N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation numérique

Présenté par: NOM Prénon

Thème

Etude théorique d'un problème en mécanique de contact

Présenté par:
Bahdi Imane
Messaoudi Hadjra
Meneceur Maroua
Sous la supervision de :
Mr: AZEB AHMED ABDELAZIZ

Année universitaire 2014 – 2015

Remerciement

La louange est à Allah, qui nous a facilité l'accomplisseme de ce travail de recherche chose ne peut étre qu'avec la volonté de Dieu -à lui la tout puissance et la Majesté- et que la louange initiale et finale appartieut à allah, Seigneur des mondes

Aussi, il nous fait plaiser que nous, au commencement de ce travail, présentons nos grands remerciments, éstimations et reconnaissances à notre encadreur puissant " ***AZEB AHMED ABDELAZIZ*** *" de nous avoir encourager moralement la durée de recherche et que ce travail est le fruit de ces encouragement*

Nous présentons nos veridiques remerciments à tout personne, du proche ou du loin, qui nous adonné un coup de main, à fin de términer ce travail de recherche

Enfin, nous remercions vivement nos familles pour l'aide matérielle et morale durant la période de préparation

"Que la grace et la paix soient sur notre profet Muhammad ainsi que sur sa famille et ses compagnons".

Table des matières

Introduction

Dans la plupart des systèmes de la mécanique des milieux continues, ils existent des situations dans lesquelles un corps déformable entre en contact avec d'autre corps ou bien avec une fondation rigide ou déformable. La problématique du contact est essentiellement de savoir comment les forces sont appliquées sur une structure et comment réagissent ces structures lorsqu'elles subissent ces forces. La littérature concernant la mécanique de contact est vaste et aborde autant de sujets différents que sont la modélisation, l'analyse mathématique ou l'approximation numérique des problèmes de contact. Il existe ainsi de multiples références, citons ici quelques classiques. Une des premières références portant sur l'étude des problèmes de contact avec frottement via les inéquations variationnelles est sûrement [4]. Une autre excellente référence est [9]. Dans différents problèmes de contact provenant du secteur industrie, il y a besoin de prendre en considération l'endommagement interne du matériau causé par des contraintes mécaniques. On décrit l'évolution de l'endommagement par une inclusion différentielle du type parabolique comme dans [7, 9], et on note le champ d'endommagement ici par la variable interne β qui prend les valeurs entre zéro et un, lorsque $\beta = 0$ le matériau est complètement endommagé, lorsque $\beta = 1$ il n'y a pas d'endommagement et lorsque $0 < \beta < 1$ il y a un endommagement partiel. Des modèles d'endommagement peuvent être trouvés dans [5, 13]. On peut trouver l'analyse mathématique des problèmes d'endommagement dans le cas unidimensionnel dans [7]. Un problème dynamique de contact avec endommagement et adhésion d'un matériau élasto-viscoplastique est déjà traité récemment dans [8]. F. Messelmi a étudie un problème dynamique de déplacement-traction et contact avec endommagement d'un matériau thermo- élasto-viscoplastique en présence de l'équation d'énergie, voir [11].

Dans ce travail, nous nous intéressons par l'étude d'un problème de contact pour un matériau viscoélasique dans le processus dynamique, sous l'hypothèse de petites déformations. Le contact est décrit à l'aide des conditions de contact de compliance normale sans frottement. On introduit dans la loi de comportement du corps une variable interne qui représente l'endommagement du matériau causé par la partie viscoélastique. Ce mémoire est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, le but est d'introduire les éléments nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des objets traités. Nous commençons par décrire les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites concernant le champ des déplacements, et le champ des contraintes.

Dans le second chapitre nous rappelons les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, concernant les inéquations et les équations variationnelles d'évolution, les lemmes de Gronwall et les sous différentiabilité.

Dans le troisième chapitre , on étudie notre problème défini par le processus dynamique des matériaux viscoélastiques où l'endommagement interne du matériau est pris en considération. Le contact y est décrit par une condition de contact de compliance normale sans frottement. Nous dérivons une formulation variationnelle du problème mécanique, et nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible, en utilisant des résultats sur les équations et inéquations variationnelles d'évolution, suivis d'un argument de point fixe.

Notations

Soit Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ on note par

$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω.
Γ	la frontière de Ω supposée régulière.
$\Gamma_i (i = \overline{1,3})$	une partie mesurable de Γ.
$mes\Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d-1)$ dimensionnelle de Γ_1.
ν	la normale unitaire sortante à. Γ.
v_ν, v_τ	les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v sur Ω.
$C^1(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles continuement différentiables sur Ω.
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$.
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2(\Omega)_s^{d \times d}$.
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$.
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H},\ Div\sigma = (\partial_j \sigma_{ij}) \in H\}$.
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ.
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$.
$\gamma : H_1 \to H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel et $d \in \mathbb{N}^*$, on a les notations suivantes:

H^d	l'espace $\left\{x \in (x_i) \,| x_i \in H,\ i = \overline{1,d}\right\}$.
$(.,.)_H$	produit scalaire sur H
$(.,.)_{H' \times H}$	produit de dualité entre H et H'
$\|.\|_H$	la norme sur H
H'	l'espace dual de H

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0,T;H)$	l'espace des fonctions continues de $[0,T]$ dans H.
$\|.\|_{0,H}$	la norme de $C(0,T;H)$.
$C^1(0,T;H)$	l'espace des fonctions continûment dérévables sur $[0,T]$ dans H .
$\|.\|_{1,H}$	la norme de $C\left(0,T;H\right)$.
$L^p\left(0,T;H\right)$	l'espace des fonctions mesurables sur $[0,T]$ dans H
$\|.\|_{0,p,H}$	la norme de $L^p(0,T;H)$.
$W^{k,p}(0,T;H)$	l'espace de Sobolev de paramètre k et p.
$\|.\|_{k,p,H}$	la norme de $W^{k,p}(0,T;H)$.

Autre notations:

$\mathbb{S}_d$	espace des tenseurs d'ordre deux symétriques sur $\mathbb{R}^d$ c'est à dire $\mathbb{S}_d = \mathbb{R}_s^{d\times d}$.
c	une constante générique strictement positive.
$p.p.$	presque partout.
P_K	opérateur de projection sur K.
Ψ_K	fonction indicatrice de K.

Chapitre 1

Rappels de la mécanique de contact

L'objectif des problèmes de contact, du point de vue mécanique, est d'étudier le nouveau état d'un corps matériel déformable, résultant de l'application des forces volumiques dans le domaine qu'occupe ce corps et des forces de traction sur une partie de la frontière de ce domaine dans un intervalle de temps donné.

Ce chapitre est consacré aux rappels de quelques notions de base de la mécanique des milieux continus tels que le tenseur des contraintes, le tenseur des déformations linéarisées. On y introduit quelques types des lois de comportement (élastique, viscoélastique avec et sans endommagement et viscoplastique avec et sans endommagement). On établit aussi les conditions aux limites de déplacement-traction et de contact avec compliance normale sans frottement d'un corps déformable avec une base déformable.

1.1 Contraintes et déformations.

On considère un corps déformable occupant un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2)$ et ayant une frontière Γ supposée assez régulière. L'objet du problème, du point de vue mécanique est l'étude dans un intervalle de temps $(0, T)$ l'évolution du corps matériel due à l'application des forces extérieurs sur l'intérieur (des forces de volumes et de surfaces) du corps et sur sa frontière. Cette évolution est décrite par l'équation

$$Div\sigma + f_0 \ = \rho\ddot{u} \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \tag{1.1.1}$$

où les inconnues du problème sont le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to S_d$ ou "$\ddot{u}$ "(respectivement $\dot{u}$) représente la dérivée seconde du champ des déplacements par rapport au temps (respectivement la dérivée première) et $Div\ \sigma$ est la divergence du champ des contraintes. La fonction qui désigne la densité de masse $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+$ et la densité des forces volumiques $f_0 : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^+$ sont des données du problème.

Les processus d'évolution modélisées par l'équation (1.1.1) s'appellent processus dynamique. Dans certaines situation, l'équation (1.1.1) peut encore se simplifier. Par exemple dans le cas où $\dot{u} = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statique), ou bien dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, c'est -à-dire que le terme peut être négligé (processus quasistatique). Dans ces deux cas l'équation de mouvement devient

$$Div\sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T). \tag{1.1.2}$$

Dans la suite, on va considérer des matériaux élastique, viscoélastique et élasto-viscoplastiques dans le cadre des petites transformations. Dans ce cas, on a besoin du champ des déformations linéarisés $\varepsilon : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{S}_d$ défini par

$$\varepsilon = (\varepsilon_{ij}), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0, T), \tag{1.1.3}$$

où ∂_k représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_k.

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire les mouvements des milieux continus, elles doivent être complétées par d'autres relations caractérisant le comportement de chaque matériau; ce sont les lois de comportements qui nous décrivons dans la sous-section suivante [11].

