جامعة الشهيد حمه لخضر بالوادي

كلية العلوم الاقتصادية وعلوم التسيير والعلوم التجارية

قسم العلوم التسيير

مطبوعة مقدمة لطلبة ثانية ليسانس علوم التسيير والعلوم الاقتصادية والعلوم التجارية

بعنوان :

رياضيات المؤسسة

من اعداد الأستاذ: عيشوش محمد الحافظ

الموسم الجامعي:2022/2021

قائمة المحتويات

المقدمة

إن التطور الحاصل في مختلف مجالات الحياة يتطلب التعامل مع التغيرات الحاصلة بأسلوب عملي قائم على أساس العلم والمنطق والتفكير الرشيد الذي يسبق اتخاذ القرارات المختلفة، وتواجه المؤسسات والشركات على اختلاف أنواعها تحديات كبيرة في عالم اليوم الذي يوصف بأنه عصر المعرفة أو عصر المعلوماتية أو الاقتصاد الرقمي، لذا فإن المدراء ومتخذي القرارات فيها لابد وأن يتمتعوا بقدر كبير من الإلمام بالأساليب العلمية الحديثة وخصوصا الكمية منها لتساعدهم في مجالات اتخاذ القرارات المختلفة.

إن عملية اتخاذ القرار هذه ليست بالأمر الهين كونها تحتاج من الشخص القائم عليها بذل جهد أكبر وبحث عميق لصياغة المشكلة بشكل دقيق، وتحديد المعلومات المطلوبة، وتحليلها وتقييم مختلف البدائل الممكنة ومن ثم تقييم النتائج المحصل عليها، وبالتالي التوصل إلى القرار الأنسب والذي يمكِّن المؤسسة من انجاز أعمالها بأعلى درجات الكفاءة.

وتعتبر رياضيات المؤسسة منهج علمي لاتخاذ القرارات التي تتعلق بإدارة الأعمال, فنماذجها لاقت قبولا واسع النطاق لتطبيقها في مؤسسات الأعمال التجارية والصناعية والزراعية والخدمية كالنقل والصحة...., ومن أهمها أسلوب البرمجة الخطية الذي يستخدم لإيجاد التخصيص الأمثل للموارد المحدودة على الاستخدامات البديلة على نحو الذي يحقق هدفا معينا بأحسن صورة ممكنة، كما تساعدها في معالجة الكثير من المواقف والمشاكل من خلال نمذجتها للوصول لتحقيق الأمثلية.

وفي إطار هذه الأهمية، نسعى من خلال هذه السلسلة من المحاضرات إلى تقديم أبرز مكونات مقياس رياضيات المؤسسة، بدءً بالبرمجة الخطية وخوارزمياتها مرورا بالبرمجة الثنائية، وصولا لمسائل النقل، متوخين في ذلك البساطة والتعمق في تقديم الأمثلة التطبيقية.

الفصل الأول:

مدخل نظري لبحوث العمليات وتاريخها

I. مفاهيم حول بحوث العمليات

تعتبر بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي تم اعتمادها بنجاح واسع في المجالات المدنية والعسكرية على السواء .

1. التطور التاريخي لبحوث العمليات ومجالات استخدامها

تستخدم بحوث العمليات في الكثير من المجالات المدنية والعسكرية، وهنا في هذه الفقرة سنذكر استخدامات بحوث العمليات تاريخيا.

1.1. استخدام بحوث العمليات أثناء الحرب العالمية

ان العلم بحوث العمليات تاريخ ليس بالقديم، ويعتبر من العلوم التي ساهمت أثناء الحرب العالمية الثانية (1936) في انتصار القوات البرية والجوية والبريطانية وكانت الفكرة آنذاك أن تحسين استخدام الأسلحة والمهمات الموجودة يعطي نتائج أفضل في المدى القصير، مما لو تم التركيز على استخدام الموارد المتاحة، ويرجع الفضل الكبير للعالم G . Dent icing الذي اكتشف خوارزمية السمباكس ذات الإمكانيات المتقدمة في حل مشاكل البرمجة الخطية[1]، هذا بالنسبة لاستخدام علم بحوث العمليات الحربية في بريطانيا أما في أمريكا فقد كان كل من James . B رئيس لجنة بحوث الدفاع القومي وrannivar. B رئيس لجنة الأسلحة والمعدات الجديدة وراء استخدام بحوث العمليات من خلال إجراء دراسات مماثلة للدراسات البريطانية وذلك بتكوين فريق خاص لمعالجة بعض المشاكل المعقدة ، كمشكلة نقل المعدات والمواد المختلفة وتوزيعها على مختلف الوحدات العسكرية المنتشرة في مناطق مختلقة من العالم .و قي أكتوبر 1942 بعث الجنرال spaatz القائد العام للقوات الجوية الثامنة برسالة إلى القادة العموميين للقوات الجوية يوصي فيها بوجوب ضم مجموعات من العلماء لتحليل العمليات في وحداتهم، ومن خلال ذلك شكل أول فريق لهذا الغرض في بريطانيا ثم

[1] شفيق العتوم، بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار المناهج، 2006، ص 14

تبعها السلاح البحري الأمريكي فشكل بدوره فريقين في مشروعين ضخمين : معمل المعدات البحرية ، الأسطول العاشر برئاسة كل من M. philip وJ.ELLISA ، ونظرا للنجاح الذي تحقق في اليوم واصل القادة العسكريون اهتمامهم بهذا العلم من خلال وكالة بحوث العمليات والتي تحولت فيما بعد إلى مؤسسة بحوث العمليات، هذا ما شجع على استخدام هذا العلم في العديد من الدول الأخرى وعلى رأسها كندا التي شكلت فريقا مهمته إنتاج المعدات العسكرية من خلال الاستخدام الأمثل للموارد المتوفرة[2].

وبعد الحرب العالمية الثانية تشجع رجال الأعمال الذين كانوا يبحثون عن حلول لمشاكلهم على إدخال هذا العلم في إدارة المشاريع الاقتصادية، ففي بريطانيا قام فريق من المهتمين بتكوين نادي بحوث العمليات والذي اصطلح على تسمية فيها بعد جمعية بحوث العمليات للمملكة المتحدة والتي أشرفت على إصدار مجلة علمية ربع سنوية، ابتداء من سنة 1950 والتي تعتبر الأولى من نوعها، بينما في الو. م. أ تم تكوين جمعية بحوث العمليات الأمريكية ومعهد الإدارة العلمية في سنة 1950 وقد أصدرت بدورها مجلة بحوث العمليات سنة 1952[3].

وقد تطور استعمال هذا العلم تطور ملحوظا خاصة في ظل تزامنه مع التطور العلمي الكبير الذي تم إحرازه في مجال الحسابات الآلية .

2.1. استخدام بحوث العمليات في المجالات المدنية

لقد كان لتطبيق علم بحوث العمليات أثناء الحرب العالمية الثانية في المجالات العسكرية أثرا إيجابيا كبيرا، مما شجع علماء الإدارة ورجال الأعمال الذين كانوا يبحثون

[2] سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، دار الكتب الوطنية بن غازي، ليبيا، الطبعة الأولى، 2002، ص31

[3] سليمان محمد مرجان، مرجع سبق ذكره، ص32.

عن حلول لمشاكلهم المتعلقة بالعمل، على إدخال هذا العلم على إدارة المشاريع الاقتصادية. وتطورت في[4]:

أ. **في بريطانيا:** قام فريق من المهتمين بهذا المجال بتكوين نادي بحوث العمليات سنة 1948، والذي أصبح اسمه فيما بعد جمعية بحوث العمليات للمملكة المتحدة، والتي بدأت في إصدار مجلة علمية ربع سنوية ابتداء من سنة 1950 والتي تعد أول مجلة في هذا المجال .

ب. **في أمريكا:** تم تكوين جمعية بحوث العمليات الأمريكية، ومعهد الإدارة العلمية سنة 1950، وقد أصدرت هذه الجمعية مجلة بحوث العمليات سنة 1952، بعدها أصدر معهد الإدارة العلمية مجلة تخصصية في بحوث العمليات اسمها مجلة الإدارة العلمية وذلك سنة 1953.

3.1. استخدام بحوث العمليات في الوقت الراهن

نظرا لزيادة حجم النشاط الذي تقوم به المنظمات الإدارية المختلفة في الوقت الراهن، وتزايد التعقيدات التي تتسم بها الإجراءات الإدارية، وإدراك الإدارة لمدى أهمي القرار الإداري السليم، فقد تعدى اليوم استخدام بحوث العمليات مواطن نشأته، وأصبح يستخدم في كثير من دول العالم، كما تعدى أيضا مجالات استخداماته الأولى.

ويرجع هذا الانتشار الواسع لاستخدام الأساليب الكمية في المجالات الإدارية إلى انتشار الحاسب الآلي، حيث أثبتت إحدى الدراسات التي نفذت عل مجموع كبيرة من الشركات الأمريكية عام 1991، أن تسع (09) شركات من أصل عشرة (10) تمثل تكنولوجيا المعلومات جزءا حيويا في عملهم.

هذا بالإضافة إلى ظهور البرامج العلمية المتطورة للحساب، والتي لها الأثر الواضح في دفع استخدام بحوث العمليات إلى آفاق واسعة بلغت مستوى التخطيط الاستراتيجي

---

[4] الفرات منار، المادة النظرية في بحوث العمليات والبرمجة الخطية، قسم إدارة الأعمال، كلية التجارة، جامعة غزة، 2014/2013، ص 03 .

الذي يعتبر من أهم النشاطات التي تقوم بها الإدارة العليا؛ والذي يستعمل للتعرف على الأسباب الكامنة وراء المشاكل المستعصية والتي يمكن أن تمس عملية الإنتاج والتخزين والتمويل والنقل وغيرها من المشاكل التي يمكن أن تواجه المنظمة، كما تمكن الإدارة أيضا من تقييم السياسات البديلة للتشغيل والاستثمار، وتساعدها في تحديد احتياجات المؤسسة على المدى الطويل[5].

2. مفهوم بحوث العمليات

إن صناعة القرارات وتطبيقاتها في أي مجال من المجالات يتطلب اللجوء إلى الأساليب العلمية التي تمكن صانعي القرارات والقائمين على تنفيذها من الوصول إلى الغايات المرجوة في ظل الإمكانيات المتاحة، ومن بين هذه الأساليب العلمية نجد بحوث العمليات.

هنالك عدة تعاريف لبحوث العمليات منها التعريف الذي اعتمدته جمعية بحوث العمليات البريطانية حيث عرف بأنها: تطبيق الطرق العلمية لحل مشاكل معقدة قي إدارة نظم كبيرة تشتمل على أفراد ومكائن وموارد ورأس مال في الصناعة والأعمال والحكومة والدفاع[6].

إن هذا المدخل المتميز يهدف إلى تطوير نموذج علمي للنظام يتضمن قياس العوامل مثل المخاطرة والاحتمال والتي يمكن معها التنبؤ ومقارنة نتائج بدائل القرارات والاستراتيجيات، وهدفها هو مساعدة الإدارة في تحديد سياستها والتصرف بطريقة علمية عند المشاكل الإدارية[7].

---

[5] الفرات منار، المرجع السابق، ص 4، 5.

[6] صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة، الطبعة الأولى، إثراء للنشر والتوزيع، عمان الاردن، 2009، ص 14.

[7] صالح مهدي محسن العامري، المرجع السابق، ص 14.

أما جمعية بحوث العمليات الأمريكية فقد عرفت بحوث العمليات على أنها:" تهتم باتخاذ القرارات العلمية لتصميم ووضع أنظمة المعدات والقوى العاملة وفقا لشروط معينة تتطلب تخصيص الموارد المحدودة بشكل أمثل[8].

كما تعرف على أنها: عبارة عن استخدام الأساليب العلمية لتنظيم تعاون الأنشطة والعمليات ضمن نظام معين، بهدف الوصول إلى الحل الأمثل أو الحلول المثلى لمشكلات هذا النظام، من بين عدد من الحلول الممكنة[9].

عرفت أيضا على أنها: مجموعة الطرق والتقنيات العقلانية لتحليل وحوصلة ظواهر التنظيم المستعملة لإعداد أحسن القرارات[10].

مما سبق يمكننا القول أن بحوث العمليات عبارة عن علم يستخدم أساليبا وطرقا علمية لدراسة مشكلات واقعية، ثم توفير أكثر من حل لها، واختيار الحل الأمثل ضمن الإمكانات المتاحة.

3. حدود استخدام بحوث العمليات

تستخدم حاليا بحوث العمليات بشكل واسع في مجال إدارة الأعمال، وفيما يلي سنتطرق إلى حدود استخدام بحوث العمليات.

- إنها تتضمن الكثير من الصيغ والمعادلات والتعبيرات الرياضية للبيانات المستخدمة.
- تفتَرض ظروفا وشروطا عند صياغة الكثير من النماذج والمعادلات وهذه لا يمكن تطبيقها في الكثير من المشاكل الإدارية والصناعية ولذا فإن تطبيق هذه النماذج كما هي يقود إلى نتائج خاطئة.

---

[8] دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008، ص 15.

[9] حسين ياسين طعمة وآخرون، بحوث العمليات نماذج وتطبيقات، دار صفاء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، الأردن، 2009، ص 22.

[10] Robert Faure et autre, Précis de recherche opérationnelle, 5eme édition, Dunod, Paris, 2000, P10.

- يتطلب تطبيق الأساليب الكمية أو بحوث العمليات الكثير من الخبراء واستخدام أجهزة الحاسوب.
- إنها لا تدرس العوامل النوعية التي لا يمكن التعبير عنها كميا مثل المهارات والقدرات والتصرفات وصدق الإداريين عند اتخاذ القرارات، فإن اعتماد الأساليب الكمية لن يكون مفيدا إذا ما كانت هذه العوامل النوعية حاكمة في عملية اتخاذ القرار.
- لا يمكن لأساليب بحوث العمليات الحلول محل الحكم الشخصي للمدير في موقف اتخاذ القرار فهي عبارة عن أدوات تستخدم في تحليل وتفسيرَ المشاكل التي يكون فيها القرار عائد للعقل البشري.
- تتطلب أساليب بحوث العمليات معرفة نظرية وعملية في حقول علمية مختلفة فعند صياغة نموذج معين لابد أن يكون مستخدم الأساليب الكمية على معرفة نظرية وواسعة في الرياضيات والإحصاء وبحوث العمليات.
- إن عدم إيمان الإدارة وتعاونها أو وجود قناعة لديها بأن هذه الأساليب طورت في دول متقدمة ولا تصلح إلا لتلك الدول يعرقل كثيرا انتشار تطبيق هذه الأساليب والاستفادة منها وكذلك هناك الكثير من الأدوات التي لا توفر البيانات للباحثينُ والمحللين الأمر الذي يعقد مهمتهم ويصعب عليهم الوصول إلى حلول للمشاكل التي يعالجونها.

4. خصائص بحوث العمليات

هناك عدة خصائص لبحوث العمليات أهمها:

أولا: أنها تركز على استخدام الأسلوب المتكامل أي منهج النظم

وهذا المنهج يتميز بالنظرة الشاملة للنظام ويتطلب هذا الأسلوب الإحاطة بالجزئيات والترابط والتفاعل بينهم في نظام متكامل، ويقصد بالنظرة الشاملة ما يلي[11]:

[11] إنعام علي التوفيق الشهربلي، تقويم نظم المعلومات باستخدام بحوث العمليات، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009 ، ص.50

- تجزئ المشكلة الكلية لمشكلات فرعية بحيث تشكل مجموع حلولها الحل النهائي للمشكلة الكلية.
- دراسة المشكلة تتعدى حدود الأبعاد الظاهرية لها.
- تمتد الدراسة لأثر المشكلة والحلول في المستقبل.
- تهتم بالأهداف النهائية وليست المرحلية.

ثانيا: أنها ترتكز على الطريقة العلمية كأساس ومنهج في البحث والدراسة

وتقتضي الطريقة العلمية السير في أربعة خطوات لحل المشكلة هي[12]:

- التحديد الدقيق للمشكلة وكافة أبعادها.
- وضع قروض لها إمكانية تفسير أبعاد المشكلة.
- اختبار الفروض وتحديد بدائل لحل المشكلة.
- اختيار الحل الأمثل ووضعه موضع التنفيذ ومتابعة نتائج تنفيذه.

ثالثا: أنها تهتم ببناء النموذج الرياضي الذي يحاول استخلاص جوهر المشكلة الحقيقية

وذلك بتمثيل مكونات المشكلة والعوامل المؤثرة فيها والظروف المحيطة وأسلوب الربط بينها والعلاقات بين المتغيرات، مع الإشارة إلى أنه في النماذج المعقدة يتم الاستعانة بالحاسب نظرا لقدرته الكبيرة[13].

رابعا: أنها تتطلب تشكيل فريق بحوث العمليات

---

[12] بوقرة رابح، بحوث العمليات، الجزء الثاني، منشورات جامعة المسيلة، الجزائر، 2012، ص 6.

[13] عبد الستار أحمد محمد الآلوسي، أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار)، دار القلم للنشر والتوزيع، الإمارات العربية المتحدة، 2003، ص 7.

وذلك لأن حل المشكلات بواسطة فريق أكثر فاعلية ولأن المشكلة المعقدة والمتشعبة يستحيل حلها دون الاستعانة باختصاصين في مجالات مختلفة وذلك من أجل تكامل المعرفة بينهم لتفسير مختلف جوانب المشكلة[14].

خامسا: أنها تنطبق بصورة أوسع وأشمل وأكثر على المؤسسات الصناعية والإدارية ذات الحجم الكبير

نسبيا حيث تحتاج هذه المؤسسات إلى نماذج علمية مساعدة في اتخاذ القرار، أما المؤسسات العائلية وذات الحجم الصغير جدا فإنها عادة ما تبني قراراتها على التجربة والخبرة والتوقعات اليومية[15].

II. منهج بحوث العمليات في اتخاذ القرارات

وتعد عملية اتخاذ القرار الإداري جوهر العملية الإدارية ومحور نشاط الوظيفة الإدارية وهي عملية اختيار لاستراتيجية أو لإجراء، وهذه العملية منظمة ورشيدة وبعيدة كل البعد عن العواطف، ومبنية علي الدراسة والتفكير الموضوعي للوصول إلي قرار مرضي أو مناسب.

نظرية اتخاذ القرار هو مقياس يجعل الطالب ملم بكل ما يتعلق باتخاذ القرارات وتوقيت اتخاذها وظروف اتخاذه، حيث سنتعرف على اتخاذ القرار في حالة التأكد التام وعدم التأكد والمخاطرة.

1. اتخاذ القرارات في حالة التأكد التام[16]

وهي ابسط نوع وأندرها بحيث يستطيع متخذ القرار تحديد نتائج كل بديل من البدائل المتوفرة بشكل مؤكد والسبب يعود لتوفر البيانات والمعلومات .

[14] عبد الستار أحمد محمد الآلوسي، مرجع سابق، ص 7، 8.

[15] بوقرة رابح، مرجع سابق، ص 7، 8.

[16] سليمان محمد مرجان، مرجع سابق، ص 38.

تشير هذه الحالة إلى أن متخذ القرار يكون على علم تام بكل المعلومات اللازمة لاتخاذ هذا القرار بالإضافة الى معرفته التامة بكل البدائل الممكنة ونتائج كل بديل ومعايير المفاضلة بينها.

توصف هذه الحالة بالعلاقة بين السبب والنتيجة، فكل فعل معروف بكونه يكاد يحدث، وكل سبب يقود بشكل مباشر إلى نتيجة، والنتيجة قابلة للتحديد أو التوقع.

لذلك فإن تقييم البدائل المتاحة للمحلل تعتمد على النتائج المتمثلة بالعوائد. وأهم طرق اتخاذ القرار في حالة التأكد التام هي:

- تحليل نقطة التعادل.
- أنظمة الرقابة على المخزون.
- البرمجة الخطة.
- نماذج النقل والتخصيص.

2. اتخاذ القرارات في حالة المخاطرة[17]

تشير هذه الحالة إلى ان متخذ القرار يتوافر لديه عدة بدائل، ولكل بديل نتائج متعددة، واحتمال حدوث كل نتيجة منها معروف لديه أو يمكن حسابه، إلا أنه لا يعرف أي حالة ستحدث.

في مثل هذه الحالة غالبا ما يلجأ متخذ القرار الى اساليب تقديرية أساسها نظرية الاحتمالات في دراسة خيارات القرار وبدائله وتحليلها، حيث يحاول تحديد درجة المخاطرة المحسوبة التي تنشأ عن كل البدائل المتاحة بهدف المفاضلة بينها واختيار أقلها مخاطرة. ويتم تحديد احتمالات وقوع الأحداث بأسلوبين هما:

[17] سليمان محمد مرجان، مرجع سابق، ص 40.

1.2. الاحتمالات الموضوعية: وهي التي يتم حسابها على أساس تحليل البيانات التاريخية المتاحة أو المجتمعة من سنوات سابقة، وعلى أساس أن ما حدث في الماضي قد يتم حدوثه في المستقبل.

2.2. الاحتمالات التقديرية: وهي التي يتم تحديدها على أساس الخبرة والتقدير الشخصي أو استطلاع آراء الخبراء والمتخصصين، والمعايير المستخدمة في كلتا الحالتين تسمى بالاحتمالات التقديرية، أو معيار ما يطلق عليه بالقيمة المتوقعة.

3. اتخاذ القرارات في حالة عدم التأكد التام[18]

تتسم بيئة عدم التأكد بعدم كفاية البيانات المتعلقة بالمشكلة قيد الدراسة، أو صعوبة الحصول عليها وارتفاع تكلفتها، أو عدم معرفة متخذ القرار بها خاصة فيما يتعلق باحتمالات حدوث كل حالة من حالات الطبيعة، وبالتالي يضطر متخذ القرار الى الاعتماد على خبراته السابقة بالإضافة الى تسخير عدد من المعايير الكمية، ومن بينها معيار القرار، كوسيلة لمعالجة المشكلة بالمفاضلة ما بين البدائل المطروحة وصولا الى القرار الأمثل. وهي كالتالي:

1.3. معيار أقصى الاقصى: حيث يقوم متخذ القرار باختبار البدائل التي تحقق لو أكبر عائد مادي، أي اتخاذ البديل المتفائل.

2.3. معيار الاقصى الادنى: وفي هذه الحالة يتصرف متخذ القرار بنوع من التشاؤم، ويقوم باختيار أقل الفوائد.

3.3. معيار أدنى الاقصى: في هذه الحالة يتصرف متخذ القرار بالتفاؤل الحذر، أي باختيار أفضل النتائج لكل بديل ثم يقوم باختيار أقل هذه النتائج.

---

[18] سليمان محمد مرجان، مرجع سابق، ص 41.

4.3. معيار أدنى الأدنى: يتصرف متخذ القرار في هذه الحالة بدرجة كبيرة من التشاؤم، وهذه تكون في حالة كبيرة من عدم التأكد بالنسبة إلى متخذ القرار فيختار أقل عائد لكل بديل.

5.3. معيار الندم: ويسمى هذا المعيار بـ (Savage)، يعرف هذا المعيار بالحد الأدنى لتكلفة الفرصة البديلة، التي تمثل القيمة المادية الذي تتم خسارتها عند القيام باختيار بديل لا يمثل البديل الأفضل.

من الطبيعي أن يشعر متخذ القرار بالأسف أو الندم عندما ال يختار البديل الأفضل من بين البدائل المتاحة، لذا فإن هذا المعيار يحاول أن يخفض هذا الأسف أو الندم إلى أدنى ما يمكن، باتباع الخطوات التالية:

- تحديد أكبر قيمة في كل عمود لحالة الطبيعة في كل من الحالتين (الأرباح والخسائر).
- طرح القيم الأخرى في ذلك العمود منها.
- اختيار أكبر قيمة (أقصى خسارة للفرصة البديلة)، ووضعها في جدول بديل يسمى جدول أقصى الندم.
- اختيار أقل قيمة في جدول أقصى الندم، ويكون البديل المقابل يكون البديل الأفضل؛ لأنها تعمل على تقليل أقصى خسارة للفرصة البديلة إلى أدنى قيمة.

4. تعريف المشكلة[19]

يقصد به مجموعة العملٌيات التًي يقوم بها الفرد مستخدم المعلومات والمعارف التًي سبق له تعلمها, والمهارات التًي اكتسبها فًي التغلب على موقف بشكل جدي, ان الوعًي بوجود المشكلةٌ عد خطوة هامة فًي عملٌية حلها, من المهم جدًا تحديٌد طبٌيعة المشكلة بدقة وإلا فإن الحل المفتوح قد لا يأتًي بالنتائج المطلوبة.

[19] سليمان محمد مرجان، مرجع سابق، ص 42.

تعبر عن الباعث الرئيسي الذي يسبب حالة ما من الحالات غير المرغوب فيها، وتحتاج عادة إلى جهد منظم للتعامل معها وحلها، وقد تؤدي إلى وجود أزمة ولكنها ليست بذاتها أزمة.

هي الصعوبات التي تواجهنا عند الانتقال من مرحلة إلى أخرى؛ وهي إمّا تمنع الوصول أو تؤخره أو تؤثر في نوعيته.

حيث يمكن تقسيم المشاكل حسب التصنيف التالي:

- **مشاكل روتينية:** وهي المشاكل المتكررة.
- **مشاكل حيوية:** وهي المتعلقة بالخطط والسياسات المتبعة في المشروع.
- **مشاكل طارئة:** وهي التي تحدث دون وجود مؤشرات على حدوثها، ويعتمد علاجها على قدرة المدير في اتخاذ قراره بسرعة وحزم.

وحتى تكون هناك مشكلة لا بد من توفر الشروط التالية[20]:

- أن يكون هناك شخص أو مجموعة أشخاص، لهم حاجة تنتظر الإشباع أو الإرضاء، وهذا الشخص أو هذه المجموعة هي ما تعرف بمتخذ القرار.
- أن تكون هناك مجموعة من بدائل السلوك التي يدكن الاختيار من بينها.
- يجب أن تكون هناك بيئة للمشكلة قيد الدراسة، وفي بحوث العمليات فإن البيئة قد تكون جزءا من النظام المدروس.
- أن يكون متخذ القرار غير قادر على تحديد أي تلك البدائل يعد الحل الأمثل لتلك المشكلة، أي يكون لدى متخذ القرار مشكلة إذا كان لديه هدف موجود بشكل فعلي، يريد تحقيقه، وأنه هناك طرقا بديلة لتحقيقه، وأنه غير قادر على تحديد أي تلك البدائل هو الأفضل.

[20] نفس المرجع.

لذلك كان لا بد من تحديد المشكلة بشكل واضح، بحيث تمنع أي لبس أو غموض، وكخطوة أولى في تحديد المشكلة يجب تحديد هدف البحث، وتحديد العوامل ذات العلاقة بالحل والتي يمكن إخضاعها لرقابة الإدارة.

III. أنواع النمذجة

النموذج في الواقع هو صورة مصغرة للنظام تهدف إلى توضيح أحد مظاهر الحقيقة التي يعمل بها هذا النظام. النموذج الاقتصادي Economic Model فهو عبارة عن مجموعة من العلاقات الاقتصادية التي توضع عادة بصيغ رياضية تسمى المعادلة (أو مجموعة من المعادلاتEquations) التي تشرح سلوكية أو ميكانيكية هذه العلاقات التي تبين عمل اقتصاد أو قطاع معين. وهناك أنواع عديدة من النماذج تختلف باختلاف طبيعة التقسيم، نوردها وفق تقسيمات مختلفة كما يتضح من الشكل اللاحق، وعلى النحو التالي[21]:

1. تصنيف النماذج حسب درجة التجريد: ويمكن تقسيمها إلى:

1.1. نماذج طبيعية Physical Models: وهي تلك النماذج التي تهتم بوصف الحوادث أو الظواهر عند لحظة معينة، حيث تصور الحقائق في شكل نماذج صغيرة. ويمكن أن تعتبر الصور الفوتوغرافية نماذج طبيعية.

2.1.نماذج هندسية Diagrammatic Models: يقصد بها النماذج التي تصف خصائص الحدث محل الدراسة ممثلة مواقف حركية معينة على هيئة رسوم توضيحية. والنماذج الهندسية قد تكون نماذج تناظريةAnalogy كمنحنى الطلب، أو نماذج ذات أبعاد كالخرائط التنظيمية مثلاً.

3.1. نماذج التخطيط Schematic Models: وهي عبارة عن تلك النماذج التي تتمثل في تدفقات العمليات عند مراحل معينة خلال الانتهاء من تصنيع منتج معين، كعمليات التخزين أو التأجير وخلافه.

4.1. نماذج مماثلة :Analogue Modelsنماذج المماثلة أو نماذج التناظر هي نوع من النماذج الهندسية والتي تمثل نظام معين باستخدام بعض خصائص النظام

[21] نجم عبود، مدخل على الاساليب الكمية، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، الاردن، 2003، ص 14-16.

الإجمالي، كالخريطة مثلاً، حيث تمثل نموذج مناظر توضح عليه المدن أو الطرق أو التضاريس.

5.1.نماذج رياضية :Mathematical Modelsهي نماذج على درجة عالية من التجريد توضع بصورة رياضية لشرح سلوك معين أو لتمثيل علاقة معينة بين متغيرات محددة مستخدمة الرموز الجبرية (لذا تعرف بالنماذج الرمزية). والنماذج الرياضية تصنف بدورها وفقاً للغرض منها إلى:

- نماذج وصفية Descriptive تصف علاقات معينة.
- نماذج توضيحية Explanatory توضح سلوك العلاقات المكونة لها.
- نماذج تنبؤية Predictive تتنبأ بسلوك العلاقات تحت شروط معينة.

2. تصنيف النماذج حسب أغراضها: وتنقسم إلى[22]:

1.2. النماذج الوصفية: وهي النماذج التي تصف وتتنبأ بسلوك الحالة الطبيعية)أو النظام الواقعي (إلا أنها لا تتمتع بالقدرة على تحديد المسلك الأفضل للنشاط الذي يجب اعتماده. ففي مثال الوجبات السريعة فإن النموذج يصف الربح المحقق ويمكن أن يتنبأ بمقداره عند تحديد عدد الوجبات.

2.2.النماذج المعيارية: وهي تسمى أيضا نماذج الأمثلية وهذه النماذج تختلف عن النماذج الوصفية في أنها تحدد مسلك النشاط الأمثل، وفي بعض الأحيان المسلك الأفضل للنشاط.

3. تصنيف النماذج حسب طبيعتها أو حسب درجة التأكد: وتنقسم بدورها إلى:

1.3. نماذج محددة Deterministic Models: النماذج المحددة و اليقينية هي تلك النماذج التي تفرض شرط التأكد الكلي والمعرفة الكاملة بطرق الإنتاج والأسعار،

[22] نجم عبود، المرجع السابق، ص 17، 18.

حيث يرتبط فيها بكل سلوك نتيجة محددة مثل نماذج البرمجة الخطية واللاخطية وشبكات الأعمال.

2.3. نماذج احتماليةProbabilistic Models : هي التي لا يكون فيها التنبؤ بدرجة مؤكدة، وتتضمن قدراً من عدم الثقة وعدم التأكد، حيث يرتبط بكل سلوك عدد من النتائج قابلة الحدوث باحتمالات معينة. وبذلك يمكن استخدامها في تحليل المشكلات التي يكون فيها للقدرة على التنبؤ دوراً واضحاً، كنماذج المحاكاة والتنبؤ.

1.4. تصنيف النماذج حسب خصائصها: وتنقسم إلى:

1.5. النماذج السكونية: وفيها قرار واحد يكون مطلوبا في فتَّة زمنية محددة وإن ظروف النموذج لن تتغير في هذه الفتَّرة في عملية حل النموذج، ومن أمثلتها اغلب نماذج نظرية القرار.

1.6. النماذج الديناميكية: وفيها يكون على صانع القرار أن يتخذ مجموعة من القرارات المتعاقبة، وعموما هذه النماذج تعتبر الوقت واحدا من المتغيرات وتهتم بتأثيرات التغيرات الحاصلة مع الوقت، مما يجعل هذه النماذج تهتم بمراحل حركة الحالة الواقعية.

1.7. تصنيف النماذج حسب طرق الحل: وتنقسم إلى:

1.8. النماذج التحليلية: هي تلك النماذج التي تستخدم لحل مشاكل الأمثلية، وهي نماذج تستخدم حل عام في شكل تجريدي، محددة الحل في شكل رموز، أو نماذج تستخدم طريقة عامة لحل مشاكل محددة.

1.9. نماذج المحاكاة: يقصد بها تلك النماذج التي تستخدم لمحاكاة أو مضاهاة المشكلة المعنية بمشكلة حقيقية قائمة مثل مشاكل المخزون أو الإنشاءات أو المشاكل المتعلقة باتخاذ قرار معين كقرار إمداد المصنع الحالي بآلات جديدة. هذا في حالة ما إذا كان من الصعب حل المشكلة بالطريقة التحليلية.

