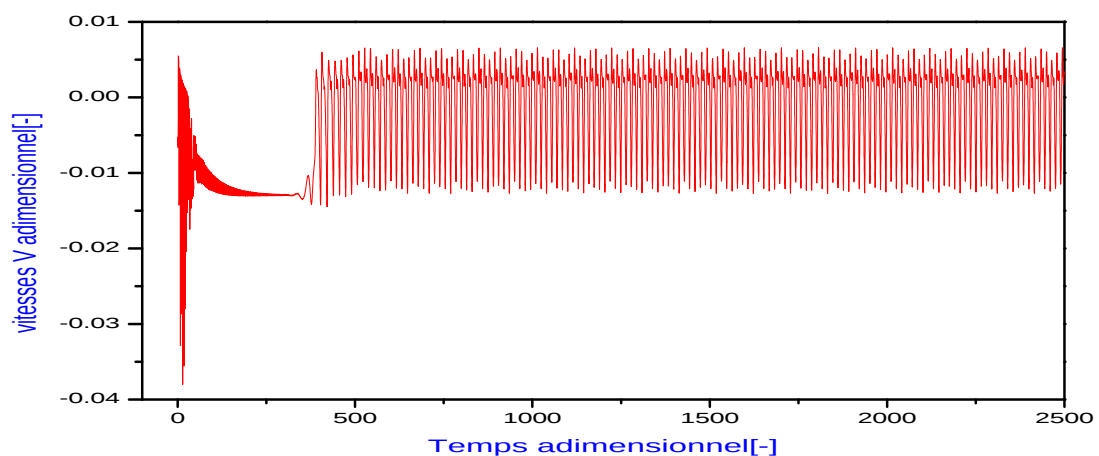


Figure IV.5 : La transition de la vitesses V près de la paroi chaude vers le régime oscillatoire.

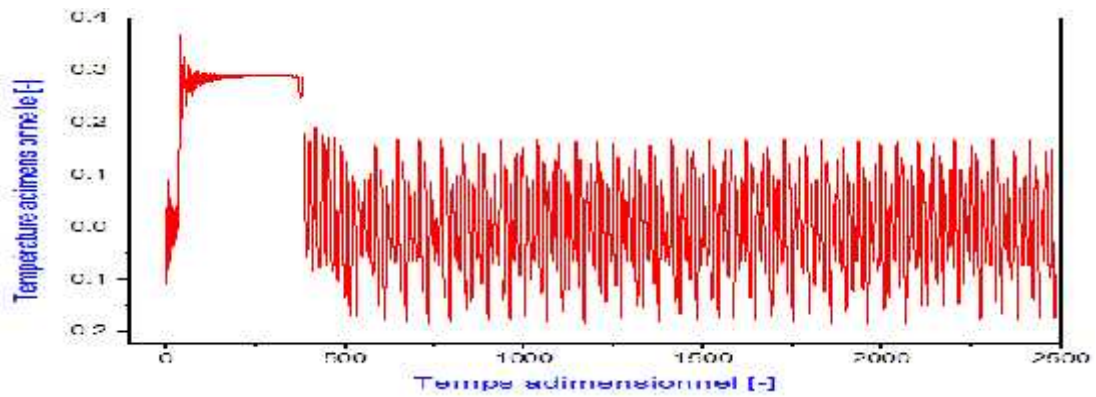


Figure IV.6 : La transition de la température près de la paroi chaude vers le régime oscillatoire.

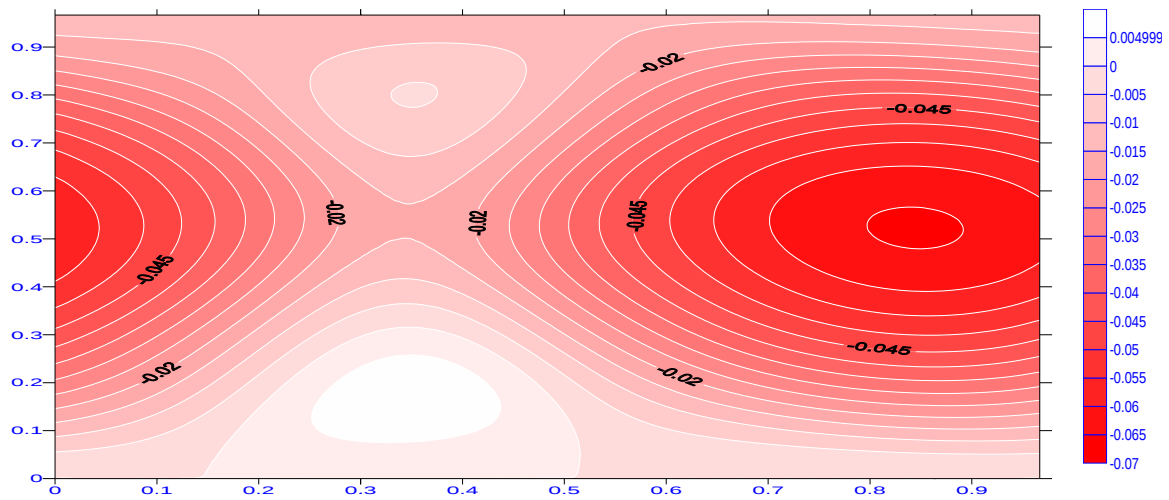


Figure IV.7 : les lignes courant présentant deux zones de recirculation symétriques, l'une anti-horaire (partie gauche de l'enceinte) et l'autre dans le sens horaire (partie droite).

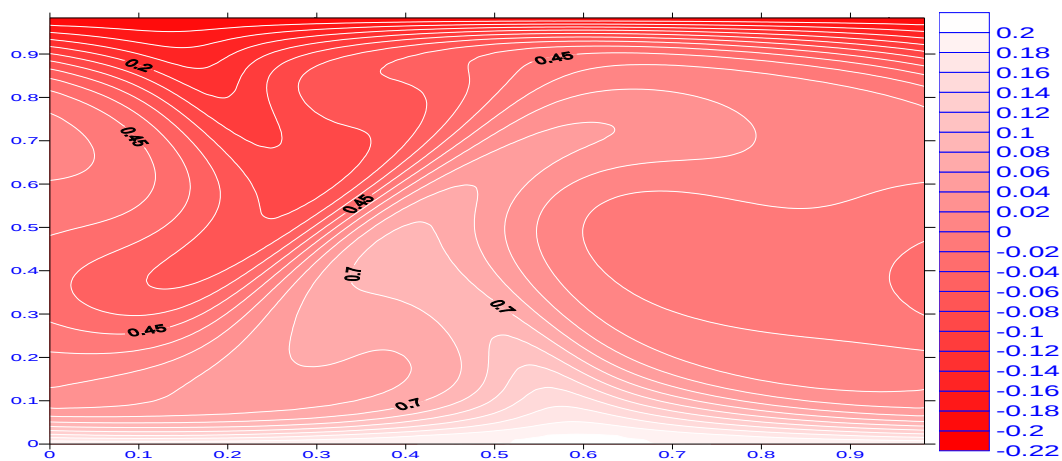


Figure IV.8: températures isothermes dans la cavité de rapport d'aspect 2.

Les isothermes de la figure IV.8 montrent que le champ thermique est pratiquement uniformément réparti, où il y a dissipation de la chaleur, la distribution de la température est presque constante.