1.2 Lois de comportement.

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. L'équation du mouvement (1.1.1) ou l'équation d'équilibre (1.1.2), équivaut à des relations scalaires, et du point de vue mathématique cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les d composantes u_i du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation. Du point de vue physique, chacune des équations (1.1.1) et (1.1.2) exprime une loi universelle valable pour tous les matériaux. Si donc cette équation suffisait à déterminer tous les paramètres, cela signifierait que, soumis à des conditions identiques, les divers milieux continus auraient des comportements identiques. Ceci est naturellement absurde. Donc chaque équation (1.1.1) ou (1.1.2) est insuffisante, elle seule, à décrire l'équilibre des corps matériels, elle doit être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général la loi de comportement qui est une relation reliant le tenseur de contrainte, le tenseur de déformation et leurs dérivées. On présente dans cette mémoire, la loi de comportement de matériaux : viscoélastique.

a) Loi de comportement des matériaux élastiques

La loi de comportement est de la forme :

$$\sigma = \mathcal{F}(\varepsilon(u)), \tag{1.2.1}$$

où $\mathcal{F}$ est une application linéaire ou non linéaire. Cette loi peut modeler quelques propriétés mises en évidence par les expériences de chargement monotone : linéarité de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (suivant que $\mathcal{F}$ soit linéaire ou non), durcissement ou adoucissement de la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (suivant que $\mathcal{F}$ soit monotone ou non). Par contre, ni le fluage, ni la relaxation ne peuvent être décrits par la loi (1.2.1).

En élasticité linéaire σ est une fonction linéaire de ε, c'est à dire $\sigma = \mathcal{E}\,\varepsilon$, $(\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl})$. Où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$ est un tenseur d'ordre quatre.

b) Loi de comportement des matériaux viscoélastiques

La loi de comportement est de la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}\right) + \mathcal{G}\left(\varepsilon\left(u\right)\right), \tag{1.2.2}$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{G}$ sont des fonctions constitutives non linéaires. $\mathcal{A}$ représente l'opérateur de viscosité et $\mathcal{G}$ désigne l'opérateur d'élasticité. Pour un corps élastique lorsque $\mathcal{A}$ =0, la loi se réduit à $\sigma = \mathcal{G}\varepsilon\left(u\right).$

Nous rappelons qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkh}\varepsilon_{kh}\left(\dot{u}\right) + g_{ijkh}\varepsilon_{kh}\left(u\right),$$

$\mathcal{A} = (a_{ijkh})$ est le tenseur de viscosité et $\mathcal{G} = (g_{ijkh})$ le tenseur d'élasticité, pour $i, j, k, h = 1, ..., d$. La loi de comportement (1.1.5) est une loi viscoélastique du type Kelvin-Voigt. L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes, les huiles et les cires, a mis en évidence que certains phénomènes, tels que le fluage et la relaxation, ne peuvent être décrits par les lois de comportement élastique. C'est pour cela que les lois viscoélastique ont été introduites. Elles décrivent le comportement des matériaux comme les métaux, les polymères, les caoutchoucs et les roches. Nous envisageons ici des matériaux qui ont des propriétés élastique, mais on même temps, les essais monotone indiquent que la courbe $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ dépend de $\dot{\varepsilon} = \varepsilon(\dot{u})$. Ces sont les matériaux viscoélastiques. Parmis les lois viscoélastiques, nous citons la loi de viscoélastiques de Kelvin-Voigt.

c) Loi de comportement viscoélastique avec endomagemment

Si nous prenons en considération l'effet de l'endommagement du matériau durant le contact, nous arrivons à une généralisation de la loi (1.2.2) qui est la loi de comportement viscoélastique avec endommagement ayant la forme

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon\left(\dot{u}\right) + \mathcal{G}(\varepsilon\left(u\right), \beta).$$

Notons que les valeurs de la fonction d'endommagement β sont comprises entre zéro et un. Lorsque $\beta = 1$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau, quand $\beta = 0$, le matériau est complètement endommagé, pour $0 < \beta < 1$, il y a un endommagement partiel et le système a une capacité de résistance réduite.

d) Loi de comportement des matériaux viscoplastiques

Les lois de comportement viscoplastiques sont des lois constitutives qui peuvent modéliser en même temps les phénomènes décrits par les essais de charge-décharge et les phénomènes dépendant du temps (relaxation et fluage). La loi de comportement est de la forme

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\dot{\varepsilon} + \mathcal{G}\left(\sigma, \varepsilon\right),$$

où $\mathcal{E}$ est un tenseur d'ordre quatre et $\mathcal{G}$ est une fonction constitutives non linéaires. les lois de comportement (1.1.5) s'appellent lois viscoplastiques semilinéaires. On peut aussi envisager d'autre lois plus compliquées, par exemple les lois de la forme (1.2.2) où $\mathcal{E} = \mathcal{E}\left(\sigma, \varepsilon\right)$ (lois viscoplastiques quasilinéaires). Ces lois sont appelées en réalité lois élasto-viscoplastiques mais, pour simplifier la terminologie, nous les appellerons viscoplastiques.

e) Loi de comportement viscoélastique avec endommagement

Si nous envisageons un endommagement mécanique du matériau durant le contact, alors nous obtenons la loi viscoplastique avec endommagement suivante :

$$\dot{\sigma} = \mathcal{E}\ \varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{G}\left(\sigma, \varepsilon(u), \beta\right),$$

où β est une variable interne qui peut représenter l'endommagement causé par les déformations plastiques.

f) Loi de comportement élasto-viscoélastique avec endommagement.

La loi de comportement d'un matériau élasto-viscoplastique avec endommagement où est causé par des déformations viscoplastiques est donnée par

$$\sigma = \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(t))) + \mathcal{E}(\varepsilon(u(t))) + \int_0^t \mathcal{G}(\sigma(s) - \mathcal{A}(\varepsilon(\dot{u}(s))), \varepsilon(u(s)), \beta(s))ds,$$

où σ représente le champ de contrainte, u représente le champ de déplacement et $\varepsilon(u)$ est le champ de tenseur linéaire. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{E}$ sont des fonctions de viscosité et élasticité non linéaire, respectivement, $\mathcal{G}$ représente le tenseur de viscoplasticité où β est une variable interne représentant l'endommagement du matériau causé par des déformations viscoplasticité.

L'inclusion différentielle suivante sera utilisée pour décrire l'évolution du champ d'endommagement

$$\dot{\beta} - \kappa\triangle\beta + \partial\Psi_K\left(\beta\right) \ni \phi\left(\varepsilon\left(u\right), \beta\right).$$

L'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles K défini par

$$K = \left\{ \xi \in H^1(\Omega) \quad / \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad \text{dans } \Omega \right\},$$

κ est un coefficient positive, $\partial \Psi_K$ représente le sous-différentiel de la source d'endommagement dans le système [15].

1.3 Condition aux limites

Définissions maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ.

Les conditions aux limites de déplacement-traction

Le corps est encastrè à la partie $\Gamma_1 \times (0, T)$, le champ des déplacements y est par conséquent nul

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \times (0, T). \tag{1.3.1}$$

Une traction surfacique de densité f_2 agit sur la partie $\Gamma_2 \times (0, T)$, et par conséquent le vecteur de contraintes de Cauchy σv satisfait Γ_1

$$\sigma v = f_2 \text{ sur } \Gamma_2 \times (0, T). \tag{1.3.2}$$

Enfin, le corps est éventuellement en contact avec une fondation sur $\Gamma_3 \times (0, T)$. C'est ici que commence toute la richesse des problémes et que réside notre intérêt, car les conditions sur la surface potentielle de contact Γ_3 peuvent être diverses et donner ainsi lieu à une variété de modéles de contact avec ou sans frottement. Nous nous limitons à citer deux exemples de conditions aux limites.

La condition de contact sans frottement avec compliance normale

Nous rappelons la condition dite de compliance normale sur la surface potentielle de contact:

$$\sigma_\nu = -p_\nu (u_\nu - g), \tag{1.3.3}$$

où u_ν représente le déplacement normale, p_ν est une fonction positive donnée, quand $u_\nu > g$, la différence $u_\nu - g$ représente l'interpénétration des asoérités du corps ceux de la fonction. La fonction de compliance normale p_ν satisfait $p_\nu (r) = 0$ pour $r \leq 0$. Comme exemple

$$p_\nu (r) = c_\nu r_+, \tag{1.3.4}$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$.

La condition de contact sans frottement est donnée par

$$\sigma_\tau = 0,$$

cette équation traduit le fait que les mouvements tangentiels sont libres, donc la force de frottement est nulle sur la surface de contact [15].

Chapitre 2

Outils Mathématiques

Afin de faciliter la lecture de ce mémoire, il nous est paru nécessaire de présenter dans le deuxième chapitre quelques préliminaires mathématiques qui seront utilisés partout dans ce mémoire. Nous commençons d'abord par les espaces de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformation utilisés en mécanique, ainsi que leurs principaux propriétés, notamment les théorèmes de trace. Nous rappelons ensuite les propriétés des espaces des fonctions à valeurs vectorielles. Enfin, nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle non linéaire dans les espaces de Hilbert, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz, les équations et les inéquations variationnelles d'évolution. Partout dans ce chapitre Ω est un domaine borné et Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, de frontière Γ représentable localement comme le graphe d'une fonction Lipschitzienne sur un ouvert de $\mathbb{R}^3$, Ω étant situé localement d'un seul côté de Γ .