1.10.تصنيف النماذج حسب سيماتها الكمية أو النوعية23

1.11.النماذج الكمية: هي تلك النماذج ذات المتغيرات والعلاقات القابلة للقياس الكمي من وزن وطول ومساحة ..الخ.

1.12.النماذج النوعية: وهي النماذج التي لا يمكن قياسها كمياً إنما توصيفها أو ترتيبها، كالجنس، اللون، الديانة، درجة التعليم وغير ذلك.

4. كيفية بناء نموذج

إن عملية صياغة النموذج أمر في غاية الأهمية والدقة، حيث أن الصياغة الصحيحة تؤدي إلى نتائج صحيحة، والعكس صحيح. والنموذج الرياضي ما هو إلا عرض مبسط للواقع في صورة رياضية، ويتم بناء النموذج عادة باستخدام الأدوات الرياضية التي تعبر عن العلاقات بين المتغيرَات من خلال المعدات أو الدوال الرياضية المختلفة وغيرها، وكذلك لابد من

خلال النموذج من التعبير عن هدف الحل، وهنا يمكن أن يكون للحل أحد الهدفين الأول هو التقليل من النفقات أو الخسائر لأقل حد لشكن وهذه حالة مسائل التقليل Minimum والثاني هو تعظيم الربح أو الربحية إلى أكبر ما يمكن وهذه حالة مسائل التعظيم Maximum ويتم حل النماذج من خلال مقاييس خاصة ندعوها بمقاييس المثلوية، والتي يتم من خلالها البحث عن حالات التعظيم والتقليل ومثل هذه المقاييس النقدية والمقاييس الزمنية، ومقاييس المسافة... وغيرها، ويمكن أن يتخذ القرار لنفس المسألة باعتبار أحد هذه المقاييس دون غيرها، فمثلا يدكن أن نبحث في مشكلة إنجاز مشروع بناء لمطار بأقل تكاليف ممكنة.

ويتضمن أسلوب وثيقة بناء النماذج ثلاثة مراحل أساسية وهي[24]:

---

[23] نجم عبود، المرجع السابق، ص 20، 21.

[24] محمد سالم الغدي، بحوث عمليات تطبيق وخوارزميات، ط1، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، الأردن، 1999، ص 19، 20.

- تحديد المشكلة وتحديد المتغيرات، وهذه الأخيرة يجب أن تتطابق مع ما يريده المسؤول، هذه المتغيرات تسمى متغيرات القرار.

- تكوين الدالة الاقتصادية أو دالة الهدف، التي تتَرجم أولويات متخذ القرار على شكل دالة المتغيرات محدودة.

- تكوين القيود، فمن النادر أن يكون لمتخذ القرار كل الحرية في الاختيار أو في ممارسة النشاط فالأغلب إن لم نقل دائما هناك حدود (قيود) لا يمكن لمتخذ القرار تجاوزها، هذه القيود أو الحدود تظهر في شكل معادلات أو متباينات رياضية هذا بالنسبة لمراحل النموذج أما بالنسبة لمن يقوم ببناء النموذج (متخذ القرار) فهو لا يدلك في الحقيقة إلا المهارة لكي يتمكن من الصياغة الصحيحة للمشكلة على شكل نموذج صحيح، لأنه في الحقيقة ليست هناك طريقة محددة أو معينة بذاتها تبين بوضوح كيف يتم بناء نموذج، بل الأمر يتعلق بالمعارف النظرية التي يتلقاها متخذ القرار أي رصيده العلمي الذي تلقاه بالإضافة إلى مهاراته الشخصية، هذه الأخيرة من أحسن وسائل اكتسابها هي التمرن ومزاولة تطبيق ما تم تلقنه على حالات واقع.

الفصل الثاني

نماذج البرمجة الخطية

I. مدخل نظري حول البرمجة الخطية

تعتبر البرمجة الخطية من المواضيع الأساسية والمهمة في بحوث العمليات وتكمن أهميتها في كونها وسيلة لدارسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، يقدم نموذج البرمجة الخطية طريقة كفؤة لتحديد القرار الأمثل (أو الاستراتيجية المثلى) من بين عدد كبير من البدائل، التي يخضع كل منها إلى مجموعة من المحددات والقيود، وبشكل يساهم بتحقيق أهداف الإدارة.

1. تعريف البرمجة الخطية

هي أداة بيانية ورياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل بإحدى الطرق الآتية: الطريقة البيانية، الطريقة المبسطة، طريقة النقل، طريقة التعيين والتخصيص.

ويمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي يكون توزيعها مثاليا[1].

إن تعبير البرمجة يعني وضع خطوات لحل مسألة أو موضوع ما لبلوغ وتحقيق هدف معين، أما تعبير خطية فيعني افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (على شكل خط مستقيم) وكثيرا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صياغة رياضية سهلة.

ومما تجدر الإشارة إليه هو أن الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول إلى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى دالة الهدف)[2].

---

[1] عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل لبحوث العمليات، دار وائل للنشر، الأردن، 2001 ، ص 21.

[2] Gérald Baillargeon ,"Programmation linéaire appliquée ", les édition SMG,Québec, Canada,1996 .p 05.

ويمكن أن لكل مجموعة من المعادلات حلا، وعادة ما تكون للمعادلات الآتية حلول أي إيجاد قيم المتغيرات، وفي حالة حل نموذج البرمجة الخطية دائما نسعى إلى إيجاد الحل الأمثل وتكون الحلول على ثلاث أنواع[3]:

- **الحل:** وهو حل ممكن الوصول إليه في أية مجموعة من المعادلات.
- **الحل الممكن:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل في الحالة الأولى وهذا الحل يحقق القيود كافة بشكل عام.
- **الحل الأمثل:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل الممكن، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف.

وبهذا الصدد يجب التأكد من أن الحل الممكن لا يتحقق بعد وجود الحل، ولا يمكن تحقيق الحل الأمثل إلا بعد أن يتحقق الحل الممكن.

التطور التاريخي للبرمجة الخطية

تعد البرمجة الخطية إحدى الوسائل المهمة في حل كثير من المشاكل الإدارية والاقتصادية والعسكرية، وقد ازداد تطبيقها في الآونة الأخيرة نظرا للتقدم التكنولوجي الذي ساعد على تطوير الحسابات الإلكترونية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة. تم تطويرها واستخدامها بصورة فعلية في سنة 1947 على يد العالم الرياضي جورج دانتزنغ (Dantzing George)، لحل بعض مشكلات التخطيط السلاح الجو الأمريكي، في حين أن العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير (Jean Baptise Fourierje) قد تنبه لمساهماتها المحتملة في عام 1923، وقد كان أول استخدام أو تطبيق للبرمجة الخطية من قبل الاقتصادي جورج ستلجر (George Stilger) وذلك في بداية الأربعينات، حيث هدف إلى تحديد مكونات الغذاء اليومي (Diet)

[3] حامد سعد نور الشمرتي، بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا، مكتبة الذاكرة، بغداد، 2010، ص 10.

والتي ستزود الجسم بالحد الأدنى من احتياجاته من الفيتامينات والحديد والمواد الأخرى، وبأقل تكلفة ممكنة[4].

3. استخدامات البرمجة الخطية

تستخدم البرمجة الخطية في مجالات عدة من بينها[5]:

1.3. مشاكل الانتاج: يوجد العديد من الشركات التي تنتج منتجات ذات طلب متقلب ومتغير باستمرار، وتشير الخبرة العملية إلى أن الاعتماد على سياسة إنتاج متغيرة المعدل تؤدي لتكلفة عالية جدا، ومن ثم تواجه تلك الشركات بمشكلة تحديد جدول الانتاج الذي يفي بطلبات متوقعة وفي نفس الوقت يحتفظ بمستويات تخزينية معقولة ويخفض التكاليف الكمية للإنتاج والاحتفاظ بنفس الوقت.

2.3. المزيج الانتاجي: يحاول كل مشروع الإجابة عن السؤال: ما هي الإمكانيات الإنتاجية البديلة التي تحقق أقصى الأرباح وأدنى التكاليف (بافتراض أن أي فرصة تحقق شرط الإمكانيات المتوفرة فعلا) في الحقيقة أن هذه إحدى المشكلات التي تواجه المشروع من هذا النمط من المشاكل.

3.3. تخطيط الاستثمارات: لنفترِض أن هناك مبلغا ماليا معينا ويراد تحديد مقدار ما ينفق على عدد من البدائل الاستثمارية وذلك لجعل مجموع العوائد السنوية أكبر ما يمكن علما بأن المشروع ليس لديه أية أموال أخرى، عدا هذا المبلغ ويمكن علاج هذا النوع من المشاكل باستخدام البرمجة الخطية.

---

[4] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق، دار جليس الزمان، عمان، 2008، ص 25.

[5] فريد راغب النجار، بحوث العمليات فِي الإدارة، ط1، الدار الجامعّية، الإسكندرية، 2009، ص 195، 196.

4.3. التخطيط للدعاية والاعلان: في هذا النوع من المشاكل يكون الهدف هو تحديد حجم الأموال التي يجب صرفها على مجموعة مختلفة من وسائل الإعلان، من أجل ترويج السلعة المنتجة بفعالية مثلي، وذلك تحت عدد من القيود، مثل قدرة السوق الاستيعابية، ومحدودية الموارد المالية، والحدود المفروضة على استخدام كل وسيلة من تلك الوسائل الإعلانية.

5.3. مشاكل الشحن: تهتم هذه المشكلات بأفضل طرق النقل اقتصاديا وربحيا من مكان أو موقع لآخر والهدف هنا هو تخفيض تكلفة الشحن الكلية لأحد المنتجات من عدة مصانع لعدة مخازن وفق لقيود طاقة كل مصنع وامكانية التخزين في كل مخزن.

4. أساليب بحوث العمليات

تصنف الأساليب والنماذج إلى عدة تصنيفات، وذلك تبعاً للمعايير المعتمدة في التصنيف وسنحاول ذكر بعض هذه المعايير كالتالي[6]:

1.4. تصنيف رئيسي للأساليب: بموجب هذا التصنيف، تصنف النماذج إلى:

– **أساليب قياسية (معيارية):** وهي تهدف إلى وصف ما يجب أن يكون عليه الواقع، مثل نموذج الخطية، مشاكل النقل، نماذج التعيين (التخصيص)، البرمجة الديناميكية، نماذج التدفق الأعظمي وما شابه ذلك.

– **أساليب وصفية:** وتستخدم للتعبير عن الظواهر والعلاقات بين المتغيرات، بالاعتماد على الوصف، حيث يمكن أن يكون هذا الوصف شفويا وكتابيا، ومن أمثلتها نماذج المحاكاة Sumalation Porgramming ونماذج صفوف الانتظار.

2.4. تصنيف الأساليب حسب تدرج تجردها: حسب هذا التصنيف تقسم الأساليب إلى:

[6] ضو نصر، مطبوعة مقدمة في مقياس رياضيات المؤسسة، لطلبة السنة الثانية علوم التسيير وعلوم اقتصادية والعلوم التجارية، جامعة الشهيد حمة لخضر الوادي، 2018/ 2019، ص 17.

– **الأساليب المجسدة:** وهي نماذج تستخدم بعدف مشاهداتها على أرض الواقع، وعرض صورة مجسدة عنها، مثال ذلك نموذج السيارة.

– **الأساليب المجردة:** وهي التي تصف الواقع المدروس دون الحاجة إلى عملية التجسيد بل تكتفي بطريقة الكتابة، أي عرض الواقع على شكل علاقات رياضية.

– **الأساليب الرياضية:** هي مجموعة من المعادلات والمتراجحات التي تبين العلاقات بين المتغيرات، وذلك بالاعتماد على استعمال الرموز وعادة ما يضم النموذج الرياضي متغيرات ومؤشرات.

II. أساليب البرمجة الخطية

يستخدم أسلوب البرمجة الخطية لإيجاد التخصيص الأمثل للموارد المحدودة على الاستخدامات البديلة على نحو الذي يحقق هدفا معينا بأحسن صورة ممكنة. وتتضمن بدورها أساليب نذكر منها[7]:

1. الأساليب الرياضية للبرمجة

وهي أساليب رياضية مكونة من متغيرات وعلاقات واضحة لدى متخذ القرار، أي لا تتأثر بالمؤشرات الاحتمالية الداخلية أو الخارجية التي من شأنها التأثير في علاقات المشكلة المدروسة، وبالتالي على صياغة النموذج الرياضي، ومن هذه النماذج نذكر:

نموذج البرمجة الخطية، والنموذج الثنائي. Dual

مشكل النقل والتخصيص spécification de transport et Problème .

نموذج البرمجة اللا خطية Porgrammation linéaire non ومن أهمها النماذج السيطرة على التخزين.

نماذج البرمجة الديناميكية dynamique Porgrammation .

[7] ضو نصر، المرجع السابق، ص 17.

نماذج شبكات الأعمال (المشاريع).

2. الاساليب الاحتمالية للبرمجة

وهي النماذج تتكون متغيرات وعوامل غير واضحة بشكل تام، كما لا يمكن السيطرة عليها بالكامل من قبل متخذ القرار، وهذا يعود إلى طبيعة المشكلة المدروسة، وما تنطوي عليه من عوامل ومتغيرات احتمالية أو عشوائية.

ومن أمثلة هذه النماذج[8]:

- نموذج نظرية صفوف الانتظار dattente Files
- نموذج المعولية (الموثوقية).Surete La
- **الأساليب ذات الطبيعة الإستراتيجية:** يعتمد متخذ القرار في صياغة النماذج، على موقف أو ردود أفعال الطرف الأخر، الذي يتنافس معو حول هدف مشتَرك، وبالتالي فصياغة النموذج تعتمد على المعلومات التي تخص الطرف الأخر، والصياغة تكون بسيطة في حالة وجود متنافسين فقط، وتعتمد عملية بناء النموذج في حالة تعداد الأطراف المتنافسة في هذه العملية، ومن بثُ الأمثلة الرياضية على هذه النماذج الإستراتيجية، نماذج نظرية الألعاب (المباراة).
- **الأساليب ذات الطبيعة الإحصائية والحسابية:** من بثُ الأمثلة هذه النماذج نموذج الوسط الحسابي، ونموذج الارتباط الخطي وكذا نموذج الانحدار الخطي، والذي تتم عملية التقدير معالمه وفق طريقة المربعات الصغرى العادية(MCO) هذه النماذج تدعى بالنماذج الإحصائية، أما النماذج الحسابية فتتمثل في نموذج أقساط الإهتلاك المحاسبي، هذه الأنواع من النماذج بصورة عامة لذا استعمالات ثابتة ومعروفة وتتسم بالبساطة والخطية.

3. شروط البرمجة الخطية

[8] ضو نصر، المرجع السابق، ص 17.

لكي يمكن استخدام البرمجة الخطية فإن هناك شروط يجب توفرها في المشكلة المراد علاجها وهي[9]:

- ينبغي استخدامها في حالة ندرة الموارد, فلو كانت الموارد متوفرة تماما لما كانت هناك مشكلة, فهذه الندرة تمثل أحد أهم القيود التي تخضع لها الإدارة في سعيها لتحقيق الهدف وهي تشكل قيود تربط المتغيرات الداخلة في دالة الهدف ببعضها البعض, وتكون على شكل متباينات ومعادلات وتسمى هذه بالقيود الهيكلية (Constraints Structural).
- يجب أن يكون هناك هدف محدد و معبر عنه بطريقة كمية, كما يجب أن يكون الهدف واضحا ودقيقا بحيث يمكن أن يتخذ شكل معادلة رياضية, وعادة ما يكون الهدف تحقيق أقصى أرباح ممكنة أو تخفيض التكاليف لأقل حد ممكن.
- يفترض أن تكون هناك بدائل مختلفة لتحقيق الهدف, فيجب أن تكون هناك أساليب علمية لمزج الموارد للوصول إلى الهدف حيث يكون لكل بديل عائد متوقع, فتصبح المهمة اختيار البديل الذي يعطي أعلى عائد في حدود القيود المفروضة.
- يفترض أن تكون العلاقات بين المتغيرات التي تتركب منها المشكلة خطية, ويقصد بذلك أن أي تغير ما في أحد المتغيرات يحدث تغيرا مناسبا تماما مع المتغير الآخر.
- أن توجد قيود على المتغيرات الداخلة في دالة الهدف والقيود الهيكلية تستبعد منها القيم السالبة.

III.صياغة نموذج البرمجة الخطية

[9] محمد توفيق ماضي, سلسلة الأساليب الكمية للجميع البرمجة الخطية التوزيع الأمثل للموارد المحدودة, المكتب العربي الحديث, الإسكندرية, 1992 م، ص 09.

إن أهمية أسلوب البرمجة الخطية يعود إلى أهمية المشاكل التي يمكن حلها بصفة عامة، ولكن ليس كل مشكلة يمكن حلها بأسلوب البرمجة الخطية، حيث يتطلب حل المشكلة بأسلوب البرمجة الخطية أن تتوفر ثلاث عناصر أساسية هي[10]:

1. تحديد دالة الهدف:

وهو الهدف المنشود والمراد تحقيقه، وإمكانية التعبير عنه في صورة دالة خطية (Linear Function)، والحصول على قيمة رقمية له ومحاولة تعظيم هذه القيمة وإيجاد النهاية العظمى لها (a Maximum Point) إذا كان الهدف المنشود هو التعظيم، أو تقليل القيمة وإيجاد النهاية الصغرى (Minimum Point) إذا كان الهدف هو التخفيض أو التدنية.

2. تحديد القيود:

أي إمكانية التعبير عن العلاقة بين المتغيرات القرارية والامكانيات المتاحة في صورة قيود خطية (Linear Constrain)، وهي توضح ما تحتاجه كل وحدة إنتاج من كل مورد من الموارد المتاحة المحدودة بشكل متراجحات (Linear Inequalities) أو معادلات خطية (Linear Equations) أو خليط منهما وتسمى بالقيود الهيكلية.

3. شروط عدم السلبية:

إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو معدومة وغير سالبة $xj \geq 0$.

وبناءا على ما تقدم، يمكن التعبير عن الخطوات أعلاه بصيغة رياضية على النحو التالي:

$$\text{max or min (z)} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{c}_j . \mathrm{x}_j$$

[10] الألولسي، أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار)، دار القلم للنشر والتوزيع، الامارات العربية المتحدة، 2003،ص 26.

Subject to:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \,.\, x_j \;(\leq,\ =,\ \geq) b_i$$

$$x_j \geq 0$$

حيث:

z: يمثل دالة الهدف المطلوب تعظيمها أو تخفيضها.

c_j: يمثل معامل متغير القرار x_j وتمثل الربح أو التكلفة.

x_j: يمثل متغير القرار رقم (j) ويمثل نشاط معين .

a_{ij}: كمية الموارد المحدودة من النوع (i) المخصصة لكل وحدة واحدة من النشاط رقم (j).

b_i: تمثل الموارد المحدودة من النوع (i).

4. تمارين مقترحة

التمرين الاول:

تقوم إحدى المؤسسات المتخصصة بإنتاج الأجهزة الكهربائية باقتراح خطة لإنتاج نوعين من المنتجات (B,A) وذلك من خلال استغلال الطاقة التشغيلية المتاحة لثلاثة أنواع من الآلات. يحتاج المنتوج (A) إلى (06) ساعات في الآلة الأولى، و(03) ساعات في الآلة الثانية، و(02) ساعتين في الآلة الثالثة، أما المنتوج (B) فيحتاج إلى (04) ساعات في الآلة الأولى، و(05) ساعات في الآلة الثانية، و(03) ساعات في الآلة الثالثة، علما أن عدد ساعات التشغيل المتاحة أسبوعيا هي (60) ساعة للآلة الأولى و(50) ساعة للآلة الثانية و(70) ساعة للآلة الثالثة، وأن الربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من المنتوج (A) بلغ (80) دج، و(95) دج من المنتوج (B).

المطلوب: قم بصياغة البرنامج الخطي لإنتاج عدد الوحدات من المنتوجين، بما يحقق للمؤسسة أكبر قدر ممكن من الأرباح.

الحل:

قبل البدء في صياغة البرنامج الخطي للمشكلة، نقوم بتلخيص البيانات في الجدول التالي:

الآلات	المنتجات		عدد ساعات التشغيل المتاحة أسبوعيا
	المنتوج (A)	المنتوج (B)	
الآلة الاولى	6	4	60
الألة الثانية	6	5	50
الألة الثالثة	2	3	70
الربح المتوقع	80	95	-----------

يتضح من خلال بيانات مشكلة المزيج الإنتاجي الواردة في الجدول السابق وجود متغيرين قرارين يمثلان عدد الوحدات المنتجة من كلا المنتوجين، وعليه نفرض أن:

x_1 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج (A).

x_2: يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج (B).

z : يمثل الأرباح الكلية المتوقعة.

ولصياغة البرنامج الخطي للمشكلة ينبغي تحديد ما يلي:

- **دالة الهدف:** بما أن الهدف هو تعظيم الأرباح، إذن فدالة الهدف تكون على الشكل التالي:

$$Max\ z = 80x_1 + 95x_2$$

حيث أن:

$80x_1$: يمثل الربح من المنتوج (A).

$95x_2$: يمثل الربح من المنتوج (B).

– **قيود المشكلة:** وتكون على الشكل التالي:

قيد الألة الاولى: $6x_1 + 4x_2 \leq 60$

قيد الآلة الثانية: $3x_1 + 5x_2 \leq 50$

قيد الآلة الثالثة: $6x_1 + 4x_2 \leq 70$

شرط عدم السلبية: ويكون على الشكل التالي:

$$(x_1, x_2) \geq 0$$

وعليه يكون البرنامج الخطي بصيغته النهائية على الشكل التالي:

$$Max\ (z) = 80x_1 + 95x_2$$

$$s/c\{6x_1 + 4x_2 \leq 60\ 3x_1 + 5x_2 \leq 50\ 6x_1 + 4x_2 \leq 70, (x_1, x_2) \geq 0$$

التمرين الثاني:

ترغب مؤسسة في إنتاج العلف الحيواني بإنتاج ثلاث أنواع من الأعلاف الغذائية، وإن كل نوع من الأعلاف يتضمن مزيج من مركبات البروتين والألياف.

يحتاج النوع الأول من الأعلاف إلى (20) كغ من البروتين و(50) كغ من الألياف، أما النوع الثاني من الأعلاف فيحتاج إلى (25) كغ من البروتين و(40) كغ من الألياف، في حين يحتاج النوع الثالث من الألياف إلى (180) كغ من البروتين و(650) كغ من الألياف وإن تكاليف شراء المركبات الداخلي في كل نوع من الأعلاف هي (100) دج للنوع الأول، و(150) دج للنوع الثاني و(120) دج للنوع الثالث.

– قم بصياغة البرنامج الخطي لإنتاج الأعلاف الغذائية الثلاثة، بما يجعل تكاليف إنتاج الأعلاف أقل ما يمكن.

الحل:

قبل البدء في صياغة البرنامج الخطي للمشكلة، نقوم بتلخيص البيانات في الجدول التالي:

المركبات	الأعلاف الغذائية			الاحتياجات الدنيا (كغ)
	النوع الأول	النوع الثاني	النوع الثالث	
البروتين	20	25	30	180
الألياف	50	40	60	650
تكاليف الشراء	100	150	120	-----

يتضح من خلال بيانات مشكلة المزيج الغذائي الواردة في الجدول السابق وجود ثلاثة متغيرات قرارية تمثل الكميات المنتجة من الأنواع الثلاثة من الأعلاف، وعليه نفرض أن:

x_1: يمثل الكميات المنتجة للنوع الأول من الأعلاف.

x_2: يمثل الكميات المنتجة للنوع الثاني من الأعلاف.

x_3: يمثل الكميات المنتجة للنوع الثالث من الأعلاف.

z: تمثل التكاليف الكلية المتوقعة.

ولصياغة البرنامج الخطي للمشكلة ينبغي تحديد ما يلي:

- **دالة الهدف:** بما أن الهدف هو تقليل التكاليف، إذن فدالة الهدف تكون على الشكل التالي:

$$Min\ z = 100\ x_1 + 150\ x_2 + 120\ x_3$$

حيث أن:

$100\ x_1$: يمثل تكاليف النوع الأول من الأعلاف.

$150\ x_2$: يمثل تكاليف النوع الثاني من الأعلاف.

$120\ x_3$: يمثل تكاليف النوع الثالث من الأعلاف.

- **قيود المشكلة:** وتكون على الشكل التالي:

قيد البروتين: $20x_1 + 25x_2 + 30x_3 \geq 180$

قيد الأَلياف: $50x_1 + 40x_2 + 60x_3 \geq 650$

شرط عدم السلبية: ويكون على الشكل التالي: $(x_1, x_2, x_3) \geq 0$

وعليه يكون البرنامج الخطي بصيغته النهائية على الشكل التالي:

$$Min\ z = 100\ x_1 + 150\ x_2 + 120\ x_3$$

$$s/c\{20\ x_1+25\ x_2+30\ x_3 \geq 180\ 50x_1+40x_2+60\ x_3 \geq 650\ x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

التمرين الثالث:

تقوم إحدى المؤسسات الصناعية بإنتاج ثلاثة أنواع من المنتجات (1، 2، 3)، وترغب في تحديد عدد الوحدات التي يجب إنتاجها يوميا من كل منتوج بحيث تحصل على أكبر ربح ممكن، يتطلب إنتاج الوحدة الواحدة من كل منتوج المرور على ثلاث عمليات إنتاجية (.I II .III)، والجدول التالي يبين الزمن (بالدقائق) اللازم لإنتاج الوحدة الواحدة من كل منتوج من العمليات المختلفة، وكذلك الربح المحقق من الوحدة الواحدة والزمن الكلي المتاح للعمليات الثلاثة.

العمليات	الزمن المطلوب لانتاج المنتجات الثلاثة			الزمن المتاح للتشغيل (دقيقة/ يوميا)
	المنتوج (1)	المنتوج (2)	المنتوج (3)	
العملية I	2	2	3	60
العملية II	5	0	4	50
العملية III	3	6	0	70
ربح الوحدة الواحدة	5	4	7	-------

المطلوب: صياغة البرنامج الخطي لإنتاج عدد الوحدات من المنتجات الثلاث، بما يحقق للمؤسسة أكبر قدر ممكن من الأرباح.

الحل:

يتضح من خلال بيانات مشكلة المزيج الإنتاجي الواردة في الجدول السابق وجود ثلاثة متغيرات قرارية تمثل عدد الوحدات المنتجة من الأنواع الثلاثة من المنتجات، وعليه نفرض أن:

x_1 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الأول .

x_2 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الثاني .

x_3 : يمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتوج الثالث .

z: يمثل الارباح الكلية المتوقعة.

ولصياغة البرنامج الخطي للمشكلة ينبغي تحديد ما يلي:

- **دالة الهدف:** بما أن الهدف هو تعظيم الأرباح، إذن فدالة الهدف تكون على الشكل التالي:

$$Max\ z = 5x_1 + 4x_2 + 7\ x_3$$

حيث أن:

$5x_1$: يمثل الربح من المنتوج الأول .

$4x_2$: يمثل الربح من المنتوج الثاني.

$7x_3$: يمثل الربح من المنتوج الثالث.

- **قيود المشكلة:** وتكون على الشكل التالي:

قيد العملية الاولى: $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 420$

قيد العملية الثانية: $5x_1 + 2x_3 \leq 440$

قيد العملية الثالثة: $3x_1 + 6\ x_2 \leq 465$

شرط عدم السلبية: ويكون على الشكل التالي:

$$x_1 . x_2 . x_3 \geq 0$$

وعليه يكون البرنامج الخطي بصيغته النهائية على الشكل التالي:

$$Max\ (z) = 5x_1 + 4x_2 + 7\ x_3$$

$$s/c\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3\ x_3 \leq 420 \\ 5x_1 + 2\ x_3 \leq 440 \\ 3x_1 + 6x_2 \leq 465 \\ x_1 . x_2 . x_3 \geq 0 \end{cases}$$

IV. طرق حل نماذج البرمجة الخطية

يقصد بحل البرنامج الخطي إيجاد قيم المتغيرات التي تجعل دالة الهدف في أمثل قيمة لها دون تجاوز حدود القيود، سواء كانت دالة الهدف في حالة تعظيم أو تخفيض، وهناك عدة طرق للتوصل إلى حل مسائل البرمجة الخطية، إذ يتوقف استخدام أي من هذه الطرق على طبيعة المشكلة وحجمها، ومن بين هذه الطرق هناك الطريقة البيانية، والتي تستخدم إذا كان البرنامج الخطي يحتوي على متغيرين فقط.

1. طريقة الرسم البياني

تعتبر الطريقة البيانية وسيلة أولية لحل مسائل البرمجة الخطية، كما تعد من أبسط الطرق التي تهدف إلى إيجاد الحلول المناسبة للمسائل الإدارية المختلفة (مسائل الإنتاج، مسائل التسويق، مسائل الأفراد...)، وخاصة تلك المتعلقة باتخاذ القرارات ذات المواضيع الفنية والمعايير الكمية، وتمتاز هذه الطريقة في حل نماذج البرمجة الخطية ببساطتها وسهولة استخدامها، وتعتمد على الرسم البياني بالدرجة الأولى والتي تتم في إطار الإحداثيات الأفقية والعمودية، إلا أنه ومن بين سلبيات هذه الطريقة أنها تستخدم فقط إذا كان البرنامج الخطي يحتوي على متغيرين فقط، إذ يتعذر رسم البرنامج في حالة احتواءه على أكثر من متغيرين، حيث يتم استخدام الربع الأول من المعلم المتعامد والمتجانس وذلك لوجوب أن تكون قيم المتغيرين موجبة أو معدومة، والذي يمثل أحد شروط البرمجة الخطية ألا وهو شرط عدم السلبية[11].

[11] دلال صادق الجواد، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الطبعة العربية، عمان الاردن، 2008، ص 31.

خطوات الحل وفق الطريقة البيانية

للوصول إلى حل مسائل البرمجة الخطية وفقا لهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية[12]:

- رسم محورين أحدهما أفقي وليكن x_1 والثاني عمودي وليكن x_2 على معلم متعامد ومتجانس.

- رسم القيود بعد تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بتحويل إشارات $(\leq, \geq)$ إلى $(=)$، إن عملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة يمكن تمثيلها بخط مستقيم، ولمعرفة نقاط تقاطع الخط المستقيم مع المحور x_2 نفرض أن $x_1 = 0$ ثم يتم حل المعادلة بالنسبة إلى x_2، ولمعرفة نقطة تقاطع الخط المستقيم مع المحور x_1 يفرض أن $x_2 = 0$ ، ثم يتم حل المعادلة بالنسبة إلى x_1، ويتم تحديد نقاط التقاطع على المحورين ثم يتم الربط بينهما بخط مستقيم.

- تحديد منطقة الحلول الممكنة (Feasible Region Solutions)، وهي منطقة تقاطع مناطق الحل، والتي – تقع ضمنها جميع النقاط التي تحقق جميع القيود في آن واحد، وأن شرط عدم السلبية تحدد منطقة الحل في الربع الأول من المعلم المتعامد والمتجانس.

- تحديد الحل الأمثل (Optimal Solution)، من منطقة الحلول الممكنة، ويكون الحل هو أكبر قيمة في الشكل الناتج إذا كانت دالة الهدف تعظيم، وأصغر قيمة إذا كانت دالة الهدف تخفيض أو تقليل.

---

[12] دلال صادق الجواد، المرجع السابق، ص 32.

مثال:

$$\text{Max } Z = 1000\,x_1 + 1200\,x_2$$

contraintes aux Soumise

$$\begin{cases} 10x_1 + 5\,x_2 \le 200 \\ 2x_1 + 3\,x_2 \le 60 \\ x_1 \le 34 \\ x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1- التمثيل البياني للقيود: أي رسم القيود على معلم متعامد و متجانس.