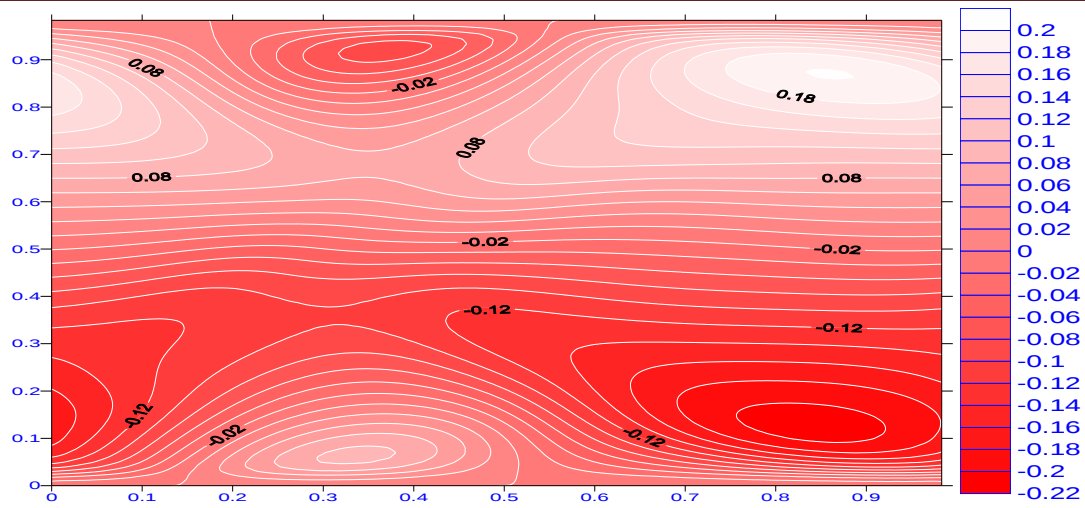


Figure IV.9: Contours des vitesses dans la cavité de rapport d'aspect 2.

En inspectant les tracés des contours de la magnitude de la vitesse (figure IV.9) montrent une déviation des vecteurs vitesses autour, des bords des au milieu d'une paroi chaude de chaleur, Prés de la paroi inférieure adiabatique les modules des vecteurs sont très faibles, donc une stagnation du fluide. Les couches fluides de cette région reçoivent de la chaleur à partir de la circulation convective des cellules. $V_m = 0.019$.

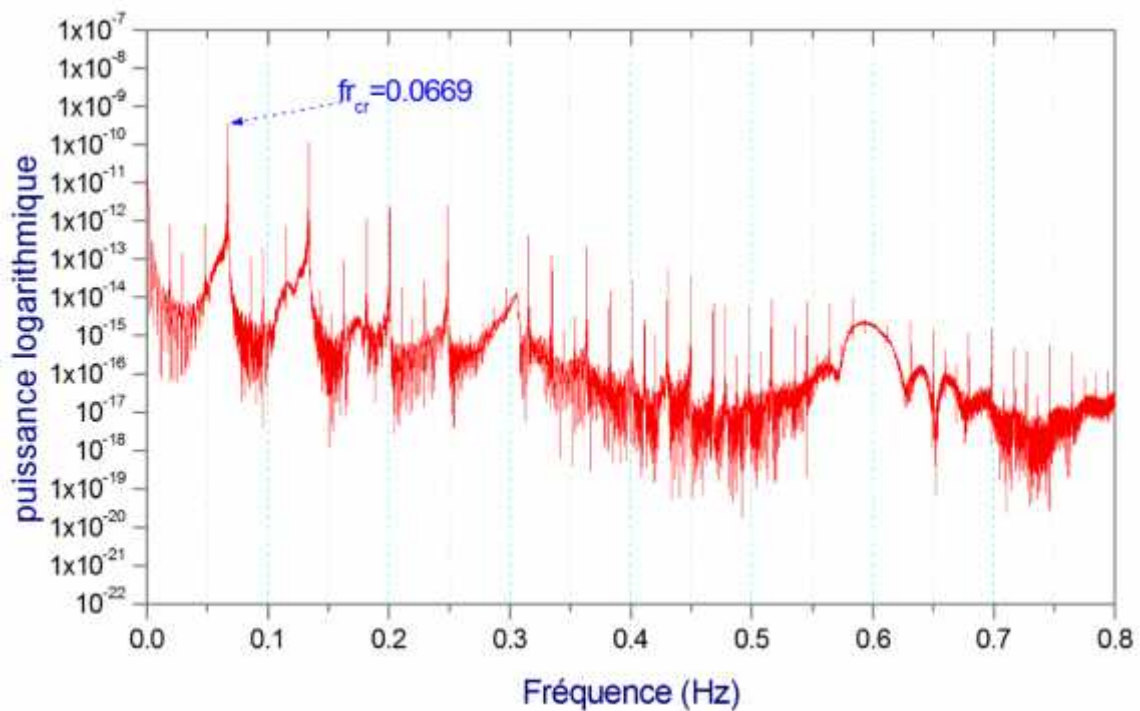


Figure IV.10 : Spectre de l'énergie de la vitesse U.

L'analyse spectrale des évolutions temporelles des différents signaux au moyen de la transformée de Fourier rapide (FFT) nous donne le graphique comme montré sur la figure IV.10. Ce dernier met en évidence la fréquence prédominante de l'écoulement, qui est dans ce cas égale à $fr_{cr}=0.0669$ Hz.

Rapport d'aspect = 0.5 Et $R_c = 130 \times 10^3$:

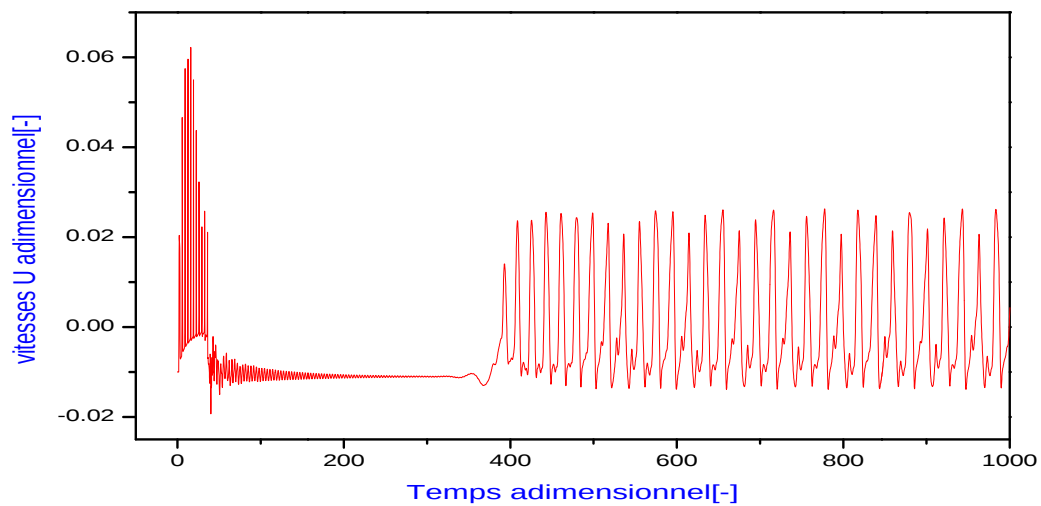


Figure IV.11: La transition de la vitesses U près de la paroi chaude vers le régime oscillatoire.

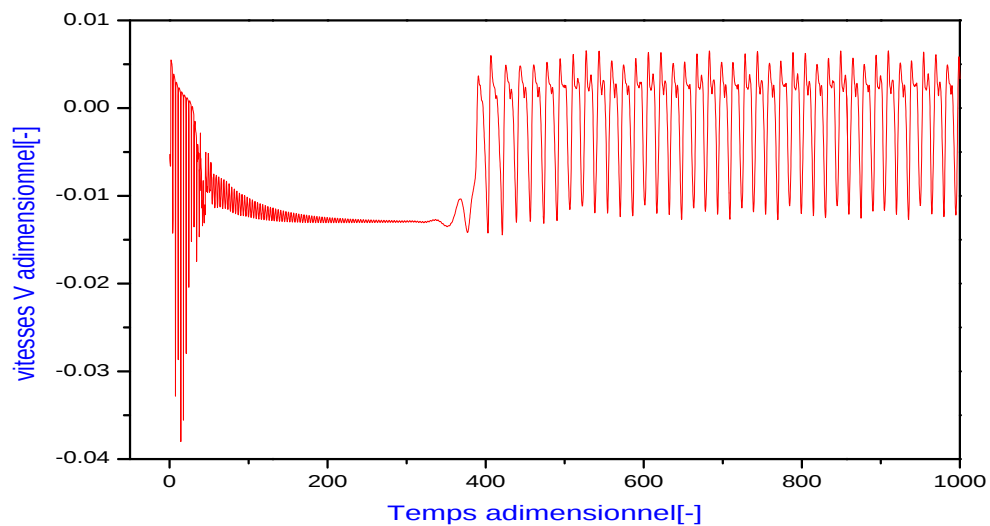


Figure IV.12: La transition de la vitesses V près de la paroi chaude vers le régime oscillatoire.