2.1 L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega\ ) \ / \ \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3\right\}.$$

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, \upsilon)_{H^1(\Omega)} = (u, \upsilon)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i \upsilon)_{L^2(\Omega)}, \tag{2.1.1}$$

et la norme associée

$$|u|_{H^1(\Omega)} = \left((u, u)_{H^1(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1.2}$$

On a les résultats suivants :

$$C^1\left(\overline{\Omega}\right) \text{ est danse dans } H^1(\Omega), \tag{2.1.3}$$

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \quad \text{avec injection compacte.} \tag{2.1.4}$$

On introduit des espaces du type Sobolev utilisés en mécanique du contact, à savoir les espaces de Hilbert assoiés aux opérateurs divergence et déformation, ainsi que les espaces de fonctions à valeurs vectorielles. On présente en plus leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On adopte ici la convention de l'indice muet et on précise aussi que toutes les notation ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire sont intrduits dans cette section.

Espace de Hilbert aux opérateurs divergence et déformation.

Nous désignons par S_d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$,"." et $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et S_d Ainsi,

$$u.\upsilon = u_i \upsilon_i\ , \qquad |\upsilon| = (\upsilon.\upsilon)^{\frac{1}{2}} \quad \forall u, \upsilon\ \in \mathbb{R}^d, \tag{2.1.5}$$

$$\sigma.\tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \qquad |\sigma| = (\sigma.\sigma)^{\frac{1}{2}} \quad \forall \sigma,\ \tau \in S^d\ . \tag{2.1.6}$$

Dans toute la suite, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine borné avec une frontiére réguliére Lipschitz notée Γ.

Nous utilisons les espaces suivants:

$$
\begin{aligned}
H &= \left\{ u = (u_i) \quad / u_i \in L^2(\Omega) \,/\, i = \overline{1,d} \right\} = L^2(\Omega)^d \\
\mathcal{H} &= \left\{ \sigma = (\sigma_{ij}) \,/ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega) \,/ i,j = \overline{1,d} \right\} = L^2(\Omega)^{d\times d} \\
H_1 &= \{ u \in H \in \mathcal{H} \} = \left\{ u = (u_i) \;/\; u_i \in H^1(\Omega) \,/ i = \overline{1,d} \right\} = H^1(\Omega)^d \\
\mathcal{H}_1 &= \{ \sigma \in H \quad / Div\sigma \in H \},
\end{aligned}
$$

où $\varepsilon : H_1 \to \mathcal{H}$ et $Div : \mathcal{H}_1 \to H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad Div\ \sigma = (\sigma_{i\ j,\ j}) \quad 1 \leq i,j \leq d\ , \tag{2.1.7}$$

où la virgule représente la dérivée par rapport à la variable spatiale, c'est à dire que

$$u_{i,\ j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \tag{2.1.8}$$

Ces espaces respectifs sont des espaces de Hilbert réel munis de leurs produits scalaires suivants:

$$(u,\upsilon)_H = \int_\Omega u_i \upsilon_i dx \quad \forall u, \upsilon \in H \tag{2.1.9}$$

$$(\sigma,\tau)_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} dx \qquad \forall \sigma,\ \tau \in \mathcal{H} \tag{2.1.10}$$

$$(u,\upsilon)_{H_1} = (u,\upsilon)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(\upsilon))_{\mathcal{H}} \quad \forall u,\ \upsilon \in H_1 \tag{2.1.11}$$

$$(\sigma,\tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma,\tau)_{\mathcal{H}} + (Div\ \sigma, Div\ \tau)_H \qquad \forall \sigma,\ \tau \in \mathcal{H}_1. \tag{2.1.12}$$

Les normes sur les espaces H, $\mathcal{H}$, H_1 et $\mathcal{H}_1$ sont notées respectivement par $|\cdot|_H$,$|\cdot|_{\mathcal{H}}$,$|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_{\mathcal{H}_1}$.

Comme la frontiére Γ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur υ à la frontiére est défini $p.p.$ Pour tout champ de vecteurs $u \in H_1$ nous utilisons la notation υ pour désigner la trace γ_u de u sur Γ et nous notons par u_ν et u_τ les composantes normale et tangentielle de u sur la frontière données par

$$u_\nu = u.\nu, \qquad u_\tau = u - u_\nu \nu. \tag{2.1.13}$$

Pour le champ des contraintes σ nous notons par σ_ν et σ_τ le composantes normale et tangentielle à la frontière, à savoir :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu, \qquad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\nu\ . \tag{2.1.14}$$

Nous rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ est linéaire continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par H_Γ, ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par H'_Γ le dual H_Γ, et $(\cdot,\cdot)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre H'_Γ et H_Γ.

Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément noté $\sigma v \in H'_\Gamma$ tel que

$$(\sigma\nu, \gamma v)_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div\ \sigma, v)_H \qquad \forall v \in H_1. \tag{2.1.15}$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\sigma\nu, \gamma v) = \int_\Gamma \sigma\nu.vda \qquad \forall v \in H_1. \tag{2.1.16}$$

Donc, si σ est assez régulier nous avons la formule suivante:

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div\ \sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu.vda \quad \forall v \in H_1(\Omega)\,. \tag{2.1.17}$$

Nous introduisons à présent un sous espace fermé de H_1, dont la définition est donnée ci-après

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^d \ / \ v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \right\}, \tag{2.1.18}$$

puisque $mes\ \Gamma_1 > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V : il existe une constante $C_k > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$|\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \geq C_k |v|_{H_1} \qquad \forall v \in V, \tag{2.1.19}$$

sur V nous considérons le produit scalaire donnée par

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \qquad \forall u,\ \nu \in V, \tag{2.1.20}$$

et soit $|\cdot|_V$ la norme associée, c'est à dire

$$|v|_V = |\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}} \qquad \forall v \in V, \tag{2.1.21}$$

par l'ingalité de Korn, il vient que $|\cdot|_{H_1}$ et $|\cdot|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, |\cdot|_V)$ est un espace de Hilbert.

En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $C_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_2 telle que

$$|v|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq C_0 \, |v|_V \qquad \forall v \in V. \tag{2.1.22}$$

2.2 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

Soit H un espace de Hilbert. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$ et $T > 0$. On rappelle que $W^{k,\, p}(0,T;H)$ est l'espace des distributions vectorielles $u \in D'(0,T\,;H)$ telle que D_j $u \in L^p(0,T\,;H)$ pour $j = \overline{0,k}$, D_j désignant la dérivée d'ordre j au sens des distribution.

Si $1 \leq p \leq +\infty, W^{k,\, p}(0,T\,;H)$ est un est espace de Banach réel pour la norme définie par

$$|u|_{W^{k,\, p}(0,T\,;H)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \int_0^T |\ D_j u(x)\ |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall u \in W^{k,\, p}(0,T\,;H). \tag{2.2.1}$$

En particulier, $W^{k,\, 2}(0,T\,;H)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire défini par

$$\begin{aligned} (u,v)_{W^{k,\, 2}(0,T\,;H)} &= \sum_{j=0}^{k} \int_0^T (D_j u(t), D_j\ v(t))_H \, dt \\ \forall u, v &\in W^{k,\, 2}(0,T\,;H)\ . \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

D'autre part, $W^{k,\, \infty}(0,T\,;H)$ est un espace de Banach pour la norme défini par

$$\begin{aligned} |u|_{W^{k,\, p}(0,T\,;H)} &= \sum_{j=0}^{k} \sup_{[0,T]} ess\, |D_j(u(t))|_H \\ \forall u &\in W^{k,\, \infty}(0,T\,;H)\ . \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Pour le cas particulier $k = 0$, on remarque que

$$W^{0,\, p}(0,T\,;H) = L^p(0,T\,;H), \tag{2.2.4}$$

et on note alors la norme $L^p(0,T\ ;H)$ par $|\ .|_{L^p(0,T\ ;H)}$ pour tout $1\leq p\leq +\infty$. On définit aussi, pour tout $k\in\mathbb{N}$, l'espace $C^k(0,T\ ;H)$ des fonctions $u:[0,T]\rightarrow H$ telles que pour tout $j=\overline{0,k}$ les dérivées $\dfrac{d^j u}{dt^j}$ existent et sont continues sur $[0,T]$. On note, en particulier, $C^0(0,T;H)$ par $C(0,T;H)$. L'espace $C^k(0,T;H)$ est un espace de Banach pour la norme définie par

$$|u|_{C^k(0,T;H)}=\sum_{j=0}^{k}\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^j u}{dt^j}(t)\right|_H,\quad \forall u\in C^k(0,T\ ;H). \tag{2.2.5}$$

En particulier,les normes sur les espaces $C(0,T\ ;H)$ et $C^1(0,T\ ;H)$ sont données par

$$|u|_{C(0,T;H)}=\max_{t\in[0,T]}\ |u(t)|_H\ ,\qquad \forall u\in C(0,T\ ;H), \tag{2.2.6}$$

$$|u|_{C^1(0,T;H)}=\max_{t\in[0,T]}\ |u(t)|_H\ +\max_{t\in[0,T]}|\dot{u}|_H\,,\quad \forall u\in C^1(0,T\ ;H).$$

On précise que le poine au dessus d'une expression désigne la dérivée de cette exprssion par rapport au temps, représentée par la variable $t\in[0,T]$.[1]

2.3 Eléments d'analyse non lineare dans les espace de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéare dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations les inéquations variationnelles d'evolution qui intterviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

2.3.1 Opérateurs fortements monotones

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs fortements monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Helbert X munit du produit scalaire $(\cdot,\cdot)_X$ et de la norme associée $|\cdot|_X$. Soit $A:X\rightarrow X$ un operateur non linéare.