1-1- القيد الأول: $10\,x_1 + 5\,x_2 \le 200$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $10\,x_1 + 5\,x_2 = 200$

نضع:

$$x1 = 0 \Rightarrow 5\,x2 = 200 \Rightarrow x2 = 40 \qquad A\,(0\,,40)$$

نضع:

$$x2 = 0 \Rightarrow 10\,x1 = 200 \Rightarrow x1 = 20 \qquad B\,(20\,,0)$$

2-1- القيد الثاني: $2\,x_1 + 3\,x_2 \le 60$

يتم تحويل المتراجحة إلى معادلة خطية أي: $2\,x_1 + 3\,x_2 = 60$

نضع:

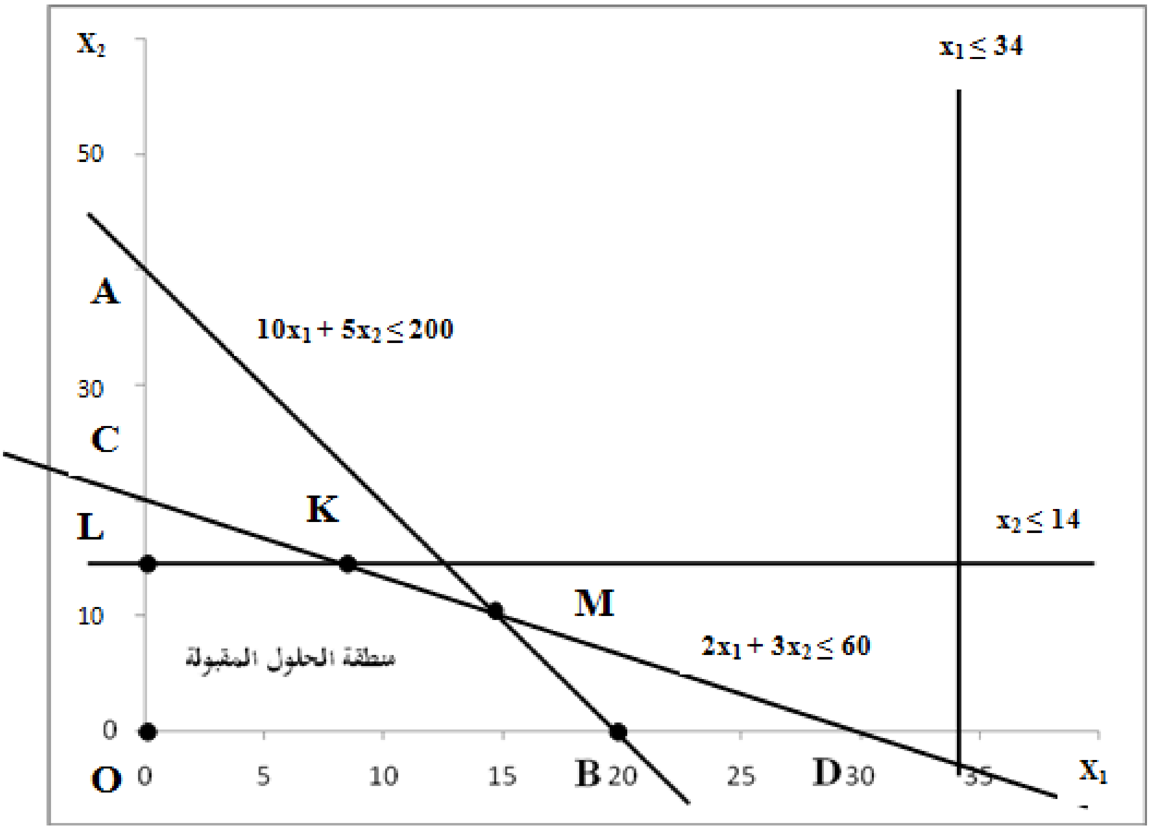
$$x_1 = 0 \Rightarrow 3\,x_2 = 60 \Rightarrow x_2 = 20 \qquad C\,(0\,,20)$$

نضع:

$$x_2 = 0 \Rightarrow 2\,x_1 = 60 \Rightarrow x_1 = 30 \qquad D\,(30\,,0)$$

هذا إضافة إلى تحويل القيدين الأخيرين إلى معادلات: $x_2 = 14$ و $x_1 = 34$، ثم تمثيلها جميعا على معلم متعامد ومتجانس.

الشكل رقم (01): التمثيل البياني لقيود المثال



عند رسم القيود نلاحظ أنها تقسم المستوي إلى قسمين: قسم يقع على يمين المستقيم وآخر يقع على يساره.

فلو أخذنا على سبيل المثال القيد الأول $10\,x_1 + 5\,x_2 \leq 200$ نلاحظ أنه يقسم المستوي إلى قسمين، أحدهما على يمين المستقيم والآخر على يساره، وكلاهما يحتوي على عدد لانهائي من النقاط، فلو أخذنا أي نقطة من النقاط الواقعة على اليمين وعوضنا إحداثياتها في المتراجحة فإننا نلاحظ أنها لا تحقق القيد.

مثل: النقطة (50,30) G عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على:

$200 < (30)5 + (50)10$ فهي لا تحقق القيد، وعليه فإن جميع النقاط الواقعة يمين (أعلى) المستقيم لا تحقق القيد وبالتالي فهي ليست حلا للمتراجحة.

أما لو أخذت النقاط الواقعة على يسار المستقيم وتم تعويضها في القيد فنلاحظ أنها تحقق القيد أعلاه.

مثل: النقطة $(10,10)$ N (والتي تقع تحت المستقيم)، عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على $200 \leq (10)5 + (10)10$، والنقطة $P(12,16)$ (والتي تقع على المستقيم) عند تعويضها في القيد أعلاه نحصل على $200 = (16)5 + (12)10$ فكلاهما يحقق القيد، وعليه فإن جميع النقاط الواقعة يسار (تحت) القيد تحقق القيد، وبالتالي فهي حل للمتراجحة.

2. الطريقة الجبرية (تعداد حلول الأساس) لحل نماذج البرمجة الخطية

وهي تمثل اسلوبا اخر من اساليب البرمجة الخطية وهذه الطريقة تتميز باتساع استخدامها في حالة زيادة عدد المتغيرات عن اثنين .

تعد الطريقة الجبرية من الطرق الرياضية البحتة التي تعتمد أسلوب التعويض الجبري للقيم المتوقعة للمتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي وفقا إلى عدد الطرق الممكنة لهذه القيم وتستخدم هذه الطريقة عندما يحتوي النموذج على متغيرين فقط هما.

1.2. الشكل القانوني لنماذج البرمجة الخطية

تستخدم البرمجة الخطية لإيجاد أفضل توزيع للموارد والإمكانات المحدودة على الاستخدامات المختلفة لتحقيق هدف معين كتعظيم الربح أو الإنتاج أو تخفيض التكاليف في ظل قيود وعوامل ثابتة , حيث تصاغ المشكلة الاقتصادية وتكتب على شكل علاقات رياضية خطية.

عناصر نموذج البرمجة الخطية:

يتكون نموذج البرمجة الخطية من العناصر الأساسية التالية[13]:

- **المتغيرات:** وتسمى متغيرات القرار، بتحديد قيمها نصل إلى الهدف المنشود أكبر ربح أو أقل تكلفة للمسألة المدروسة, ويشترط أن تكون غير سالبة, تخضع هذه المتغيرات لنوع معين من القياس, أي يعبر عنها بصورة كمية, ونرمز لهذه المتغيرات بـ:

$$X_1, X_2, X_3, ..., X_n$$

حيث n عدد المتغيرات في المسألة المدروسة.

هذه المتغيرات تعبر عن أحد المفاهيم التالية:

- كميات إنتاج لمنتجات معينة.
- ساعات عمل في أقسام معينة من مصنع أو شركة أو مؤسسة.
- مبالغ من المال المخصص لأنشطة أو فعاليات معينة.
- مقدار من القطع الأجنبي المخصص لاستيراد أصناف من السلع.
- كميات من المواد منقولة على طريق معينة, أو بوسائل نقل معينة.
- كمية المواد الأولية اللازمة لتصنيع منتج معين.

- **دالة الهدف:** هي دالة رياضية تمثل الهدف الذي نريد الوصول إليه وتحقيقه، كتحقيق أكبر ربح أو أدنى تكلفة ممكنة ويكون الشكل العام لهذه الدالة[14]:

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n$$

[13] رشيق رفيق مرعي, فتحي خليل حمدان, مقدمة في بحوث العمليات , مرجع سابق, عمان الأردن, الطبعة الأولى 1996. ص22.

[14] Gérald. Baillageon, Programmation Linéaire Appliquée Outil D'aide A La Décision, 1996, p08.

أي بالشكل المختصر. $Z=\sum_{J=1}^{n} C_J X_J$

حيث C_J أعداد حقيقية تدعى بمعاملات مساهمة المتغيرات في دالة الهدف, وتصنف الأهداف التي تعالجها البرمجة الخطية إلى مجموعتين:

المجموعة الأولى: تحتوي على حالة التعظيم لدالة الهدف كأن نسعى إلى تحقيق أكبر ربح ممكن أو توفير أعظمي للوقت والجهد أو زيادة الدخل القومي إلى أقصى حد ممكن, وسنرمز لدالة الهدف بحرف كبير Z وهدفها يكون MAX أي:

$$Z=C_1X_1+C_2X_2+..............+C_nX_n \to MAX$$

أي بالشكل المختصر. $Z=\sum_{J=1}^{n} C_J X_J \to MAX$

حيث X_J: متغيرات القرار.و C_J الربح الوحدوي لـ X_J.

المجموعة الثانية : تدنية دالة الهدف كأن نسعى إلى تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن, أو تقليل الخسائر قدر الإمكان, وتكتب دالة الهدف كالتالي:

$$Z=C_1X_1+C_2X_2+..............+C_nX_n \to MIN$$

أي بالشكل المختصر. $Z=\sum_{J=1}^{n} C_J X_J \to MIN$

حيث: X_J متغيرات القرار. و C_J التكلفة الوحدوية لـ X_J .

وبذلك تتكون دالة الهدف من المتغيرات التي تشير مثلا إلى المنتجات المختلفة التي يمكن إنتاجها، على أن يكون المعامل الخاص بكل متغير هو ربح الوحدة الواحدة من المنتجات في دالة تعظيم الربح، أو يكون عبارة عن تكلفة الوحدة الواحدة في حالة تخفيض دالة التكلفة.

- **القيود**[15]: هي عبارة عن وجود علاقة تأثير بين المتغيرات، ويعبر عنها رياضيا بمتباينات تدعى الشروط الخطية, وتأخذ الأشكال التالية[16]:

1- الشكل الأول: $i = 1,2,.........,m.$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$ إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم. MAX.

2- الشكل الثاني : $i = 1,2,.........,m.$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$ إذا كانت دالة الهدف من نوع تدنية MIN .

ومنه الشكل الأول والثاني يطلق عليه الشكل القانوني(Canonique Forme) لنموذج البرمجة الخطية .

3- الشكل الثالث : $i = 1,2,.........,m.$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ سواء كانت دالة الهدف تعظيم MAX أو تدنية MIN .

الشكل الثالث يطلق عليه الشكل المعياري (Standard Forme) لنموذج البرمجة الخطية.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{Bmatrix} b_i$$

4- الشكل الرابع : $i = 1,2,.........,m.$

سواء كانت دالة الهدف تعظيم MAX أو تدنية MIN.

[15] AMOR. Farouk .Enghezal, Programmation Linéaire, Alger, publications universitaires, 2000, p14.

[16] MICHEL Simonnard , Programmation linéaire technique de calcul économique ,dunod paris 1972. p09.

الشكل الرابع يطلق عليه الشكل المختلط (Mixte Forme) لنموذج البرمجة الخطية .

حيث أنه في كلا الأشكال:

n: عدد المتغيرات في النموذج الخطي.

m: عدد قيود المسألة (عدد الشروط الخطية).

a_{ij}: أعداد حقيقية (معاملات) .

b_i: أعداد حقيقية تعبر عن الموارد المتاحة أو المتطلبات اللازمة لكل قيد من قيود المشكلة ويجب أن تكون موجبة.

- **شرط عدم السلبية:** يشترط على المتغيرات أن تكون غير سالبة أي $x_j \geq 0$ وهذا ما يجب فرضه على جميع النماذج لأنها جميعها تعبر عن كميات إنتاج, والكميات لا يمكن أن تكون سالبة.

2.2. متغيرات الفجوة

سبق وأن تطرقنا إلى تحليل القيود الوظيفية، والتي قلنا أنها عبارة عن كمية مستخدمة (في شقها الأيسر)، وكمية متاحة في شقها الأيمن، وبغرض حل نموذج البرمجة الخطية ينبغي أولا تحويل تلك المتراجحات(القيود) إلى معادلات، وذلك لا يتحقق إلا بإضافة متغيرات جديدة غير سالبة تسمى متغيرَات الفجوة، والتي تعبر اقتصاديا عن الكمية المتبقية أو غيرَ المستخدمة، وعادة ما يُرمز لمتغير الفرق بالرمز S. ومن حالاتها[17]:

- **في حالة القيود الوظيفية التي تكون بالإشارة أقل أو تساوي:** يتم إضافة متغيرة الفجوة مسبوقة بالإشارة (+) ذلك أن الكمية المستخدمة دائما أقل من المتاحة و لذا وجب إضافة كمية متبقية للوصول إلى الاستخدام التام.

[17] ضو نصر، المرجع السابق، ص 35.

مثل:
$$2x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 5x_4 \leq 1200$$
$$2x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 5x_4 + s_1 \leq 1200$$

- **في حالة القيود الوظيفية التي تكون بالإشارة أكبر أو تساوي:** يتم إضافة متغيرة الفجوة مسبوقة بالإشارة (−)، ذلك أن الكمية المستخدمة قد تجاوزت المتاح ولذا وجب إنقاص هذه الكمية التي تفوق المتاح.

مثل:
$$15x_1 + 7x_2 + 3x_3 \leq 1200$$
$$15x_1 + 7x_2 + 3x_3 - s_1 \leq 1200$$

- **متغيرات الفجوة في دالة الهدف:** تكون متغيرات الفجوة على مستوى دالة الهدف ذات معاملات معدومة، كون أن هذه المتغيرات لا برقق أي ربح للمؤسسة (في حالة نموذج التعظيم).

1.1. الشكل المعياري لنماذج البرمجة الخطية

يكون نموذج البرمجة الخطية مكتوبا على شكله المعياري، إذا تحققت الشروط التالية:

- القيود الوظيفية مكتوبة على شكل معادلات بدلا من متراجحات؛
- يجب أن يكون الطرف الأيمن للقيود الوظيفية (المتاح) موجبا أو معدوما؛
- يجب أن تكون جميع متغيرات النموذج موجبة أو معدومة.

4.2. خطوات حل نموذج البرمجة الخطية

بهدف معرفة خطوات حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة تعداد حلول الأساس، سنأخذ المثال التالي:

مثال:

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = \quad 10\ x1 + 4\ x2 \quad + 6\ x3$$

contraintes aux Soumise

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq \ 96 \\ 8\ x_1 + 2x_2 \ + 12x_3 \ \ \leq \ \ 150 \\ x1 \ \geq \ 0 \\ x2 \ \geq \ \ 0 \\ x3 \ \geq \ \ 0 \end{cases}$$

لحل النموذج أعلاه والوصول إلى الحل الأمثل، نقوم بإتباع الخطوات التالية:

- **كتابة النموذج على الشكل المعياري:**

كما تمت الإشارة إليه سابقا، يتم تحويل قيود النموذج إلى معادلات وذلك بإضافة متغيرات الفجوة (الفرق) حتى يتوافق وشروط الشكل المعياري لنماذج البرمجة الخطية، وعليه يصبح النموذج كالتالي:

$\text{Max Z} = \ \ 10\ \text{x1} + 4\ \text{x2} + 6\ \text{x3}$ contraintes aux Soumise $2x1 + 2x2 \ + 6x3 \ + \ \boldsymbol{S1} = \ 96$ $8\text{x1} + 2\text{x2} + 12\text{x3} + \textbf{S2} = \ 150$ $x_1 \ \geq \ 0$ $x_2 \ \geq \ \ 0$ $x_3 \ \geq \ \ 0$	$\Leftrightarrow$	$\text{Max Z} = \ \ 10\ \text{x1} + 4\ \text{x2} \ \ + 6\ \text{x3} + \ \textbf{0S1} \ + \ \textbf{0S2}$ contraintes aux Soumise $2\text{x1} + 2\text{x2} \ + 6\text{x3} \ + \text{S1} + \ 0\text{S2} \ = \ 96$ $8\text{x1} + 2\text{x2} \ + 12\text{x3} + 0\text{S1} + \text{S2} = \ 150$ $x_1 \ \geq \ 0$ $x_2 \ \geq \ \ 0$ $x_3 \ \geq \ \ 0$ $S_1 \ \geq \ \ 0$

$S_2 \geq 0$		$S_1 \geq 0$ $S_2 \geq 0$

نلاحظ من خلال الشكل المعياري للنموذج أعلاه، أنه عبارة عن جملة معادلات تحتوي على 5 متغيرات (3 متغيرات القرار، 2 متغيرات الفجوة)، علما أنه يحتوي على معادلتين، وبناء على ذلك فإنه يتعذر علينا حل الجملة التي يكون فيها عدد المجاهيل يفوق عدد المعادلات.

وحتى نتمكن من حل الجملة يجب جعل عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات، ويتم ذلك عن طريق عدم 3 متغيرات (الفرق بين عدد المجاهيل وعدد المعادلات)، والحل المتحصل عليه يسمى حل الأساس (Solution de base)، والذي يتكون من 3 متغيرات معدومة تسمى متغيرات خارج الأساس (Variables hors base)، وأخرى غير معدومة تسمى متغيرات الأساس (Variables de base).

- **تعداد حلول الأساس:**

حتى يتسنى لنا حل النموذج أعلاه (جملة المعادلات)، يتوجب علينا في كل مرة عدم ثلاث (3) متغيرات، وبالتالي يتم في كل مرة اختيار توليفة من المتغيرات التي سيتم عدمها واستنتاج حل الأساس لها، وعليه فإنه يوجد عدد من الطرق التي يمكن بها اختيار هذه المتغيرات أو التوليفات و الذي يمكن حسابه رياضيا كالتالي:

$$10 = c_5^3 = \frac{5!}{3!\ (5-3)!}$$

أي أن النموذج يقبل 10 توليفات مختلفة يكون بها 3 متغيرات معدومة (متغيرا القرار أو متغيرات الفجوة أو الاثنين معا)، و يتم حساب الأخرى بتعويضها في القيود الوظيفية، و من ثم استنتاج حل الأساس.

وعليه يتم تلخيص حلو ل الأساس في الجدول التالي:

الجدول رقم (01): تعداد حلول الأساس للمثال أعلاه.

نوع الحل	متغيرات الأساس	التعويض في القيود الوظيفية	متغيرات خارج الأساس	الرقم
✓	$S_1 = 96$ $S_2 = 150$	$2(0) + 2(0) + 6(0) = 96$ $8(0) + 2(0) + 12(0) = 150$	$x_1 = x_2 = x_3 = 0$	01
✓	$x_3 = 9$ $x_2 = 42$	$2(0) + 2x_2 + 6x_3 + 0 = 96$ $8(0) + 2x_2 + 12x_3 + 0 = 150$	$x_1 = S_1 = S_2 = 0$	02
×	$x_1 = -21$ $x_3 = 23$	$2x_1 + 2(0) + 6x_3 + 0 = 96$ $8x_1 + 2(0) + 12x_3 + 0 = 150$	$x_2 = S_1 = S_2 = 0$	03
✓	$x_1 = 9$ $x_2 = 39$	$2x_1 + 2x_2 + 6(0) + 0 = 96$ $8x_1 + 2x_2 + 12(0) + 0 = 150$	$x_3 = S_1 = S_2 = 0$	04
×	$x_3 = 16$ $S_2 = -42$	$2(0) + 2(0) + 6x_3 + 0 = 96$ $8(0) + 2(0) + 12x_3 + S_2 = 150$	$x_1 = x_2 = S_1 = 0$	05
✓	$x_3 = 12{,}5$ $S_1 = 21$	$2(0) + 2(0) + 6x_3 + S_1 = 96$ $8(0) + 2(0) + 12x_3 + 0 = 150$	$x_1 = x_2 = S_2 = 0$	06
✓	$x_2 = 48$ $S_2 = 54$	$2(0) + 2x_2 + 6(0) + 0 = 96$ $8(0) + 2x_2 + 12(0) + S_2 = 150$	$x_1 = x_3 = S_1 = 0$	07
×	$x_2 = 75$ $S_1 = -54$	$2(0) + 2x_2 + 6(0) + S_1 = 96$ $8(0) + 2x_2 + 12(0) + 0 = 150$	$x_1 = x_3 = S_2 = 0$	08
×	$x_1 = 48$ $S_2 = -234$	$2x_1 + 2(0) + 6(0) + 0 = 96$ $8x_1 + 2(0) + 12(0) + S_2 = 150$	$x_2 = x_3 = S_1 = 0$	09
✓	$x_1 = 18{,}75$ $S_1 = 58{,}5$	$2x_1 + 2(0) + 6(0) + S_1 = 96$ $8x_1 + 2(0) + 12(0) + 0 = 150$	$x_2 = x_3 = S_2 = 0$	10

ما يلاحظ من الجدول أن هنالك حلول أساس (متغيرات الأساس، متغيرات خارج الأساس) موجبة أو معدومة، وتسمى هذه الحلول بحلول الأساس المقبولة، ومنها ما يأخذ قيما سالبة وتسمى بحلول الأساس غير المقبولة، لأنها لا تحقق قيود عدم سلبية المتغيرات.

- **تقييم دالة الهدف عند حلول الأساس المقبولة:**

من أجل كل حل أساس مقبول، سوف تكون هناك قيمة لدالة الهدف، وما يهمنا هو حل الأساس المقبول الذي يعطي لدالة الهدف أمثل قيمة و هو الحل رقم: **04**

$$Z = 10(9) + 4(39) + 6(0) = 246$$

ويتم تفسير حل الأساس المقبول الأمثل المتوصل إليه كما يلي:

$x_1 = 9$ أي على المؤسسة إنتاج 9 وحدة من المنتج الأول؛

$x_2 = 39$ أي على المؤسسة إنتاج 39 وحدات من المنتج الثاني؛

$x_3 = 0$ أي على المؤسسة عدم إنتاج أي وحدة من المنتج الثالث.

وعند تعويض قيم حل الأساس المقبول الأمثل في القيود الوظيفية نلاحظ أن القيدين الأول والثاني محققان بإشارة تساوي ما يعني أنهما مشبعان، أي: $S_1 = S_2 = 0$.

4-4- التفسير الهندسي لحلول الأساس المقبولة:

لمعرفة التفسير الهندسي لحلول الأساس المقبولة، سنأخذ المثال أدناه.

مثال: ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 10\,x_1 + 12\,x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 48 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 26 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

سنقوم بحل هذا النموذج وفق طريقة تعداد حلول الأساس ثم وفق الطريقة البيانية. وكمرحلة أولى يتعين علينا كتابة هذا النموذج على الشكل المعياري (إضافة متغيرات الفرق) ليصبح كالتالي:

$$Max\ Z = 10\,x_1 + 12\,x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + S_1 = 20 \\ 3\,x_1 + 2x_2 + S_2 = 48 \\ 2\,x_1 + 2x_2 + S_3 = 26 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{cases}$$

وبما أن النموذج يحتوي جملة معادلات بها 5 متغيرات، فإنه يتعين علينا عدم متغيرتين، حيث أن النموذج يقبل 10 توليفات للمتغيرات المعدومة وبالتالي فإنه يقبل 10 حلول أساس، وذلك وفقا للعلاقة:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!} = 10$$

وبناء على ذلك، نُلخص حلول الأساس في الجدول أدناه:

الجدول رقم (02): تعداد حلول الأساس للمثال

نوع الحل	متغيرات الأساس	التعويض في القيود الوظيفية	متغيرات خارج الأساس	الرقم
✓	$S_1 = 20$ $S_2 = 48$ $S_3 = 26$	$(0)+2(0)+S_1 = 20$ $3(0)+2(0)+S_2 = 48$ $2(0)+2(0)+S_3 = 26$	$x_1 = x_2 = 0$	01
✓	$x_2 = 10$ $S_2 = 38$ $S_3 = 6$	$(0)+2x_2+0 = 20$ $3(0)+2x_2+S_2 = 48$ $2(0)+2x_2+S_3 = 26$	$x_1 = S_1 = 0$	02
×	$x_2 = 24$ $S_1 = -28$ $S_3 = 2$	$(0)+2x_2+S_1 = 20$ $3(0)+2x_2+0 = 48$ $2(0)+2x_2+S_3 = 26$	$x_1 = S_2 = 0$	03
×	$x_2 = 13$ $S_1 = -6$ $S_2 = 22$	$(0)+2x_2+S_1 = 20$ $3(0)+2x_2+S_2 = 48$ $2(0)+2x_2+0 = 26$	$x_1 = S_3 = 0$	04
×	$x_1 = 20$ $S_2 = -12$ $S_3 = -14$	$x_1+2(0)+0 = 20$ $3x_1+2(0)+S_2 = 48$ $2x_1+2(0)+S_3 = 26$	$x_2 = S_1 = 0$	05
×	$x_1 = 16$ $S_1 = 4$ $S_3 = -6$	$x_1+2(0)+S_1 = 20$ $3x_1+2(0)+0 = 48$ $2x_1+2(0)+S_3 = 26$	$x_2 = S_2 = 0$	06
✓	$x_1 = 13$ $S_1 = 7$ $S_2 = 9$	$x_1+2(0)+S_1 = 20$ $3x_1+2(0)+S_2 = 48$ $2x_1+2(0)+0 = 26$	$x_2 = S_3 = 0$	07
×	$x_1 = 14$ $x_2 = 3$ $S_3 = -8$	$x_1+2x_2+0 = 20$ $3x_1+2x_2+0 = 48$ $2x_1+2x_2+S_3 = 26$	$S_1 = S_2 = 0$	08

✓	$x_1 = 6$ $x_2 = 7$ $S_2 = 16$	$x_1+2x_2+0= 20$ $3x_1+2x_2+S_2= 48$ $2x_1+2x_2+0 = 26$	$S_1 = S_3 = 0$	09
×	$x_1 = 22$ $x_2 = -9$ $S_1 = 16$	$x_1+2x_2+S_1= 20$ $3x_1+2x_2+0= 48$ $2x_1+2x_2+0 = 26$	$S_2 = S_3 = 0$	10

عند تقييم دالة الهدف عند حلول الأساس المقبولة المتوصل إليها أعلاه، نلاحظ أن الحل الأمثل للنموذج يتمثل في الحل رقم 09:

$$Z = 10(6) + 12(7) = 144$$

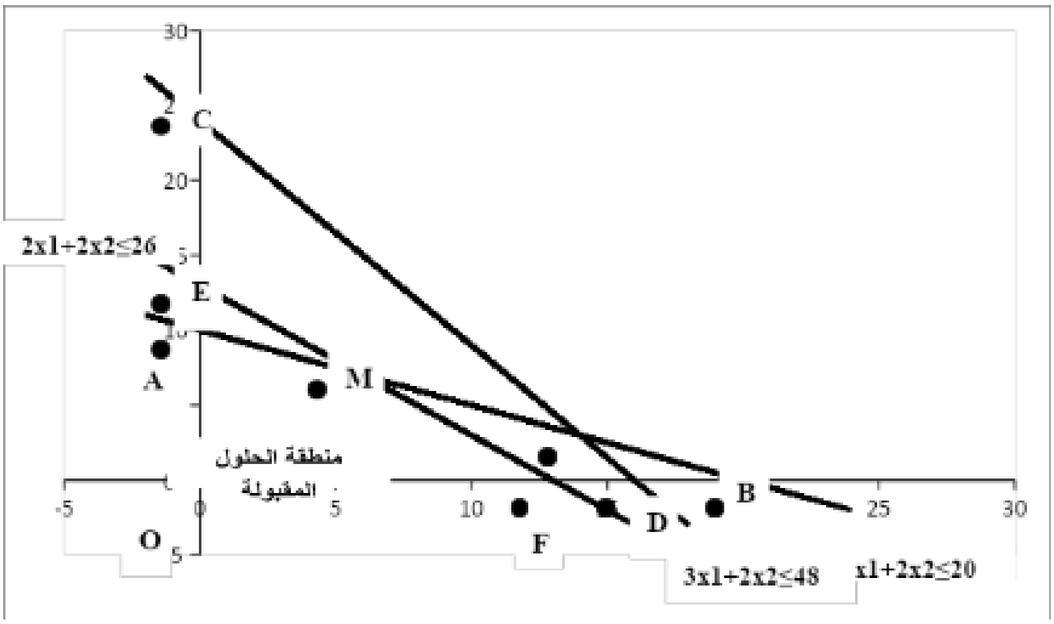
أما بيانيا فيكون حل النموذج أعلاه كما يلي:

القيد الأول: $x_1 + 2x_2 = 20$ يُمثل بالنقطتين: A(0,10)، B(20,0).

القيد الثاني: $3x_1 + 2x_2 = 48$ يُمثل بالنقطتين: C(0,24)، D(16,0).

القيد الثالث: $2x_1 + 2x_2 = 26$ يُمثل بالنقطتين: E(0,13)، F(13,0).

الشكل رقم(02): التمثيل البياني لقيود المثال أعلاه.



أما M فهي نقطة تقاطع القيدين الأول والثالث، ويتم الحصول على إحداثياتها بحل جملة معادلتي القيدين، فنحصل على (6,7) M، وعليه تصبح OAMF هي منطقة الحلول المقبولة.

نلاحظ أن النقطة O توافق حل الأساس المقبول رقم 01، النقطة A توافق حل الأساس المقبول رقم 02، النقطة M توافق حل الأساس المقبول رقم 09، والنقطة F توافق حل الأساس المقبول رقم 07، وبالتالي فإن عدد حلول الأساس المقبولة يوافق عدد النقاط الرأسية لمنطقة الحلول المقبولة.

3. الطريقة المبسطة Simplex

كون الطريقة البيانية لا تستخدم إلا في حالة و جود متغيرين فقط أو ثلاثة على أكثر تقدير, ويرجع ذلك إلى صعوبة بل استحالة الرسم البياني عندما يزيد عدد المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها عن اثنين, وطالما أن معظم التطبيقات العلمية تتضمن عدد كبير من المتغيرات والقيود, فإننا نحتاج إلى أسلوب آخر صمم خصيصا لذلك يعرف بأسلوب السمبلاكس Simplex Méthode. يقوم أسلوب السمبلاكس الذي قدمه G .B. Dantzig الأمريكي في عام 1947 م, على مجموعة من الخطوات الجبرية التي تؤدي إلى الوصول إلى الحل الأمثل, في حالة وجود حل, وذلك في عدة مراحل متتابعة ومحددة, ويتم تحقيق ذلك عن طريق تقييم النقط الركنية للمنطقة الممكنة في خطوات متتابعة تؤدي إلى الوصول إلى حلا أفضل في كل مرحلة, وذلك إلى الحد الذي لا يمكن معه تحقيق تحسين في الحل, عندئذ نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل[18].

ويمكن تلخيص الخطوات التي تتضمنها طريقة السمبلاكس في الخطوات الخمس التالية[19]:

---

[18] حسن علي مشرقي, نظرية القرارات الإدارية مدخل كمي في الإدارة, دار المسيرة للنشر والتوزيع، الأردن، الطبعة الأولى،1997 م، ص 165.

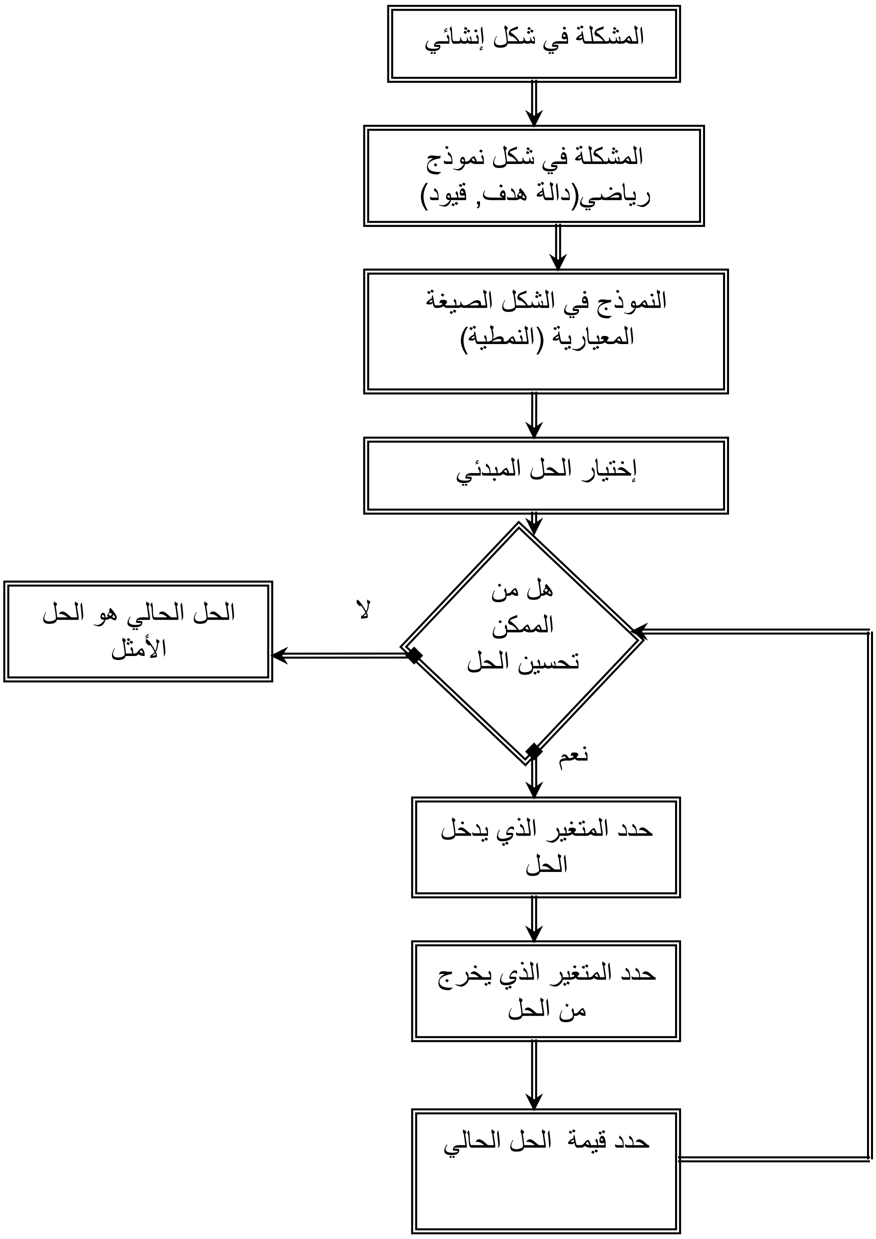
[19] حسن علي مشرقي, المرجع السابق، ص 167.