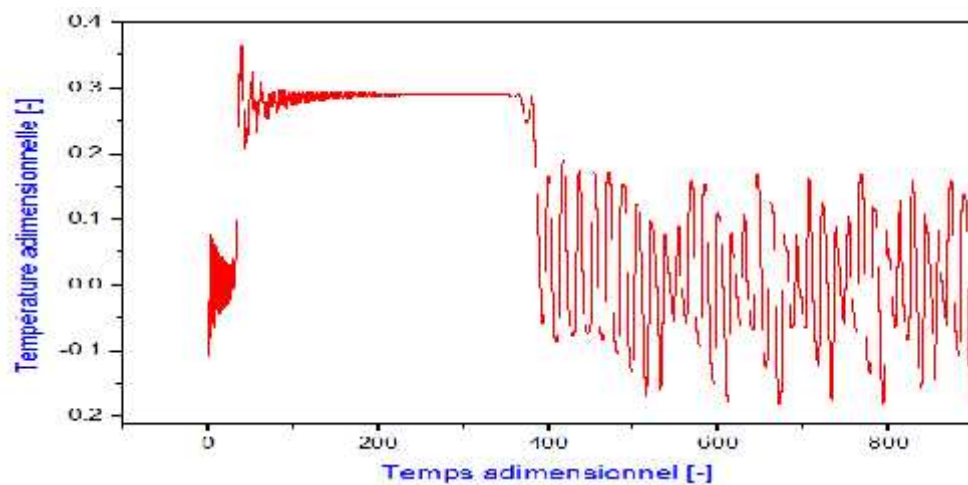


Figure IV.13: La transition de la température près de la paroi chaude vers le régime oscillatoire.

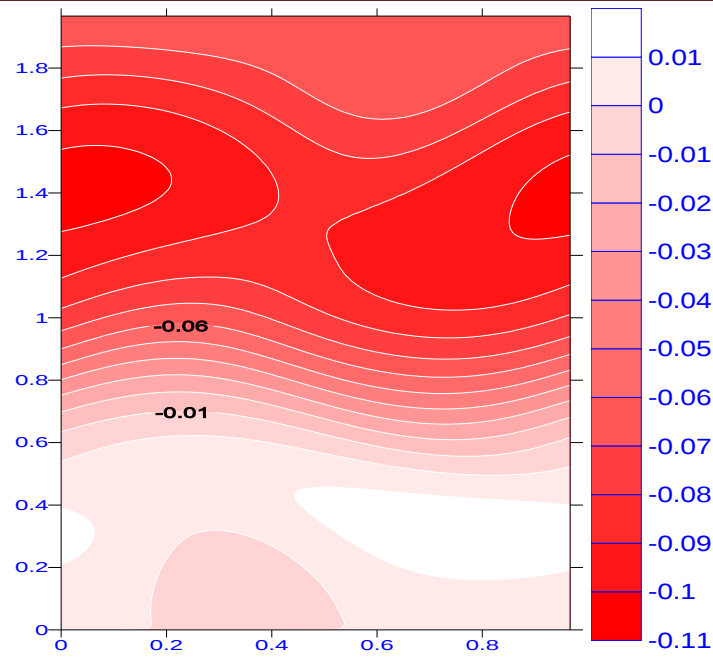


Figure IV.14 : Lignes de courant tracées pour une cavité de rapport d'aspect 0.5 et $Ra_{cr}=130 \times 10^3$.

Sur la figure **IV.14** on peut constater clairement deux zones de recirculation symétriques, l'une anti-horaire (partie gauche de l'enceinte) et l'autre dans le sens horaire (partie droite), dont le maximum de $\psi_m = 0.013$ est obtenue dans le quart de l'enceinte, engendrant ainsi un débit massique de recirculation et un transport convectif important.

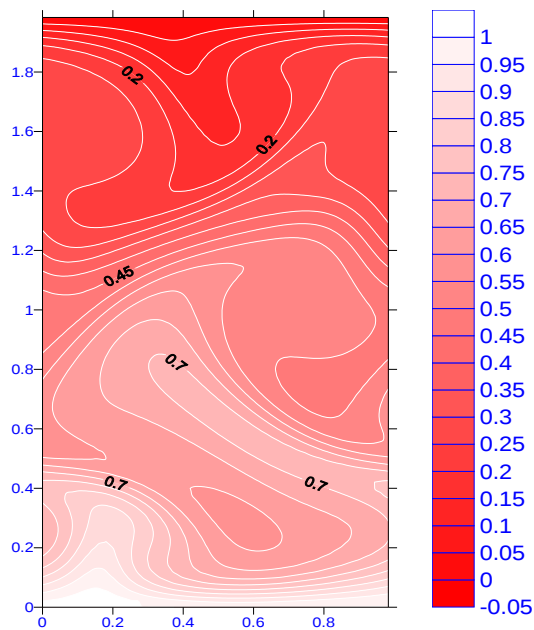


Figure IV.15: Isothermes de la convection R-B à $Ra_{cr}=130 \times 10^3$

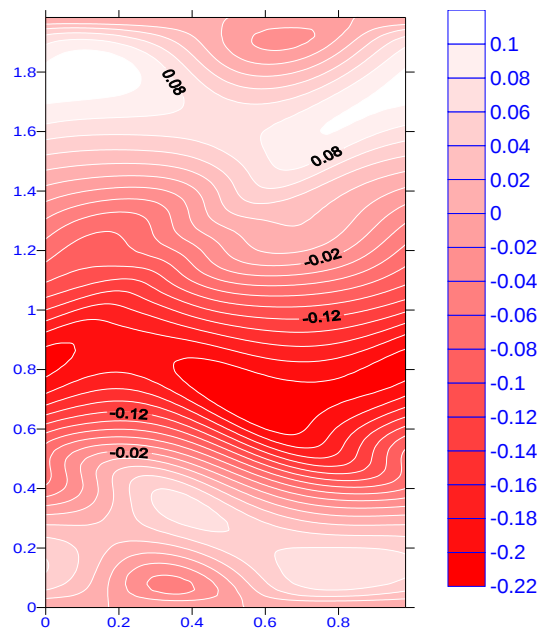


Figure IV.16: Iso-valeurs de vitesse à $Ra_{cr}=130 \times 10^3$ $V_m = 0.019$.

La figure IV.15 montres les lignes isothermes du champ thermique, qui étale uniformément, où il y'a dissipation de la chaleur, le régime convectif est le prédominant. Tandis que la figure IV.16 présentes les iso-valeurs de a vitesse, qui montrent une déviation des vecteurs vitesses autour, des bords des au milieu d'une paroi chaude de chaleur, Prés de la paroi inférieure les modules des vecteurs sont très faibles, donc une stagnation du fluide. Les couches fluides de cette région reçoivent de la chaleur à partir de la circulation convective des cellules.

IV- d) . Instabilité de R-B dans les cavités simples en eau $Pr=7.01$:

Rapport d'aspect = 2. et $R_c = 24 \times 10^3$

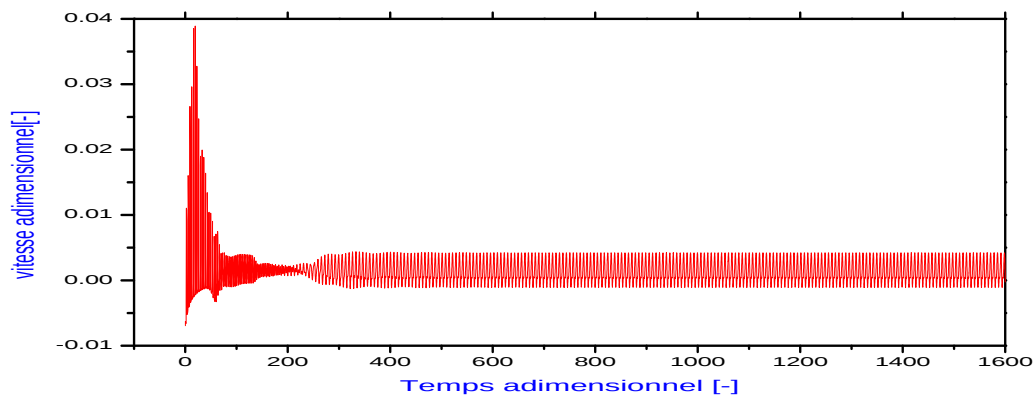


Figure IV.17: Evolution temporelle de la température adimensionnelle au sein de la cavité de RA=2. dans le cas de l'eau.