Définition 2.3.1 . *L'opérateur A est dit:*

monotone si

$$(Au-Av,u-v)_X\geq 0\qquad \forall u,\ v\in X, \tag{2.3.1}$$

fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\,|u - v|_X^2 \qquad \forall u, v \in X, \tag{2.3.2}$$

de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$|Au - Av|_X \leq M\,|u - v|_X \qquad \forall u,\ v \in X\ . \tag{2.3.3}$$

Théorème 2.3.1 . *(Théorème du point fixe)* *Soit X un espace de Banach, $A : X \rightarrow X$ un opérateur satisfait* 2.2.1 (2.3.3) *avec $0 \lneqq M \lneqq 1$. L'opérateur A admet un point fixe unique $x \in X$, c'est-à-dire $Ax = x$ et nous appellons A un opérateur contractant.*

Proposition 2.3.1 *Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz.*

Alors pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $u \in X$ tel que $Au = f$.

Le résultat précédent est un cas praticulier du théorème de Minty-Browder.

Définition 2.3.2 *Soit $A : X \rightarrow X'$ un opérateur défini sur X. L'opérateur A est dit:*

monotone si

$$(Au - Av, u - v)_{X \times X'} \geq 0 \qquad \forall u,\ v \in X, \tag{2.3.4}$$

hémicontinu si

$$\forall u,\ v \in X,\ \text{l'application } t \rightarrow A(u + tv)\ \ : \ \mathbb{R} \rightarrow X' \text{ est continue.} \tag{2.3.5}$$

Définition 2.3.3 *Une forme bilinéare $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que*

$$|a(u, v)| \leq M\,|u|_X\,|v|_X \qquad \forall u,\ v \in X. \tag{2.3.6}$$

Définition 2.3.4 *Une forme bilinéaire $a\ : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que*

$$a(u, u) \geq m\,|u|_X^2 \qquad \forall u \in X. \tag{2.3.7}$$

Théorème 2.3.2 .*(Théorème de Lax-Milgram).* *Soit X un espace de Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue.*

Alors, il existe une solution unique $u \in X$ qui satisfait

$$a(u, v) = l(v) \qquad \forall v \in X. \tag{2.3.8}$$

Théorème 2.3.3 ***(Cauchy -Lipschitz)*** *Soit* $(X, \ |\cdot|_X)$ *un espace de Banach réel et soit* $F(t, \cdot) : X \to X$ *un opérateur défini p.p.sur* $(0, T)$*, qui satisfait les propriétés suivantes:*

$$\begin{cases} \text{il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \qquad |F(t, x_1) - F(t, x_2)|_X \leq L_F |x_1 - x_2| \qquad \forall x_1, x_2 \in X, p.p.t \in (0, T) \end{cases} \tag{2.3.9}$$

il existe $1 \leq p \leq +\infty$ *tel que* $F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X.$

Alors pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in X$.

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \qquad p.p.t \in (0, T), \tag{2.3.10}$$

$$x(0) = x_0. \tag{2.3.11}$$

Maintenant nous considérons V et H deux espaces de Hilbert réels tels que l'application d'inclusion de $(V, |\cdot|_V)$ dans $(H, |\cdot|_H)$ est continue et dense. Identifiant le dual de H avec lui-même, c'est-à-dire nous pouvons écrire le triplet de Gelfand $V \subset H \subset V'$. Les notations $|\cdot|_V, |\cdot|_{V'}$ et $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ représentent les normes sur V, V' et le produit de dualité entre V' et V, respectivement.[11]

2.3.2 Equations et inéquations variationnelles d'évolution

Nous allons rappeler dans ce paragraphe deux résultats sur les éqution d'évolution et un résultat sur les equations et les inéquations variationnelles d'évolution.

Théorème 2.3.4 *Soit* V *et soit* $A : V \to V$ *un opérateur hémioncontinu et monotone qui satisfait*

$$\exists \ \lambda > 0 \ \text{ et } \exists \ \alpha \in \mathbb{R}, \quad (Av, v)_{V' \times V} \geq \lambda |v|_V^2 + \alpha \quad \forall v \in V, \tag{2.3.12}$$

$$\exists c > 0, \qquad |Av|_{V'} \leq c(|v|_V + 1) \qquad \forall v \in V. \tag{2.3.13}$$

Alors, pour tout $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0,T;V')$, il existe une fonction unique u qui satisfait

$$u \in L^2(0,T\ ;V) \cap C(0,T\ ;H)\,,\ \dot{u} \in L^2(0,T;\ V')\,, \tag{2.3.14}$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \quad p.p.t \in (0,T)\,, \tag{2.3.15}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.3.16}$$

Théorème 2.3.5 . *Soit $V \subset H \subset V'$ un triple de Gelfand, K un sous-ensemble fermé non vide et convexe de V, et soit $a : V \times V \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique et continue qui satisfait*

$$\exists\ c_1 > 0\ \ et\ c_0 \quad a(v,v) + c_0 |v|_H^2 \geq c_1 |v|_V^2 \qquad \forall v \in V. \tag{2.3.17}$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0,T;\ H)$, il existe une unique fonction u qui satisfait

$$u \in H^1(0,T;\ H) \cap L^2(0,T;\ V)\,, \tag{2.3.18}$$

$$u(t) \in K \quad \forall t \in [0,T]\,, \tag{2.3.19}$$

$$\begin{aligned} & (\dot{u}(t), v - u(t))_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \\ \geq\ & (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in K,\ p.p.t \in (0,T) \end{aligned} \tag{2.3.20}$$

$$u(0) = u_0. \tag{2.3.21}$$

2.4 Compléments divers

2.4.1 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans de nombrreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 2.4.1 . *Soient $m, n \in C(0,T;\mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]\,, a \geq 0$ une constante et $\phi \in C(0,T;\mathbb{R})$*

(1) Si

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\,ds + \int_0^t n(s)\,\phi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)\,ds\right) \exp\left(\int_0^t n(s)\,ds\right) \quad \forall t \in [0,T].$$

(2) Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a\int_0^t \phi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s)\,ds \leq e^{\alpha t}\int_0^t m(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Dans le cas particulier $a = 0, n = 1.$[1]

Corollaire 2.4.1 . *Soit $m \in C(0,T;\mathbb{R})$ telle que $m \geq 0$ pour tout $t \in [0,T]$. Si $\phi \in C(0,T;\mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\phi(t) \leq \int_0^t m(s)\,ds + \int_0^t \phi(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T],$$

alors, il existe $c > 0$ tel que

$$\phi(t) \leq c\int_0^t m(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T].$$

2.4.2 Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous-ensemble de l'espace X.

Définition 2.4.1 . *On appelle fonction indicatrice de K, la fonction Ψ_K définie par*

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & si\ u \in K \\ +\infty & si\ u \notin K \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Définition 2.4.2 *Soit une fonction $j : X \to \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) = \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u, noté $\partial_j(u)$ est l'ensemble défini par*

$$\partial_j(u) = \{u' \in X' \setminus j(v) \geq j(u) + (u', v - u) \quad \forall v \in X\}. \tag{2.4.2}$$

Le crochet $(\cdot, \cdot)$ désignant la dualité entre X et X'.

Tout élément u' de l'ensemble $\partial_j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u. La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial_j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X.

Nous pouvons caractérise le sous-différentiel $\partial\Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial\Psi_K(u) = \{u' \in X \setminus (u', v - u) \leq 0 \quad \forall v \in K\}. \tag{2.4.3}$$

Chapitre 3

Etude d'un problème dynamique avec compliance normal

On considère un problème de contact sans frottement avec compliance normale. Ce chapitre est divise en deux section. Dans la première section, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données et nous décrivons la formulatuon variationnelle du problème mécanique. Notre intéret principale dans la deuxième section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel.

3.1 Problème mécanique et formulation variationnelle

Problème P: Trouver le champ de déplacement $u : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$ et le champ des contraintes $\sigma : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{S}_d$, le champ d'endommagement $\beta : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ tels que

$$\rho \ddot{u} = Div\ \sigma + f_0 \qquad \text{dans } \Omega \times (0,T) \tag{3.1.1}$$

$$\sigma = \mathcal{A}((\dot{u})) + \mathcal{G}(\varepsilon(u), \beta) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T) \tag{3.1.2}$$

$$\dot{\beta} - \kappa \bigtriangleup \beta + \partial \Psi_k (\beta) \ni \phi (\varepsilon (u), \beta) \quad \text{dans } \Omega \times (0,T) \tag{3.1.3}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \nu} = 0 \qquad \text{sur} \quad \Gamma \times (0,T) \tag{3.1.4}$$

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,T) \tag{3.1.5}$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0,T) \tag{3.1.6}$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu\left(u_\nu - g\right) \quad \text{sur} \ \ \Gamma_3 \times (0,T) \tag{3.1.7}$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur} \ \ \Gamma_3 \times (0,T) \tag{3.1.8}$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \qquad \beta(0) = \beta_0 \text{ dans } \Omega \tag{3.1.9}$$

L'equation (3.1.2) représente la loi de comportement. L'évolution du champ d'endommagement est modelisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (3.1.3) où ϕ est la fonction source de l'endommagement. L'équation (3.1.1) représente l'équation du mouvement, tandis que les conditions (3.1.5) et (3.1.6), la relation (3.1.4) représente la condition de Newmann, où $\frac{\partial \beta}{\partial \nu}$ représente la dérivé normal de β.