- ضع مشكلة البرمجة الخطية في الصيغة المعيارية (النمطية) Forme Standard.
- اختيار حل مبدئي ممكن وهو عبارة عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة.
- تقييم إمكانية تحسين الحل القائم.

إذا كان التحسين ممكنا يتم العمل الخطوات التالية:

- حدد المتغير الغير أساسي الغير موجود في الحل الحالي والواجب إدخاله في الحل, واعتباره متغيرا أساسيا.
- حدد المتغير الأساسي الموجود في الحل الحالي والواجب خروجه من الحل, واعتباره متغيرا غير أساسي.
- حدد قيم المتغيرات الموجودة في الحل الجديد, وهو يعبر عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة, وذلك حدد قيم المعاملات الجديدة في معادلات القيود.
- أرجع إلى الخطوة الرابعة وكرر عملية التقويم.
- إذا كان التحسين غير ممكن فإن الحل الذي توصلت إليه يكون هو الحل الأمثل.
- ويوضح الشكل التالي العلاقة بين هذه الخطوات المذكورة سالفا.

شكل رقم (03) : يوضح خطوات الحل بطريقة السمبلاكس



source: Yves Noobert. Roch Ouellet. Réges Parent, La recherche opérationnelle, gaitan morin éditeur 1995, p170.

1.3. خطوات الحل باستخدام طريقة السامبلاكس

تعد طريقة السمبلاكس من أهم طرق حل نماذج البرمجة الخطية مهما كان عدد المتغيرات التي تحتويها المشكلة، وهي طريقة تتابعية تنطلق من حل ابتدائي ممكن مروراً بحل أفضل وصولا إلى حل أمثل، مما يجعلنا نطلق عليها مصطلح خوارزمية السمبلاكس[20].

وفيما يلي خطوات ومراحل تطبيق السمبلاكس[21]:

مثال:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 70\ x_1 + 40\ x_2 + 60\ x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 1000 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 800 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 400 \\ x1 \quad 0 \\ x2 \quad 0 \\ x3 \geq 0 \end{cases}$$

كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$Max\ Z = 70\ x_1 + 40\ x_2 + 60\ x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

Soumise aux contraintes

$$4x1 + 2x2 + 4x3 + S1 + 0S2 + 0S3 = 1000$$
$$2x1 + 2x2 + x3 + 0S1 + 0S2 + 0S3 = 800$$

$$\Leftrightarrow$$

$$Max\ Z = 70\ x_1 + 40\ x_2 + 60\ x_3$$

contraintes aux Soumise

$$4x1 + 2x2 + 4x3 + S1 = 1000$$
$$2x1 + 2x2 + x3 + S2 = 800$$
$$x1 + 3x2 + x3 + S3 = 400$$
$$x1, x2, x3 \geq 0$$
$$S1, S2, S3 \geq 0$$

---

[20] صوار يوسف، طاوش قندوسي، محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B– كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، د س، ص 46–47.

[21] صوار يوسف، طاوش قندوسي، المرجع السابق، ص 48– 53.

$$x1 + 3x2 + x3 + 0S1 + 0S2 + 0S3 = 400$$
$$x1 , x2 , x3 \geq 0$$
$$S1, S2, S3 \geq 0$$

إيجاد أول حل أساس مقبول:

بما أن النموذج يحتوي على 6 متغيرات، و3 معادلات فإنه يتم الحصول على أول حل أساي مقبول عن طريق عدم 3 متغيرات (3=6−3) ولتكن متغيرات القرار (متغيرات خارج الأساس) $x_1 = 0$، $x_2 = 0$، $x_3 = 0$، وبعد التعويض في قيود النموذج أعلاه نحصل على قيم متغيرات الأساس: $S_1 = 1000 , S_2 = 800 , S_3 = 400$، والذي يعتبر حل الأساس المقبول الأول، حيث أن $Z = 0$ ما يعني أن المؤسسة لازالت في بداية نشاطها وتقوم بعملية الإنتاج.

تشكيل جدول السمبلاكس الأول:

- تتم في المرحلة الأولى تشكيل جدول يضم في السطرين الأول و الثاني متغيرات النموذج (متغيرات القرار، متغيرات الفجوة)، حيث تكتب في السطر الأول معاملات هذه المتغيرات(c_j) في دالة الهدف وفي السطر الثاني تكتب المتغيرات؛
- تكتب في العمودين الأول والثاني (على اليسار) متغيرات الأساس المتحصل عليها من أول حل أساس مقبول مع معاملاتها(c_j) في دالة الهدف؛
- في باقي خانات الجدول تتم كتابة معاملات كافة المتغيرات في القيود الوظيفية؛
- في العمود B rayon تتم كتابة المتاح (من القيود الوظيفية)؛
- في السطر $Zj = \sum Cj\ xj$ يتم ضرب معاملات المتغيرة الأولى لكافة القيود الوظيفية في معاملات متغيرات الأساس، ثم جمعها، مثلا: $(0\times4)+(0\times2)+(0\times1)= 0$، وذلك للحصول على القيمة Zj وهكذا؛

– في السطر $Z = Cj - Zj$ يتم طرح قيم Zj من معاملات كافة المتغيرات في دالة الهدف (أول سطر Cj)؛

– للحصول على قيمة دالة الهدف Z يتم ضرب معاملات متغيرات الأساس (العمود الأول Cj).

الجدول رقم (03): جدول السمبلاكس الأول للمثال

$C_j \rightarrow$ ↓		70	40	60	0	0	0	**B**	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	**rayon**	R_i
0	S_1 ←	4	2	4	1	0	0	1000	= 4/1000 250
0	S_2	2	2	1	0	1	0	800	400 = 2/800
0	S_3	1	3	1	0	0	1	400	400 = 1/400
$Zj = \sum Cj\, xj$		0	0	0	0	0	0	$Z = 0$	
$Z = Cj - Zj$		70	40	60	0	0	0		

2.3. قراءة حل الاساس المقبول الموافق للجدول (من المثال السابق):

– **تحديد المتغيرة الداخلة:** المتغيرة الداخلة هي تلك المتغيرة خارج الأساس المعدومة التي تتحول إلى متغيرة أساس موجبة يتم اختيارها كما يلي: ذات **أكبر معامل موجب** في $Z = Cj - Zj$، ويشار إليها بسهم في الجدول، وفي مثالنا هذا هي المتغيرة x_1 ذات المعامل $Z = 70$ (أقل معامل سالب في حالة نموذج *Min*).

– **تحديد المتغيرة الخارجة:** المتغيرة الخارجة هي متغيرة أساس موجبة و التي تتحول إلى متغيرة خارج الأساس معدومة يتم تحديدها في الجدول كما يلي: نقوم بقسمة قيم الشعاع *B* (1000, 800, 400) على قيم عمود المتغيرة الداخلة x_1 (4, 2, 1) فنحصل على قيم

R_i (250، 400، 400). وبناءً على ذلك فإن المتغيرة الخارجة هي التي تقابل **أقل حاصل قسمة موجب** (R_i)، ويشار إليها في الجدول بسهم، وفي مثالنا هذا تمثل S_1 المتغيرة الخارجة.

– **تحديد عنصر الارتكاز:** يمثل عنصر الارتكاز نقطة تقاطع عمود المتغيرة الداخلة مع سطر المتغيرة الخارجة $Pivot = Lp \cap Cp$، يشار إليه بلون أحمر في الجدول، وفي مثالنا هو 4.

تشكيل جدول السمبلاكس الثاني:

الجدول رقم (04): جدول السمبلاكس الثاني للمثال.

C_j		70	40	60	0	0	0	***B***	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	***rayon***	Ri
70	x_1	1	2/1	1	4/1	0	0	250	500
0	S_2	0	1	1−	2/1−	1	0	300	300
0	S_3	0	2/5	0	4/1−	0	1	150	60
$Zj = \sum Cj\, xj$		70	35	70	4/70	0	0	17500 =Z	
$Z = Cj - Zj$		0	5	10−	− 4/70	0	0		

– يتم تشكيل جدول السمبلاكس الثاني بإدخال المتغيرة الداخلة مكان المتغيرة الخارجة؛

– تتم قسمة قيم سطر الارتكاز (L_P) في الجدول الأول على عنصر الارتكاز نفسه (Lp/P)؛

– قيم عمود الارتكاز في الجدول الأول تصبح أصفاراً في الجدول الثاني $(Cp = 0)$، ماعدا عنصر الارتكاز الذي يبقى مساويا للواحد$(P = 1)$؛

– قيم باقي الأسطر يتم حسابها عن طريق ضرب عدد في قيم سطر الارتكاز الجديدة، مع إضافة القيم القديمة للسطر (في الجدول الأول) أي: القيمة الجديدة للسطر

$$(a) = Lp + Linitiale.$$

مثال: قيم السطر الثاني يتم حسابها كما يلي:

$(-2)(L_p = 1) + (L_i = 2) = 0$ ، $(-2)(1/2) + (2) = 1$

$(-2)(1) + (1) = -1,$ ، $(-2)(1/4) + (0) = -1/2$

- يتم الحصول على قيم Zj عن طريق ضرب معاملات متغيرات الأساس في معاملات المتغيرات في القيود الوظيفية.

مثال:

$$(70 \times 1) + (0 \times 0) + (0 \times 0)$$
$$= 70(70 \times 1/2) + (0 \times 1) + (0 \times 1/2) = 35.$$

- بعدها يتم تحديد قيمة Z إن كانت مثلى، وذلك إن كانت جميع معاملاتها سالبة أو معدومة، وفي حالتنا هذه، قيمة Z ليست مثلى لأن هناك قيمة موجبة (5)، وعليه يتم إنشاء جدول سمبلكس ثالث بغية تحسين الحل مرة أخرى، وذلك بدءً بحساب قيم Ri وتحديد المتغيرة الداخلة والخارجة.

- تتم قراءة حل الأساس المقبول الموافق للجدول الثاني كما يلي:

متغيرات الأساس: $x_1 = 250,\ S_2 = 300,\ S_3 = 150$

متغيرات خارج الأساس: $x_2=0,\ x_3=0,\ S_1=0$

وعليه وبالاعتماد على الخطوات السابقة يتم الانتقال من أول حل أساس مقبول ذو $Z = 0$ إلى حل أساس مقبول آخر ذو $Z = 17500$، أي يتم تحسين الحل الأول.

تشكيل جدول السمبلاكس الثالث:

تمثل x_2 المتغيرة الداخلة في هذه الحالة لأنها توافق أكبر معامل لـ Z و S_3 هي المتغيرة الخارجة لأنها توافق أدنى قيمة لـRi ، وعليه فإن نقطة تقاطع سطر الارتكاز (المتغيرة الخارجة) وعمود الارتكاز (المتغيرة الداخلة) تمثل نقطة الارتكاز $P = 5/2$.

الجدول رقم(05): جدول السمبلاكس الثالث للمثال

	C_j	70	40	60	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
70	x_1	1	0	1	10/3	0	5/1−	220	
0	S_2	0	0	1−	5/2−	1	5/2−	240	
40	x_2	0	1	0	− 10/1	0	5/2	60	
$Zj = \sum Cj\, xj$		70	40	70	17	0	2	$Z = 17800$	
$Z = Cj - Zj$		0	0	10−	17−	0	2−		

من جدول السمبلاكس الثالث نجد أن حل الأساس المقبول المُحسن هو:

$$x_1 = 220, x_2 = 60, S_2 = 240, x_3 = 0, S_1 = 0, S_3 = 0$$

$$Z = 17800$$

–بالنسبة لـZ نجد أنه لا يمكننا تحسين الحل مرة أخرى لأن النموذج تعظيم، وإذا أخذنا المتغيرة x_3 فإننا سوف نُخفضZ بـ$(10-)$ لكل وحدة من x_3 ، لذا نتوقف؛

- بما أن جميع معاملات متغيرات النموذج لـ Z سالبة أو معدومة فإن الحل الأخير هو الحل الأمثل (لأن اختيار أي وحدة أخرى سوف يؤدي إلى تخفيض قيمة دالة الهدف)؛
- إذا كانت معاملات متغيرات النموذج من نوع تعظيم Max سالبة أو معدومة، فإن الحل الأخير هو الحل الأمثل، أما في النموذج من نوع تدنية Min فإننا نحصل على الحل الأمثل عندما تكون كافة المعاملات موجبة أو معدومة.

إن الهدف من طريقة السمبلاكس هو الوصول إلى الحل الأمثل كالطرق السابقة، إلا أن هذه الطريقة تنطلق من أول حل أساس مقبول وتمر على بعض حلول الأساس المقبولة إلى أن تصل إلى الحل الأمثل، نشير إلى أن طريقة السمبلاكس تشترط بغرض تطبيقها توفر أول حل

أساس مقبول، إلا أنه في بعض النماذج لا يتوفر هذا الشرط، وهنا يتم اللجوء إلى طريقة أخرى تُعرف بطريقة Big M[22].

4. خطوات الحل باستخدام طريقة Big M

طور هذا الأسلوب العالم Charne، ويقوم هذا الأسلوب على أساس إضافة معامل للمتغير الاصطناعي في دالة الهدف، ويتم حل النموذج بطريقة السمبلاكس بصفة عادية[23].

وبغية التعرف على مراحل تطبيق هذه الطريقة سوف نأخذ المثال التالي:

مثال:

ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Min } Z = 30\,x_1 + 24\,x_2 + 18\,x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 \geq 80 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 \geq 60 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

كتابة النموذج على الشكل المعياري:

$$\text{Min } Z = 30\,x_1 + 24\,x_2 + 18\,x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5\,x_1 + 2\,x_2 + x_3 - s_1 = 80 \\ 3\,x_1 + 3\,x_2 + 3\,x_3 - s_2 = 60 \end{cases}$$

[22] صوار يوسف، طاوش قندوسي، المرجع السابق، ص 53.

[23] صوار يوسف، طاوش قندوسي، مرجع سابق، ص 54.

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$s_1 , s_2 \geq 0$$

إيجاد أول حل أساس مقبول:

بما أن النموذج يحتوي على 5 متغيرات، و2 معادلات فإنه يتم الحصول على أول حل أساسي مقبول عن طريق عدم 3 متغيرات (2−5=3) ولتكن متغيرات القرار (متغيرات خارج الأساس) $x_1 = 0$، $x_2 = 0$، $x_3 = 0$ وبعد التعويض في قيود النموذج أعلاه نحصل على قيم متغيرات الأساس: $S_1 = (-80)$، $S_2 = (-60)$، والذي يعتبر حل أساس غير مقبول، لأن S_2 و S_1 لا تحققان قيود عدم سلبية المتغيرات، أي أن النموذج لا يتوفر على حل أساس مقبول، و عليه لا يمكن تطبيق طريقة السمبلاكس لإشتراطها على توفر أول حل أساس مقبول.

وحتى يتسنى لنا توفير حل الأساس المقبول يتوجب علينا الاستعانة بمتغيرات جديدة تسمى المتغيرات المساعدة (الوهمية، الاصطناعية)، حيث تضاف متغيرة واحدة على مستوى كل قيد ليصبح النموذج كالتالي:

$$\text{Min } Z = 30\, x_1 + 24\, x_2 + 18\, x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5\, x_1 + 2\, x_2 + x_3 - s_1 + t_1 = 80 \\ 3\, x_1 + 3\, x_2 + 3\, x_3 - s_2 + t_2 = 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ s_1 , s_2 \geq 0 \\ t_1 , t_2 \geq 0 \end{cases}$$

بعد إضافة المتغيرات الوهمية t_1 و t_2 يصبح النموذج مكونا من 7 متغيرات و2 معادلات، وعليه يمكن إيجاد أول حل أساس مقبول وذلك عن طريق عدم متغيرات 5 متغيرات (7−5=2) فيصبح حل الأساس المقبول الأول كالتالي:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0$$

$$t_1 = 80 \quad t_2 = 60$$

نضيف متغيرات الفجوة والاصطناعية إلى دالة الهدف، بمعامل 0 لمتغيرات الفجوة ومعامل Mالتي تمثل كمية موجبة كبيرة إلى المتغيرات الاصطناعية، أما إذا كان النموذج من نوع Maxفيتم إضافة معامل (M−) إلى المتغيرات الاصطناعية [24].

فتكون دالة الهدف كما يلي:

$$Min\ Z = 30\,x_1 + 24\,x_2 + 18\,x_3 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + \boldsymbol{M}\,t_1 + \boldsymbol{M}\,t_2$$

$$Min\ Z = 30\,x_1 + 24\,x_2 + 18\,x_3 + 0\,S_1 + 0\,S_2 + \boldsymbol{M}\,(t_1 + t_2)$$

بعدها يتم استخراج قيم المتغيرات الاصطناعية من القيود الوظيفية لتعويضها في دالة الهدف:

$$t_1 = 80 - 5x_1 - 2x_2 - x_3 + S_1$$

$$t_2 = 60 - 3x_1 - 3x_2 - 3x_3 + S_2$$

$$t_1 + t_2 = 140 - 8x_1 - 5x_2 - 4x_3 + S_1 + S_2$$

بتعويض قيم المتغيرات الوهمية في دالة الهدف نحصل على:

$$\mathrm{Min\ Z} = 30\,x_1 + 24\,x_2 + 18\,x_3 + M\,(140 - 8x_1 - 5x_2 - 4x_3 + S_1 + S_2)$$

$$\mathrm{Min\ Z} = 30\,x_1 + 24\,x_2 + 18\,x_3 + 140\,M - 8x_1\,M - 5x_2\,M - 4x_3\,M + M\,S_1 + M\,S_2$$

وعليه يصبح النموذج في صيغته النهائية كالتالي:

[24] محمد عبد العال النعيمي وآخرون، بحوث العمليات، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2011، ص 57.

$$Min\ Z = (30-8M)\,x_1 + (24-5M)\,x_2 + (18-4M)\,x_3 + M\,S_1 + M\,S_2 + 140\,M$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 - S_1 + t_1 = 80 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - S_2 + t_2 = 60 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ s_1, s_2 \geq 0 \\ t_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

تشكيل جدول السمبلاكس الأول:

الجدول رقم(06): جدول السمبلاكس الأول

C_j →		30	24	18	0	0	M	M	B	
		x_1	**x_2**	**x_3**	**S_1**	**S_2**	**t_1**	**t_2**	**rayon**	**R_i**
M	**t_1**	5	2	1	1−	0	1	0	80	16
M	**t_2**	3	3	3	0	1−	0	1	60	20
$Zj = \sum Cj\ xj$		M8	M5	M4	M−	M−	M	M	M=140	
$Z = Cj - Zj$		−30 M8	−24 M5	−18 M4	M	M	0	0		

– بما أن النموذج عبارة عن تدنية Min فإنه يتم في هذه الحالة اختيار المتغيرة الداخلة عن طريق اختيار أقل معامل سالب لـ M في قيم Z وفي مثالنا هذا (-8) هو أدنى معامل سالب والذي يوافق المتغيرةx_1 ؛

– يتم بعدها قسمة قيم الشعاع B على معاملات المتغيرة الداخلة، للحصول على R_iوبناء على ذلك تصبح المتغيرة الخارجة هي التي توافق أقل حاصل قسمة موجب، لتكون في مثالنا هذا t_1 ثم تحديد عنصر الارتكاز.

– بما أن معاملات Z تضم قيما سالبة فإن 140M ليس هو الحل الأمثل، لذا وجب علينا تحسين الحل إلى غاية الحصول على معاملات موجبة أو معدومة باعتبار أن النموذج عبارة عن تدنية.

تشكيل جدول السمبلاكس الثاني:

الجدول رقم (07): جدول السمبلاكس الثاني

$\overrightarrow{C\ j}$ $\downarrow$		30	24	18	0	0	M	M	**B**	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	t_1	t_2	**rayon**	R_i
30	x_1	1	5/2	5/1	5/1−	0	5/1	0	16	80
M	t_2	0	5/9	5/12	5/3	1−	5/3−	1	12	5
Zj $=\sum$**Cj xj**		30	M5/9+12	M5/12+6	− M5/3+6	M−	M5/3−6	M	M12+480	
Z $=$ **Cj** $-$ **Zj**		0	M5/9−12	−12 M5/12	M5/3−6	M	− M5/8+6	0		

بما أن معاملات Z تضم قيما سالبة فإن $12M + 480$ ليس هو الحل الأمثل، لذا وجب علينا تحسين الحل إلى غاية الحصول على معاملات موجبة أو معدومة وذلك بتشكيل جدول سمبلكس ثالث.

تشكيل جدول السمبلاكس الثالث:

الجدول رقم (08): جدول السمبلاكس الثالث

C_j		30	24	18	0	0	M	M	**B**	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	t_1	t_2	**rayon**	R_i
30	x_1	1	4/1	0	4/1−	12/1	/	/	15	
18	x_3	0	4/3	1	4/1	− 12/5	/	/	5	
Zj $=\sum$Cj xj		30	21	18	3−	5−	/	/	$450+90 = 540$	
Z $=$ Cj $-$ Zj		0	3	0	3	5	/	/		

نلاحظ من خلال جدول السمبلاكس الثالث أن قيم معاملات Z كلها موجبة أو معدومة، وبالتالي فإن الحل الأخير المتوصل إليه هو الحل الأمثل $(Z = 540)$.

5. تمارين محلولة

التمرين الأول:

باستخدام طريقة السمبلاكس أوجد الحلول المثلى لنماذج البرمجة الخطية أدناه.

Max $Z = 40x_1 + 60x_2 - 20x_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \le 300 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 220 \\ x_2 + x_3 \le 100 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Max $Z = 7x_1 + 4x_2 + 6x_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 100 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 80 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 40 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

Min $Z = -6x1 - 7x2 - 8x3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 120 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \le 200 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

حل التمرين الأول:

أولا:

$C_j \rightarrow$		40	60	−20	0	0	0	B	
$\downarrow$		x_1	$\downarrow x_2$	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
0	$\leftarrow S_1$	3	6	0	1	0	0	300	50
0	S_2	4	2	1	0	1	0	220	110
0	S_3	0	1	1	0	0	1	100	100
$Z_j = \sum C_j x_j$		0	0	0	0	0	0	Z = 00	
$Z = C_j - Z_j$		40	60	−20	0	0	0		

C_j → / ↓		40	60	−20	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
60	x_2	1/2	1	0	1/6	0	0	50	100
0	S_2	3	0	1	−1/3	1	0	120	40
0	S_3	−1/2	0	1	−1/6	0	1	50	/
$Z_j = \sum C_j x_j$		30	60	0	10	0	0	Z = 3000	
$Z = C_j - Z_j$		10	0	−20	−10	0	0		

C_j → / ↓		40	60	−20	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
60	x_2	0	1	−1/6	2/9	−1/6	0	30	
40	x_1	1	0	1/3	−1/9	1/3	0	40	
0	S_3	0	0	7/6	−2/9	1/6	1	70	
$Z_j = \sum C_j x_j$		40	60	10/3	80/9	10/3	0	Z = 3400	
$Z = C_j - Z_j$		0	0	−50/3	−80/9	−10/3	0		

الحل الأمثل هو: $x_1=40,\quad x_2=30,\quad x_3=0,\quad S_1=0,\quad S_2=0,\quad S_3=70$

ثانيا:

C_j → / ↓		07	04	06	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
0	S_1	4	2	4	1	0	0	100	25
0	S_2	2	2	1	0	1	0	80	40
0	S_3	1	3	2	0	0	1	40	40
$Z_j = \sum C_j x_j$		0	0	0	0	0	0	Z = 00	
$Z = C_j - Z_j$		07	04	06	0	0	0		

C_j		07	04	06	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
07	x_1	1	1/2	1	1/4	0	0	25	50
0	S_2	0	1	−1	−1/2	1	0	30	30
0	S_3	0	5/2	1	−1/4	0	1	15	06
$Z_j = \sum C_j x_j$		07	7/2	07	7/4	0	0	Z = 175	
$Z = C_j - Z_j$		0	1/2	−01	−7/4	0	0		

C_j		07	04	06	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
07	x_1	1	0	4/5	3/10	0	−1/5	22	
0	S_2	0	0	−7/5	−2/5	1	−2/5	24	
04	x_2	0	1	2/5	−1/10	0	2/5	06	
$Z_j = \sum C_j x_j$		07	04	36/5	17/10	0	1/5	Z = 178	
$Z = C_j - Z_j$		0	0	−6/5	−17/10	0	−1/5		

الحل الأمثل هو: $x_1=22$, $x_2=6$, $x_3=0$, $S_1=0$, $S_2=24$, $S_3=0$

ثالثا:

C_j		−06	−07	−08	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
0	S_1	1	2	1	1	0	0	100	100
0	S_2	3	4	2	0	1	0	120	60
0	S_3	2	6	4	0	0	1	200	50
$Z_j = \sum C_j x_j$		0	0	0	0	0	0	Z = 00	
$Z = C_j - Z_j$		−06	−07	−08	0	0	0		

C_j → ↓		-06	-07	-08	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
0	S_1	1/2	1/2	0	1	0	−1/4	50	100
0	S_2	2	1	0	0	1	−1/2	20	10
−08	x_3	1/2	3/2	1	0	0	1/4	50	100
$Z_j = \sum C_j\, x_j$		−04	−12	−08	0	0	−02	$Z = -400$	
$Z = C_j - Z_j$		−02	05	0	0	0	02		

C_j → ↓		-06	-07	-08	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
0	S_1	0	3/4	0	1	−1/4	−1/8	45	
−06	x_1	1	1/2	0	0	1/2	−1/4	10	
−08	x_3	0	5/4	1	0	−1/4	3/8	45	
$Z_j = \sum C_j\, x_j$		06	−13	−08	0	−01	−3/2	$Z = -420$	
$Z = C_j - Z_j$		0	06	0	0	01	3/2		

الحل الأمثل هو: $x_1=10, \quad x_2=0, \quad x_3=45, \quad S_1=45, \quad S_2=0, \quad S_3=0$

التمرين الثاني:

باستخدام طريقة السمبلاكس أوجد الحلول المثلى لنماذج البرمجة الخطية أدناه.

Min $Z=100\,x_1+120\,x_2+200\,x_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3 \geq 6 \\ 2x_1+4x_2+6x_3 \geq 7 \\ x_1+2x_2+4x_3 \geq 8 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0 \end{cases}$$

Min $Z=100\,x_1+80\,x_2+40\,x_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3 \geq 7 \\ 2x_1+2x_2+3x_3 \geq 4 \\ 4x_1+x_2+2x_3 \geq 6 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0 \end{cases}$$

Min $Z=80\,x_1+120\,x_2+84\,x_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5x_1+15x_2+7x_3 \geq 20 \\ 10x_1+12x_2+21x_3 \geq 15 \\ 4x_1+5x_2+3x_3 \geq 18 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ x_3\geq 0 \end{cases}$$

حل التمرين الثاني:

MinZ=100x_1+120 x_2 +200 x_3

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 7 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

MinZ=100 x_1+120 x_2+200 x_3+M t_1+M t_2+M t_3

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - S_1 + t_1 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - S_2 + t_2 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 - S_3 + t_3 = 8 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0 \geq 0,\ t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0, t_3 \geq 0 \end{cases}$$

C_j		100	120	200	0	0	0	M	M	M	B	
		x_1	⬇ x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
M	t_1	1	3	2	−1	0	0	1	0	0	06	02
M	t_2	2	4	6	0	−1	0	0	1	0	07	7/4
M	t_3	1	2	4	0	0	−1	0	0	1	08	04
	Z_j	4M	9M	12M	− M	−M	− M	M	M	M	Z = 21 M	
	$C_j - Z_j$	100−4M	120−9M	200−12M	M	M	M	0	0	0		

C_j		100	120	200	0	0	0	M	M	M	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	⬇ S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
M	t_1	−1/2	0	−5/2	−1	3/4	0	1	/	0	3/4	01
120	x_2	1/2	1	3/2	0	−1/4	0	0	/	0	7/4	/

M	t_3	0	1	1	0	1/2	−1	0	/	1	9/2	08
	Z_j	60−1/2M	120	180−3/2M	− M	−30+5/2M	− M	M	/	M	**210+21/4 M**	
	$C_j - Z_j$	100−4M	0	20+3/2M	M	30−5/2M	M	0	/	0		

$C_j \rightarrow$ ↓		100	120	200	0	0	0	M	M	M	**B**	
		x_1	x_2	↓ x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	**rayon**	R_i
0	S_2	−2/3	0	−10/3	−4/3	1	0	/	/	0	01	/
120	x_2	1/3	1	2/3	−1/3	0	0	/	/	0	02	03
M ←	t_3	1/3	0	8/3	2/3	0	−1	/	/	1	04	3/2
	Z_j	40+1/3M	120	80+8/3M	−40+2/3M	0	− M	/	/	M	**Z=240+4 M**	
	$C_j - Z_j$	60−1/3M	0	120−8/2M	40−2/3M	0	M	/	/	0		

$C_j \rightarrow$ ↓		100	120	200	0	0	0	M	M	M	**B**	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	**rayon**	R_i
0	S_2	−1/4	0	0	−1/2	1	−5/4	/	/	/	06	
120	x_2	1/4	1	0	−1/2	0	1/4	/	/	/	01	
200	x_3	1/8	0	1	1/4	0	−3/8	/	/	/	3/2	
	Z_j	145	120	200	− 10	0	− 45	/	/	/	**Z = 420**	
	$C_j - Z_j$	− 45	0	0	10	0	45	/	/	/		

الحل الأمثل هو: $x_1=0$, $x_2=01$, $x_3=3/2$, $S_1=0$, $S_2=06$, $S_3=0$

Min $Z=100\,x_1+80\,x_2+40\,x_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4\,x_1+2\,x_2+x_3 \geq 7 \\ 2\,x_1+2\,x_2+3\,x_3 \geq 4 \\ 4\,x_1+x_2+2\,x_3 \geq 6 \\ x_1 \geq 0\,,\; x_2 \geq 0,\; x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Min $Z=100\,x_1+120\,x_2+200\,x_3+M\,t_1+M\,t_2+M\,t_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4\,x_1+2\,x_2+x_3-S_1+t_1=7 \\ 2\,x_1+2\,x_2+3\,x_3-S_2+t_2=4 \\ 4\,x_1+x_2+2\,x_3-S_3+t_3=6 \\ x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; x_3 \geq 0, \\ S_1 \geq 0,\; S_2 \geq 0,\; S_3 \geq 0 \geq 0,\quad t_1 \geq 0,\; t_2 \geq 0, \\ t_3 \geq 0 \end{cases}$$

	C_j →	100	80	40	0	0	0	M	M	M	**B**	
↓		⬇ **x_1**	**x_2**	**x_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**rayon**	**R_i**
M	**t_1**	4	2	1	−1	0	0	1	0	0	07	7/4
M	**t_2**	2	2	3	0	−1	0	0	1	0	06	03
M	⬅ **t_3**	4	1	2	0	0	−1	0	0	1	04	01
	Z_j	10M	5M	6M	− M	− M	− M	M	M	M	**Z = 17 M**	
	C_j-Z_j	100−10M	80−5M	40−6M	M	M	M	0	0	0		

	C_j →	100	80	40	0	0	0	M	M	M	**B**	
↓		**x_1**	⬇ **x_2**	**x_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**t_1**	**t_2**	**t_3**	**rayon**	**R_i**
M	**t_1**	0	1	−1	−1	0	1	1	0	/	01	01
M	⬅ **t_2**	0	3/2	2	0	−1	1/2	0	1	/	01	2/3
100	**x_1**	1	1/4	1/2	0	0	−1/4	0	0	/	3/2	06
	Z_j	100	25+5/2M	50+M	− M	−M	−25+3/2M	M	M	/	**Z=150+2 M**	
	C_j-Z_j	0	55−5/2M	10 − M	M	M	25−3/2M	0	0	/		

$C_j \rightarrow$		100	80	40	0	0	0	M	M	M	B	
$\downarrow$		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
M	t_1	0	0	−7/3	−1	2/3	2/3	1	/	/	1/3	1/2
80	x_2	0	1	4/3	0	−2/3	1/3	0	/	/	2/3	02
100	x_1	1	0	1/6	0	1/6	−1/3	0	/	/	4/3	/
	Z_j	100	80	370/3−7/3M	− M	− 110/3+2/3M	−20/3+2/3M	M	/	/	560/3+1/3 M	
	$C_j - Z_j$	0	0	−250/3−7/3M	M	110/3+2/3M	20/3−2/3M	0	/	/		