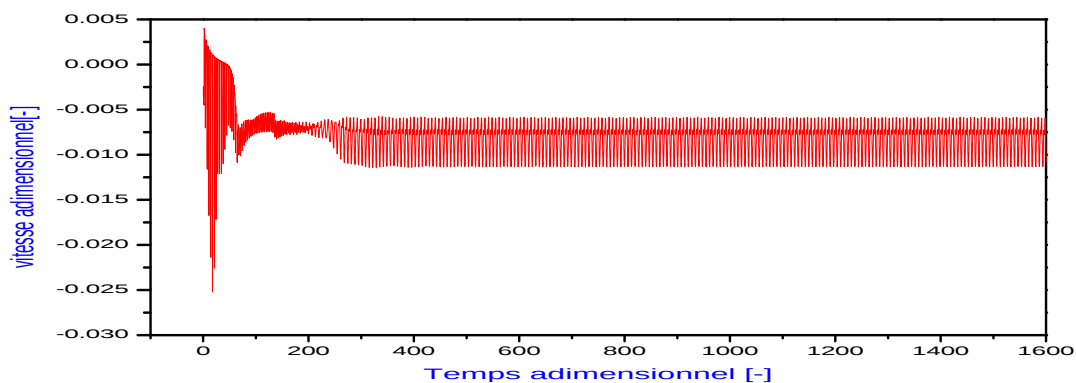


Figure IV.18: Evolution temporelle de la vitesse adimensionnelle u au sein de la cavité de RA=2. Et $Pr=7.01$ pour le deuxième point de sondage.

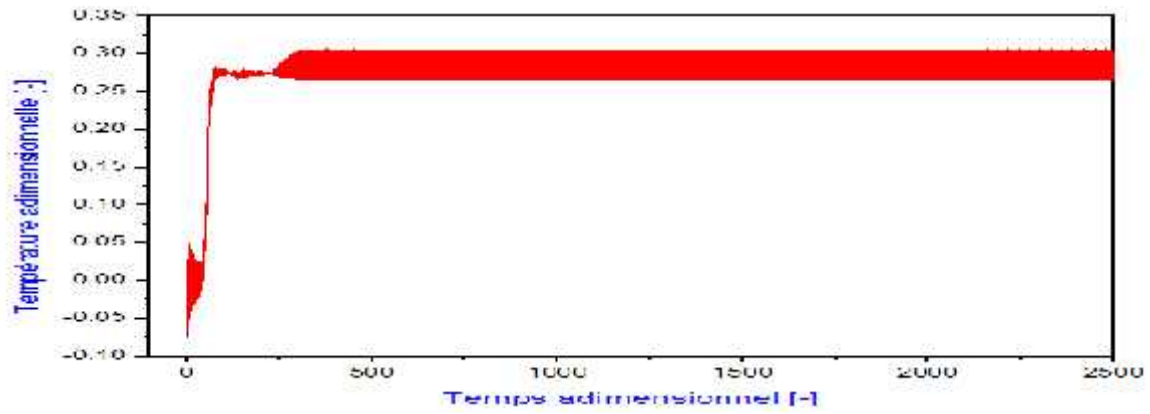


Figure IV.19: La transition de la température adimensionnelle vers le régime oscillatoire.

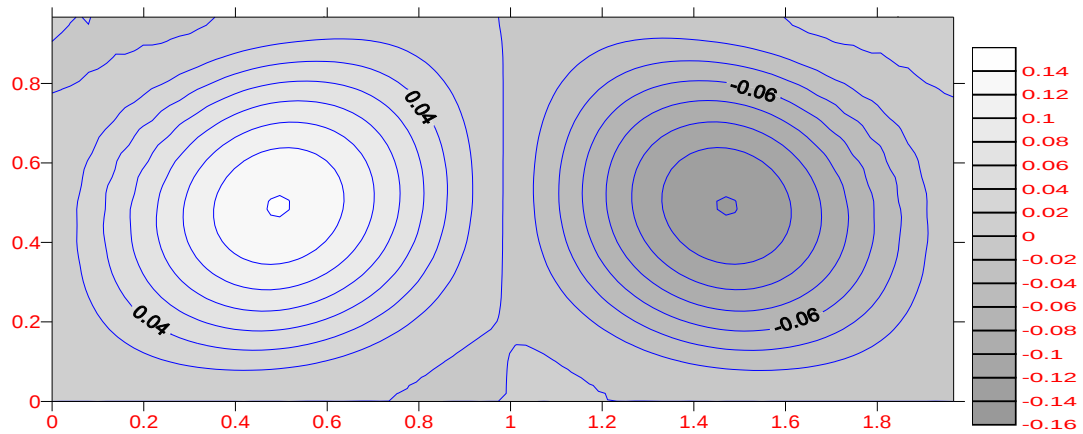


Figure IV.20 : Lignes de courant pour le cas de convection R-B considéré $\psi_m = 0.137$.

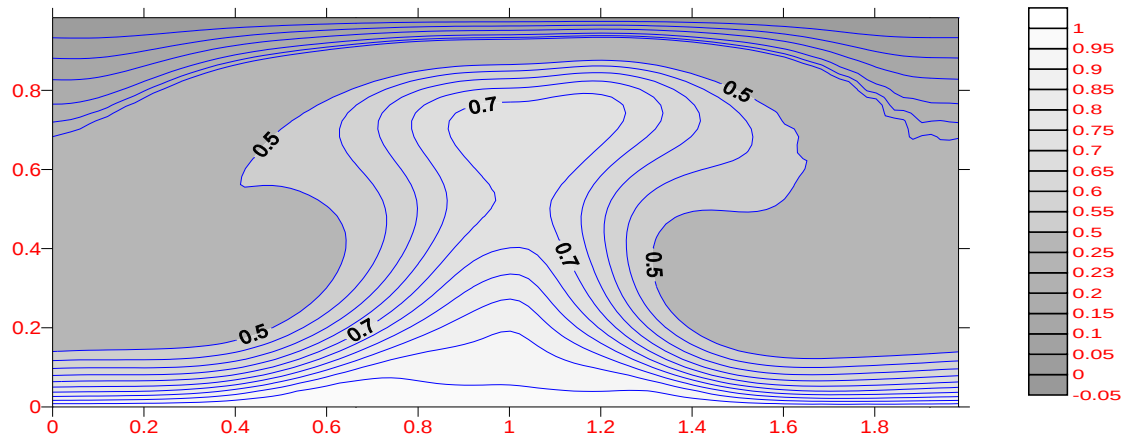


Figure IV.21: Les lignes isothermes pour le cas de convection considéré.

Les deux figures IV.20 et IV.21 montrent que la déformation des lignes isothermes est causée par l'apparition de deux zones de recirculation presque similaires (symétriques) mais de sens opposés, d'où un débit massique de recirculation et un transport convectif important.

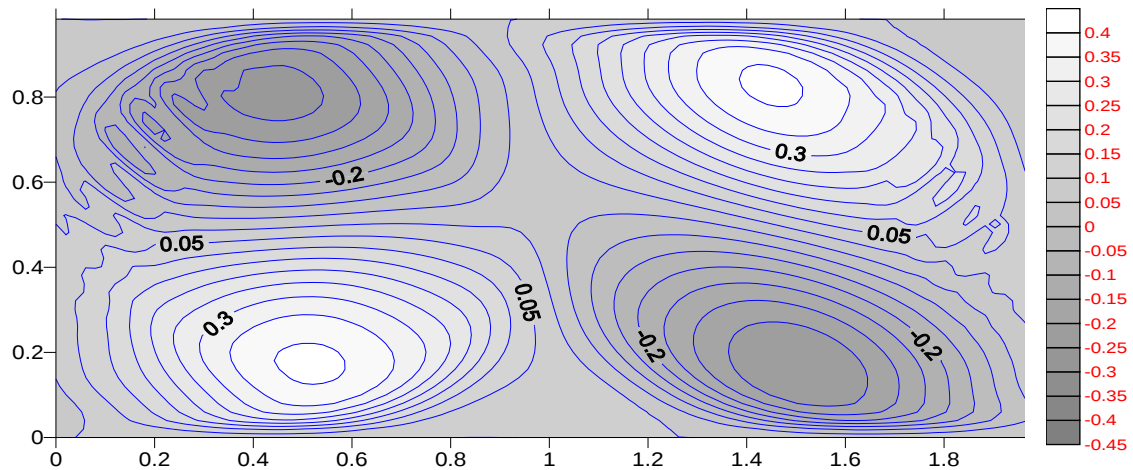


Figure IV.22: Iso-valeurs de la vitesse adimensionnelle pour le cas de $RA=2$ et $Pr=7.01$.