Nous passons maintenant a obtenir une formulation variationnelle du problème P. Nous introduisons la notation et les hypothèses supplémentaires sur les données du problème.

Soit $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ et soit $\gamma : H_1 \to H_\Gamma$ avoir la cartographie de trace. Pour element $v \in H_1$ nous avons écrit v pour la trace γv de v sur Γ et nous notons par v_ν et v_τ le normal et les composantes tangentielles de v sur la limite Γ donnée par $v_\nu = v.\nu$,$v_\tau = v - v_\nu \nu$. De même, pour une régulière (dire C^1)champ de tenseurs $\sigma : \Omega \to \mathbb{S}^d$, nous définissons le normal et les composantes tangentielles par $\sigma_\nu = (\sigma\nu).\nu$, $\sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \nu$ et nous rappelons la formule de Green suivante:

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div\ \sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu.vda \ \forall v \in H_1. \tag{3.1.10}$$

Soit V est le sous-ecpace fermé de H_1,

$$V = \{v \in H_1;\ v = 0\ sur\ \Gamma_1\}.$$

Sur V nous considéres le produit intérieur donnée par $(u,v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}$, et la norme associée $\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}$. Comme mes $(\Gamma_1) > 0$,$(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert réel. Donc il existe une constante $C_0 > 0$, qui dépend uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{[L^2(\Gamma_3)]^d} \leq C_0 \|v\|_V \qquad \forall v \in V. \tag{3.1.11}$$

Fin, pour tous espaces de Banach réel X nous utilissons la notation classique pour les espaces $L^p(0,T;X)$ et $W^{k,p}(0,T;X)$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\kappa \geq 1$ et nous notons par $\mathcal{C}([0,T];X)$ et $\mathcal{C}^1([0,T];\ X)$ les espaces de fonctions continus et continue differentiable de $[0,T]$ vers X, si X_1 et X_2 sont des espaces de Banach réel, puis $X_1 \times X_2$ dénote leur espace produit muni de la norme canonique, dénote $\|\cdot\|_{X_1 \times X_2}$.

Pour l'etude du problème (3.1.1) – (3.1.9), on suppose que l'opérateur de la viscosité $\mathcal{A}$: $\Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \ \text{ il existe une constante } M_1^{\mathcal{A}}, M_2^{\mathcal{A}} > 0 \text{ tels que} \\ \|\mathcal{A}(x,\varepsilon)\| \leq M_1^{\mathcal{A}} \|\varepsilon\| + M_2^{\mathcal{A}} \qquad \forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{S}^d, \ p.p \ x \in \Omega. \\ (b) \ \text{il existe une constante } m_{\mathcal{A}} > 0 \text{ tel que} \\ (\mathcal{A}(x,\xi_1) - \mathcal{A}(x,\xi_2)) \, . \, (\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}} \|\xi_1 - \xi_2\|^2 \ , \ \forall \xi_1, \ \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \ p,p \ x \in \Omega. \\ (c) \ \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{A}(x,0) \ \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \ \ \forall \xi \in \mathbb{S}^d. \\ (d) \ \text{l'application } x \mapsto \mathcal{A}(x,0) \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{3.1.12}$$

L'opérateur d'élasticite $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \ \text{il existe une constante } M_{\mathcal{G}} > 0 \text{ tel que} \\ \|\mathcal{G}(x,\xi_1,\beta_1) - \mathcal{G}(x,\xi_2,\beta_2)\| \leq M_{\mathcal{G}} (\|\xi_1 - \xi_2\| + \|\beta_1 - \beta_2\|) \\ \ \ \forall \xi_1, \ \xi_2 \in \mathbb{S}^d, \ \beta_1, \ \beta_2 \in \mathbb{R}, \ p.p \ x \in \Omega. \\ (b) \ \text{l'application } x \mapsto \mathcal{G}(x,\xi,\beta) \ \text{ est Lebesgue} \\ \ \ \text{mesurable sur } \Omega, \ \ \forall \xi \in \mathbb{S}^d, \ \beta \in \mathbb{R}. \\ (c) \ \text{ l'application } x \mapsto \mathcal{G}(x,0,0) \ \ \in \mathcal{H} \ . \end{cases} \tag{3.1.13}$$

La fonction source d'endommagement $\phi : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \ \text{il existe } L_\phi > 0 \text{ tel que} \\ |\phi(x,\varepsilon_1,\beta_1) - \phi(x,\varepsilon_2,\beta_2)| \leq L_\phi (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\beta_1 - \beta_2|) \\ \ \ \forall \varepsilon_1, \ \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \ \beta_1, \ \beta_2 \in k, \ p.p \ x \in \Omega. \\ (b) \ \text{L'application } x \mapsto \phi(x,\varepsilon,\beta) \ \text{ est Lebesgue} \\ \ \ \text{mesurable sur } \Omega, \ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \beta \in k. \\ (c) \qquad \text{l'application } x \mapsto \phi(x,0,0) \ \ \in \mathcal{H}. \end{cases} \tag{3.1.14}$$

La fonction de compliance normale $p_v : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ verifiée

$$\begin{cases} (a) \qquad \text{il existe } L_v > 0 \text{ tel que} \\ |p_v(x, r_1) - p_v(x, r_2)| \leq L_v |r_1 - r_2| \\ \forall r_1,\ r_2 \in \mathbb{R},\ p.p\ x \in \Gamma_3. \\ (b) \qquad \text{L'application } x \mapsto p_v(x, r) \\ \text{est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \quad \forall r \in \mathbb{R}. \\ (c) \quad \text{L'application } x \mapsto p_v(x, r) = 0 \\ \text{pour tous } \ r \leq 0. \end{cases} \tag{3.1.15}$$

Nous supposons que la masse volumique, les forces volumiques et surfaciques satisfont

$$\rho \in L^\infty(\Omega), \quad \exists \rho_* > 0, \text{ telque } \rho(x) \geq \rho_* \quad p.px \in \Omega, \tag{3.1.16}$$

$$f_0 \in \mathcal{C}([0, T]; H), \quad f_2 \in \mathcal{C}\left([0, T]; \left[L^2(\Gamma_2)\right]^d\right). \tag{3.1.17}$$

Le champ de déplacement initial et le champ d'endommagement initial satisfaient

$$u_0 \in V, \quad v_0 \in H, \quad \beta_0 \in K, \tag{3.1.18}$$

où K dénote l'ensemble des fonctions de dommages admissibles,

$$K = \left\{\xi \in H^1(\Omega) \quad / \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad p.p \ \text{ dons } \Omega\right\}. \tag{3.1.19}$$

Dans ce qui suit, nous utilisons un nouveau produit dans l'espace intérieur H,

$$((u, v))_H = (\rho u, v)_H \quad \forall u, v \in H \ , \tag{3.1.20}$$

et soit la norme associée $|||v|||_H = ((v, v))_H^{\frac{1}{2}}$. D'aprés hypothèse (3.1.16) les deux normes $|||\cdot|||_H$ et $\|\cdot\|_H$ sont equivalence sur H. De plus, l'application par inclusion de $(V, \|\cdot\|_H)$ en $(H, |||\cdot|||_H)$ est continue et compacte. Soit $(V', \|\cdot\|_V)$ l'espace dual de V. Identifier H avec son propre, on peut écrire

$$V \subset H = H' \subset V'.$$

Nous utilisons la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$ pour représenter l'appariement de la dualité entre V' et V. On a

$$\langle u, v \rangle_{V' \times V} = ((u, v))_H \qquad \forall u \in H,\ v \in V. \tag{3.1.21}$$

Ensuite, on définie la fonction $f : [0,T] \to V'$, la fonction de frottement $j : V \times V \to \mathbb{R}$ et la forme bilinéaire $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par les equations suivants:

$$\langle f(t), v\rangle_{V' \times V} = (f_0(t), v)_H + (f_2(t), v)_{[L^2(\Gamma_2)]^d} \quad \forall v \in V, \quad t \in [0,T], \tag{3.1.22}$$

$$j(u,v) = \int_{\Gamma_3} p_v(u_v - g)\, v_v da \quad \forall u, v \in V, \tag{3.1.23}$$

$$a(\xi, \varphi) = \kappa \int_\Omega \nabla\xi \,.\nabla\varphi dx \qquad \forall \xi, \varphi \in H^1(\Omega). \tag{3.1.24}$$

De (3.1.15) et (3.1.16), on remarque que les intégrales (3.1.23) sont bien définies et nous notons que les conditions (3.1.17) indique

$$f \in \mathcal{C}([0,T]; V'). \tag{3.1.25}$$

Formulatuon variationnelle

Nous passons maintenant à tirer une formulation variationnelle du problème mécanique P. Nous supposons que (u, σ, β) sont des fonctions régulières satisfaisant (3.1.1) et (3.1.9) et soit $v \in V$, $t \in [0,T]$. En appliquant la formule de Green de (3.1.10) et utiliser les conditions (3.1.4) $-$ (3.1.8), Nous obtenons la formulation variationnelle du probléme mécanique P.