$C_j \rightarrow$		100	80	40	0	0	0	M	M	M	B	
$\downarrow$		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
0	S_3	0	0	−7/3	−3/2	1	1	/	/	/	1/2	/
80	x_2	0	1	5/2	1/2	−1	0	/	/	/	1/2	1/5
100	x_1	1	6	1	−1/2	1/2	0	/	/	/	3/2	3/2
	Z_j	100	80	100	−10	−30	0	/	/	/	Z = 190	
	$C_j - Z_j$	0	0	−60	10	30	0	/	/	/		

$C_j \rightarrow$		100	80	40	0	0	0	M	M	M	B	
$\downarrow$		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
0	S_2	0	7/5	0	−4/5	−2/5	1	/	/	/	6/5	
40	x_3	0	2/5	1	1/5	−2/5	0	/	/	/	1/5	
100	x_1	1	2/5	0	−3/10	1/10	0	/	/	/	17/10	
	Z_j	100	104	40	− 22	0	0	/	/	/	Z = 178	
	$C_j - Z_j$	0	24	0	0	0	0	/	/	/		

الحل الأمثل هو: $x_1=17/10$, $x_2=0$, $x_3=1/5$, $S_1=0$, $S_2=6/5$, $S_3=0$

Min $Z=80\ x_1+120\ x_2+84\ x_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5\,x_1 + 15\,x_2 + 7\,x_3 \geq 20 \\ 10\,x_1 + 12\,x_2 + 21\,x_3 \geq 15 \\ 4\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 \geq 18 \\ x_1 \geq 0\ ,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Min $Z=100\ x_1+120\ x_2+200\ x_3+M\ t_1+M\ t_2+M\ t_3$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5\,x_1 + 15\,x_2 + 7\,x_3 - S_1 + t_1 = 20 \\ 10\,x_1 + 12\,x_2 + 21\,x_3 - S_2 + t_2 = 15 \\ 4\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_3 - S_3 + t_3 = 18 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \\ S_1 \geq 0,\ S_2 \geq 0,\ S_3 \geq 0 \geq 0,\quad t_1 \geq 0,\ t_2 \geq 0, \end{cases}$$

$t_3 \geq 0$

C_j		80	012	84	0	0	0	M	M	M	**B**	
		x_1	⬇ x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	**rayon**	R_i
M	t_1	5	15	7	−1	0	0	1	0	0	20	3/4
M	⬅ t_2	10	12	21	0	−1	0	0	1	0	15	4/5
M	t_3	4	5	3	0	0	−1	0	0	1	18	18/5
Z_j		M91	M32	M37	− M	− M	− M	M	M	M	**Z = 53 M**	
$C_j - Z_j$		M90−18	0−12 M32	−84 M31	M	M	M	0	0	0		

C_j		80	012	84	0	0	0	M	M	M	**B**	
		x_1	x_2	x_3	S_1	⬇ S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	**rayon**	R_i
M	⬅ t_1	−15/2	0	−77/4	−1	5/4	0	1	/	0	5/4	1
120	x_2	5/6	1	7/4	0	−1/12	0	0	/	0	5/4	/
M	t_3	−1/6	0	−23/4	0	5/12	−1	0	/	1	47/4	141/5
Z_j		100− 91/6M	120	210+25M	− M	− 10+5/3M	− M	M	/	M		

$C_j - Z_j$	$-20+91/6M$	0	$-126+25M$	M	$10-5/3M$	M	0	/	0	Z = 150+13M

C_j		80	012	84	0	0	0	M	M	M	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
0	S_2	−6	0	−77/3	−4/5	1	0	/	/	0	1	/
120	x_2	1/3	1	7/15	−1/15	0	0	/	/	0	4/3	4
M	t_3	7/3	0	2/3	1/3	0	−1	/	/	1	34/3	34/7
	Z_j	$40+7/3M$	120	$56+2/3M$	$8+1/3M$	0	−M	/	/	M	160+34/3M	
	$C_j - Z_j$	$40-7/3M$	0	$28+2/3M$	$-8-1/3M$	0	M	/	/	0		

C_j		80	012	84	0	0	0	M	M	M	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
0	S_2	0	18	−7	−2	1	0	/	/	0	25	
80	x_1	1	3	7/5	−1/5	0	0	/	/	0	04	
M	t_3	0	−7	13/5	4/5	0	−1	/	/	1	02	
	Z_j	80	$240-7M$	$112-13/5M$	$-16+4/5M$	0	−M	/	/	M	Z= 320+2M	
	$C_j - Z_j$	0	$-120+7M$	$-28+13/5M$	$16-4/5M$	0	M	/	/	0		

C_j		80	012	84	0	0	0	M	M	M	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	t_1	t_2	t_3	rayon	R_i
0	S_2	0	1/2	−27/2	0	1	−5/2	/	/	/	30	
80	x_1	1	5/4	3/4	0	0	−1/4	/	/	/	9/2	
0	S_1	0	−35/4	−13/4	1	0	−5/4	/	/	/	5/2	
	Z_j	80	100	60	0	0	−20	/	/	/	Z = 360	
	$C_j - Z_j$	0	20	24	0	0	20	/	/	/		

الحل الأمثل هو: $x_1=9/2,\quad x_2=0,\quad x_3=0,\quad S_1=5/2,\quad S_2=30,\ S_3=$

الفصل الثالث

النموذج المقابل

I. تقديم

إن المسائل التي يتم صياغتها بأسلوب البرمجة الخطية يطلق عليها اصطلاح النماذج الأولية (Primal Models)، ومن الممكن إعادة صياغة البرنامج الأولي بأسلوب آخر يطلق عليه اصطلاح البرنامج المقابل أو الثنائي (Dual)، إذ أن لكل برنامج يوجد برنامج آخر يقابله، ومن هنا يتبين أن كل مسألة تتوفر فيها شروط البرمجة الخطية يمكن تمثيلها على شكل نموذج برمجة خطية يوجد لها نموذجان، الأول هو الذي يمثل المسألة الأولية، أما الثاني فهو البرنامج المقابل (الثنائي)، ويمثل الجانب الآخر من المسألة.

البرنامج الثنائي أو المقابل هو عبارة عن برنامج معكوس للبرنامج الأصلي يلجأ إليه عندما يصعب حل المسألة الأصلية، أي أن لكل برنامج من البرمجة الخطية هناك برنامج مقابل له ومشتق منه، فإذا كان البرنامج الأول متعلق بتعظيم دالة الهدف، فإن البرنامج المقابل له سيكون متعلق بتخفيض دالة الهدف، وتصاغ عادة من نفس البيانات التي يتضمنها البرنامج الأول والعكس صحيح، وعليه فإن كل صيغة من هذه الصيغ تحمل تفسيرات معينة، يمكن استخدامها لحل مسألة برمجة خطية واحدة بطرق مختلفة بالرغم من أن النتائج والمعلومات التي يتم الحصول عليها من حل مسائل البرمجة الخطية هي متشابهة في كلتا الحالتين[1].

II. مميزات النموذج المقابل (الثنائي Dual)

يتميز البرنامج الثنائي أو المقابل بمجموعة من الخصائص نذكرها فيما يلي[2]:

- يساعد البرنامج الثنائي على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان، وذلك بتقليص خطوات الحل، أي أن طريقة حل المسألة الثنائية تستلزم خطوات رياضية أقل تعقيدا من الخطوات اللازمة لحل المسألة الأولية أحيانا.

[1] حسيم محمد الجنابي، الأحدث في بحوث العمليات، دار حامد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2011، ص 157

[2] دلال صادق الجواد، محمد ناصر الفتال، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008، ص 105.

- يمكن إيجاد الحل الأمثل في البرنامج الثنائي عند وجود متغير أساسي في البرنامج ذو قيمة سالبة، في حين لا يمكن حل البرنامج الأولي إذا كان لأحد متغيراته قيمة سالبة.
- يساعد البرنامج الثنائي على إجراء تحليل ما بعد الأمثلية والتوصل إلى الحل بصورة مختصرة في حالة إضافة قيود جديدة للمسألة أو إجراء تغييرات في معاملات المتغيرات الأساسية.

I. تحويل النموذج الاولي Primal إلى النموذج المقابل Dual وبالعكس

من أجل تحويل البرنامج الأولي إلى البرنامج الثنائي وبالعكس يتم اتباع الخطوات التالية[3]:

- إذا كانت دالة الهدف في البرنامج الأولي من النوع تعظيم (Max) فإنها تحول إلى النوع تخفيض (Min) في البرنامج الثنائي والعكس صحيح.
- عدد المتغيرات في البرنامج الأولي يكون مساويا لعدد القيود في البرنامج الثنائي، فمثلا إذا كان البرنامج الخطي يحتوي على ثلاث متغيرات فإن البرنامج الثنائي سيحتوي على ثلاث قيود.
- عدد القيود في البرنامج الأولي يكون مساويا لعدد المتغيرات في النموذج الثنائي، فمثلا إذا كان النموذج الأولي يحتوي على أربعة قيود فإن البرنامج الثنائي سيحتوي على أربعة متغيرات.
- إذا كانت القيود في البرنامج الأولي على شكل أكبر أو يساوي ($\geq$) فإنها تتحول إلى الشكل أصغر أو يساوي ($\leq$) في البرنامج الثنائي والعكس صحيح أيضا.
- معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي هي قيم الجوانب اليمنى أو الموارد bi للنموذج الثنائي، وقيم الجوانب اليمنى أو الموارد bi للنموذج الأولي تصبح معاملات دالة الهدف في البرنامج الثنائي.

[3] عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل إلى بحوث العمليات الطبعة الثالثة، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2009، ص 71.

- معاملات كل متغير في قيود البرنامج الأولي حسب ترتيب القيود تتحول إلى معاملات متغيرات قيود البرنامج الثنائي حسب نفس الترتيب.
- في كلا البرنامجين تكون المتغيرات غير سالبة مادام صيغة البرنامج الأولي قانونية.

II. صياغة المشكلة المقابلة الثنائية

إذا كان البرنامج الأولي في شكل الصيغة القانونية التالية[4]:

$$\mathrm{Max}\ (z) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

فإن برنامجه الثنائي يكون على الشكل التالي:

$$\mathrm{Min}\ (z) = b_1y_1 + b_2y_2$$

$$s/c \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 \ge c_2 \\ a_{13}y_1 + a_{23}y_2 \ge c_3 \end{cases}$$

$$(y_1, y_2) \ge 0$$

[4] سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، الجامعة المفتوحة، الطبعة الأولى، طرابلس، ليبيا، 2002، ص 108– 110.

يلاحظ أن هذين البرنامجين متناظرين، ويظهر التناظر عموما من خلال الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	--	--	x_n	$\geq$	0
y_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	--	--		$\leq$	b_1
y_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	--	--		$\leq$	b_2
y_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	--	--		$\leq$	b_3
--	--	--	--	--	--	--	--	--
--	--	--	--	--	--	--	--	--
y_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}	--	--	a_{mn}	$\leq$	b_m
$\geq$	$\geq$	$\geq$	$\geq$	--	--	$\geq$		
0	c_1	c_2	c_3	--	--	c_n		Min max

III.العلاقة بين الاصلية والثنائية

تمثلت هذه العلاقة في[5]:

- **نظرية الثنائية القوية: forte dualité de la Théorème**

إذا كان النموذج الأولي P والنموذج الثنائي، حيث أن $(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*)$ حل أساس مقبول للنموذج الأولي P، و $(y_1^*, y_2^* \dots y_m^*)$ حل أساس مقبول للنموذج الثنائي P_D، وحقق الحلان المقبولان العلاقة:

$$\sum_{J=1}^{n} c_j\, x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i\, y_i^*$$

أي: $Z = W$

فإن: الحلين المقبولين $(x_1^*, x_2^* \dots x_n^*)$ و $(y_1^*, y_2^* \dots y_m^*)$هما حلين أمثلين للنموذجين الأولي والثنائي على التوالي.

[5] فتيحة بلجيلالي، محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، مقدم لطلبة سنة ثالثة ليسانس علوم التسيير، جامعة ابن خلدون تيارت، 2017/ 2018، ص 75- 78.

- **نظرية الثنائية الضعيفة: faible dualité de la Théorème**

إذا كان النموذج الأولي P والنموذج الثنائيP_D، حيث أنه من أجل أي حل أساس مقبول $(x'_1, x'_2 \dots x'_n)$ للنموذج الأولي P، ومن أجل أي حل أساس مقبول $(y'_1, y'_2 \dots y'_m)$ للنموذج الثنائي P_D فإن:

- **إذا كان النموذج الأولي من نوع تعظيم Max:** قيمة دالة الهدف للنموذج الأولي من أجل أي حل أساس مقبول تكون دائما أقل أو تساوي قيمة دالة الهدف للنموذج الثنائي، أي:

$$z\,(x'_1, x'_2 \dots x'_n) \leq w(y'_1, y'_2 \dots y'_m)$$
$$C_1x'_1 + C_2x'_2 + \cdots C_nx'_n \leq b_1y'_1 + b_2y'_2 + \cdots b_my'_m$$
$$\sum_{J=1}^{n} c_j\ x'_j \leq \sum_{i=1}^{m} b_i\, y'_i$$

- **إذا كان النموذج الأولي من نوع تدنية Min:** قيمة دالة الهدف Z للنموذج الأولي من أجل أي حل أساس مقبول تكون دائما أكبر أو تساوي قيمة دالة الهدف W للنموذج الثنائي، أي:

$$z\,(x'_1, x'_2 \dots x'_n) \geq w(y'_1, y'_2 \dots y'_m)$$
$$C_1x'_1 + C_2x'_2 + \cdots C_nx'_n \geq b_1y'_1 + b_2y'_2 + \cdots b_my'_m$$

$$\sum_{J=1}^{n} c_j\, x'_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i\, y'_i$$

- **نظرية الفجوات المكملة: complémentaires écarts des Théorème**

لا تقتصر العلاقة بين النموذجين الأولي و الثنائي على تساوي دالتي الهدف عند الحل الأمثل، و لكنها تتعدى إلى استنتاج الحل الأمثل لأحد النموذجين انطلاقا من الحل الأمثل للنموذج

الآخر الذي تم حله باستخدام طريقة السمبلكس، وهذا ما يمثل مضمون نظرية الفجوات المكملة، والتي مفادها ما يلي[6]:

- $\mathbf{S}_i y'_i = \mathbf{0}$

إذا كانت: $S_i = 0$ فإن $y'i \neq 0$ أي $y'_i > 0$

أي أنه إذا كان القيد رقم i للنموذج الأولي مشبعا، فإن المتغيرة رقم i (y_i) للنموذج الثنائي أكبر من الصفر.

إذا كانت: $y'_i = 0$ فإن $S_i \neq 0$ أي $S_i > 0$

أي أنه إذا كان القيد رقم i للنموذج الأولي غير مشبع، فإن المتغيرة رقم i (y_i) للنموذج الثنائي تساوي الصفر.

- $\mathbf{k}_i x'_i = \mathbf{0}$

إذا كانت: $k_i = 0$ فإن $x'_i \neq 0$ أي $x'_i > 0$

أي أنه إذا كان القيد رقم i للنموذج الثنائي مشبعا، فإن المتغيرة رقم i (x_i) للنموذج الأولي أكبر من الصفر.

إذا كانت: $x'_i = 0$ فإن $ki \neq 0$ أي $x_i > 0$

أي أنه إذا كان القيد رقم i للنموذج الثنائي غير مشبع، فإن المتغيرة رقم i (x_i) للنموذج الثنائي تساوي الصفر.

---

[6] فتيحة بلجيلالي، المرجع السابق، ص 79، 80.

مثال:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

النموذج الثنائي	النموذج الأولي
$Min\ W = 300\ y_1 + 190\ y_2 + 110\ y_3 + 130\ y_4$ *Soumise aux contraintes* $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \geq 200 \\ 2y_1 + y_2 + y_4 \geq 370 \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$	$Max\ Z = 200\ x1 + 370\ x2$ *Soumise aux contraintes* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 300 \\ x_1 + x_2 \leq 190 \\ x_1 \leq 110 \\ x_2 \leq 130 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$

الحل الأمثل للنموذج الأولي هو:

$x_1 = 80$، $x_2 = 110$، قيمة دالة الهدف: $Z = 56700$

ولاستنتاج الحل الأمثل للنموذج الثنائي، نتبع الخطوات التالية:

كتابة النموذجين على الشكل المعياري:

النموذج الثنائي	النموذج الأولي
$Min\ W = 300\ y_1 + 190\ y_2 + 110\ y_3 + 130\ y_4$ *Soumise aux contraintes* $\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + k_1 = 200 \\ 2y_1 + y_2 + y_4 + k_2 = 370 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, k_1, k_2 \geq 0 \end{cases}$	$Max\ Z = 200\ x1 + 370\ x2$ *Soumise aux contraintes* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + s_1 = 300 \\ x_1 + x_2 + s_2 = 190 \\ x_1 + s_3 = 110 \\ x_2 + s_4 = 130 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0 \end{cases}$

استنتاج قيم متغيرات الفجوة للنموذج الأولي:

$$S_1 = 300 - x_1 - 2x_2 = 300 - 80 - 2(110) \Rightarrow S_1 = 0$$

$$S_2 = 190 - x_1 - x_2 = 190 - 80 - 110 \Rightarrow S_2 = 0$$

$$S_3 = 110 - x_1 = 110 - 80 \Rightarrow S_3 = 30$$

$$S_4 = 130 - x_2 = 130 - 110 \Rightarrow S_4 = 20$$

استنتاج قيم متغيرات النموذج الثنائي و الحل الأمثل الموافق له:

لاستنتاج قيم متغيرات النموذج الثنائي، نقوم باستخدام نظرية الفجوات المكملة، والتي تقوم على الشرطين:

- $\boldsymbol{S_i\, y'_i = 0}$

بما أن: $S_1 = 0$ فإن $y_1 \neq 0$ أي $y_1 > 0$

بما أن: $S_2 = 0$ فإن $y_2 \neq 0$ أي $y_2 > 0$

بما أن: $S_3 = 30$ أي $S_3 \neq 0$ فإن $S_3 > 0$ أي $y_3 = 0$

بما أن: $S_4 = 20$ أي $S_4 \neq 0$ فإن $S_4 > 0$ أي $y_4 = 0$.

- $\mathbf{k_i\, x'_i = 0}$

بما أن: $x_1 = 80$ أي $x_1 \neq 0$ فإن $x_1 > 0$ أي $k_1 = 0$

بما أن: $x_2 = 110$ أي $x_2 \neq 0$ فإن $x_2 > 0$ أي $k_2 = 0$

وبغية الحصول على قيم باقي المتغيرات y_1 و y_2 نقوم بتعويض:

$k_1 = 0$، $y_4 = 0$، $y_3 = 0$، $k_2 = 0$ المحصل عليها أعلاه في القيود الوظيفية للنموذج الثنائي في شكله المعياري، فنجد:

$$y_1 + y_2 + 0 + 0 = 200$$
$$2y_1 + y_2 + 0 + 0 = 370$$

نقوم بحل جملة المعادلات، فنحصل على: $y_1 = 170$ ، $y_2 = 30$ وبعد تعويض القيم المحصل عليها في دالة الهدف للنموذج الثنائي نحصل على:

$$W = 300\,(170) + 190\,(30) + 110\,(0) + 130\,(0) = 56700$$

وبما أن قيم دوال الهدف للنموذجين الأولي والثنائي متساوية، فإن الحل المستنتج للنموذج الثنائي هو الحل الأمثل.

IV. كيفية ايجاد الحل للمشكلة المقابلة

يمكن إيجاد الحل لمشكلة المقابلة وذلك باستخدام إحدى الطرق الطريقة المبسطة simplex، طريقة M كبيرة، وطريقة ذات المرحلتينٌ two–phase، ومعاملتها كأي مشكلة برمجة خطية أولية، إلا أنه يمكن الحصول على قيم المتغيرات ودالة الهدف للمشكلة الثنائية مباشرة وذلك من جدول الحل الأمثل[7].

ولتوضح ذلك نأخذ مشكلة البرمجة الخطية الآتية:

$$Max\ (Z) = 2X + 3X_2$$

Subject to

$$X_1 + 2X_2 \leq 20$$

$$X_1 + X_2 \leq 12$$

$$X_1 + X_2 \geq 0$$

وكان الجدول الاخير والحل الامثل كالتالي :

المتغيرات الاساسية B. V	X_1	X_2	s_1	s_2	الثابت
X_1	0	1	1	−1	08
X_2	1	0	−1	2	04
Z	0	0	1	1	32

كما يتضح من الجدول فإن جميع المعاملات في دالة الهدف إما موجبة أو صفرية، وهذا يعني التوصل إلى الحل الأمثل للمشكلة قيد الدراسة والذي يكون:

$X_1 = 4$، $X_2 = 8$ وقيمة الهدف $Z = 32$

المطلوب:

- تحويل البرنامج الخطي الاصلي primal أعلاه إلى البرنامج الثنائي المقابل Dual؟
- استنتج الحل الأمثل لثنائية من الحل الأمثل للأصلية؟.

الحل :

[7] ضو نصر، المرجع السابق، ص 63، 64.

يمكن صياغة النموذج المقابل للنموذج الأولي للمشكلة كالآتي:

$$Min\ (w) = 20\ U_1 + 12\ U_2$$

Subject to

$$U_1 + U_2 \geq 2 \ldots \ldots \ldots 1$$

$$U_1 + U_2 \geq 3 \ldots \ldots \ldots 2$$

$$U_1 + U_2 \geq 0$$

استنتاج الحل الأمثل لثنائية من الحل الأمثل للأصلية:

في الجدول النهائي الحل الأمثل: $\text{Max (Z)} = \text{Min (W)} = 32-$

– قيمة Z تبدأ في تزايد إلى أن تصل 32، بينما قيمة تبدأ في تناقص إلى التعادل إلى أن تصل 32، هذه النتيجة تتطلب الوصول إلى نقطة التعادل، والوصول إلى نقطة التعادل يكمن في حالة تعادل قيمة دالتي الهدف للأصلية والثنائية، وحالة التعادل تمثل الحل الأمثل، هاتنٌ النتيجتينٌ يمكن أن تعمم على أي زوج –الأصلية– الثنائية:

* لأي زوج حل عملي للأصلية والثنائية أي أن: قيمة دالة الهدف في Max (Z) قيمة دالة الهدف في Min (W).

*عند الحل الأمثل للأصلية والثنائية: قيمة دالة الهدف في قيمة دالة الهدف في.

*إيجاد أيم الثنائية من الحل الأمثل للأصلية عن طريق العلاقة: معاملات دالة الهدف في الحل الأمثل للأصلية = الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية.

*وتكون هذه العلاقة صالحة لإيجاد قيم الأصلية من الحل الأمثل لثنائية: معاملات دالة الهدف في الحل الأمثل لثنائية تساوي الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن لقيد الأصلية المشارك مع المتغير الأساسي للثنائية.

والملاحظ في جدول الأصلية قيم المتغيرات الغير الأساسية S_1 و S_2 ومعاملاتها في الدالة الاقتصادية Z هي على التوالي: 1، 1، أما أيود الثنائية المشاركة مع S_1 و S_2 ، هي على التوالي: $U_1 \geq 0\,, U_2 \geq 0$، وبوضع هذه المعلومات في الجدول التالي يمكن إيجاد قيم U_1 و U_2.

المتغيرات الأساسية الأصلية	S_1	S_2
معاملات دالة الهدف في الحل الأمثل للأصلية	1	1
الفرق بين الطرف الأيسر والطرف الأيمن لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية	$U_1 - 0$	$U_2 - 0$

إذا وضعنا:

$$\mathrm{U1} = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{U}_1 - 0 = 1$$
$$\mathrm{U2} = 1 \;\Rightarrow\; \mathrm{U2} - 0 = 1$$

نفس الشيء يمكن أن يطبق على إيجاد أيم الأصلية من الثنائية وهذا بعكس المصطلحات السابقة كما تمت الإشارة إليه سابقا.

V. عدم توفر شرط سلبية المتغيرات

في بعض الحالات يمكن أن تكون بعض المتغيرات في المسألة الأولية غير متقيدة بشرط عدم السلبية، غيرً أن نموذج البرمجة الخطية يشترط عدم سلبية كل المتغيرات، وفي الحالة يجب استعمال التحايل الرياضي، بحيث ندخل إلى النظام متغيرات كلها غير سالبة وذلك وفق المعالجات التالية[8]:

1. إذا كان أحد المتغيرات أقل أو يساوي الصفر $x_1 \leq 0$

[8] ضو نصر، المرجع السابق، ص 64، 65.

في هذه الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج وفق تغيير متغير بفرض:

$$x_1 = x'_j$$
$$x'_j \geq 0$$

يتم تعويض المتغير الجديد في البرنامج الأصلي، ثم نتبع جداول الحل الأمثل بشكل عادي، وعند الحل نحول المتغير x'_j إلى أصله وفق التحويل الأولي.

2. إذا كان أحد المتغيرات غير محدود (طليق)

ويمكن في هده الحالة أن تأخذ المتغيرات قيمة مهما كانت في الاتجاه الموجب أو السالب وفق العلاقة التالية:

$$x_j \in (-\infty , +\infty)$$

في هذه الحالة يتم إجراء تعديل على البرنامج بحيث نفرض:

$$x_j = x'_j - x''_j$$

حيث أن:

$$x_j \geq 0 , x''_j \geq 0$$

أي أن x_j عبارة عن الفرق بنٌ أيمتنٌ موجبتينٌ، بحيث نفرض[9]:

إذا كان x_j موجبا يكون: $x_j > x''_j$

إذا كان x_j سالبا يكون: $x_j < x''_j$

إذا كان x_j معدوما يكون: $x_j = x''_j$

يتم تعويض المتغير وفق التحويل الجديد في البرنامج الأصلي، ثم يتم إيجاد الحل الأمثل، ونقوم بإيجاد قمة المتغير الأصلي وفق صيغة التحويل أعلاه.

[9] ضو نصر، المرجع السابق، ص 65.

VI. تمارين محلولة

التمرين الأول

لتكن نماذج البرمجة الخطية التالية:

$Max\ Z = 10\ x_1 + 15\ x_2$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 2\ x_1 + 4\ x_2 \leq 40 \\ 6\ x_1 + 2\ x_2 \leq 60 \\ 0x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$	$Max\ Z = 20\ x_1 + 15\ x_2 + 18\ x_3$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \leq 80 \\ 15x_1 + 12x_2 + 5x_3 \leq 120 \\ 7x_1 + 21x_2 + 3x_3 \leq 84 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$
الحل الأمثل: $x_1=8,\ x_2=6$	**الحل الأمثل: $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=20$**
$\text{Min W} = 4200y_1 + 2250y_2 + 2600y_3 + 4200y_4$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 66 \\ 4y_1 + 3y_2 + 2\ y_3 \geq 84 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0 \end{cases}$	$\text{Min W} = 30\ y_1 + 24\ y_2 + 18y_3$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 80 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 84 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$
الحل الأمثل: $y_1=18,\ y_2=0,\ y_3=6,\ y_4=0$	**الحل الأمثل: $y_1=13,\ y_2=0,\ y_3=15$**

المطلوب:

1- أوجد النماذج الثنائية للنماذج الأصلية، والعكس؛

2- باستخدام نظرية الفجوة المكملة، وانطلاقا من الحلول المثلى للنماذج الأولية أوجد الحلول المثلى للنماذج الثنائية والعكس.

حل التمرين الأول:

1- إيجاد النموذج الثنائي للنموذج الأولي:

$Max\,Z = 20\,x_1 + 15\,x_2 + 18\,x_3$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 + 4x_3 \leq 80 \\ 15x_1 + 12x_2 + 5x_3 \leq 120 \\ 7x_1 + 21x_2 + 3x_3 \leq 84 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases}$	$\Rightarrow$	$Min\,W = 80\,y_1 + 120\,y_2 + 84\,y_3$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 5y_1 + 15y_2 + 7y_3 \geq 20 \\ 10y_1 + 12y_2 + 21y_3 \geq 15 \\ 4y_1 + 5y_2 + 3y_3 \geq 18 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$

2- استنتاج الحل الأمثل للنموذج الثنائي بناءً على نظرية الفجوات المكملة

:($ki\,x'i = 0$ و $Si\,y'i = 0$)

$$Max\,Z = 20\,x_1 + 15\,x_2 + 18\,x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5(0) + 10(0) + 4(20) + \boldsymbol{S1} = 80 \Rightarrow \boldsymbol{S1} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y1} > 0 \\ 15(0) + 12(0) + 5(20) + \boldsymbol{S2} = 120 \Rightarrow \boldsymbol{S2} = 20 \Rightarrow \boldsymbol{y2} = 0 \\ 7(0) + 21(0) + 3(20) + \boldsymbol{S3} = 84 \Rightarrow \boldsymbol{S3} = 24 \Rightarrow \boldsymbol{y3} = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Min\,W} = 80\,\mathrm{y}_1 + 120\,\mathrm{y}_2 + 84\,\mathrm{y}_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5y_1 + 15(0) + 7(0) - k_1 = 20 \\ 10y_1 + 12(0) + 21(0) - k_1 = 15 \\ 4y_1 + 5(0) + 3(0) - (0) = 18 \quad \Rightarrow y_1 = 9/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(9/2) - \boldsymbol{k_1} = 20 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{k_1} = 5/2 \\ 10(9/2) - \boldsymbol{k_2} = 15 \quad \Rightarrow \boldsymbol{k_2} = 30 \end{cases}$$

الحل الأمثل للنموذج الثنائي هو:

$$y_1 = \frac{9}{2}, \quad y_2 = 0, y_3 = 0, k_1 = \frac{5}{2}, k_2 = 30, k_3 = 0$$

1- إيجاد النموذج الثنائي للنموذج الأولي:

$Max\ Z = 10\, x_1 + 15\, x_2$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 2\, x_1 + 4\, x_2 \leq 40 \\ 6\, x_1 + 2\, x_2 \leq 60 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$	$\Rightarrow$	$Min\ W = 40\, y_1 + 60\, y_2$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 2\, y_1 + 6\, y_2 \geq 10 \\ 4\, y_1 + 2\, y_2 \geq 15 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0 \end{cases}$

2- استنتاج الحل الأمثل للنموذج الثنائي بناءً على نظرية الفجوات المكملة

:($ki\ x'i = 0$ و $Si\ y'i = 0$)

$$\text{Max Z} = 10\, x_1 + 15\, x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2\,(8) + 4\,(6) + \boldsymbol{S_1} = 40 \Rightarrow \boldsymbol{S_1} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y_1} > 0 \\ 6\,(8) + 2\,(6) + \boldsymbol{S_2} = 60 \Rightarrow \boldsymbol{S_2} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y_2} > 0 \end{cases}$$

$$Min\ W = 40\, y_1 + 60\, y_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 2\, y_1 + 6\, y_2 - \mathbf{k_1} = 10 \Rightarrow 2\, y_1 + 6\, y_2 - (\mathbf{0}) = 10 \Rightarrow 2\, y_1 + 6\, y_2 = 10 \\ 4\, y_1 + 2\, y_2 - \mathbf{k_2} = 15 \Rightarrow 4\, y_1 + 2\, y_2 - (\mathbf{0}) = 15 \Rightarrow -12\, y_1 - 6\, y_2 = -45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10\, y_1 = -45 \Rightarrow y_1 = 9/2 \\ 2\,(9/2) + 6\, y_2 = 10 \Rightarrow y_2 = 1/6 \end{cases}$$

الحل الأمثل للنموذج الثنائي هو: $y1 = \frac{9}{2}, y2 = 1/6,\ k1 = 0, k2 = 0$

1- إيجاد النموذج الأولي للنموذج الثنائي:

$\text{Min } W = 30\,y_1 + 24\,y_2 + 18y_3$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 5y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 80 \\ 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 84 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0 \end{cases}$	$\Rightarrow$	$\text{Max } Z = 80\,x_1 + 84\,x_2$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 24 \end{cases}$ $x_1 + 3x_2 \leq 18$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

2- استنتاج الحل الأمثل للنموذج الأولي بناءً على نظرية الفجوات المكملة

:($ki\,x'i = 0$ و $Si\,y'i = 0$)

$$\text{Min } W = 30\,y_1 + 24\,y_2 + 18y_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5(13) + 2(0) + (15) - \boldsymbol{k_1} = 80 \Rightarrow \boldsymbol{k_1} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1} > 0 \\ 3(13) + 3(0) + 3(15) - \boldsymbol{k_2} = 84 \Rightarrow \boldsymbol{k_2} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_2} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 80\,x_1 + 84\,x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + (\mathbf{0}) = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + \mathbf{S_2} = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ -x_1 - 3x_2 = -18 \end{cases} \Rightarrow 4\,x_1 = 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x_1 = 3}\ ,\ \mathbf{x_2 = 5} \\ x_1 + 3x_2 + (\mathbf{0}) = 18 \end{cases}$$

الحل الأمثل للنموذج الأولي هو: $S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 0, x_1 = 3,\ x_2 = 5$

1- إيجاد النموذج الأولي للنموذج الثنائي:

$Min\,W = 4200y_1 + 2250y_2 + 2600y_3 + 4200y_4$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \geq 66 \\ 4y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 84 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0,\ y_4 \geq 0 \end{cases}$	$\Rightarrow$	$Max\,Z = 66\,x_1 + 84\,x_2$ Soumise aux contraintes $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 4200 \\ x_1 + 3x_2 \leq 2250 \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 2600 \\ x_1 \leq 4200 \end{cases}$ $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

2- استنتاج الحل الأمثل للنموذج الأولي بناءً على نظرية الفجوات المكملة

($Si\,y'i = 0$ و $ki\,x'i = 0$):

$$Min\,W = 4200y_1 + 2250y_2 + 2600y_3 + 4200y_4$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 3(18) + (0) + 2(6) + (0) - \boldsymbol{k_1} = 66 \Rightarrow \boldsymbol{k_1} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_1} > 0 \\ 4(18) + 3(0) + 2(6) - \boldsymbol{k_2} = 84 \Rightarrow \boldsymbol{k_2} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x_2} > 0 \end{cases}$$

$$Max\,Z = 66\,x_1 + 84\,x_2$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + (\mathbf{0}) = 4200 \\ x_1 + 3x_2 + \mathbf{S_2} = 2250 \\ 2x_1 + 2x_2 + (\mathbf{0}) = 2600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 4200 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 4200 \\ -4x_1 - 4x_2 = -5200 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x_1 = 1000}$$

$$x_1 + \mathbf{S_4} = 4200$$

$$\begin{cases} 3(1000) + 4x_2 = 4200 \Rightarrow \boldsymbol{x_2 = 300} \\ (1000) + 3(300) + \boldsymbol{S_2} = 2250 \Rightarrow \boldsymbol{S_2 = 350} \\ 2(1000) + 2(300) = 2600 \\ 1000 + \boldsymbol{S_4} = 4200 \Rightarrow \boldsymbol{S_4} = 3200 \end{cases}$$

الحل الأمثل للنموذج الأولي هو:

$$S_1 = 0, S_2 = 350, \qquad S_3 = 0, S_4 = 3200\,, x_1 = 1000, x_2 = 300$$

التمرين الثاني:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$Max\ Z = 5x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30 \\ 2\,x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 48 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 32 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب:

1– تطبيق طريقة السمبلكس يسمح لنا بالحصول على الجدول التالي:

$C_j \rightarrow$ / $\downarrow C_j$		05	03	06	0	0	0	**B**	
		x_1	**x_2**	**x_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**rayon**	**R_i**
05	**x_1**	1	0	0	1/2	3/2	−5/2	07	
06	**x_3**	0	0	1	−1/2	−1/2	3/2	09	
03	**x_2**	0	1	0	1/2	−1/2	1/2	07	
	Z_j	5	3	6	1	3	−2	Z = 110	
	$C_j – Z_j$	0	0	0	−1	−3	2		

هل جدول السمبلكس أعلاه يمثل الحل الأمثل؟ اشرح.