Cette figure (figure IV.22) montre une déviation des vecteurs vitesses autour, des bords et au milieu de la paroi chaude, près de la paroi inférieure adiabatique les modules des vecteurs sont très faibles, donc une stagnation du fluide. Les couches fluides de cette région reçoivent de la chaleur à partir de la circulation convective des cellules où $V_m = 0.38$.

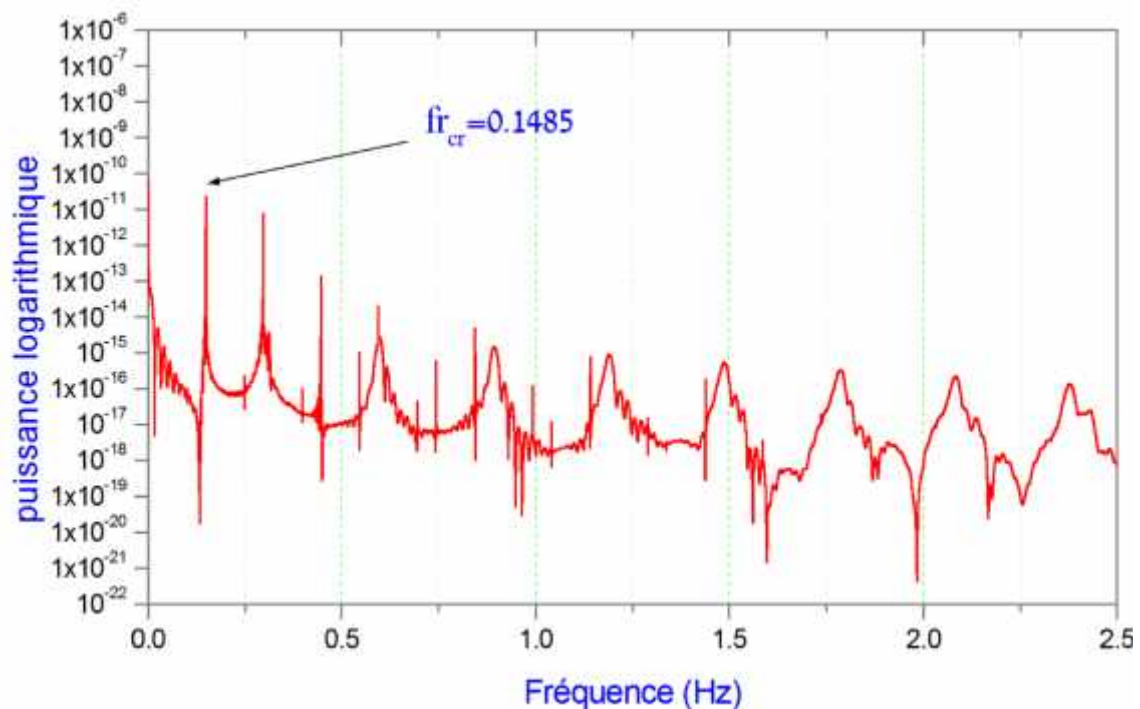


Figure IV.23 : Spectre de l'énergie de la vitesse U .

Rapport d'aspect = 0.5 , et $R_c = 109.695 \times 10^3$

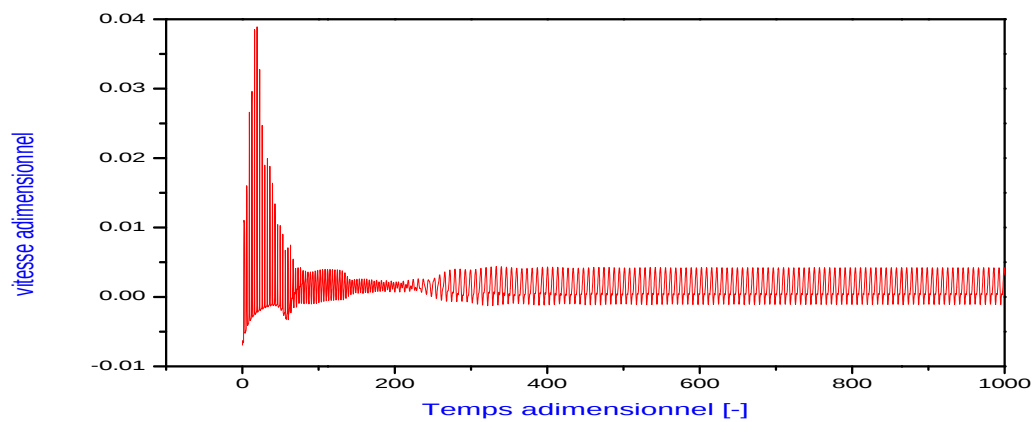


Figure IV.24: La transition de la vitesse u près de la paroi chaude vers le régime oscillatoire.

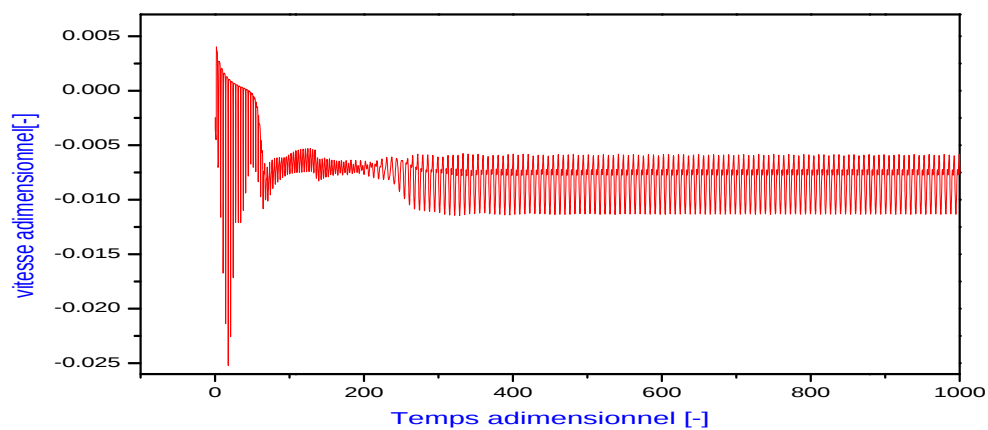


Figure IV.25: Evolution temporelle de la vitesse adimensionnelle v près de la paroi chaude.

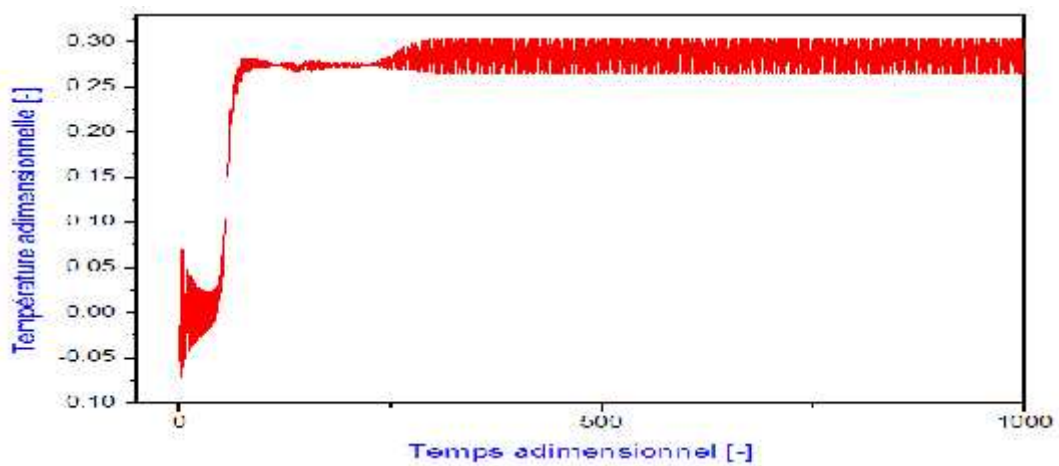


Figure IV.26: Historique de la température adimensionnelle près de la paroi chaude.