Problème P_V :Trouver le champ de deplacement $u : [0,T] \to V$, le champ d'endommagement $\beta : [0,T] \to H^1(\Omega)$ tels que :

$$\begin{aligned} &\langle \ddot{u}(t), v\rangle_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{G}(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u(t), v) \\ = \;& \langle f(t), v\rangle_{V' \times V} \forall v \in V, \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} &\left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t)\right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ \geq \;& (\phi(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \;\forall \xi \in K, \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

pour presque tout $t \in (0,T)$, et

$$u(0) = u_0, \qquad \dot{u}(0) = v_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \tag{3.1.28}$$

En utilisant la formule de Green

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (Div\ \sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu.vda\ \forall v \in H_1,$$

on trouve

$$\int_\Omega \sigma.\varepsilon(v)\,dx + \int_\Omega Div\ \sigma.vdx = \int_{\Gamma_1} \sigma\nu.vda\ + \int_{\Gamma_2} \sigma\nu.vda\ + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu.vda \quad \forall v \in V.$$

De la définition de l'espace V avec (3.1.1) et (3.1.6), on obtient

$$\int_\Omega \sigma.\varepsilon(v)\,dx - \int_\Omega f_0.vdx + \int_\Omega \rho\ddot{u}.vdx = \int_{\Gamma_2} f_2.vda\ + \int_{\Gamma_3} \sigma\nu.vda \ \ \forall v \in V,$$

et puisque

$$-\sigma_\nu.v = p_\nu(u_\nu - g)\,v,$$

il vient que

$$\int_\Omega \sigma.\varepsilon(v)\,dx + \int_\Omega \rho\ddot{u}.vdx = \int_\Omega f_0.vdx + \int_{\Gamma_2} f_2.vda - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu - g)\,vda.$$

De $(3.1.20) - (3.1.22)$ et $(3.1.23)$, nous obtenons

$$\langle \ddot{u}(t), v\rangle_{V'\times V} + (\sigma(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u(t), v) = \langle f(t), v\rangle_{V'\times V} \ \ \forall v \in V, t \in (0,T).$$

Enfin, soit $\beta(t) \in K$ et pour tout $t \in [0,T]$. De la définition

$$\partial\Psi_K(u) = \{u' \in X \setminus (u', v-u) \leq 0 \quad \forall v \in K\},$$

et de (3.1.3), on obtient

$$\left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t)\right)_{L^2(\Omega)} - \kappa(\triangle\beta(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \geq (\phi(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \ \ \forall \xi \in K,$$

en utilisant la formule de Green avec (3.1.4) et (3.1.24),on trouve

$$\left(\dot{\beta}(t), \xi - \beta(t)\right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \geq (\phi(\varepsilon(u(t)), \beta(t)), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega)} \ \ \forall \xi \in K.$$

■

3.2 Résultats d'existence et d'unicité

L'existence d'une solution unique de problème variationnelle P_V est prouvé basée sur les résultats pour les équations et les inégalités variationnelles et des arguments de point fixe. Nous supposons dans ce qui suit que $(3.1.12) - (3.1.18)$ sont vérifiées.

Théorème 3.2.1 . *Sous les hypothéses* $(3.1.12) - (3.1.18)$, *le problème* P_V *admet une solution unique* $\{u, \beta\}$ *ayant la régularité*

$$u \in H^1(0, T, V) \cap C(0, T, H) \ \ , \dot{u} \in L^2(0, T, V'), \tag{3.2.1}$$

$$\beta \in H^1\left(0, T, L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0, T; H^1(\Omega)\right). \tag{3.2.2}$$

Les fonction u, β satisfaisant $(3.1.2) - (3.1.26)$ et $(3.1.28)$ s'appellent une solution faible du problème P. Nous concluons que sous les hypothèses $(3.1.12)$ et $(3.1.18)$, le problème mécanique $(3.1.2)$ a une solution faible unique qui satisfait $(3.2.1)$. La régularité de la solution faible est donnée par $(3.2.1)$ en termes de contraintes

$$\sigma \in L^2(0, T, \mathcal{H}), \ Div\sigma \in L^2(0, T, V'). \tag{3.2.3}$$

Comme un premier pas vers l'existence et résultat d'unicité, soit $\eta \in L^2(0, T; V')$ et $\theta \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ être donné et examiner les problèmes de variations suivantes:

Problème P^1_η. Trouver le champ de déplacement $u_\eta : [0, T] \to V$ tel que

$$\begin{aligned} & \langle \ddot{u}_\eta(t), v\rangle_{V'\times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_\eta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + \langle \eta(t), v\rangle_{V'\times V} \\ = \ & \langle f(t), v\rangle_{V'\times V} \quad \forall v \in V, \ p.p \ t \in (0, T), \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

$$u_\eta(0) = u_0, \qquad \dot{u}_\eta(0) = v_0. \tag{3.2.5}$$

Lemme 3.2.1 *Le problème* P^1_η *admet une solution unique* u_η *telle que*

$$u_\eta \in W^{1,2}(0, T; V) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'). \tag{3.2.6}$$

Preuve. Nous définition l'opérateur $A : V \to V'$ par

$$(Au, v)_{V'\times V} = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in V. \tag{3.2.7}$$

De (3.2.7) et (2.1.21) et pour tout $u, v \in V$,on a

$$|Au - Av|_{V'} \leq c\,|\mathcal{A}\varepsilon(u) - \mathcal{A}\varepsilon(v)|_{\mathcal{H}}\,.$$

En combinant (3.1.12), nous déduisons que $A : V \to V'$ est continu, d'où l'application $t \to A(u + tv)$ est continu et alors de définition (2.4.2), nous concluons que A est un opérateur hémicontinu. En outre, de (3.2.7),(2.1.21),(3.1.12) on a

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq m_{\mathcal{A}}\,|u - v|_V^2 \quad \forall u, v \in V, \tag{3.2.8}$$

donc, A est un opérateur monotons. Nous choisissions $v = 0_v$ dans (3.2.7), on obtient

$$\begin{aligned}(Au, u)_{V' \times V} &\geq m_{\mathcal{A}}\,|u|_V^2 - |A0_V|_{V'}\,|u|_V \\ &\geq \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}}\,|u|_V^2 - \frac{1}{2m_A}\,|A0_V|_{V'}^2 \quad \forall u \in V,\end{aligned}$$

donc

$$(Au, u)_{V' \times V} \geq \lambda\,|u|_V^2 + \alpha \quad \forall u \in V, \text{ avec } \lambda = \frac{1}{2}m_{\mathcal{A}} \text{ et } \alpha = -\frac{1}{2m_A}\,|A0_V|_{V'}^2\,.$$

Alors, la condition (2.3.12) du théorème 2.1.10 est vérifiée. En plus, nous utilisons $(3.2.7)\,,(3.1.12)$ et $(2.1.21)\,,$ nous trouvons

$$\begin{aligned}|Au|_{V'} &\leq c\,|\mathcal{A}\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} \\ &\leq c\left(M_1^{\mathcal{A}}\,|\varepsilon(u)|_{\mathcal{H}} + M_2^{\mathcal{A}}\right) \\ &\leq c\left(M_1^{\mathcal{A}}\,|u|_V + M_2^{\mathcal{A}}\right) \quad \forall u \in V,\end{aligned}$$

et d'où

$$|Au|_{V'} \leq c\,(|u|_V + 1) \quad \forall u \in V.$$

Alors, la condition (2.3.13) du théorème 2.1.10 est satisfaite.En outre, de (3.1.18) et $(3.1.25)\,,$ nous avons

$$f - \eta \in \mathcal{C}(0, T; V') \text{ et } v_0 \in H.$$

Finalement, nous remarquons que toutes les conditions du théorème 2.1.10 sont vérifiées donc, nous concluons qu'il existe une unique fonction v_η qui satisfait

$$\mathrm{v}_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H)\,, \quad \dot{\mathrm{v}}_\eta \in L^2(0, T; V')\,, \tag{3.2.9}$$

$$\mathrm{v}_\eta(t) + A\mathrm{v}_\eta(t) + \eta(t) = f(t) \quad p.p.t \in (0,T), \tag{3.2.10}$$

$$\mathrm{v}_\eta(0) = \mathrm{v}_0. \tag{3.2.11}$$

Nous définissons la fonction $u_\eta : [0,T] \to V$ par

$$u_\eta(t) = \int_0^t \mathrm{v}_\eta(s)\,ds + u_0 \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.2.12}$$

De (3.2.7) et (3.2.9)−(3.2.12), nous déduisons que u_η est une solution unique du probléme variationnel P_η^1 satisfait la régularité (3.2.6). ■