2– أوجد جدول الحل الأمثل؛

3– شكِّل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي أعلاه؛

4– انطلاقا من جدول سمبلكس الحل الأمثل المتوصل إليه، قم بقراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي.

حل التمرين الثاني:

1- **لا**، جدول السمبلكس أعلاه **لا** يمثل الحل الأمثل، لأن قيم $(Cj - Zj)$ لا تحقق شرط الأمثلية.

2-إيجاد جدول الحل الأمثل:

C_j		05	03	06	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
05	x_1	1	0	0	1/2	3/2	−5/2	07	/
06	x_3	0	0	1	−1/2	−1/2	3/2	09	06
03	x_2	0	1	0	1/2	−1/2	1/2	07	14
Z_j		5	3	6	1	3	−2	Z = 110	
$C_j - Z_j$		0	0	0	−1	−3	2		

C_j		05	03	06	0	0	0	B	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	rayon	R_i
05	x_1	1	0	5/3	−1/3	2/3	0	22	
00	S_3	0	0	2/3	−1/3	−1/3	1	06	
03	x_2	0	1	−1/3	2/3	−1/3	0	04	
Z_j		5	3	22/3	1/3	7/3	0	Z = 122	
$C_j - Z_j$		0	0	−4/3	−1/3	−7/3	0		

الحل الأمثل للنموذج الأولي هو:

$$S_1 = 0, S_2 = 0, S_3 = 06 \quad x_1 = 22, \quad x_2 = 04$$

3-تشكيل نموذج البرمجة الخطية الثنائي للنموذج الأولي:

$$\text{Min } W = 30\,y_1 + 48\,y_2 + 32\,y_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 5 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 6 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

4- قراءة الحل الأمثل للنموذج الثنائي الموافق للنموذج الأصلي انطلاقا من جدول السمبلكس:

$$\boldsymbol{yi} = -\boldsymbol{Zj} \quad \Rightarrow \quad y_1 = -1/3, \; y_2 = -7/3, \; y_3 = 0$$

$$\boldsymbol{ki} = -(\boldsymbol{C\,j} - \boldsymbol{Z\,j}) \;\Rightarrow\; x_1 = 0, \; y_2 = 0, \quad y_3 = 4/3$$

التمرين الثالث:

ليكن نموذج البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 600\,x_1 + 800\,x_2 + 500\,x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1 + 2\,x_2 + 4x_3 \leq 500 \\ 2x_1 + 2\,x_2 + x_3 \leq 400 \\ x_1 + 3\,x_2 + 2x_3 \leq 200 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

أثناء عملية تطبيق طريقة السمبلكس تم التوصل إلى الجدول أدناه:

$C_j \rightarrow$ ↓		600	800	500	00	00	00	→
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	B
600	x_1	1	0	4/5	3/10	0	−1/5	110
00	S_2	0	0	−7/5	−2/5	1	−2/5	120
800	x_2	0	1	2/5	−1/10	0	2/5	30
Z_j		600	800	800	100	0	200	Z = 90000
$Z = C_j - Z_j$		00	00	−300	−100	0	−200	

المطلوب:

1− هل الحل المتوصل إليه هو حل أمثل؟ و لماذا؟ قدم الحل الأمثل للنموذج أعلاه؛

2− بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني قد تغير بمقدار ΔC_2، حدد مجال تغيره لكي يبقى الحل أمثلا. وفي حال انخفاض هذا الربح بمقدار (-420) هل يبقى الحل أمثلا؟

3− بافتراض أن هذه المؤسسة قررت إضافة مورد جديد يستخدم كالتالي:

$4\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 \leq 300$، هل يبقى الحل أمثلا في هذه الحالة؟ قدم الحل الأمثل.

<u>حل التمرين الثالث</u>:

1− **نعم** الحل المتوصل إليه هو **حل أمثل**، حيث:

$$x_1 = 110,\ \ x_2 = 30,\ \ x_3 = 0$$

$$S_1 = 0,\ \ S_2 = 120,\ \ S_3 = 0$$

2− بافتراض أن الربح الوحدوي للمنتج الثاني قد تغير بمقدار ΔC_2 :

C_j → ↓		600	$800+\Delta C_2$	500	00	00	00	→
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	B
600	x_1	01	00	4/5	3/10	00	−1/5	110
00	S_2	00	00	−7/5	−2/5	01	−2/5	120
$800+\Delta C_2$	x_2	00	01	2/5	−1/10	00	2/5	30
Z_j		600	$800+\Delta C_2$	$800+2/5\Delta C_2$	$100-1/10\Delta C_2$	00	$200+2/5\Delta C_2$	Z = 90000
$Z = C_j - Z_j$		00	00	$-300-2/5\Delta C_2$	$-100+1/10\Delta C_2$	00	$-200-2/5\Delta C_2$	

تحديد مجال تغير ΔC_2 لكي يبقى الحل أمثلا:

لكي يبقى الحل أمثلا يجب تحقق معيار الأمثلية لنموذج التعظيم:

$Cj - Zj \leq 0$ وعليه:

$-300-2/5\Delta C_2 \leq -2/5\Delta C_2 \leq 300 \Rightarrow 2/5\Delta C_2 \geq -300 \Rightarrow \Delta C_2 \geq -750$

$-100+1/10\Delta C_2 \leq 0 \Rightarrow 1/10\Delta C_2 \leq 100 \Rightarrow \Delta C_2 \leq 1000$

$-200-2/5\Delta C_2 \leq 0 \Rightarrow -2/5\Delta C_2 \leq 200 \Rightarrow 2/5\Delta C_2 \geq -200 \Rightarrow \Delta C_2 \geq -500$

إذن: $-500 \geq \Delta C2 \leq 1000$

في حال انخفاض هذا الربح بمقدار (− 420) نعم يبقى الحل أمثلا (تنخفض قيمته):

$C_j \rightarrow$ ↓		600	380	500	00	00	00	→
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	B
600	x_1	01	00	4/5	3/10	00	−1/5	110
00	S_2	00	00	−7/5	−2/5	01	−2/5	120
380	x_2	00	01	2/5	−1/10	00	2/5	30
Z_j		**600**	**380**	**632**	**142**	**00**	**32**	**Z = 77400**
$Z = C_j - Z_j$		**00**	**00**	**−132**	**−142**	**00**	**−32**	

3− بافتراض أن هذه المؤسسة قررت إضافة مورد جديد يستخدم كالتالي:

$$\mathbf{4\,x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 \leq 300}$$

$$Max\ Z = 600\ x_1 + 800\,x_2 + 500\,x_3$$

Soumise aux contraintes

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 500 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 400 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 200 \\ 4\,x_1 + 2x_2 + 4\,x_3 \leq 300 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

عند تعويض قيم الحل الأمثل المتوصل إليه في الجدول أعلاه نحصل على:

$$4(110) + 2\ (30)\ + 4(0)\ + S_4 = 300 \quad \Rightarrow \quad S_4 = -200$$

- تُضرب قيم السطر الأول في القيمة (4−)، فنحصل على:

x₁	−4	0	−16/5	−6/5	0	4/5	0	−440

- تُضرب قيم السطر الثالث في القيمة (2−)، فنحصل على:

x₂	0	−2	−4/5	1/5	0	−4/5	0	−60

- أما بالنسبة للقيم الجديدة لسطر متغيرة الأساس S_4يتم الحصول عليها عن طريق جمع قيم الأسطر الجديدة لمتغيرتي القرار الأولى والثانية (السطر الأول والثالث)، مع القيم القديمة لـ S_4فنحصل على:

x₁	−4	0	−16/5	−6/5	0	4/5	0	−440
x₂	0	−2	−4/5	1/5	0	−4/5	0	−60
S₄	4	2	4	0	0	0	1	300
S₄	**0**	**0**	**0**	**−1**	**0**	**0**	**1**	**−200**

وبتعويض القيم الجديدة **فقط** لمتغيرة الأساس S_4 في جدول الحل الأمثل نحصل على:

C_j → ↓		600	800	500	00 ⬇	00	00	**00**	→
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	$\boldsymbol{S_4}$	B
600	x_1	01	00	4/5	3/10	00	−1/5	**00**	110
00	S_2	00	00	−7/5	−2/5	01	−2/5	**00**	120
800	x_2	00	01	2/5	−1/10	00	2/5	**00**	30
00 ⬅	$\boldsymbol{S_4}$	**00**	**00**	**0**	**−01**	**00**	**0**	**01**	**−200**
	Z_j	600	800	920	100	00	200	00	Z = 90000
	$Z = C_j - Z_j$	00	00	−420	−100	00	−200	00	

معيار الأمثلية في الجدول أعلاه غير محقق، لذا فالحل المتوصل إليه ليس أمثلا، مما يتطلب تشكيل جدول سمبلكس آخر بالاعتماد على الخوارزمية الثنائية للسمبلكس:

C_j		600	800	500	00	00	00	00	
		x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
600	x_1	01	00	4/5	00	00	−1/5	3/10	50
00	S_2	00	00	−7/5	00	01	−2/5	−2/5	200
800	x_2	00	01	2/5	00	00	2/5	− 1/10	50
00	S_1	00	00	0	01	00	0	−1	200
Z_j		600	800	800	00	00	440	100	Z= 70000
$Z = C_j - Z_j$		00	00	−300	00	00	00	−100	

الفصل الرابع

نمـــــــاذج النـــــــقل

I. ماهية نماذج النقل

يعد النقل بفروعه وأنشطته المختلفة مكونا مهما من مكونات البنية الأساسية للاقتصاد الوطني وركيزة أساسية للتنمية الاقتصادية والاجتماعية الشاملة في أي بلد نظرا لما له من تأثير على القطاعات الاقتصادية الأخرى فهناك علاقة ارتباط قوية بين التطور الاقتصادي لبلد ما ومستوى نمو قطاع النقل، كون النمو الاقتصادي يتأثر وبصورة مباشرة بكفاءة قطاع النقل ومرونته حيث يتم من خلال شبكات النقل المختلفة عمليات التبادل بين مراكز الإنتاج ومراكز الاستهلاك، لذلك نجد أن الدول المتطورة قد أولت أهمية كبيرة لقطاع النقل وذلك بتجديد بنيات أساسية لهذا القطاع مثل شبكات الطرق، وخطوط سكك حديدية على أساس أهمية كل منها في توفير الوقت وزيادة مستوى مردودية هذا القطاع وزيادة مستوى مردودية هذا القطاع وزيادة مستوى الأمان. كما يعتبر النقل احد أهم وأبرز الأنشطة في إدارة شبكة الامداد وهي الادارة التي تهتم بتدفق المواد، الأموال والمعلومات من المورد الأصلي إلى الزبون النهائي لما له من دور كبير في التنسيق بين مختلف أنشطتها الأخرى من الشراء، التخزين، توزيع... فهو يمثل حلقة وصل بين المؤسسات والموردين من جهة وبين المؤسسات والزبائن من جهة أخرى[1].

وبناء عليه سوف يتناول هذا الفصل نوع خاص من النماذج الرياضية الخاص بحل مشاكل النقل يسمي نموذج النقل.

[1] بن سبع إلياس، بلمقدم مصطفى، وظيفة النقل وأهميتها في إدارة شبكة الامداد، مجلة البحوث الادارية والاقتصادية، العدد2، جامعة محمد بوضياف المسيلة، الجزائر، 2017، ص 89.

1. مفهوم نماذج النقل الخطية

أ. تعريف نماذج النقل

يعتبر نموذج النقل أحد النماذج الرياضية الخاصة والذي يهدف إلي إيجاد أسلوب أمثل لتوزيع (نقل أو شحن) سلعة أو مادة ما من مناطق إنتاجها أو عرضها (المصانع) إلي مناطق استهلاكها أو طلبها (المناطق البيعية أو المخازن) بحيث تكون تكلفة النقل الكلية للسلعة أو المادة أقل ما يمكن[2].

تهتم نماذج النقل بتوزيع المنتجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ ...) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل تكلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت[3].

فالبرمجة الخطية تستعمل للتوزيع الأمثل للموارد بالمؤسسة، أما طريقة النقل لها نفس هذه الخواص مضافا إليها شرط تساوي العرض مع الطلب[4].

ب. التطور التاريخي لنماذج النقل

قد تم تطوير نماذج النقل لأول مرة سنة 1941 من قبل F.L. Hichock، حيث قدم دراسة بعنوان "توزيع الانتاج من عدة مصادر إلى عدة مناطق محلية"[5].

وقد تم تناولها بتوسيع أكثر بواسطة T. C. Koopmans، بينما يعتبر أول من قام بحلها بأسلوب البرمجة الخطية هو G. B. Dantzig ويعتبر كل من Charnes & Cooper 1953 أول من قدما طريقة الحجر المتنقل لحل مشكلة النقل والتي أجريا عليها بعض

---

[2] جمال عبد العزيز صابر، بحوث العمليات في المحاسبة، د ن، القاهرة، 2009، ص 6.

[3] حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2007، ص 281.

[4] يحياوي إلهام، محاضرات مقياس رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير، جامعة الحاج لخضر، باتنة، د س، ص 29.

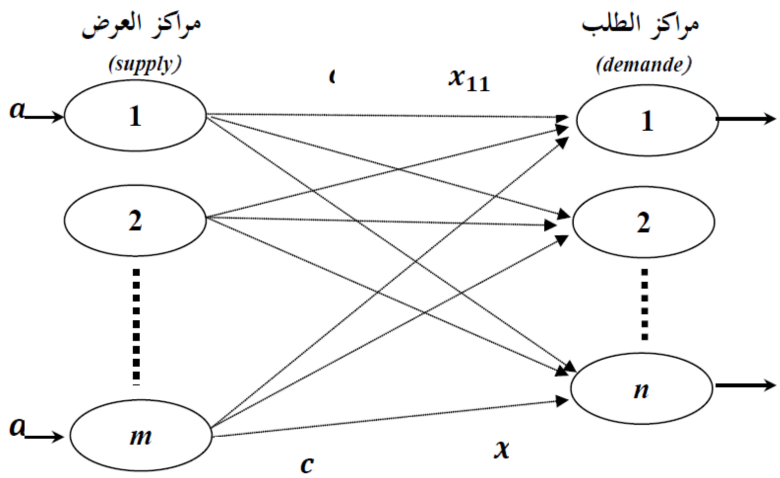
[5] فتحي رزق السوافيري، مدخل معاصر في بحوث العمليات، تطبيقات باستخدام الحاسب الآلي، جامعة الاسكندرية، 2004، ص 168.

التحسينات لتصبح طريقة التوزيع المعدل. ويقدم أسلوب النقل عادة أداة مساعدة لإدارة الانتاج والعمليات في التوصل إلى القرار الرشيد فيما يتعلق ببعض مشاكل التخطيط والانتاج، وهو شائع الاستخدام على مستوى الاقتصاد الجزئي في المؤسسات الانتاجية والتجارية وغيرها[6].

2. كيفية صياغة نموذج النقل

تعتبر مشكلة النقل من الأساليب الرياضية الهامة المساعدة في عملية اتخاذ القرار الملائم في نقل كمية من مادة (سلع) من مصادر تصنيعها أو من مخازن إلى مراكز متعددة، بهدف سد حاجة هذه المراكز وبأقل تكلفة كما وتخصص طريقة النقل في توزيع الموارد المادية والبشرية بأفضل صورة، على اعتبار هذه الموارد محدودة دائما والشكل التالي يبين أهم العناصر الداخلة في نموذج النقل[7]

الشكل رقم (04): يوضح عناصر النقل



حيث تمثل:

$x_{11}, x_{12} \ldots\ldots x_{mn}$: عدد الوحدات اللازم نقلها من المصادر إلى الوجهات من أجل تحقيق أدنى تكلفة.

---

[6] سونيا محمد البكري، استخدام الأساليب الكمية في الادارة، الدار الجامعية، الاسكندرية، 1997، ص 248.

[7] حسن علي مشرقي، عبد الكريم القاضي، بحوث العمليات – تحليل كمي في الادارة، دار الميسرة للنشر، الأردن، الطبعة الاولى، د س، ص 109.

x_{mn}: عدد الوحدات المنقولة من المصدر (m) إلى الوجهة (n).

$c_{11}, c_{12} \ldots\ldots c_{mn}$: تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر إلى الوجهة.

ويمكن تلخيص ما سبق في الجدول التالي الذي يسمى جدول النقل أو مصفوفة النقل[8]:

الجدول رقم (09): نموذج جدول النقل (مصفوفة النقل).

الوجهات (مراكز الطلب)

المصادر (مراكز العرض)

	1	2	------	j	------	n	العرض
1	c_{12} x_{11}	c_{12} x_{12}	------	c_{1j} x_{1j}	------	c_{1n} x_{1n}	a_1
2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	------	------	------	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	------	c_{ij} x_{ij}	------	------	a_i
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	------	c_{mj} x_{mj}	------	c_{mn} x_{mn}	a_m
الطلب	b_1	b_2	------	b_j	------	b_n	

حيث:

x_{ij}: عدد الوحدات المنقولة من المصدر (i) إلى الوجهة (j).

c_{ij}:: التكلفة الوحدوية للنقل من المصدر (i) إلى الوجهة (j).

[8] محمد الفياض، عيسى قدادة، بحوث العمليات، دار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2007، ص 206.

ويمكن صياغة المشكل في نموذج البرمجة الخطية انطلاقا من معطيات الجدول كما يلي[9]:

$$Min(z) = c_{11}\,x_{11} + c_{12}\,x_{12} + \cdots c_{mn}\,x_{mn}$$

$$\text{s.c}(1)\quad \begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots x_{2n} = a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots x_{mn} = a_m \\ (i = 1, 2, \ldots \ldots \ldots . m) \end{cases}$$

(1): قيود متعلقة بالكميات المتاحة لكل مصدر (i) حيث: $(i = 1, 2, \ldots \ldots \ldots . m)$

$$\text{s.c}(2)\quad \begin{cases} x_{11} + x_{21} + \cdots x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \cdots x_{m2} = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots x_{mn} = b_n \\ (i = 1, 2, \ldots \ldots \ldots . n) \end{cases}$$

(2): قيود متعلقة بالكميات المطلوبة لكل وجهة (j) حيث: $(j = 1, 2, \ldots \ldots \ldots . n)$.

(3): شرط عدم السلبية متغيرات القرار أي الكميات المنقولة من المصدر (i) (مركز العرض) إلى الوجهة (j) (مركز الطلب).

ويمكن كتابة النموذج بشكل مبسط وهذا بالطبع في حالة تساوي الكميات المطلوبة مع الكميات المعروضة، والذي يسمى نموذج النقل المتوازن[10]، أي:

شرط التوازن $$\boxed{\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j}$$

[9] Bouqlem Benmazouz, Recherche Opérationnelle de Gestion, Atlas Edition, 1995, Algérie, P 144.

[10] Gerald Baillargeon, Programmation linéaire appliqué – outille à l'aide de décession, 1996, P 313.

كما يلي:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i a_i \ \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots \dots \dots . m) \dots \dots (1) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j b_j \ \geq 0 \ (j = 1, 2, \dots \dots \dots . n) \dots \dots (2) \\ x_{ij} \geq 0 \dots \dots \dots \dots \dots \qquad (3) \end{cases}$$

(1): قيد متعلق بالكميات المتاحة.

(2): قيد متعلق بالكميات المطلوبة.

(3): شرط عدم سلبية المتغيرات القرارية.

من النموذج أعلاه الذي هو عبارة عن صيغة نموذج البرمجة الخطية يمكن استخدام طريقة السمبلكس للحل وليكن في هذه الحالة كون عدد القيود والمتغيرات كثيرة وهناك طرق أخرى أسهل وأبسط.

3. فرضيات نموذج النقل

يحتاج استخدام نموذج النقل إلى توافر مجموعة من العناصر التي تتمثل فيما يلي[11]:

- تعدد مناطق الانتاجية ونرمز لها بالرمز (m) (مراكز العرض).
- تعدد مناطق التوزيع ونرمز لها بالرمز (n) (مراكز الطلب).
- عرض المنتوجات وقد تختلف من مصدر إلى آخر ونرمز له بالرمز $(\dots \dots s_n)$، حيث: (s_1) الكمية التي يتم انتاجها في مراكز الانتاج الأول وهكذا.
- الطلب على المنتوجات قد يختلف من مركز استقبال إلى آخر ونرمز له بالرمز $(\dots \dots D_n)$، حيث: (D_1) حجم الطلب المستقبل الأول وهكذا.

[11] إبراهيم أحمد مخلوف، التحليل الكمي في الإدارة، ط 1، د ن، الرياض، 1994، ص141.

- تكلفة نقل الوحدة من المنطقة الانتاجية (i) إلى مركز التوزيع(j) ونرمز لها بالرمز (c_{ij}).
- الكمية التي يمكن نقلها من المنطقة (i) إلى المراكز (j) ونرمز لها بالرمز (x_{ij}).

مثال:

لنفرض أنه لدينا مؤسسة اقتصادية لها 3 وحدات إنتاجية O_1، O_2، O_3 متواجدة في ثلاث مناطق مختلفة، كما أنها تتوفر على 5 مراكز توزيع D_1، D_2، D_3، D_4، D_5، حيث أن هذه المؤسسة تنتج المنتج P على مستوى مراكز الإنتاج، ثم تقوم بتوزيعه على مراكز التوزيع الخمسة.

تعرض مراكز الإنتاج (المنبع)كميات معينة من الإنتاج: a_1، a_2، a_3، أما مراكز التوزيع (المصب) فتقوم بطلب كميات معينة من الإنتاج: b_1، b_2، b_3، b_4، b_5، كما هو موضح في الجدولين أدناه.

مركز الإنتاج	O_1	O_2	O_3
الطاقة الإنتاجية (العرض d_i)	$a_1=240$	$a_2=160$	$a_3=260$

مركز التوزيع	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
الطلب (b_j)	$b_1=120$	$b_2=150$	$b_3=145$	$b_4=125$	$b_5=140$

عملية نقل المنتج P من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى مراكز التوزيع الخمسة يترتب عليها تحمل تكلفة النقل C_{ij}.

C_{ij} تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المنتج P من مراكز الإنتاج i إلى مركز التوزيع j .

تكلفة النقل الوحدوية يقدمها الجدول أدناه:

C_{ij}	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	$00C_{11}=1$	$800C_{12}=$	$100C_{13}=$	$500C_{14}=$	$400C_{15}=$
O_2	$500C_{21}=$	$500C_{22}=$	$300C_{23}=$	$600C_{24}=$	$700C_{25}=$

O_3	$00C_{31}=2$	$900C_{32}=$	$500C_{33}=$	$900C_{34}=$	$800C_{35}=$

مشكل المؤسسة هو تحديد الكميات x_{ij} الواجب نقلها من مراكز الإنتاج إلى مراكز التوزيع.

2- نمذجة مسائل النقل:

2-1- تشكيل جدول مسائل النقل:

إن العرض الإنشائي لمسألة النقل حسب المثال أعلاه، يمكن تلخيصه في جدول شامل يسمى جدول مسألة النقل، يكون كالتالي:

الجدول رقم (09): جدول مسألة النقل

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	$C_{11}=100$ x_{11}	$C_{12}=800$ x_{12}	$C_{13}=100$ x_{13}	$C_{14}=500$ x_{14}	$C_{15}=400$ x_{15}	240
O_2	$C_{21}=500$ x_{21}	$C_{22}=500$ x_{22}	$C_{23}=300$ x_{23}	$C_{24}=600$ x_{24}	$C_{25}=700$ x_{25}	160
O_3	$C_{31}=200$ x_{31}	$C_{32}=900$ x_{32}	$C_{33}=500$ x_{33}	$C_{34}=900$ x_{34}	$C_{35}=800$ x_{35}	260
b_i	120	130	145	125	140	660

يلخص جدول مسائل النقل كامل المسألة، بحيث تظهر فيه تكاليف نقل الوحدة الواحدة من كل وحدة إنتاجية إلى كل مركز توزيع في أعلى كل خانة، و تظهر متغيرات المسألة وهي القيم x_{ij} المراد البحث عنها، كما تظهر الكميات القصوى التي تعرضها كل وحدة، وكذا كمية الطلب لكل منطقة.[12]

---

[12] محمد راتول، بحوث العمليات، ط2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006، ص 105.

2-2- الصياغة الرياضية لمسائل النقل:

يمكن صياغة مشكل النقل في شكل نموذج رياضي كما يلي:

أ- تحديد متغيرات القرار: تمثل القيم x_{ij} متغيرات القرار في مسائل النقل، وعددها في مثالنا السابق 15 متغيرة قرار، حيث:

x_{11} : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج O_1 إلى مركز التوزيع D_1.

x_{43} : تمثل الكمية الواجب نقلها من مركز الإنتاج O_4 إلى مركز التوزيع D_3.

ب-صياغة دالة الهدف: دالة الهدف في هذه الحالة هي عبارة عن تدنئة التكاليف المترتبة عن عملية النقل.

وتكون من الشكل التالي:

$$\text{Min } Z = \sum C_{ij}\, x_{ij}$$

$$\text{Min } Z = 100\,x_{11} + 800\,x_{12} + 100\,x_{13} + 500\,x_{14} + 400\,x_{15} + 500\,x_{21} + 500\,x_{22} + 300\,x_{23} + 600\,x_{24} + 700\,x_{25} + 200\,x_{31} + 900\,x_{32} + 500\,x_{33} + 900\,x_{34} + 800\,x_{35}$$

جـ- صياغة القيود: لدينا نوعين من القيود: قيود العرض و قيود الطلب.

قيود العرض: $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 240$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 160$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 260$$

قيود الطلب: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_i$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{23} = 130$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 145$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 125$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 140$$

قيود عدم سلبية المتغيرات: $x_{ij} \geq 0$

4. طرق حل نموذج النقل الخطي

استيفاء الحقيقة يمكن إيجاد جدول الحل الممكن بأي طريقة أي بمعنى شغل الخلايا بأي كمية وبطريقة عشوائية أو أيا كان الأسلوب ولا يوجد من شرط على هذا الحل الممكن سوى مراعاة خاصية الحل للمكن كافة القيود الخاصة بالعرض والطلب ولكن حتى يتم وضع خطوات محددة وبغرض العمل على توحيد من الجميع في إيجاد ذلك الحل المبدئي ظهرت بعض الطرق المنطقية التي تجعل خطوات إيجاد الحل المبدئى الممكن روتينية ووفق خطوات محددة وموحدة وواجبة الإتباع تلك الطرق ليست كلها على نفس درجة الكفاءة[13]، في التوصل إلى ذلك الحل المبدئي الممكن، فهناك طرق كل ما يعنيها هو التوصل إلى الحل المبدئي الممكن دون أي اعتبار لعامل التكلفة وهناك طرق أخرى أكثر كفاءة إذ أنها تعمل في ذات الوقت إلى أن يكون هذا الحل المبدئي الممكن يقترب ما أمكن من الحل الأمثل ومن ثم يوفر الجهد المبذول في تحسين الحل، حيث أنها طرق مأخذ في اعتبارها بالإضافة إلى استيفاء العرض والطلب التوصل إلى الحل مبدئي بتكاليف إجمالية أقل ما يمكن.

[13] فريد عبد الفتاح زين الدين، بحوث العمليات وتطبيقاتها في حل المشكلات واتخاذ القرارات، – الجزء الاول البرامج الخطية– ، ص 412.

أ. طريقة زاوية الشمال الغربي

يقصد بها أول خانة في الجدول إلى الأعلى وإلى اليسار، وهي الخلية التي ينطلق منها إيجاد الحل الأساسي الأول.[14]

ويتم ذلك بإتباع المنهجية التالية وبالتطبيق على المثال السابق:

- ❖ أول خلية موافقة لمركز الإنتاج الأول ومركز التوزيع الأول (أعلى إلى اليسار)، نجد أن طلب مركز التوزيع D_1 هو 120 وحدة، بينما حجم العرض O_1 هو 240 وحدة، فيحصل D_1 على كافة طلبه 120 وحدة من D_1، ويتشبع بذلك العمود الأول (D_1)، ويتبقى لمركز الإنتاج O_1 كمية تقدر بـ 120 وحدة.
- ❖ بالانتقال إلى الخلية المقابلة والموافقة لمركز الإنتاج O_1، ومركز التوزيع D_2، تقدر الكمية المعروضة بـ 120 وحدة وهي الكمية المتبقية بعد التوزيع الأول، وحجم الطلب 130 وحدة، وعليه ستوجه كل الكمية المعروضة من O_1 إلى D_2، فيتشبع السطر الأول، ويبقى طلب D_2 هو 10 وحدات ينبغي على O_2 تلبيته، وهكذا. خطوات هذه الطريقة يلخصها الجدول أدناه:

الجدول رقم(10): حل مسألة النقل بطريقة الزاوية الشمالية الغربية للمثال السابق

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	100 120	800 120	100 /	500 /	400 /	~~240~~ ~~120~~
O_2	500 /	500 10	300 145	600 5	700 /	~~160~~ ~~150~~ ~~5~~
O_3	200 /	900 /	500 /	900 120	800 140	~~260~~ ~~140~~

[14] محمد راتول، مرجع سابق، ص 105.

b_i	~~120~~	~~130~~ ~~10~~	~~145~~	~~125~~ ~~120~~	~~140~~	660

وبذلك نحصل على جدول الحل الأساسي الأول، والذي نجد فيه:

$x_{11}=120$: أي أن O_1 يقوم بتموين D_1 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـ 100 وحدة؛

$x_{12}=120$: أي أن O_1 يقوم بتموين D_2 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـ 800 وحدة؛

$x_{22}=10$: أي أن O_2 يقوم بتموين D_2 بمقدار 10 وحدات بتكلفة تقدر بـ 500 وحدة؛

$x_{23}=145$: أي أن O_2 يقوم بتموين D_3 بمقدار 145 وحدة بتكلفة تقدر بـ 300 وحدة؛

$x_{24}=5$: أي أن O_2 يقوم بتموين D_4 بمقدار 5 وحدات بتكلفة تقدر بـ 600 وحدة؛

$x_{34}=120$: أي أن O_3 يقوم بتموين D_4 بمقدار 120 وحدة بتكلفة تقدر بـ 900 وحدة؛

$x_{35}=140$: أي أن O_3 يقوم بتموين D_5 بمقدار 140 وحدة بتكلفة تقدر بـ 800 وحدة؛

- يتم حساب التكلفة الكلية وفق هذه الطريقة عن طريق ضرب قيمة التكلفة الوحدوية في كمية الإنتاج لكافة مراكز الإنتاج و التوزيع، أي:

$$Z = (100 \times 120) + (800 \times 120) + (500 \times 10) + (300 \times 145) + (600 \times 5) + (900 \times 120) + (800 \times 140) = 379500$$

- عدد المتغيرات الداخلة في الحل (عدد الخلايا المملوءة) = عدد الأسطر (m)+عدد الأعمدة (n) – 1

ب. طريقة أقل تكاليف

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إيجاد الحل الأساسي الأول، حيث أننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أدنى تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية وهكذا، حتى يتم استيفاء كل العرض والطلب، بحيث نحصل على عدد متغيرات داخلة في الحل يساوي (m+n−1).[15]

و بالعودة إلى مثالنا السابق، يمكن تطبيق هذه الطريقة كما يلي:

[15] محمد راتول، مرجع سبق ذكره، ص 125.