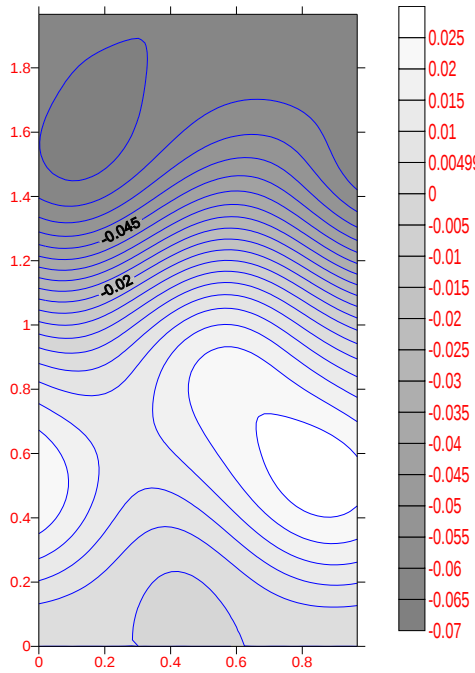


Figure IV.27 : lignes de courant pour le cas étudié.

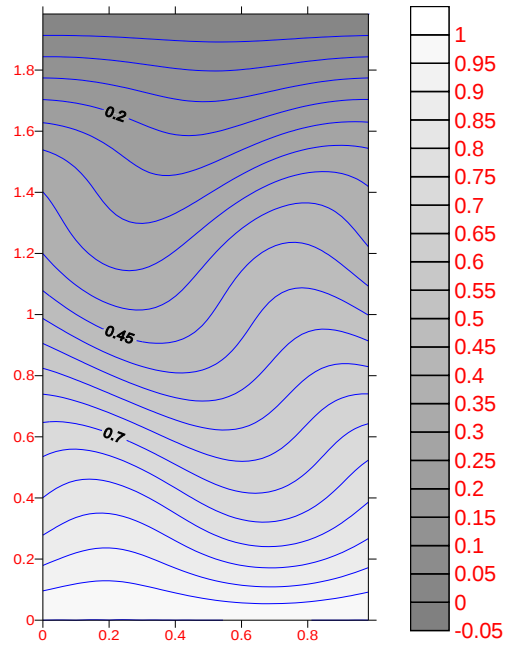


Figure IV.28: Lignes isothermes calculées à $Ra_c = 109.695 \times 10^3$

Les figures IV.27 et IV.28 montrent que les lignes de courant présentent plusieurs zones de recirculation non-uniformément réparties, certaines antihoraires et les autres dans le sens horaire, dont le maximum est de $\psi_m = 0.013$ est obtenue proche des parois adiabatiques. Le champ thermique est faiblement déformé.

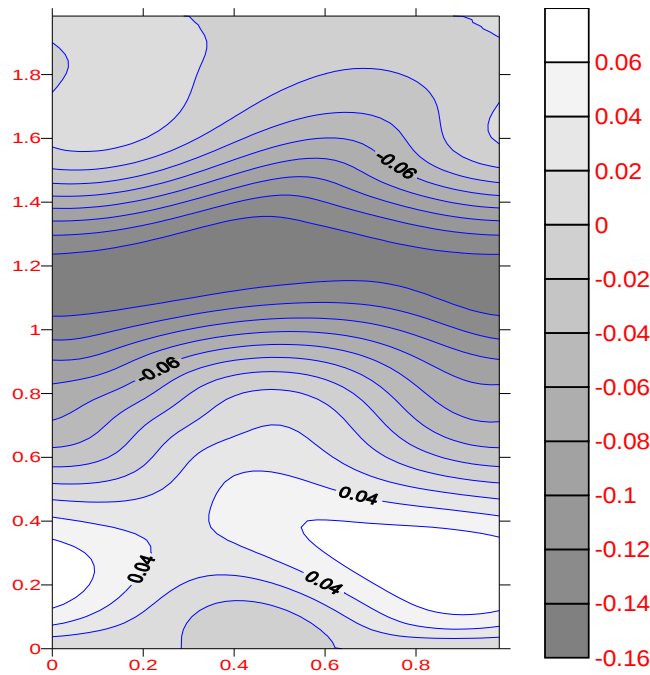


Figure IV.29: Iso-valeurs de la magnitude du vecteur de vitesse au sein de l'écoulement convectif.

IV- e) Limites et diagramme de stabilité :

Concluons nos résultats par un tableau récapitulatif final (tableau IV.6), montrant les différentes valeurs de nombre de Rayleigh critiques obtenues suite à nos simulations numériques, effectuée en moyennant la méthode de Boltzmann sur réseau (Lattice Boltzmann Method). La traduction des ces valeurs numériques en graphiques nous donne un diagramme de stabilité, pour chacune des deux substances étudiées numériquement, à savoir l'air et l'eau (figure IV.34).

Tableau IV.6 : Valeurs critiques du nombre de Rayleigh pour l'air et l'eau.

Rapport d'aspect	0.5	1	2	3	5
$R_{cr} \text{ (air)} \times 10^3$	130	99	72.99	42.4	14.3
$R_{cr} \text{ (eau)} \times 10^3$	109.69	30.6	24	17.5	6

Les régions situant au-dessous de la courbe liant les différents points du nombre de Rayleigh critique est la région où l'écoulement restera stable, tandis que la région au-dessus de la courbe considérée représente la région des instabilités (ou de la transition vers la turbulence). Les valeurs de différentes fréquences critiques correspondantes aux différents nombres de Rayleigh critiques sont montrées sur le diagramme de stabilité.

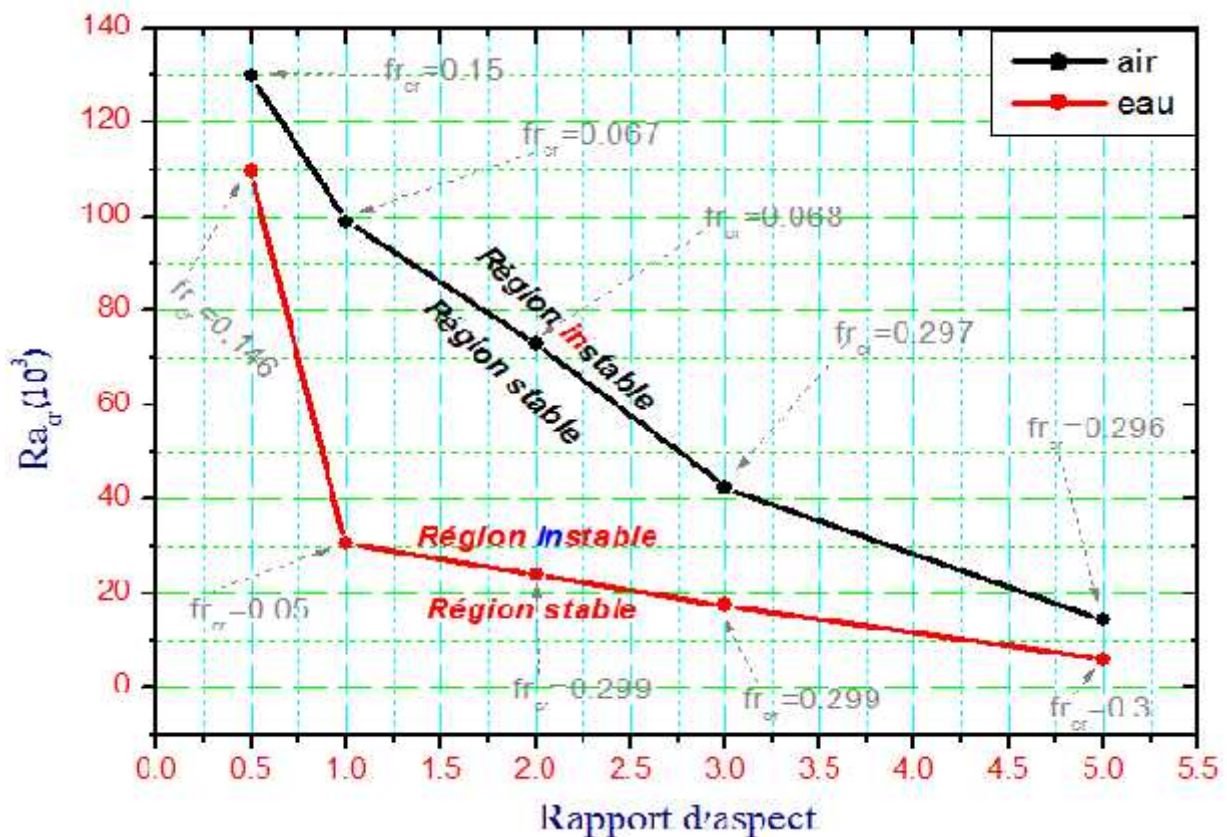


Figure IV.30 : Diagramme de stabilité Ra_{cr} vs. Rapport d'aspect de la cavité.