Probléme P_θ^2. Trouve le champ d'endommagement $\beta : [0,T] \to H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned} \beta_\theta(t) &\in K, \quad \left(\dot{\beta}_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t)\right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_\theta(t), \xi - \beta_\theta(t)) \\ &\geq (\theta(t), \xi - \beta_\theta(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K, \ \ p.p.t \in (0,T), \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

$$\beta(0) = \beta_0. \tag{3.2.14}$$

Lemme 3.2.2 . *Le problème P_θ^2 admet une solution unique β_θ telle que*

$$\beta_\theta \in W^{1,2}\left(0,T; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T; H^1(\Omega)\right). \tag{3.2.15}$$

Preuve. . L'application d'inclusion de $\left(H^1(\Omega), |\cdot|_{H^1(\Omega)}\right)$ dans $\left(L^2(\Omega), |\cdot|_{L^2(\Omega)}\right)$ est continue et à image dense. Notant par $(H^1(\Omega))'$ l'espace dual de $H^1(\Omega)$ et identifiant le dual de $L^2(\Omega)$ avec lui-même, nous pouvons triplet de Gelfand

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \left(H^1(\Omega)\right)'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot,\cdot)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)}$ pour désigner le produit de dualité entre $(H^1(\Omega))'$ et $H^1(\Omega)$, nous avons

$$(\beta,\xi)_{(H^1(\Omega))' \times H^1(\Omega)} = (\beta,\xi)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \beta \in L^2(\Omega), \xi \in H^1(\Omega).$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissible K est un sous-ensemble non vide, ferme et convexe dans $H^1(\Omega)$. Ainsi, le champ d'endommagement initial $\beta_0 \in K$. Maintenant, en utilisant la definition (3.1.24) de la forme bilinéaire a, pour tout $\varphi, \xi \in H^1(\Omega)$, on a

$$a(\varphi,\xi) = a(\xi,\varphi),$$

et

$$\begin{aligned} |a(\varphi,\xi)| &\leq 3\kappa |\nabla\varphi|_H |\nabla\xi|_H \\ &\leq c|\varphi|_{H^1(\Omega)} |\xi|_{H^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

donc, a est continue et symtrique. Ainsi, pour tout $\varphi \in H^1(\Omega)$, nous avons

$$a(\varphi,\varphi) = \kappa |\nabla\varphi|_H^2,$$

alors

$$a(\varphi,\varphi) + (\kappa+1)|\nabla\varphi|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \kappa\left(|\nabla\varphi|_H^2 + |\nabla\varphi|_{L^2(\Omega)}^2\right),$$

et d'où

$$a(\varphi,\varphi) + c_0 |\varphi|_{L^2(\Omega)}^2 \geq c_1 |\varphi|_{H^1(\Omega)}^2 \text{ avec } c_0 = \kappa+1 \text{ et } c_1 = \kappa.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du théorème 2.2.11 sont vérifiées. ce que conclut la preuve du Lemme 3.2.3. [11] ■

Maintenant, pour $t \in [0,T]$, nous considérons l'opérateur

$$\Lambda : L^2\left(0,T;V' \times L^2(\Omega)\right) \to L^2\left(0,T;V' \times L^2(\Omega)\right),$$

défini par: pour chaque $(\eta,\theta) \in L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))$

$$\Lambda(\eta,\theta)(t) = (\Lambda_1(\eta,\theta)(t), \Lambda_2(\eta,\theta)(t)) \in V' \times L^2(\Omega), \tag{3.2.16}$$

avec

$$(\Lambda_1(\eta,\theta)(t), v)_{V'\times V} = (\mathcal{G}(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + j(u_\eta(t), v) \qquad \forall v \in V, \tag{3.2.17}$$

$$\Lambda_2(\eta,\theta)(t) = \phi(\varepsilon(u_\eta(t)), \beta_\theta(t)). \tag{3.2.18}$$

Ici, pour tout $(\eta,\theta) \in L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))$; u_η, β_θ resprésentent le champ déplacement et le champ d'endommagment obtenus dans les lemmes 3.2.2, 3.2.3 respectivement. Nous avons le résultat suivant

Lemme 3.2.3 *Il existe un élément unique $(\eta^*,\theta^*) \in L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))$ tel que*

$$\Lambda(\eta^*,\theta^*) = (\eta^*,\theta^*).$$

Preuve. Soient (η_1, θ_1) et $(\eta_2, \theta_2) \in L^2(0, T; V' \times L^2(\Omega))$. Nous utilisons les notations $u_{\eta_i} = u_i, \dot{u}_{\eta_i} = v_{\eta_i} = v_i, \beta_{\theta_i} = \beta_i$ pour $i = 1, 2$. En employant (3.1.13) et la remarque (1.3.1), nous avons

$$\begin{aligned}
&|\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)|^2_{V'} \\
\leq\ & c\,|\mathcal{G}(\varepsilon(u_1(t)), \beta_1(t)) - \mathcal{G}(\varepsilon(u_2(t)), \beta_2(t))|^2_{\mathcal{H}} \\
\leq\ & c\left(|u_1(t) - u_2(t)|^2_V + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Nous rappelons que $u_{i\nu}$ et $u_{i\tau}$ représentent les composantes normale et tangentielle de la fonction u_i respectivement.

Maintenant, de (3.2.18) et (3.1.14), on obtient

$$\begin{aligned}
&|\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & c\left(|u_1(t) - u_2(t)|^2_V + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Alors, d'aprés (3.2.19) et (3.2.20), on a

$$\begin{aligned}
&|\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)|^2_{V' \times L^2(\Omega)} \\
\leq\ & c\left(|u_1(t) - u_2(t)|^2_V + |\beta_1(t) - \beta_2(t)|^2_{L^2(\Omega)}\right).
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

D'autre part, de (3.2.4), nous trouvons

$$(\dot{\mathrm{v}}_1 - \dot{\mathrm{v}}_2, \mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)_{V' \times V} + (\mathcal{A}\varepsilon(\mathrm{v}_1) - \mathcal{A}\varepsilon(\mathrm{v}_2), \varepsilon(\mathrm{v}_1) - \varepsilon(\mathrm{v}_2))_{\mathcal{H}} + (\eta_1 - \eta_2, \mathrm{v}_1 - \mathrm{v}_2)_{V' \times V} = 0.$$

Nous intégrons l'égalité précédente par rapport à t avec la condition initiale $\mathrm{v}_1(0) = \mathrm{v}_2(0) = \mathrm{v}_0$ et (3.1.12) pour trouver

$$m_{\mathcal{A}} \int_0^t |\mathrm{v}_1(s) - \mathrm{v}_2(s)|^2_V \, ds \leq -\int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s), \mathrm{v}_1(s) - \mathrm{v}_2(s))_{V' \times V} \, ds,$$

donc, en utilisant $2ab \leq \frac{a^2}{m_{\mathcal{A}}} + m_{\mathcal{A}} b^2$, pour tous $t \in [0, T]$, on a

$$\int_0^t |\mathrm{v}_1(s) - \mathrm{v}_2(s)|^2_V \, ds \leq c \int_0^t |\eta_1(s) - \eta_2(s)|^2_{V'} \, ds. \tag{3.2.22}$$

De (3.2.15), nous déduisons que

$$\left(\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2, \beta_1 - \beta_2\right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \leq (\theta_1 - \theta_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)} \;\; p.p.t \in [0, T].$$

En intégrant l'inégalité précédente avec les conditions initiales

$$\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta_0,$$

et en utilisant l'inégalité

$$a(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \geq 0,$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\left|\beta_1(t) - \beta_2(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \left(\theta_1(s) - \theta_2(s), \beta_1(s) - \beta_2(s)\right)_{L^2(\Omega)} ds.$$

Il vient alors que

$$\left|\beta_1(t) - \beta_2(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \left|\theta_1(t) - \theta_2(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t \left|\beta_1(t) - \beta_2(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} ds.$$

Nous combinons l'intégalité précédente avec le lemme de Gronwall 1.6.1, on trouver

$$\left|\beta_1(t) - \beta_2(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_0^t \left|\theta_1(t) - \theta_2(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} ds. \tag{3.2.23}$$

On sait que

$$u_i(t) = \int_0^t \mathrm{v}_i(s)\, ds + u_0,$$

donc

$$\left|u_1(t) - u_2(t)\right|^2_V \leq c\int_0^t \left|\mathrm{v}_1(s) - \mathrm{v}_2(s)\right|^2_V\ ds \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.2.24}$$

Nous combinons (3.2.24) avec (3.2.21) pour obtenir

$$\begin{aligned}
\left|\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)\right|^2_{V' \times L^2(\Omega)} &\leq c\,(\left|u_1(t) - u_2(t)\right|^2_V \\
&\quad + \left|\beta_1(t) - \beta_2(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}) \\
&\leq c\,(\int_0^t \left|\mathrm{v}_1(s) - \mathrm{v}_2(s)\right|^2_V\ ds \\
&\quad + \left|\beta_1(t) - \beta_2(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}).
\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité précédente et le estimations (3.2.22) et (3.2.23), nous obtenons

$$\left|\Lambda_1(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda_1(\eta_2, \theta_2)(t)\right|^2_{V' \times L^2(\Omega)} \leq c\int_0^t \left|(\eta_1, \theta_1)(s) - (\eta_2, \theta_2)(s)\right|^2_{V' \times L^2(\Omega)} ds.$$

En réitérant m fois l'inégalité précédente, on obtient

$$\left|\Lambda^m(\eta_1, \theta_1)(t) - \Lambda^m(\eta_2, \theta_2)(t)\right|^2_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))} \leq \frac{(cT)^m}{m!}\left|(\eta_1, \theta_1) - (\eta_2, \theta_2)\right|^2_{L^2(0,T;V' \times L^2(\Omega))}.$$

Ce qui implique que pour m suffisamment grand, l'opérateur Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0,T;V'\times L^2(\Omega))$, donc, Λ^m posséde un point fixe unique $(\eta^*,\theta^*)\in L^2(0,T;V'\times L^2(\Omega))$ et par conséquent (η^*,θ^*) est l'unique point fixe de Λ. ■

Maintenant, on peut établir la démonstration du Théorème 3.2.1.