- ❖ نلاحظ أن أدنى تكلفة في الجدول هي 100، أي إما نقل المنتج من المنبع الأول O_1 إلى المصب الأول D_1 أو من المنبع الأول O_1 إلى المصب الثالث D_3، وطريقة الاختيار هنا تعتمد على أكبر قدر من الطلب، فلو تمت مقارنة طلب كل من المصب الأول والثاني، فإن المؤسسة حتما سوف تختار الطلب الأكبر لتصريف أكبر قدر من منتجاتها، لذلك يتم إشباع طلب المصب الثالث كليا من المنبع الأول؛
- ❖ أما التكلفة الموالية فهي 100، أي نقل المنتج من المنبع الأول O_1 إلى المصب الأول D_1، حيث يتم تزويده بـ 95 وحدة المتبقية من 240 وحدة بعد التوزيع، و بذلك يتشبع السطر الأول، أي أن الكمية المعروضة في المنبع الأول 0؛
- ❖ أما التكلفة الموالية فهي 200، وهي تكلفة نقل المنتج من المنبع الثالث O_3 إلى المصب الأولD_1، وهنا يتم تزويد هذا الأخير بـ 25 وحدة فقط وهي احتياجاته بعد حصوله على 95 وحدة من المنبع الأول، وبالتالي يتشبع العمود الأول، وهكذا يتم الانتقال بين الخلايا تصاعديا، كما في الجدول أدناه:

الجدول رقم(11): حل مسألة النقل بطريقة التكاليف الدنيا للمثال.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i
O_1	100 **95**	800 /	100 **145**	500 /	400 /	~~240~~ ~~95~~
O_2	500 /	500 **130**	300 /	600 **30**	700 /	~~160~~ ~~30~~
O_3	200 **25**	900 /	500 /	900 **95**	800 **014**	~~260~~ ~~235~~ ~~95~~
b_i	~~120~~ ~~25~~	~~130~~	~~145~~	~~125~~ ~~95~~	~~014~~	660

قيمة التكاليف وفق هذه الطريقة هي:

$$Z = (100 \times 95) + (100 \times 145) + (500 \times 130) + (600 \times 30) + (200 \times 25) + (900 \times 95) + (800 \times 140) = 309500$$

ت. طريقة فوجل التقريبية

تعتبر طريقة فوجل التقريبية (طرقة الفروقات العظمى) من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة على الوصول للحل الأمثل أو الحل القريب من الأمثل، ونادرا ما تكون طريقة التكلفة الدنيا وطريقة الزاوية الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطريقتين السابقتين.

وتتلخص خطوات إيجاد الحل الابتدائي لهذه الطريقة كما يلي:[16]

- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وفي كل عمود؛
- تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق التكلفة (أعلى جزاء)؛
- اختيار الخلية ذات التكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود؛
- في الخلية التي اختيرت في الخلية الثالثة، نقارن احتياجات المصب مع ما هو متوفر في المنبع لنأخذ القيمة الأقل؛
- نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة و الصفوف، وذلك بعد إلغاء العمود أو السطر المشبع، وتكرر العملية السابقة إلى أن نلبي احتياجات كل المصبات من المنابع المتاحة.
- وبالعودة إلى مثالنا السابق، سنقوم بتطبيق مراحل هذه الطريقة، وفق المراحل التالية:
- نقوم بحساب الفرق بين أدنى تكلفتين على مستوى جميع الأسطر و الأعمدة فنحصل على القيم: (100−100=0، 500−300=200، 200−500=300) على مستوى الأسطر الثلاث، ونحصل على القيم: (200−100=100، 800−500=300، 300−100=200، 600−500=100، 700−400=300) على مستوى الأعمدة؛

[16] صوار يوسف، طاوش قندوسي، مرجع سابق، ص 98-99.

- نقوم باختيار أكبر فرق بين الأعمدة والأسطر، نلاحظ في هذا المثال أن 300 هي أكبر فرق و قد تكررت في السطر الأخير والعمودين الثاني والخامس، وهنا يتم اختيار أكبر فرق بينها والذي يوافق أدنى تكلفة، وهو السطر الثالث والذي يوافق 200 التي تعبر عن أدنى تكلفة في الجدول؛
- تعبر الخلية 200 عن تكلفة تزويد المصب الأول بالمنتج من المنبع الثالث، لذلك يتم تزويد طلبه المتمثل في 120 وحدة من 260 وحدة (عرض المنبع الثالث)، وبذلك يتم إشباع المصب الأول (العمود الأول)، ويتبقى للمنبع الثالث كمية معروضة تقدر بـ 140 وحدة؛
- وهكذا يتم إلغاء العمود الأول من جدول النقل لكونه مشبعا، ويتم تحيين (actualisation) الجدول بإعادة حساب الفرق بين التكاليف المتبقية، فنحصل على القيم: 300، 200، 300 في الأسطر الثلاث، وتبقى القيم: 300، 200، 100، 300 في الأعمدة الأربعة المتبقية، نقوم باختيار أكبر فرق (300) والذي يوافق أدنى تكلفة (100)؛
- تمثل الخلية 100 عن تكلفة نقل المنتجات من المنبع الأول إلى المصب الثالث، لذلك يتم تزويد هذا الأخير بكل طلبه المتمثل في 145 وحدة من أصل 240 وحدة معروضة لدى المنبع الأول، وهكذا يتم إشباع العمود الثاني، وإلغاؤه، ويبقى للمنبع الأول كمية معروض تقدر بـ 95 وحدة؛

وبإتباع نفس الخطوات في كل مرة، نحصل على النتائج المبينة في الجدول أدناه:

الجدول رقم(12): حل مسألة النقل بطريقة فوجل للمثال.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	a_i	الفرق
O_1	100 /	800 /	100 145	500 /	400 95	~~240~~ ~~95~~	0 300 100
O_2	500 /	500 130	300 /	600 30	700 /	~~160~~ ~~30~~	200 200 100
O_3	200 120	009 /	500 /	900 95	800 45	~~260~~ ~~140~~	300 300 100
b_i	~~021~~	~~130~~	~~145~~	~~125~~ ~~95~~	~~014~~ ~~45~~	660	
الفرق	100	300 400	200	100 300	300 100		

انطلاقا من الجدول أعلاه أنه تم ملئ جميع الخانات، لذلك نتوقف عن تطبيق طريقة Vogel، وعليه تم الحصول على حل الأساس المقبول:

- **متغيرات الأساس الموجبة:** و عددها 07 =(m+n−1)

$x_{13}=145,\quad x_{15}=95,\quad x_{22}=130,\quad x_{24}=30,\quad x_{31}=120,\quad x_{34}=95,\quad x_{35}=45$

- **متغيرات خارج الأساس المعدومة:** و تمثل باقي متغيرات القرار.

بعدها نقوم بتعويض قيم متغيرات القرار على مستوى القيود الوظيفية للتحقق منها.

وبغرض الحصول على قيمة دالة الهدف نقوم أيضا بتعويض قيم متغيرات القرار في دالة هدف نموذج النقل، فنحصل على:

$$\begin{aligned} Z = {} & 100\,(0) + 800\,(0) + 100\,(145) + 500\,(0) + 400\,(95) \\ & + 500\,(0) + 500\,(130) + 300\,(0) + 600\,(30) + 700\,(0) \\ & + 200\,(120) + 900\,(0) + 500\,(0) + 900\,(95) \\ & + 800\,(45) = 281000 \end{aligned}$$

قيمة دالة الهدف المحصل عليها باستخدام طريقة Vogel (281000) أقل من التكلفة الإجمالية للنقل المحصل عليها بطريقة التكاليف الدنيا (309500)، وأقل أيضا من التكلفة الإجمالية المحصل عليها بطريقة الزاوية الشمالية الغربية (379500).

ملاحظة: في حالة النموذج غير المتوازن أي في حالة عدم تساوي العرض و الطلب فإنه تتم إضافة الكمية المعروضة (في حالة العرض أقل من الطلب) في سطر جديد بتكاليف معدومة، أو إضافة الكمية المطلوبة في عمود جديد (في حالة الطلب أقل من العرض) في عمود جديد بتكاليف معدومة.

5. التفرقة بين طرق الحل الاولي

أ. طريقة زاوية الشمال الغربي

تعطي هذه الطريقة حلا أساسيا ولكن غالبا ما يحتاج الحل إلى اختيار وتحسين لأن الطريقة لا تأخذ بعي الاعتبار تكاليف خاصة بالنقل من مصادر الإنتاج إلى مراكز التوزيع[17].

ب. طريقة أقل تكاليف

تحاول هذه الطريقة من التقليل في تكاليف النقل، ويكون حلها ليس بالضرورة هو الحل المبدئي الذي نتوصل إليه في طريقة الزاوية الشمالية ولكنه مجرد حلا مبدئيا وممكنا وأساسيا.

تكلفة هذا الحل تعد أقل من تكلفة الحل في الزاوية الشمالية وعادة ما تكون هذه هي النتيجة في معظم الحالات إلا أنها ليست بقاعدة عامة فذلك يتوقف على توزيع تكلفة نقل الوحدات داخل الخلايا.

بالرغم من الميزة الأساسية لهذه الطريقة وهي أنها تأخذ التكلفة في الحسبان إلا أنه يعاب عليها بصفة أساسية أنه عند تطبيقها قد يؤدي اختيار خلية ذات تكلفة منخفضة إلى صعوبة

[17] صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، تطبيقات بحوث العمليات في الادارة، اثراء للنشر والتوزيع، عمان الاردن، 2009، ص 216.

اختيار خلية أخرى قد تكون أفضل من حيث التكلفة الكلية ويرجع ذلك إلى استبعاد كل صف أو كل عمود بسبب قيود الطاقة[18].

ت. طريقة فوجل التقريبية

تكون كلفتها الإجمالية أقل من التكلفة الإجمالية للطريقتين السابقتَين، كما أن كلفتها الإجمالية تكون هي الكلفة المثلى.

رغم أنها غالبا وليس دائما ما تؤدي إلى الوصول إلى الحل الأمثل مباشرة بحيث تكون مصفوفة الحل الأولي هي مصفوفة الحل الأمثل شأنها شأن طريقة أقل تكاليف[19].

6. طريقة الحل النهائي للوصول للحل الأمثل

إن الوصول إلى الحل الأولي لا يعني نهاية مشكلة النقل، وإنما يجب أن تستخدم أساليب أخرى لاختبار ذلك الحل الأولي أي معرفة هل يمكن ايجاد حل أفضل من هذا الحل، هناك طريقتين لاختبار أمثلية الحل المبدئي هما[20]:

- الطريقة المسار لمتعرج أو الطريقة المباشرة.
- طريقة التوزيع المعدلة.

ونقوم بشرح الطريقتين فيما يلي:

أ. طريقة المسار المتعرج (الطريقة المباشرة SSM)

تهدف الطريقة المباشرة أو طريقة النقل غير مربعات الخالية (SSM) كغيرها من الطرق إلى تخفيض تكلفة النقل إلى أقل حد ممكن، وبالتالي الوصول إلى التوزيع الأمثل لوحدات البضاعة التي يجب نقلها من المصادر (i) إلى الوجهات (j) ويتم هذا من خلال مراحل (أي أنها طريقة تتابعية)، في كل مرحلة يتم إدخال متغير خارج الأساس والذي يعمل هنا بالخلية غير المشحونة

---

[18] محمد توفيق ماضي، مراقبة وضبط المخزون، الدار الجامعية، مصر، د س، ص 90، 91.

[19] علي العلاونة وآخرون، بحوث العمليات في العلوم التجارية، دار المستقبل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، ص 282.

[20] صادق محمد جواد، ناصر حميد القتال، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008، ص 146.

(الفارغة) عوض متغير في الأساس والذي يمثل الخلية المملوءة وهو نفس النهج الذي تقوم عليه طريقة السمبلكس لإيجاد الحل الأمثل[21].

تستخدم في هذه الطريقة المسارات المغلقة لتغيير الشحنات من المربعات المملوءة إلى المربعات الخالية وذلك بموجب قواعد معينة، والمسار المعلق هو مجموعة من مربعات الجدول عددها زوجي وتكون متتابعة أفقيا وعموديا ويحتوي المسار المعلق على خلية واحدة فارغة (غير مشغولة) كما أنه يجب[22]:

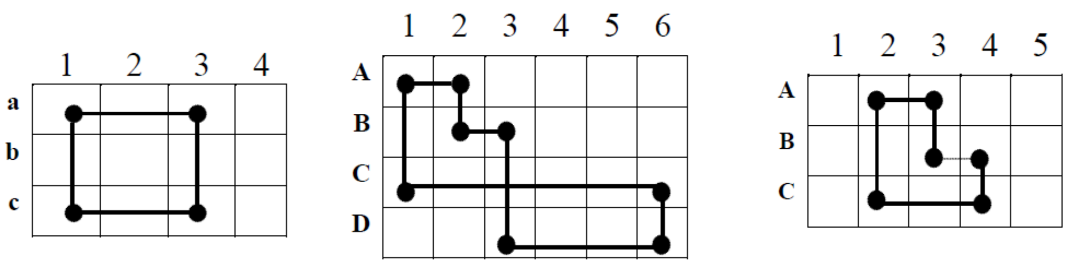
- أن يبدأ المسار المعلق وينتهي عند الخلية الفارغة المراد تقييمها.
- كل خليتين متتابعتين في المسار تنتميان إلى نفس السطر (i) أو العمود (j) في الجدول (لا يسمح بالحركة القطرية بين الخلايا).
- يتألف المسار المعلق من مجموعة من المستقيمات العمودية والأفقية ، بحيث تقع الخلايا المشغولة عند زوايا القائمة للمسار المعلق.

[21] محمد فياض، عيسى قداده، بحوث العمليات، دار اليازوري للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2007، ص 212.

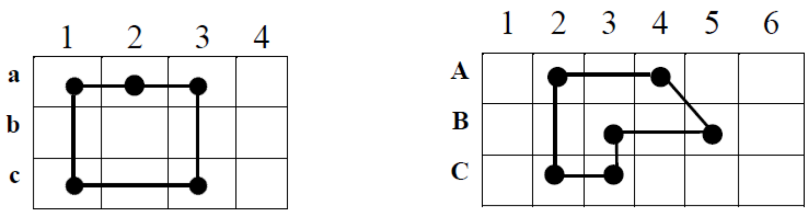
[22] Jean pierre Védrine, Elisabeth Bringuire & Alain Brisard, Techniques quantitatives de gestion, p 76.

الأشكال التالية توضح بعض المسارات:

الشكل رقم (05): المسارات في الطريقة المباشرة



تمثل الأشكال **مسارات مغلقة** (تحقق الشروط السابقة الذكر).



الأشكال لا تمثل مسارات مغلقة (لا تحقق الشروط).

Source: Gerald Baillargeon, Programmation linéaire appliqué – outille à l'aide de décession, les éditions SMG, Québec, 1996, P 325

بعد هذا الإيضاح للمسارات المغلقة سيتم توضيح خطوات طريقة المباشرة على جدول الحل للبدئي المتوصل إليه بإحدى الطرق الثلاثة المذكورة سابقا[23]:

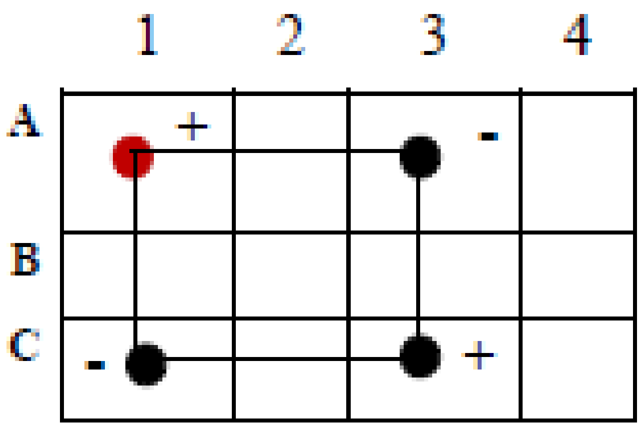
- تحديد الخلايا الفارغة (غير مشغولة) التي سيتم تقييمها لمعرفة أثر استخدام كل خلية فارغة على مجموع التكاليف.
- تحديد المسار المغلق الذي تنتمي إليه كل خلية (مربع) من الخلايا غير مشحونة.
- إعداد وحساب مؤشر لكل مسار من المسارات المغلقة التي تم تحديدها والمؤشر عبارة عن مجموع الوحدة الواحدة عبر مربعات المسار المغلق الخاضع للتقييم مع أخذ

[23] محمد فياض، عيسى قداده، بحوث العمليات، مرجع سبق ذكره، ص 213، 214.

بالاعتبار الإشارات، حيث تأخذ الخلية الفارعة إشارة (+) ثم تتغير الإشارة في كل خطوة من خطوات المسار من (+) إلى (−) وهكذا.

- يستبعد المؤشر ذو القيمة الموجبة لأن تنفيذه على أرض الواقع سوف يزيد تكلفة النقل بمقدار حاصل ضرب المؤشر في عدد الوحدات التي سيتم نقلها إلى الخلية الفارغة، أما المؤشر ذو القيمة السالبة فيعني أنه سيؤدي إلى خفض التكلفة الإجمالية بمقدار حاصل ضرب المؤشر في عدد الوحدات التي سيتم نقلها، أما إذا تبين وجود مؤشرين سالبين أو أكثر فإنه يتم تنفيذ المسار المعلق ذي العدد السالب الأقل (أكبر قيمة مطلقة).

وفيما يلي مثال عن حساب مؤشر مسار مغلق[24]:



$$C=C_{a1}-C_{a3}+C_{c3}-C_{c1}$$

- إذا كان المؤشر C موجب تماما فإنه لا يمكن تعديل المسار.
- أما إذا كان هذا المؤشر سالب في هذه الحالة تقوم بنقل القيم بين خلايا المسار وهذا بمراعاة إشارات الخلايا المكونة له، حيث يتم إضافة عدد من الوحدات إلى الخلية الفارغة مساوية لأقل عدد من الوحدات في الخلايا الموالية لها سواء في السطر أو العمود ثم إضافة

[24] محمد فياض، عيسى قداده، بحوث العمليات، مرجع سبق ذكره، ص 214، 216.

أو طرح نفس القيمة للخلايا الأخرى حسب إشارة كل منها، ويتمثل الهدف من نقل القيم بين خلايا المسار المغلق هو مراعاة قيود القدرة الاستيعابية المفروضة على المشكلة وعدم تجاوزها، إذا إن تحاور القيود يؤدي إلى خلق طلب جديد أو خلق قدرة إنتاجية جديدة غير تلك التي تم تحديدها في المسالة.

– بعد تعديل المسارات المغلقة ذات المؤشرات السالبة يتم إعادة رسم الجدول بالتوزيع الجديد للشحنات المتوصل إليه من عملية نقل القيم بين خلايا هذه المسارات، ثم إعادة الخطوات السابقة إلى أن تصل إلى مؤشرات موجبة لكل المسارات المعلقة وهذا ما يدل على أننا وصلنا إلى الحل الأمثل للمشكلة.

مثال: ليكن لدينا نموذج النقل التالي:[25]

الجدول رقم (13): مسألة النقل للمثال

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 x_{11}	5 x_{12}	3 x_{13}	1 x_{14}	90
O_2	3 x_{21}	1 x_{22}	2 x_{23}	4 x_{24}	80
O_3	4 x_{31}	2 x_{32}	1 x_{33}	5 x_{34}	70
b_i	40	50	110	40	240

أولا: سنقوم بحل هذا المثال باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية للحصول على الحل الابتدائي ومن ثم تحسين الحل باستخدام المسار المتعرج.

[25] صوار يوسف، طاوش قندوسي، مرجع سبق ذكره، ص 104– 110.

الجدول رقم(14): حل مسألة النقل باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 50	3 /	1 /	90 50 0
O_2	3 /	1 /	2 80	4 /	80 0
O_3	4 /	2 /	1 30	5 40	70 40 0
b_i	40 0	50 0	110 300	40 0	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\ (40) + 5\ (50) + 2\ (80) + 1\ (30) + 5\ (40) = 720$$

ثانيا: سنقوم بتحسين الحل الابتدائي، ولكن قبل ذلك ينبغي علينا التأكد من عدد الخلايا المملوءة.

عدد الخلايا المملوءة يساوي 5، وهذا لا يساوي $(m+n-1) = 4+3-1=6$، لهذا نضيف لخلية مملوءة كمية معدومة مساوية للصفر، كما يلي:

الجدول رقم(15): حل مسألة النقل باستخدام طريقة المسار المتعرج

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 50	3 /	1 /	90
O_2	3 /	1 0	2 80	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 30	5 40	70
b_i	40	50	110	40	240

وبذلك نتحصل على خلايا 6 خلايا غير مملوءة يتم حساب قيمها الجبرية كما يلي:

الجدول رقم (16): حل مسألة النقل باستخدام طريقة المسار المتعرج

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 50	3 /	1 /	90
O_2	3 /	1 0	2 80	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 30	5 40	70
b_i	40	50	110	40	240

$$x_{13} = 3 - 5 + 1 - 2 = -3$$

$$x_{14} = 1 - 5 + 1 - 2 + 1 - 5 = -9$$

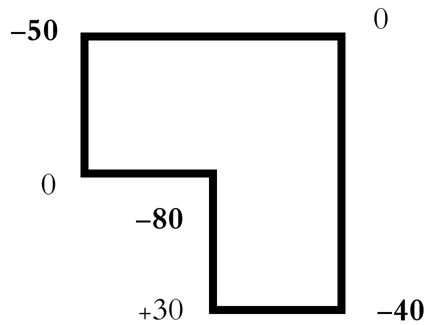
$$x_{21} = 3 - 2 + 5 - 1 = 5$$

$$x_{24} = 4 - 5 + 1 - 2 = -2$$

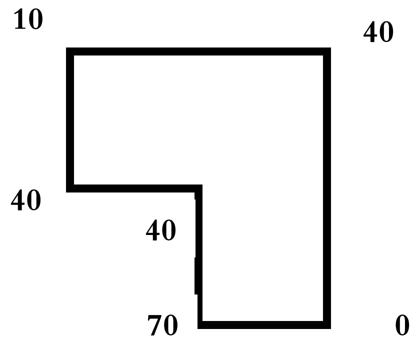
$$x_{31} = 4 - 2 + 5 - 1 + 2 - 1 = 7$$

$$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$$

بالنظر إلى القيم الجبرية نلاحظ أن الخلية **x_{14}** هي الأشد سالبية حيث تمكِّن من تخفيض التكاليف بمقدار 9 لكل وحدة منقولة عبرها، وبالتالي سندرس مسارها:



بما أن أقل كمية هي 40=(min : 40, 80, 50)، إذا ستأخذ الخلية **x_{14}** الفارغة هذه القيمة ويصبح المسار كالتالي:



وعليه يصبح جدول النقل كالتالي:

الجدول رقم (17): تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	[2] 40	[5] 10	[3] /	[1] /	90
O_2	[3] /	[1] 40	[2] 80	[4] /	80
O_3	[4] /	[2] /	[1] 70	[5] 0	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\,(40) + 5\,(10) + 1\,(40) + 1\,(80) + 1\,(70) + 5\,(0) = 360$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 360 وحدة نقدية $(720 - 360 = 360)$.

يتم تكرار العملية السابقة لاختيار الخلايا الفارغة بعد التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة هي: $(m+n-1)$

$$x_{13} = 3 - 5 + 1 - 2 = -3$$

$$x_{21} = 3 - 2 + 5 - 1 = 5$$

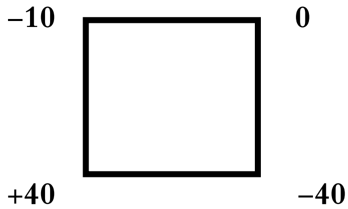
$$x_{24} = 4 - 1 + 5 - 1 = 7$$

$$x_{31} = 4 - 1 + 2 - 1 + 5 - 2 = 7$$

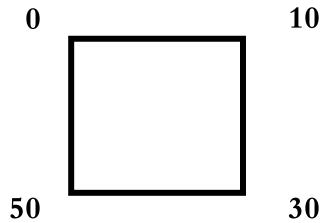
$$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$$

$$x_{34} = 5 - 1 + 5 - 1 + 2 - 1 = 9$$

نلاحظ أن الخلية x_{13} ستساهم في تخفيض التكاليف بمقدار (-3) لكل وحدة منقولة، وعليه يجب دراسة مسارها.



بما أن أقل قيمة هي $10=(10\ ,40\ :\ \text{min})$، إذا ستأخذ الخلية الفارغة x_{13} هذه القيمة ويصبح المسار كالتالي:



وعليه يصبح جدول النقل كالتالي:

الجدول رقم(18): تحسين الحل باستخدام طريقة المسار المتعرج

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 /	3 10	1 40	90
O_2	3 /	1 50	2 30	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 70	5 /	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\,(40) + 5\,(10) + 3\,(10) + 1\,(40) + 1\,(50) + 2\,(30) + 1\,(70) = 330$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 30 وحدة نقدية (360 − 330 = 30).

يتم تكرار العملية السابقة لاختيار الخلايا الفارغة بعد التأكد من أن عدد الخلايا المملوءة هي: (m+n−1)

$$x_{12} = 5 - 3 + 2 - 1 = 3$$

$$x_{21} = 3 - 2 + 3 - 2 = 2$$

$$x_{24} = 4 - 1 + 3 - 1 = 4$$

$$x_{31} = 4 - 1 + 3 - 2 = 4$$

$$x_{32} = 2 - 1 + 2 - 1 = 2$$

$$x_{34} = 5 - 1 + 3 - 1 = 6$$

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية موجبة، مما يعني أن الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل، وعليه فإن تكلفة النقل في هذه الحالة تساوي 330 و. ن.

ب. طريقة التوزيع المعدلة

تعتبر هذه الطريقة مرادفة لطريقة (SSM) ولكنها تستخدم أسلوبا أكثر سهولة ويسرا في تقييم المربعات (الخلايا) ويتم في هذه الطريقة إيجاد مؤشرات بشكل أسرع وأسهل وبوقت أقل مما هو عليه في الطريقة السابقة، وتعتمد هذه الطريقة أساسا على خوارزمية النموذج المرافق الأصلي لأسلوب النقل، لذلك فإن دراسة النموذج المرافق غاية في الأهمية في تقنية البرمجة الخطية[26].

[26] محمد الفياض، عيسى قدادة، بحوث العمليات، مرجع سبق ذكره، ص 225.

ونلخص هذه الطريقة في الخطوات التالية[27]:

– إضافة سطر وعمود جديدان في الجدول تم الحصول عليه بعد تطبيق أحد الطرق الثلاث والتي مكنتنا من الحصول على حل أساسي مبدئي؛

– تعبئة السطر والعمود الجديد بهدف الوقوف على مساهمة كل نقطة من النقطتين (العرض والطلب) في كلفة كل وحدة منقولة وذلك طبقا للعلاقات التالية: تكلفة كل خلية تساوي القيمة الموضوعة في العمود الجديد أمام هذه الخلية مضافا إليها القيمة الموضوعة في السطر الجديد أمام هذه الخلية؛ ونعبر عليها بالشكل:

$$C_{ij} = u_i + v_j$$

حيث أن u_i قيمة الخلية في السطر (نقطة العرض)، و v_j قيمة الخلية في العمود (نقطة الطلب).

– حساب حافز التبديل يعمل على حساب الحافز لتبديل خطة النقل الحالية من خلال حساب الوفر الناجم عن نقل كل وحدة تنقل من المصدر إلى المركز عبر مسار بديل والذي يتجلى في الخلايا غير المعبئة وفق العلاقة:

$$C^*_{pq} = u_p + v_q - c_{pq}$$

هنا نكون أمام إحدى الحالات التالية:

C^*_{pq}: سالبة لجميع الخلايا غير المعبئة فهذا يعني أن الحل أمثل.

C^*_{pq}: موجبة تماما عند خلية أو أكثر فهذا يعني أن الحل غير أمثل ويجب تحسينه.

C^*_{pq}: مساوية للصفر عند الخلية هذا يعني وجود حل أمثل بديل بنفس الكلفة الحالية.

مثال:

---

[27] سليم مجلخ، محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، مقدمة لطلبة السنة الثانية ليسانس، جامعة 8 ماي 1945، قالمة، 2015/ 2016، ص 55، 56.

بأخذ نفس المثال السابق، وبعد الوصول إلى الحل المقبول باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية، سنقوم بتحسينه بالاعتماد على طريقة عوامل الضرب، بدءً بتحديد معادلتي الخلايا المملوءة والخلايا الفارغة[28].

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $u_i = 0$ مع $C_{ij} = u_i + v_j$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow 2 = 0 + V_1 \Rightarrow \mathbf{V_1 = 2}$$

$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow 5 = 0 + V_2 \Rightarrow \mathbf{V_2 = 5}$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 1 = U_2 + 5 \Rightarrow \mathbf{U_2 = -4}$$

$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow 2 = -4 + V_3 \Rightarrow \mathbf{V_3 = 6}$$

$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 1 = U_3 + 6 \Rightarrow \mathbf{U_3 = -5}$$

$$C_{34} = U_3 + V_4 \Rightarrow 5 = -5 + V_4 \Rightarrow \mathbf{V_4 = 10}$$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة $C^*_{ij} = c_{ij} + v_i - u_i$

$$C'_{13} = C_{13} - V_3 - U_1 \Rightarrow C'_{13} = 3 - 6 - 0 \Rightarrow \mathbf{C'_{13} = -3}$$

$$C'_{14} = C_{14} - V_4 - U_1 \Rightarrow C'_{14} = 1 - 10 - 0 \Rightarrow \mathbf{C'_{14} = -9}$$

$$C'_{21} = C_{21} - V_1 - U_2 \Rightarrow C'_{21} = 3 - 2 - (-4) \Rightarrow \mathbf{C'_{21} = 5}$$

$$C'_{24} = C_{24} - V_4 - U_2 \Rightarrow C'_{24} = 4 - 10 - (-4) \Rightarrow \mathbf{C'_{24} = -2}$$

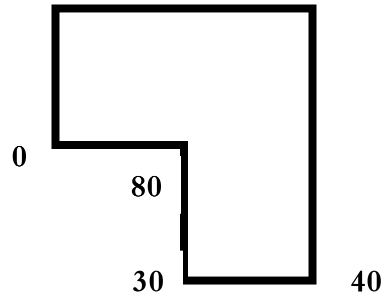
$$C'_{31} = C_{31} - V_1 - U_3 \Rightarrow C'_{31} = 4 - 2 - (-5) \Rightarrow \mathbf{C'_{31} = 7}$$

$$C'_{32} = C_{32} - V_2 - U_3 \Rightarrow C'_{32} = 2 - 5 - (-5) \Rightarrow \mathbf{C'_{32} = 2}$$

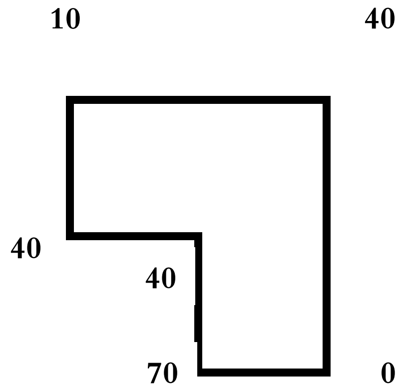
يتم اختيار الخلية x_{14} لأنها تتحمل القيمة الجبرية الأشد سالبية، لذلك ندرس مسارها بنفس الطريقة السابقة:

50 **0**

[28] صوار يوسف، طاوش قندوسي، مرجع سبق ذكره، ص 114- 118.