Conclusion et recommandation

Conclusion et recommandation

L'étude numérique de l'instabilité hydrodynamique et thermique lors du confinement de l'air ou de l'eau dans des cavités rectangulaires ayant des rapports d'aspect $A=L/H$ variables (0.5, 1, 2, 3, 5), a été faite. La méthode de Boltzmann sur réseau (LBM) a été utilisée pour discrétiser les équations régissant l'écoulement permanent et transitoire.

La validation du code de calcul a été faite avec des travaux expérimentaux trouvés dans la littérature de la convection naturelle stationnaire dans une enceinte chauffée différentiellement. Un bon accord a été obtenu entre nos simulations et les données expérimentales.

L'évolution de l'écoulement et le transfert de chaleur durant l'instabilité a été examinée, dont les résultats indiquent que la structure de la fonction de courant et les isothermes se déforme graduellement pour s'installer à une structure ayant le caractère oscillatoire (de manière périodique) au cours de l'instabilité.

À l'aide de la transformée de Fourier rapide (FFT), les fréquences prédominantes des oscillations ont été déterminées dans tous les cas de figure simulés.

Les résultats montrent la dépendance des fréquences avec les rapports d'aspect et les nombre de Rayleigh critiques. Bien que notre étude soit bidimensionnelle, on s'attend à ce que les résultats d'une simulation numérique tridimensionnelle, avec une concentration sur les possibles obstacles ou structure dans l'écoulement, ainsi que l'éventuelle présence des instabilités dues au double diffusion, confirment les résultats qualitatifs obtenus dans ce travail.

Bibliographie

- [1] M.L. Toulouse. Analyse et Caractérisation de la Convection Naturelle et de la Convection Mixte dans des Enceintes Confinées. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2004.
- [2] L. Perrin. Analyse Expérimentale des Écoulements de Convection Naturelle et Mixte en Espace Confiné. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 2006.
- [3] S. Ostrach. Natural Convection in Enclosures. *ASME Journal of Heat Transfer*, 110 :1175–1190, 1988.
- [4] E.R.G. Eckert and W.O. Carlson. Natural Convection in an Air Layer Enclosed Between Two vertical Plates with Different Temperatures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2 :106–120, 1961.
- [5] M.E. Newell and F.W. Schmidt. Heat Transfer by Laminar Natural Convection Within Rectangular Enclosures. *ASME Journal of Heat Transfer*, 92 :159–168, 1970.
- [6] Y.S. Tian and T.G. Karayiannis. Low Turbulence Natural Convection in an Air-Filled Square Cavity. Part I : The Thermal and Fluid Flow Fields. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43 :849–866, 2000.
- [7] Y.S. Tian and T.G. Karayiannis. Low Turbulence Natural Convection in an Air-Filled Square Cavity. Part II : The Turbulence Quantities. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 43 :849–866, 2000.
- [8] J. Salat, S. Xin, P. Joubert, A. Sergent, F. Penot, and P. Le Quéré. Experimental and Numerical Investigation of Turbulent Natural Convection in a Large Air-Filled Cavity. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 25 :824–832, 2004.
- [9] P. Le Quéré. Onset of Unsteadiness, Route to Chaos and Simulations of Chaotic Flows in Cavities Heated from the Side : a Review of Present Status. In *Proceedings of the 10th International Heat Transfer Conference*, volume 1, pages 281–296, 1994.
- [10] I. Catton. The Effect of Insulating Vertical Walls on the Offset of Motion in a Fluid Heated from Below. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15 :665–672, 1972.
- [11] W.L. Heitz and W. Westwater. Critical Rayleigh Numbers for Natural Convection of Water Confined in Square Cells with L/D from 0.5 to 8. *ASME Journal of Heat Transfer*, 93 :188–196, 1971.
- [12] S.H. Davis. Convection in a box : linear theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 30 :465–478, 1967.
- [13] K. Stork and U. Muller. Convection in Boxes : Experiments. *Journal of Fluid Mechanics*, 54 :599–611, 1972.
- [14] J. Pallares, I. Cuesta, and F.X. Grau. Laminar and Turbulent Rayleigh-Benard Convection in a Perfectly Conducting Cubical Cavity. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 23 :346–358, 2002.

- [15] J. Pallares, F.X. Grau, and F. Giralt. Flow Transitions in Laminar Rayleigh-Benard Convection in a Cubical Cavity at Moderate Rayleigh Numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42 :753–769, 1999.
- [16] Baines P.G. and C.K. Folland: Evidence for a Rapid Global Climate Shift across the Late 1960s. *J. Clim.*, 20: 2721-2774, 2007.
- [17] Barnier B. (1998) : *Ocean Modeling and Parameterization*, chapter Forcing the Ocean, pages 45-80. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1998.
- [18] A.T. Patera and B.B. Mikic. Exploiting hydrodynamic instabilities. Resonant heat transfer enhancement. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.29, N° 8, pp.1127-1138, 1986.
- [19] J. Davalath and Y. Bayazitoglu. Forced convection cooling across rectangular blocks. *Journal of Heat transfer*. Vol.109, pp.321-328, May 1987.
- [20] M. Keyhani, V. Prasad and R. Cox. An experimental study of natural convection in vertical cavity with discrete heat source. *Journal of Heat Transfer*, Vol.110, pp.616-624, August 1988.
- [21] B.H. Kang and Y. Jaluria. Natural convection heat transfer characteristics of protruding thermal sources located on horizontal and vertical surfaces. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.33, N° 6, pp.1347-1357, 1990.
- [22] M. Y. Ha. Two dimensional and unsteady natural convection in a horizontal enclosure with a square body, *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol 41, pp.83-210, 2002.
- [23] W. Fu and B. Tong. Numerical investigation of the heated blocks in the channel with transversally oscillation cylinder. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.47, pp 341-351, 2004.
- [24] L.F. Jin, K.W. Tou and C.P. Tso. Effect of rotation natural convection cooling from three rows of heat sources in a rectangular cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.48, pp.3982-3994, 2005.
- [25] A. Skouta, M. Randrianampanany et M. Daguenet. Étude numérique de la convection naturelle instationnaire bidimensionnelle dans une enceinte allongée, de grand axe horizontal et de section carrée, inclinée en égard au plan horizontal et chauffée par deux côtés opposés. *International Journal of Thermal Sciences*. Vol 40, 352–365, 2001.
- [26] C. Weisman, L. Calsyn, C. Dubois et P. Le Quéré. Sur la nature de la transition à l'instationnaire d'un écoulement de convection naturelle en cavité différentiellement chauffée à grands écarts de température. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 329, Série II b, p. 343–350, 2001.
- [27] C.Y. Song, P.Y. Tzeng and C.D. Hsieh. Numerical study of bottom wall temperature modulation effects thermal instability and oscillatory cellular convection in a rectangular enclosure. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol.44, pp.3855-3868, 2001.
- [28] S. Wakashima and T.S. Saitoh. Benchmark solution for natural convection in cubic cavity using the high order time space method. *International Journal of Heat and Mass transfer*, Vol.47, pp.853-864, 2004.
- [29] M. Nateghi and S.W. Armfield. Natural convection flow of air in inclined open cavity. *ANZIAM Journal*, Part E, Vol .45, pp.870-890, 2004.
- [30] V. Kanashina and P.T. Zubkov. Heat transfer from the cold wall of square cavity to the hot one by oscillatory natural convection, 2006 (In press).
- [31] S. Chen and G. D. Doolen, Lattice Boltzmann method for fluid flows, *Ann. Rev.*

Fluid Mech. 30, pp. 329-364, 1998.