Démonstration du Théorème 3.2.1.

Existence. Soit $(\eta^*,\theta^*)\in L^2(0,T;V'\times L^2(\Omega))$ le point fixe de Λ qui est défini par (3.2.16) et (3.2.18), nous adobtons les notations

$$u_*=u_{\eta^*},\beta_*=\beta_{\theta^*}, \tag{3.2.25}$$

et pour tout $t\in[0,T]$, on pose

$$\sigma_*(t)=\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t))+\mathcal{G}(\varepsilon(u_*(t)),\beta_*(t)). \tag{3.2.26}$$

Nous montrons que le quadruplet (u_*,β_*) satisfaisant $(3.1.26)-(3.1.28)$ et la régularité (3.2.1). En effet, nous écrivons (3.2.4) pour $\eta=\eta_*$ et en utilisant (3.2.25), on obtient

$$\begin{aligned}&(\ddot{u}_*(t),v)_{V'\times V}+(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)),\varepsilon(v))_{\mathcal{H}}+(\eta^*(t),v)_{V'\times V}\\ =\;&(f(t),v)_{V'\times V}\qquad\forall v\in V,t\in[0,T].\end{aligned} \tag{3.2.27}$$

En outre, nous écrivons (3.2.13) pour $\theta=\theta^*$ et en utilisant (3.2.25), on obtient

$$\begin{aligned}\beta_*(t)\;&\in\;K,\qquad\left(\dot{\beta}_*(t),\xi-\beta_*(t)\right)_{L^2(\Omega)}+a(\beta_*(t),\xi-\beta_*(t))\\ &\geq\;(\theta^*(t),\xi-\beta_*(t))_{L^2(\Omega)}\quad\forall\xi\in K,\quad p.p.t\in(0,T).\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

Nous combinons les égalités $\Lambda_1(\eta^*,\theta^*)=\eta^*$ et $\Lambda(\eta^*,\theta^*)=\theta^*$ avec (3.2.17) et (3.2.18) on obtient

$$(\eta^*(t),v)_{V'\times V}=(\mathcal{G}(\varepsilon(u(t)),\beta(t)),\varepsilon(v))_{\mathcal{H}}+j(u_*(t),v)\quad\forall v\in V, \tag{3.2.29}$$

$$\theta^*(t)=\phi(\varepsilon(u_*(t)),\beta_*(t)). \tag{3.2.30}$$

De (3.2.29) et (3.2.27), on a

$$\begin{aligned}&(\ddot{u}_*(t),v)_{V'\times V}+(\mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}_*(t)),\varepsilon(v))_{\mathcal{H}}\\ &+(\mathcal{G}(\varepsilon(u(t)),\beta(t)),\varepsilon(v))_{\mathcal{H}}+j(u_*(t),v)\\ =\;&(f(t),v)_{V'\times V}\qquad\forall v\in V,t\in[0,T].\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

Ainsi, de (3.2.30) et (3.2.28) , on a

$$\begin{aligned} \beta_*(t) &\in K, \forall t \in [0,T], \ \left(\dot{\beta}_*(t), \xi - \beta_*(t)\right)_{L^2(\Omega)} + a(\beta_*(t), \xi - \beta_*(t)) \\ &\geq (\phi(\varepsilon(u_*(t)), \beta_*(t)), \xi - \beta_*(t))_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in K. \end{aligned} \tag{3.2.32}$$

Maintenant, de (3.2.31) avec les conditions initiales (3.1.28) et d'après les lemmes 3.2.2, 3.2.3, nous trouvons que (u_*, β_*) satisfait $(3.1.26) - (3.1.28)$ et la régularité $(3.2.1)$. Puisque u_* satisfait (3.2.1) et de (3.2.26) , on a

$$\sigma \in L^2(0,T;\mathcal{H}). \tag{3.2.33}$$

Nous choisissons $v \in D(\Omega)^d$ dans (3.2.31) et utilisons (3.2.26) , (3.1.21) pour trouver

$$\rho \ddot{u}_*(t) = Div\sigma_*(t) + f_0(t) \quad \text{dans } V' \ \ \forall t \in [0,T].$$

D'aprés l'égalité précédente avec $(3.1.16) - (3.1.17)$, (3.2.1) et (3.2.33) , on obtient

$$Div\sigma_* \in L^2(0,T;V').$$

Enfin, nous concluons que (u_*, β_*) est une solution faible du problème P ayant la régularité (3.2.1) , en ce qui termine la preuve d'existence du théorème 3.2.1.

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ qui est défini par $(3.2.16) - (3.2.18)$.

Conclusion et perspectives

Les phénomènes de contact entre des corps déformables ou entre un corps déformable et une fondation sont des phénomènes omniprésents dans la vie courante. Ces phénomènes peuvent faire appel à des modèles mathématiques sophistiqués qui sont représentés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles avec des conditions aux limites décrivant des processus de contact (avec ou sans frottement) complexes. Cependant, la théorie mathématique des problèmes de contact est un domaine d'études très large où de nombreux problèmes restent à investiguer. Dans notre travail, notre objectif est d'apporter une contribution à cette théorie mathématique des problèmes de contact. En d'autres termes, l'objet de notre travail de mémoire est d'étudier théoriquement un problème de contact entre un corps déformable et une fondation déformable en utilisant loi constitutive visoélastique avec endommagement. Le contact est sans frottement est modélisé à l'aide d'une condition de compliance normale . Nous présentons une formulation forte et faible, une résultat d'existence et l'unicité.

Plusiers perspectives peuvent être envisagées à ce travail de recherche. On peut dans un premier temps coupler la condition de compliance normale avec l'adhésion ou la changer par une des autres conditions aux limites comme la réponse normale instantanée ou condition de Signorini. On peut encore aller plus loin en introduisant d'autres lois constitutiuves qui existent entre les propriétés électriques, thermiques et mécaniques d'un matériau piézoélectrique (lois électro-thermo-viscoélastique et électro-thermo-viscoplastique avec endommagement) dans les quelles intervient essentiellement la température due à la chaleur dégagée par le frottement par exemple, et son influence sur les propriétés du matériau piézoélectrique.

Bibliographie

[1] R.Arhab, " Contribution à l'étude du contact piézoélectrique avec adhésion", Université de Perpignan, (2008).

[2] Y. Ayyad, M. Sofonea, "Analysis of two dynamic frictionless contact problems for elastic-visco-plastic materials". Electronic Jornal of Differential Equation, Vol. 2007, No. 55, pp. 1-17, ISSN: 1072-6691.

[3] A.A.Azeb Ahmed, "Étude analytique de quelques problèmes dynamiques en mécanique des milieux continus", Université F. Abbas de Sétif, (2010).

[4] H. Brézis, "*Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications".* Masson, Paris (1987)

[5] G. Duvaut and J. L. Lions, les inéquations en mécanique et en physique, Springer verlag, Berlin (1976).

[6] J. R. Fernandez and M. Sofonea. Variational and numerical analysis of the Signorini's contact problem in viscoplasticity with damage. Journal of Applied Mathematics 2003 : 2 (2003) 87-114.

[7] M. Frémond, KL. Kuttler, B. Nedjar and M. Shillor, One-dimensional models of damage. Adv. Math. Sci. Appl. 8 (2), 541-570. (1998).

[8] M. Frémond and B. Nedjar, Damage, gradient of damage and principle of virtualwork, Int. J. Solids structure, 33 (8), 1083-1103. (1996).

[9] M. Frémond and B. Nedjar, Damage in concrete : the unilateral phenomenon, Nu-clear Engng. Design, 156, 323-335. (1999).

[10] I. R. Ionescu and M. Sofonea, Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[11] M.S.Mesai Aoun, "Analyse Mathématique de quelques problème aux limites en piézoélectricité", Université K. Merbah de Ouargla, (2013).

[12] M. Sofonea, "Modélisation mathématique en Mécanique du Contact". Annals of University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. Volume 32, 2005, Pages 67-74, ISSN: 1223-6934.

[13] M. Selmani, L. Selmani; Analysis of a frictionless contact problem for elastic-viscoplastic material.Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2012, Vol. 17, No. 1, 99-117

[14] L. Selmani and L. Chouchane, A frictionless contact problem with adhesion and damage, Annals of university of Craiova, Math. Cop. Sci. Ser. 33 (2006), 94-107.

[15] S. Smata, "Etude Mathématique de quelques problèmes aux limites en élasto-viscoplasticité", Université F. Abbas de Sétif, (2012).