بما أن أقل قيمة هي 40 =($min: 40, 80, 50$)، إذا ستأخذ الخلية الفارغة x_{14} هذه القيمة ويصبح المسار كالتالي:



ليصبح جدول النقل كالتالي:

الجدول رقم(19): تحسين الحل باستخدام طريقة عوامل الضرب للمثال

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2 40	5 10	3 /	1 /	90
O_2	3 /	1 40	2 40	4 /	80
O_3	4 /	2 /	1 70	5 0	70

b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\,(40) + 5\,(10) + 2\,(40) + 1\,(70) + 5\,(0) = 360$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 360 وحدة نقدية $(720 - 360 = 360)$.

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $u_i = 0$ مع $C_{ij} = u_i + v_j$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow 2 = 0 + V_1 \Rightarrow \mathbf{V_1 = 2}$$

$$C_{12} = U_1 + V_2 \Rightarrow 5 = 0 + V_2 \Rightarrow \mathbf{V_2 = 5}$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 1 = U_2 + 5 \Rightarrow \mathbf{U_2 = -4}$$

$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow 2 = -4 + V_3 \Rightarrow \mathbf{V_3 = 6}$$

$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 1 = U_3 + 6 \Rightarrow \mathbf{U_3 = -5}$$

$$C_{14} = U_1 + V_4 \Rightarrow 1 = 0 + V_4 \Rightarrow \mathbf{V_4 = 1}$$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C^*_{ij} = c_{ij} + v_i - u_i$

$$C'_{13} = C_{13} - V_3 - U_1 \Rightarrow C'_{13} = 3 - 6 - 0 \Rightarrow \mathbf{C'_{13} = -3}$$

$$C'_{21} = C_{21} - V_1 - U_2 \Rightarrow C'_{21} = 3 - 2 - (-4) \Rightarrow \mathbf{C'_{21} = 5}$$

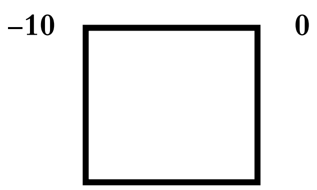
$$C'_{24} = C_{24} - V_4 - U_2 \Rightarrow C'_{24} = 4 - 1 - (-4) \Rightarrow \mathbf{C'_{24} = 7}$$

$$C'_{31} = C_{31} - V_1 - U_3 \Rightarrow C'_{31} = 4 - 2 - (-5) \Rightarrow \mathbf{C'_{31} = 7}$$

$$C'_{32} = C_{32} - V_2 - U_3 \Rightarrow C'_{32} = 2 - 5 - (-5) \Rightarrow \mathbf{C'_{32} = 2}$$

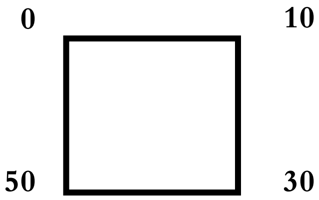
$$C'_{34} = C_{34} - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 5 - 1 - (-5) \Rightarrow \mathbf{C'_{34} = 9}$$

الحل المتوصل إليه ليس أمثلا، لذا نختار الخلية الأشد سالبية وهي الخلية x_{13} والتي تتم دراسة مسارها:



+40 −40

بما أن أقل قيمة هي 10=(min : 10, 40)، إذا ستأخذ الخلية الفارغة x_{13} هذه القيمة ويصبح المسار كالتالي:



وعليه يصبح جدول النقل كالتالي:

الجدول رقم(20): تحسين الحل باستخدام طريقة عوامل الضرب للمثال

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	[2] 40	[5] /	[3] 10	[1] 40	90
O_2	[3] /	[1] 50	[2] 30	[4] /	80
O_3	[4] /	[2] /	[1] 70	[5] /	70
b_i	40	50	110	40	240

قيمة دالة الهدف في هذه الحالة هي:

$$Z = 2\,(40) + 5\,(10) + 3\,(10) + 1\,(40) + 1\,(50) + 2\,(30) + 1\,(70) = 330$$

نلاحظ في هذه الحالة أننا وفرنا 30 وحدة نقدية $(360 - 330 = 30)$.

أولا: تحديد معادلة الخلايا المملوءة: $u_i = 0$ مع $C_{ij} = u_i + v_j$

$$C_{11} = U_1 + V_1 \Rightarrow 2 = 0 + V_1 \Rightarrow \mathbf{V_1 = 2}$$

$$C_{22} = U_2 + V_2 \Rightarrow 1 = -1 + V_2 \Rightarrow \mathbf{V_2 = 2}$$

$$C_{23} = U_2 + V_3 \Rightarrow 2 = U_2 + 3 \Rightarrow \mathbf{U_2 = -1}$$

$$C_{33} = U_3 + V_3 \Rightarrow 1 = U_3 + 3 \Rightarrow \mathbf{U_3 = -2}$$

$$C_{14} = U_1 + V_4 \Rightarrow 1 = 0 + V_4 \Rightarrow \mathbf{V_4 = 1}$$

$$C_{13} = U_1 + V_3 \Rightarrow 3 = 0 + V_3 \Rightarrow \mathbf{V_3 = 3}$$

ثانيا: تحديد معادلة الخلايا الفارغة: $C^*_{ij} = c_{ij} + v_i - u_i$

$$C'_{12} = C_{12} - V_2 - U_1 \Rightarrow C'_{12} = 5 - 2 - 0 \Rightarrow \mathbf{C'_{12} = 3}$$

$$C'_{21} = C_{21} - V_1 - U_2 \Rightarrow C'_{21} = 3 - 2 - (-1) \Rightarrow \mathbf{C'_{21} = 2}$$

$$C'_{24} = C_{24} - V_4 - U_2 \Rightarrow C'_{24} = 4 - 1 - (-1) \Rightarrow \mathbf{C'_{24} = 4}$$

$$C'_{31} = C_{31} - V_1 - U_3 \Rightarrow C'_{31} = 4 - 2 - (-2) \Rightarrow \mathbf{C'_{31} = 4}$$

$$C'_{32} = C_{32} - V_2 - U_3 \Rightarrow C'_{32} = 2 - 2 - (-2) \Rightarrow \mathbf{C'_{32} = 2}$$

$$C'_{34} = C_{34} - V_4 - U_3 \Rightarrow C'_{34} = 5 - 1 - (-2) \Rightarrow \mathbf{C'_{34} = 6}$$

نلاحظ أن جميع القيم الجبرية للخلايا الفارغة موجبة، مما يعني الوصول إلى الحل الأمثل، وعليه فإن تكلفة النقل المحصل عليها تساوي 330 و. ن.

II. نظرة عامة حول جدولة لمشاريع

تعتبر جدولة المشاريع والرقابة عليها أحد مراحل إدارة المشاريع التي تهدف إلى احترام آجال التسليم والاستغلال الأمثل للموارد، لهذا الغرض يستوجب إيجاد أساليب علمية من أجل تحقيق ذلك. توصل الباحثين في مجال التقنيات الكمية إلى إيجاد أسلوب شبكات الأعمال لتمثيل الأنشطة المكونة للمشروع والعلاقات المنطقية بينها.

فهي تساهم في تفادي العديد من المشاكل كالتأخر في أوقات الإنجاز، إدارة الموارد والتحكم في تكاليفها. ظهرت هذه المشاكل بسبب كبر حجم المشاريع من خلال الوقت والموارد اللازمة لإنجازها، وتعقدها بسبب تعدد وتفرع الأنشطة المكونة لها.

فرغم الدور المهم الذي تؤديه أساليب شبكات الأعمال إلا أننا لازلنا نلاحظ قصور في إدارة أغلب المشاريع، حيث ينعكس ذلك سلبا على مواعيد تسليمها والتكاليف الفعلية. يرجع هذا إلى غياب استخدام شبكات الأعمال في إدارة المشاريع ما يؤثر سلبا على كفاءة أداءها.

1. مفهوم وأهمية جدولة المشاريع

أ. مفهوم الجدولة

تعتبر جدولة المشاريع والرقابة عليها من أهم خطوات إدارة المشاريع التي يعود الفضل في تطورها إلى ظهور بحوث العمليات، خاصة شبكات الأعمال لدى المؤسسات العسكرية في إطار / إنجاز مشاريعها الكبيرة. ثم انتقل استخدامها إلى مجال الإنتاج، الصيانة، التشييد، التدقيق، المحاسبة وغيرها من الاستخدامات[29].

[29] بوكليخة لطيفة، إدارة أعمال الصيانة باستخدام الأساليب الكمية –دراسة شركة الاسمنت ببني صاف–، مجلة نماء للاقتصاد والتجارة، المجلد 01، العدد 02، 2017، ص 114.

تعرف على أنها تلك الدراسة المكثفة التي يقوم فريق من الخبراء المتخصصين في مجالات التسويق والمجالات الفنية والمالية والاقتصادية والادارية لغرض اتخاذ قرار قبول أو رفض أو تطوير المشروع المقترح[30].

تعتبر دراسة الجدوى بمثابة المشروع بحد ذاته الذي لا بد من استخدام أساليب التخطيط والرقابة علية، كما أن دراسة الجدوى سيكون له دورة حياة الخاصة وتحتوي دورة حياة مشروع دراسة الجدوى على المراحل التالية[31]:

- **التعريف:** تعني تعريف الإطار العام لهدف دراسة الجدوى.
- **التصميم:** يعني وضع الخطة التي توضح خطوات وآلية تنفيذ دراسة الجدوى.
- **التنفيذ:** هي أداء أو تنفيذ دراسة الجدوى.
- **انجاز المهمة:** تعني التأكيد على أن دراسة الجدوى قد أنجزت وقدمت التقرير المطلوب.

من ما سبق يمكن القول عن عملية جدولة المشاريع هي عملية تحويل خطة المشروع الى جدول زمني لتنفيذه، ابتداء من لحظة مباشرة العمل، مرورا بجميع الأنشطة المتتابعة والمتداخلة والأحداث والمحطات الرئيسية، وصولا الى لحظة انتهاء العمل في المشروع واقفاله.

ب. أهمية الجدولة

تعتبر الجدولة تحويل خطة عمل المشروع إلى برنامج زمني فعال يضمن إنهاء المشروع في موعده وتحقيق الكفاءة في استغلال موارده خاصة الطاقات العاطلة التي قد تظهر خلال فترة الإنجاز كالآلات واليد العاملة. تظهر أهمية جدولة المشاريع فيما يلي[32]:

[30] زواوي حميدة، محاضرات في مقياس إدارة المشاريع، مقدمة لسنة ثالثة ليسانس إدارة أعمال قسم علوم التسيير، جامعة محمد بوضياف مسيلة، 2019/ 2020، ص 6.

[31] زواوي حميدة، المرجع السابق، ص 6.

[32] خير الدين موسى أحمد، إدارة المشاريع المعاصرة، الطبعة الثالثة، دار وائل للنشر، الأردن، 2017، ص 160، 161.

- تعتبر الجدولة الإطار الذي يضمن التنسيق بين مختلف الأقسام والوظائف وفرق العمل داخل المشروع لضمان تخطيط وتوجيه ومراقبة مختلف مراحل المشروع؛
- تسمح الجدولة بتحديد تاريخ إنهاء المشروع والأنشطة التي يؤدي تأخرها إلى تأخر وقت إتمامه، والفوائض الزمنية التي يمكن خلالها أن تتأخر بعض الأنشطة دون تأخير موعد إنهاء المشروع؛
- يسمح الجدول الزمني الذي توفره الجدولة بمعرفة أوقات الحاجة للموارد وتفادي الصراعات حولها خاصة في حالة الموارد المحدودة، كما يسمح كذلك بمعرفة التكاليف التقديرية لأنشطة المشروع؛
- تركز عملية إعداد دراسات الجدوى وتقييمها على تحليل احتمالية المخاطر لكل بديل متاح وفي ضوء العديد من المتغيرات البيئية والتنافسية، فهي تمكن المستثمر الريادي من تحديد حجم المخاطرة أو الخسائر المحتملة؛
- إن دراسة الجدوى الاقتصادية لا يمكن التوصل إلى استنتاجاتها إلا بعد أن تتم عملية استخدام أساليب تحليلية ومالية واقتصادية واجتماعية واحصائية متعددة؛
- تتصف دراسة الجدوى بالعمق والتحليل الشمولي والمتكامل خاصة الدراسة التفصيلية للمشروع، حيث تتناول جميع الأبعاد الخاصة بأنشطة المشروع من الناحية الإدارية والقانونية والتنظيمية والبشرية والمعلوماتية والمالية والتسويقية والفنية؛
- ضرورية وأساسية للعديد من الجهات والمؤسسات الحكومية والتمويلية، حيث أنها تعد الركيزة الأساسية للموافقة على المشروع ومنحه التراخيص القانونية من قبل الجهات الحكومية المتخصصة، كما أن الهيئات التمويلية كالبنوك ومؤسسات الإقراض تهتم بهذه الدراسات وتتولى تحليلها وتوثيقها قبل الموافقة على منح أي قرض أو تمويل هذه المشروعات؛
- إن البعد المالي والمحاسبي لدراسة الجدوى إنما يتضمن تحديد هيكل التمويل الأمثل للمشروع من حيث التمويل الممتلك ونسبة التمويل المقترض فيه، وذلك من خلال دراسة تكلفة

مصادر هذا التمويل، كما تهتم بدراسة هيكل التكاليف الأمثل لكافة موارد ومتطلبات المشروع سواء البشرية أو المادية أو التشغيلية الأخرى، وهذا الهيكل يكون ضروريا في عمليات التسعير للخدمات أو السلع المنتجة وكذلك في دراسة وتحليل حجم الارباح المتوقعة.

2. أهداف جدولة المشاريع

أما أهداف دراسة الجدوى التفصيلية فيمكن أن نحددها في النقاط التالية[33]:

– إعطاء مبررات مقنعة لصاحب العلاقة بالمشروع، من أن تحديد الطاقة الإنتاجية للمشروع له ما يبرره من حيث مستوى الطلب المتوقع على مخرجات المشروع في الأمد المنظور، وهو ما تدل عليه دراسة السوق بكل إبعادها المنظورة وغير المنظورة.

– الدليل بأن الموقع المختار للمشروع، هو الموقع الأمثل من بين المواقع البديلة الأخرى ، المتوفرة في الدولة أو الإقليم.

– التأكد على أن الفن الإنتاجي أو الفنون الإنتاجية المختارة في تصميم المشروع هي المثلى من حيث ملائمتها لمستوى المهارات الفنية والتقنية السائدة في الدولة، وتتلاءم مع طبيعة المواد والمدخلات المتوفرة في السوق المحلية، أو يمكن توفيرها ببدائل اقتصادية، بالإضافة إلى أهمية توافق الفنون الإنتاجية ومستوى التعقيد التقني المختار للمشروع مع أهداف وأفضليات الدولة أو خطة التنمية الاقتصادية من حيث اختيار تقنية رأس المال أم تقنية العمالة.

– إقناع المستثمرين (قطاع خاص، قطاع عام، أو مختلط) بأن عائد الاستثمار مجدي ويستحق التضحية بالأموال من اجل بناء المشروع المقترح الذي يمثل الفرصة الاستثمارية المثلى في الوقت الراهن، لذا فأن دراسة الجدولة التفصيلية ينبغي أن تمدنا بأساس فني ومالي واقتصادي للقرار الاستثماري الخاص بالمشروع مع تعديد وتحليل العناصر الحرجة التي ترتبط

[33] قاسم ناجي حمندي، أسس إعداد دراسات الجدوى وتقييم المشروعات، الطبعة الأولى، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان– الأردن، 2008، ص 56.

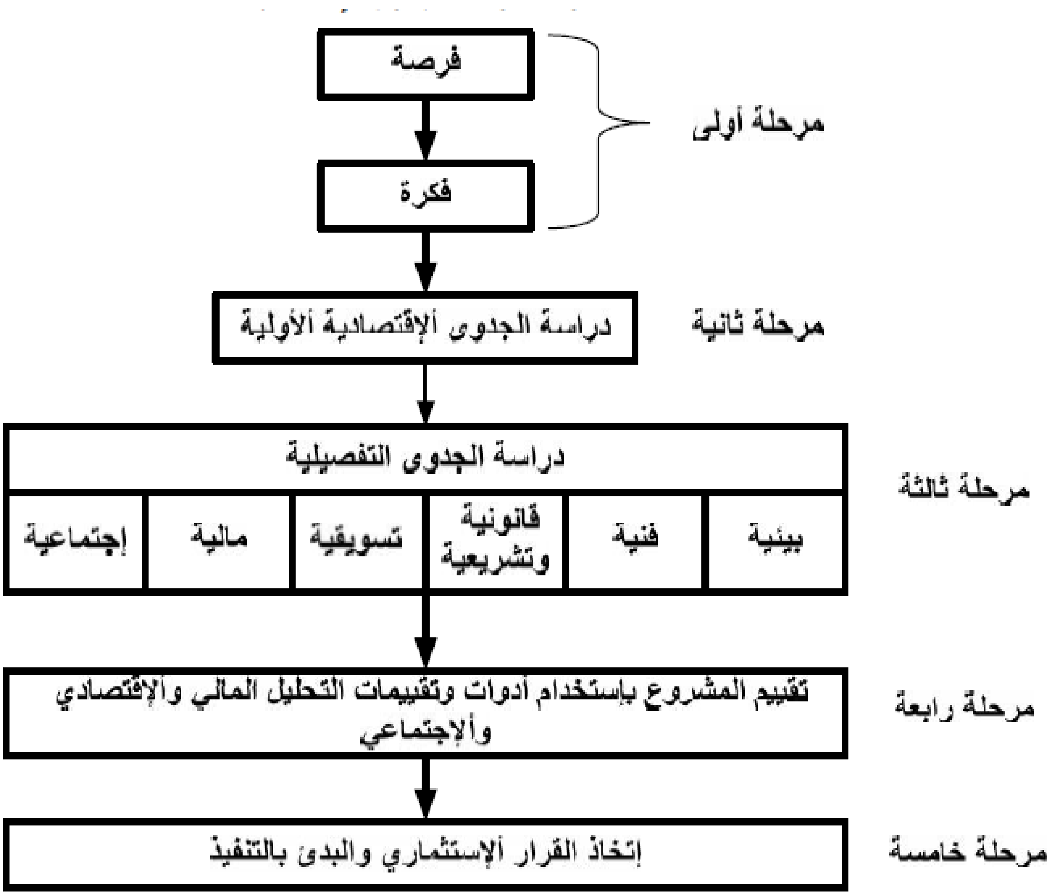
بالإنتاج ومستلزماته والبدائل الخاصة بهما، كما تحدد دراسة الجدوى طاقة الإنتاج للمشروع المقترح باستخدام فن إنتاجي محدد أو عدة فنون إنتاجية مرتبطة بمدخلات واستثمارات معروفة وتكلفة إنتاج وتشغيل معروفة تعطينا عائدا محددا للاستثمار.

وللوصول إلى هذا الهدف يجب أن تصف لنا دراسة الجدوى مرحلة الأمثلية وتبرير الافتراضات والحلول المختارة وتحديد هيكل المشروع ويجب ملاحظة أن دراسة الجدوى ليست غاية في حد ذاتها ولكنها وسيلة للوصول إلى قرار الاستثمار بالموافقة على المشروع أو رفضه.

3. مراحل جدولة المشاريع

تتضمن دراسة الجدوى للمشروعات لعرض الفعاليات والمراحل التي تعتبر الأساسية والضرورية لعملية اتخاذ القرار الإيجابي، وتمر دراسة الجدوى للمشروع من خلال مجموعة من المراحل، كما يوضحه الشكل التالي:

الشكل رقم (06): مراحل دراسة الجدوى



المصدر: فلاح الحسيني، إدارة المشروعات الصغيرة، الطبعة الأولى، دار الشروق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2006، ص 87.

وفيما يلي شرح لهذه المراحل[34]:

1. **المرحلة الأولى مرحلة ما قبل الاستثمار**: وهي المرحلة الخاصة بدراسة المشروع من جميع الجوانب وإعداده للتنفيذ عبر مرحلتين أساسيتين هما:

– **الفكرة الأولية الخاصة بالمشروع (توفر الفرصة)**: تعني أن هناك فرصة استثمارية وحاجة اقتصادية واجتماعية للمشروع، وهذه الفرصة تتحدد من خلال المعرفة باحتياجات السوق

[34] فلاح حسن الحسيني، إدارة المشروعات الصغيرة، مرجع سابق، ص 85.

والمستهلكين، لسلع أو خدمات معينة، وان هذه الفرصة متاحة كون أن النشاط الخاص بها غير مشبع تماما.

– **تبلور الفكرة:** في ضوء معطيات ونتائج الفرصة الاستثمارية المتاحة في قطاع أعمال معين، يبدأ الريادي بالتفكير العميق لكيفية الاستفادة من هذه الفرصة المتاحة، وإمكانية تحويلها أو ترجمتها إلى واقع عملي، حيث يتولى دراسة وتحليل هذه الفرصة ومقارنتها بإمكاناته المالية والبشرية وقدرته على النجاح فيها، وفي كثير من الأحيان يتعمق الريادي في هذه المرحلة حيث يسأل ويستشير ويحاول أن يطلع على أداء ومنتجات المشروعات المماثلة ومستوى الأرباح والمخاطر والتكاليف واحتمالية الاستمرار والنمو والقدرة التنافسية وحجم السوق والأبعاد القانونية والتشريعية في هذا المجال وما هي الإعفاءات والتسهيلات الحكومية ومعدلات الضرائب وغيرها من الأمور التي يراها ضرورية.

2.المرحلة الثانية دراسة الجدوى الاقتصادية الأولية (دراسة ما قبل الجدوى): بعد نضوج الفكرة وتولد القناعة بجدوى المشروع وتوافقه مع إمكاناته المالية والإدارية والخبرة التي يمتلكها والتأكد من قدرته على النجاح فيه بنسبة معقولة، يلجأ إلى القيام شخصيا أو بتكليف جهة استشارية معينة بإعداد دراسات أولية عن المشروع (دراسة ما قبل الجدوى) تتناول بالدراسة وبالتحليل الفقرات التي تم ذكرها سلفا حول الدراسة الأولية للمشروع وان نتائج هذه الدراسة الأولية هي التي تحدد عمليا قرار استمرارية المشروع أو التخلي عنه.

3. المرحلة الثالثة دراسة الجدوى التفصيلية: عند اكتمال القاعة الاستثمارية لدى صاحب المشروع وبعد الانتهاء من الدراسة المبدئية بجدوى المشروع اقتصاديا وفنيا، يتم تكليف جماعات متخصصة بإعداد دراسة الجدوى الاقتصادية للمشروع، وتكون هذه الدراسة تفصيلية، يتم التركيز فيها على مجموعة من العوامل إذ تهتم بدراسة وتحليل كشف التدفقات النقدية الداخلة والخارجة بشكل تفصيلي وحجم الأرباح المتوقعة خلال الفترة الزمنية اللاحقة لتأسيس المشروع، ولذلك فان دراسة الجدوى الاقتصادية تهتم بتحليل وتقرير الجوانب التالية:

– العوامل والمتغيرات البيئية المحددة، كالسياسية والاقتصادية والمالية التكنولوجية وغيرها.

– الجوانب القانونية والتشريعية ذات الصلة بقطاع أعمال هذا المشروع.

– في الجوانب التسويقية، كتحليل السوق والمنافسين والمستهلكين وغيرها.

– الجوانب الفنية، كمستوى التكنولوجية المطلوبة ومستوى الجودة ومهارات العمالة والتخصصات والمواصفات الفنية المطلوبة وطبيعة الإنتاج وتصميماته ومزاياه وغيرها.

– الجواب المالية، وتهتم بدراسة حجم الأموال اللازمة لتغطية هذا الاستثمار ومكونات الهيكل المالي وتكاليفه والتدفقات النقدية سواء الداخلية أو الخارجية، وطبيعة القوائم والمستندات المحاسبية المطلوبة وغيرها من الأمور الضرورية في هذا المجال.

– العوامل الاجتماعية، وتتمثل بطبيعة النسيج الاجتماعي للمجتمع والقيم والتقاليد والعادات والمستوى الثقافي روعي المستهلكين وسلوكياتهم والعادات الشرائية وغيرها.

4.المرحلة الرابعة: تقييم المشروع الاستثماري: بعد الانتهاء من إعداد دراسة الجدوى التفصيلية، يتم استخدام مجموعة من الاساليب، والتقنيات المالية والاقتصادية لتقييم جدوى الاستثمار في هذا المشروع من ناحية الربحية التجارية، وربما من ناحية الربحية الاجتماعية.

5.المرحلة الخامسة اتحاد القرار الاستثماري ولبدء بالتنفيذ: في ضوء نتائج تقييم المشروع الاستثماري، سيلجأ صاحب المشروع إلى مرحلة دقيقة وحاسمة ألا وهي اتخاذ القرار بالبدء، أو التخلي بشكل نهائي عن المشروع ومن أهم العوامل المؤثرة في هذا القرار هي العوامل المالية، فإذا كان المشروع سيتوقع له أن يحقق عوائد وأرباح ومستوى المخاطرة فيه معقولة فإن القرار سيكون بقبول المشروع.

وبعد اتخاذ القرار الاستثماري بالموافقة على المشروع كونه مشروع يتوقع له النجاح والاستمرارية فإنه سيتم البدء في تنفيذه[35].

ويمكن أن نوضح الخطوات السابقة في مخطط أكثر تفصيلا كما هو موضح في الشكل التالي:

[35] فلاح حسن الحسيني، إدارة المشروعات الصغيرة، مرجع سابق، ص 86.

الشكل رقم (07): مرحل دراسة وتقييم وتنفذ المشروعات

المصدر: فلاح حسن الحسيني، إدارة المشروعات الصغيرة، مرجع سابق، ص 88.

قائمة المراجع

المراجع باللغة العربية

- إبراهيم أحمد مخلوف، التحليل الكمي في الإدارة، ط 1، د ن، الرياض، 1994.
- الألولسي، أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار)، دار القلم للنشر والتوزيع، الامارات العربية المتحدة، 2003.
- إنعام علي التوفيق الشهربلي، تقويم نظم المعلومات باستخدام بحوث العمليات، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2009.
- بن سبع إلياس، بلمقدم مصطفى، وظيفة النقل وأهميتها في إدارة شبكة الامداد، مجلة البحوث الادارية والاقتصادية، العدد2، جامعة محمد بوضياف المسيلة، الجزائر، 2017.
- بوقرة رابح، بحوث العمليات، الجزء الثاني، منشورات جامعة المسيلة، الجزائر، 2012.
- بوكليخة لطيفة، إدارة أعمال الصيانة باستخدام الأساليب الكمية –دراسة شركة الاسمنت ببني صاف–، مجلة نماء للاقتصاد والتجارة، المجلد 01، العدد 02، 2017.
- جمال عبد العزيز صابر، بحوث العمليات في المحاسبة، د ن، القاهرة، 2009.
- جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق، دار جليس الزمان، عمان، 2008.
- حامد سعد نور الشمرتي، بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا، مكتبة الذاكرة، بغداد، 2010.
- حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مدخل إلى بحوث العمليات، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2007.
- حسن علي مشرقي, نظرية القرارات الإدارية مدخل كمي في الإدارة, دار المسيرة للنشر والتوزيع، الأردن، الطبعة الأولى،1997 م.
- حسن علي مشرقي، عبد الكريم القاضي، بحوث العمليات – تحليل كمي في الادارة، دار الميسرة للنشر، الأردن، الطبعة الاولى، د س.
- حسيم محمد الجنابي، الأحدث في بحوث العمليات، دار حامد للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2011.
- حسين ياسين طعمة وآخرون، بحوث العمليات نماذج وتطبيقات، دار صفاء للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، عمان، الأردن، 2009.
- خير الدين موسى أحمد، إدارة المشاريع المعاصرة، الطبعة الثالثة، دار وائل للنشر، الأردن، 2017.

- دلال صادق الجواد، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الطبعة العربية، عمان الاردن، 2008.
- رشيق رفيق مرعي, فتحي خليل حمدان, مقدمة في بحوث العمليات , مرجع سابق, عمان الأردن, الطبعة الأولى .1996
- زواوي حميدة، محاضرات في مقياس إدارة المشاريع، مقدمة لسنة ثالثة ليسانس إدارة أعمال قسم علوم التسيير، جامعة محمد بوضياف مسيلة، 2019/ 2020.
- سليم مجلخ، محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، مقدمة لطلبة السنة الثانية ليسانس، جامعة 8 ماي 1945، قالمة، 2015/ 2016.
- سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، الجامعة المفتوحة، الطبعة الأولى، طرابلس، ليبيا، 2002.
- سونيا محمد البكري، استخدام الأساليب الكمية في الادارة، الدار الجامعية، الاسكندرية، 1997.
- شفيق العتوم، بحوث العمليات، الطبعة الأولى، دار المناهج، 2006.
- صادق محمد جواد، ناصر حميد القتال، بحوث العمليات، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، 2008.
- صالح مهدي محسن العامري، عواطف إبراهيم الحداد، تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة، الطبعة الأولى، إثراء للنشر والتوزيع، عمان الاردن، 2009.
- صوار يوسف، طاوش قندوسي، محاضرات في البرمجة الخطية – تمارين محلولة باستعمال برنامج Q.S.B– كلية العلوم الاقتصادية التجارية وعلوم التسيير، جامعة الدكتور الطاهر مولاي، سعيدة، ديوان المطبوعات الجامعية، وهران، الجزائر، د س.
- ضو نصر، مطبوعة مقدمة في مقياس رياضيات المؤسسة، لطلبة السنة الثانية علوم التسيير وعلوم اقتصادية والعلوم التجارية، جامعة الشهيد حمة لخضر الوادي، 2018/ 2019.
- عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل إلى بحوث العمليات الطبعة الثالثة، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، 2009.
- عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، المدخل لبحوث العمليات، دار وائل للنشر، الأردن، 2001.
- عبد الستار أحمد محمد الآلوسي، أساليب بحوث العمليات (الطرق الكمية المساعدة في اتخاذ القرار)، دار القلم للنشر والتوزيع، الإمارات العربية المتحدة، 2003.

– علي العلاونة وآخرون، بحوث العمليات في العلوم التجارية، دار المستقبل للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.

– فتحي رزق السوافيري، مدخل معاصر في بحوث العمليات، تطبيقات باستخدام الحاسب الآلي، جامعة الاسكندرية، 2004.

– فتيحة بلجيلالي، محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة، مقدم لطلبة سنة ثالثة ليسانس علوم التسيير، جامعة ابن خلدون تيارت، 2017/ 2018.

– الفرات منار، المادة النظرية في بحوث العمليات والبرمجة الخطية، قسم إدارة الأعمال، كلية التجارة، جامعة غزة، 2014/2013.

– فريد راغب النجار، بحوث العمليات فًي الإدارة، ط1، الدار الجامعٌية، الإسكندرية، 2009.

– فريد عبد الفتاح زين الدين، بحوث العمليات وتطبيقاتها في حل المشكلات واتخاذ القرارات، – الجزء الاول البرامج الخطية–.

– قاسم ناجي حمندي، أسس إعداد دراسات الجدوى وتقييم المشروعات، الطبعة الأولى، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان–الأردن، 2008.

– محمد الفياض، عيسى قدادة، بحوث العمليات، دار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2007.

– محمد توفيق ماضي, سلسلة الأساليب الكمية للجميع البرمجة الخطية التوزيع الأمثل للموارد المحدودة, المكتب العربي الحديث, الإسكندرية, 1992 م.

– محمد توفيق ماضي، مراقبة وضبط المخزون، الدار الجامعية، مصر، د س.

– محمد راتول، بحوث العمليات، ط2، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2006.

– محمد سالم الغدي، بحوث عمليات تطبيق وخوارزميات، ط1، دار وائل للطباعة والنشر، عمان، الأردن، 1999.

– محمد عبد العال النعيمي وآخرون، بحوث العمليات، دار وائل للنشر، عمان، الأردن، الطبعة الثانية، 2011.

– نجم عبود، مدخل على الاساليب الكمية، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، الاردن، 2003.

– يحياوي إلهام، محاضرات مقياس رياضيات المؤسسة، كلية العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير، جامعة الحاج لخضر، باتنة، د س.

المراجع الأجنبية:

- AMOR. Farouk .Enghezal, Programmation Linéaire, Alger, publications universitaires, 2000.
- Bouqlem Benmazouz, Recherche Opérationnelle de Gestion, Atlas Edition, 1995, Algérie.
- Gérald Baillargeon ,"Programmation linéaire appliquée ", les édition SMG,Québec, Canada,1996 .
- Gerald Baillargeon, Programmation linéaire appliqué – outille à l'aide de décession, 1996.
- Gérald. Baillageon, Programmation Linéaire Appliquée Outil D'aide A La Décision, 1996.
- Jean pierre Védrine, Elisabeth Bringuire & Alain Brisard, Techniques quantitatives de gestion.
- MICHEL Simonnard , Programmation linéaire technique de calcul économique ,dunod paris 1972.
- Robert Faure et autre, Précis de recherche opérationnelle, 5eme édition, Dunod, Paris, 2000.