[32] S. Succi; *The Lattice Boltzmann Equation: for Fluid Dynamics and Beyond* (Series Numerical Mathematics and Scientific Computation) (Oxford: Oxford University Press), 2001.

[33] M. R. Arab; Reconstruction stochastique 3D d'un matériau céramique poreux à partir d'images expérimentales et évaluation de sa conductivité thermique et de sa perméabilité; thèse de l'Université de Limoges, N° d'ordre: 21-2010, 2010.

[34] Peng Yuan, Thermal lattice Boltzmann two-phase flow model for fluid dynamics, PhD. thesis, University of Pittsburgh, 2005.

[35] M. R. Arab; Reconstruction stochastique 3D d'un matériau céramique poreux à partir d'images expérimentales et évaluation de sa conductivité thermique et de sa perméabilité; thèse de l'Université de Limoges, N° d'ordre: 21-2010, 2010.

[36] M.C. Sukop, D.T. Thorne; *Lattice Boltzmann modeling: an introduction for geoscientists and engineers*; Springer, Heidelberg, Berlin, New York.

[37] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, M.K. Krook, A model for collision process in gases. I: small amplitude processes in charged and neutral one-component system, *Phys. Rev.*, vol. 94 pp.511-525, 1954.

[38] J. Latt and B. Chopard; Lattice Boltzmann method with regularized non equilibrium distribution functions; *Math. Comp. Sim.*, 72, pp. 165-168, 2006.

[39] X. He and L. S. Luo; A priori derivation of the lattice Boltzmann equation; *Physical Review E*, Vol 55, n°6, R6333-R6336.

[40] P. J. Davis and P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, 2nd ed., Academic, New York, 1984.

[41] L.-S. Luo, *Lattice-Gas Automata and Lattice Boltzmann Equations for twodimensional hydrodynamics*, Ph.D. thesis, Georgia Institute of Technology, 1993.

[42] A.A. Mohamad, A. Kuzmin; A critical evaluation of force term in lattice Boltzmann method, natural convection problem; *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 53, pp. 990—996, 2010.

[43] S. Chen and D. Martinez; On boundary conditions in lattice Boltzmann methods; *Phys. Fluids* 8 (9), pp. 2527-2536 1996

[44] Q. Zou and X. He; On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model; *Phys. Fluids* 9 (6), pp. 1591-1598, 1997.

[45] Y. Peng, C. Shu, Y.T. Chew, J. Qiu; Numerical investigation of flows in Czochralski crystal growth by an axisymmetric lattice Boltzmann method; *Journal of Computational Physics*, 186, pp. 295—307, 2003.

[46] X. He, Q. Zou, L.-S. Luo, and M. Dembo, Analytic solutions and analysis on non-slip boundary condition for the lattice Boltzmann BGK model, *J. Stat. Phys.*, 87, pp.115-136, 1997.

[47] Q. Zou, S. Hou, and G.D. Doolen, Analytical solutions of the lattice Boltzmann BGK model, *J. Stat. Phys.*, 81, pp. 319-334, 1995.

[48] H. Liu, C. Zou, B. Shi, Z. Tian, L. Zhang, C. Zheng; Thermal lattice-BGK model based on large-eddy simulation of turbulent natural convection due to internal heat generation; *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 49, pp. 4672—4680, 2006.

[49] G. Vahala, P. Pavlo, L. Vahala, N.S. Martys; Thermal lattice Boltzmann (TLBM) model for compressible flows; *Int. J. Modern Phys. C*, vo. 9, n° 8, pp. 1247-1261, 1998.

[50] Y. Chen, H. Ohashi, and M. Akiyama; Thermal lattice Bhatnagar—Gross—Krook model without nonlinear deviations in macro dynamic equations, *Phys. Rev. E* 50, pp. 2776-2783, 1994.

- [51] X. Shan; Simulation of Rayleigh-Bénard convection using a lattice Boltzmann method; Phys. Rev. E 55, pp. 2780—2788, 1997.
- [52] A.Bouttout. Etude de l'instabilité hydrodynamique , Thèse de Magister, Institut de Génie Mécanique, Université Mentouri-Constantine, 2006.
- [53] M.Hortman , M.Peric and G.Scheuerer. Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: Bench-mark solution, International Journal of Numerical Methods in Fluids, Vol.11, pp.189-207, 1990.
- [54] K.S. Chen and P. W. Ko. Natural convection in partially divided rectangular enclosure with an opening in the partition plat and isoflux side walls. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.34, N°1, pp.237-246, 1991.
- [55] E.Semma M. El Ganaoui , V.Timchinko and E. Leonardi. Unsteadiness and control by using thermal boundary modulation in restricted fluid domain of vertical Bridgman apparatus ,International Journal of material and Product Technology, Vol.22, Nos 1/2/3, 2005.
- [56] Larroudé ,P. Ouazzani, J.Alexander, J.I.D. and Bontou, P. Symmetry breaking transition and oscillatory flows in a 2 D directional solidification model. Eur. J.Mechanic, B/Fluids, Vol.13, N0.3, pp.353-381.

Titre du mémoire : ETUDE DE LA CONVECTION DE RAYLEIGH BENARD PAR LA METHODE LATTICE BOLTZMAN.

.Master : Energétique et Énergies renouvelables.

Auteur : Zehouani Khaireddine et Berrehouma Med saleh.

Mots clés : méthode de Boltzmann sur réseau, Convection de Rayleigh-Bénard, Cavity rectangulaire, Instabilité.

Résumé :

La méthode de Boltzmann sur réseau (LBM et ses schémas D2Q9 et D2Q5) est appliquée pour la simulation numérique de la convection naturelle laminaire de Rayleigh-Bénard dans une cavité rectangulaire. La cavité est différentiellement chauffée sur les parois horizontales. L'étude est réalisée pour un nombre de Prandtl de $Pr=0.71$ (l'air), et pour $Pr=7.01$ (l'eau). Les valeurs de nombre de Rayleigh changent entre $(6 \times 10^3) - (130 \times 10^3)$. Nous avons discuté et analysé l'influence de nombre de Rayleigh sur le des champs dynamique et thermique ainsi que sur le nombre de Nusselt moyen de l'écoulement. En outre, des fréquences critiques dominant l'écoulement oscillatoire ont été déterminées.

Report title: STUDY OF RAYLEIGH BÉNARD CONVECTION BY LATTICE BOLTZMAN METHOD.

Keywords: Lattice Boltzmann method, Rayleigh-Bénard convection, Rectangular cavity, Instability.

Abstract:

The lattice Boltzmann method (LBM and its schema D2Q9 and D2Q5) is applied for the numerical simulation of the Rayleigh-Bénard laminar natural convection in a rectangular cavity. The cavity is differentially heated on the horizontal walls. The study is carried out for a Prandtl number of $Pr = 0.71$ (air), and for $Pr = 7.01$ (water). The Rayleigh number values change between $(6 \times 10^3) - (130 \times 10^3)$. We have discussed and analyzed the influence of Rayleigh number on the dynamic and thermal fields as well as on the average Nusselt number of the flow. In addition, critical frequencies dominating the oscillatory flow have been determined.

الخلاصة: تم تطبيق طريقة العددية لبولتزمان لرايلي بينارد بتطبيق طريقة العددية لبولتزمان.

الكلمات المفتاحية: طريقة بولتزمان الحمل الحراري رايلي بينارد، تجويف مستطيلة، عدم الاستقرار.

ملخص:

طريقة بولتزمان (D2Q9 و D2Q5) طبقت لمحاكاة النقل الحراري الطبيعي لرايلي بينارد داخل تجويف مستطيلة ذات بعدين. الحجرة مسخنة تفاضليا و المائع المستعمل هو (هواء و ماء). $Pr = 0.71$ (هواء) و $Pr = 7.01$ (ماء) و عدد رايلي متغير من (6×10^3) إلى (130×10^3) . نتناج تناقش وتحلل تأثير عدد رايلي على الحقل الديناميكي والحراري وعلى متوسط عدد نيسالت من التدفق وبالإضافة إلى ذلك تم تحديد التردد الحرج في تدفق متذبذب.