رقم الترتيب:
رقم التسلسل:

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الوادي

كلية العلوم والتكنولوجيا

قسم رياضيات وإعلام آلي

مذكرة تخرج لنيل شهادة

ليسـانس أكـاديمي

الميدان: رياضيات وإعلام آلي

شعبة: الرياضيات

تخصص: نمذجة رياضية ومحاكاة عددية

من إعداد الطالبات:

إيمان خنوفة.

خديجة بوعافية.

رقية قزي.

الموضوع

دوال المتغيرات العشوائية

الأساتذة المناقشين:

خديجة نيس.

محمد بقاص.

الأستاذ المؤطر:

محمد السعيد تواتي إبراهيم.

الموسم الجامعي : 2013-2014

الإهـداء

إلى فيض العطاء وبلسم الشفاء، إلى نبع تدفق طهر تناغم، إلى حبيبة الفؤاد ومسك المداد، لا تكل ولا تمل في كل يوم جديد يشرق معه الأمل ترسم طريق النجاح أمامي وتفرشه بالدعاء والأماني، كخيوط الشمس ساطعة رغم ولوج الظلام إلى أمي الغالية..

إلى درع الأمان ومسكن الوجدان، إلى الحصن المنيع شامخ البنيان، يشقى لنسعد ويتعب لنرتاح، مهد طريقاً علقماً لنصعد للنجاح سلماً، وهانحن نحقق المرام ونشارف على التخرج لنعلن حصاد سنين مضت، إلى من أحمل اسمه بكل افتخار إلى أبي الغالي..

إلى فرحة أيامي وبهجة فؤادي، إلى عضدي وسندي وذكر عاطر يهتف به لساني، تكاتفنا سوياً وبنينا الأحلام معاً نستبق النجاح ونمضي في ثبات إلى إخواني وأخواتي..

إلى الركب في الطريق، ومن سرنا معاً نحلق في رياض العلم ونسمو نشحذ الهمم كلما فتر العزم، نصطبر على الصعاب ونغدو ونروح في كفاح لنحفل يوماً بالنجاح وها قد اقتربنا من خط النهاية إلى صديقاتي..

إلى منارات الدروب، وقناديل الظلام إلى من أصبح رمزاً يشار إليه بالبنان وأمضى وقته يكدح ويعمل كي يخرج أجيال فله كل الشكر والتقدير إلى كل معلم ومعلمة ومربي ومربية..

نهدي لكل هــؤلاء بحثنا هذا .

شكر وعرفان

لو كنت أعرف فوق الشكر منزلة أوفى من الشكـر عند الله في الثمـن

أخلصتهـا لكـم من قلبي مهذبـة حذوا على مثل ما أوليتم من حسن

فلابد لنا ونحن نخطو خطواتنا الأخيرة في مرحلتنا الجامعية أن نبعث رسالة شكر وعرفان، وتقدير وامتنان لكل من ساهم في إنجاز مشروعنا هذا الذي أمضينا فيه الليالي الطوال، وأرهقنا ببحث أشبه ما يكون بحلم صعب المنال نطوي به تعب أيامٍ مضت.

فالشكر لله أولاً و آخراً أن يسر لنا إتمام هذا البحث ونسأله سبحانه في عملنا هذا التوفيق والنجاح.

ثم لأستاذنا الفاضل: تواتي محمد السعيد المشرف على هذا البحث أعطانا ووجهنا، سألناه فأرشدنا، نسأل الله له التوفيق والسداد وعمل صالح يلقاه يوم المعاد.

وشكرنا موصول للأستاذ :جديدي موسى الذي قدم لنا نقطة الانطلاق.

كما لا ننسى أن نتقدم بالشكر الجزيل لكل من "بوعافية عبد الرحمان"، "الأرقط عماد"،"عطا الله عقيلة"،"حنكة مروة"،"كنيوة سعاد" ولكل الذين قدموا لنا العون سواءً كان ذلك بكلمة أو دعوة أو توجيه أو نصيحة فشكراً لكم، ونسأل الله بمنه وكرمه أن لا يحرمكم من خير الدنيا.

الفهرس

الإهداء..... I
شكر وعرفان..... II
الفهرس..... III
مقدمة..... i

1ـ الفصل الأول:عموميات .....

1.1ـ الاحتمال..... 1
1.1.1 ـ الفضاء القابل للقياس أو القابل للاحتمال..... 1
2.1.1 ـ الفضاء المزود بالاحتمال..... 1
3.1.1 ـ الاحتمال الشرطي 1
4.1.1 ـ الأحداث المستقلة..... 2
5.1.1 ـ المتغيرات العشوائية..... 2
1.5.1.1 ـ المتغير العشوائي..... 2
أ) ـ المتغير العشوائي غير المتصل..... 2
ب) ـ المتغير العشوائي المتصل 2
2.5.1.1 ـ استقلال متغيرين عشوائيين..... 2
6.1.1 ـ استقلال عشيرتين..... 2
7.1.1 ـ دالة كثافة الاحتمال..... 3
1.7.1.1 ـ دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي غير المتصل..... 3
2.7.1.1 ـ دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل..... 3
8.1.1 ـ دالة التوزيع الاحتمالي..... 3
1.8.1.1 ـ دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي غير متصل..... 3
2.8.1.1 ـ دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل..... 4
2.1 ـ المميزات العددية للمتغير العشوائي..... 5
1.2.1 ـ التوقع الرياضي..... 5
2.2.1 ـ التباين..... 5
3.2.1 ـ الانحراف المعياري..... 6
4.2.1 ـ العزوم..... 6
1.4.2.1 ـ العزم المركزي..... 6
2.4.2.1 ـ العزم المرتبط بالأصل..... 6

5.2.1 ـ الدالة المولدة للعزوم..... 6
3.1 ـ قوانين الاحتمال..... 8
1.3.1 ـ التوزيعات الاحتمالية المتصلة..... 8
1.1.3.1 ـ التوزيع الطبيعي المعياري..... 8
2.1.3.1 ـ التوزيع الأسي..... 8
3.1.3.1 ـ التوزيع بيتا..... 8
2.3.1 ـ التوزيعات الاحتمالية غير المتصلة..... 8
1.2.3.1 ـ الهندسي الزائد..... 8
2.2.3.1 ـ الهندسي الزائد المتعدد..... 8
3.2.3.1 ـ برنولي..... 9
4.2.3.1 ـ الثنائي..... 9
5.2.3.1 ـ التوزيع المتعدد..... 9
6.2.3.1 ـ بواسون..... 9
4.1 ـ تقارب المتغيرات العشوائية..... 10
1.4.1 ـ متباينة تشيبتشيف..... 10
2.4.1 ـ نظرية النهاية المركزية..... 10
2 ـ الفصل الثاني:العمليات على المتغيرات العشوائية.....
1.2 ـ المتغيرات العشوائية ذات بعدين..... 11
1.1.2 ـ تعاريف..... 11
2.1.2 ـ إحداثيات متغير عشوائي..... 11
3.1.2 ـ توقع وتباين متغيرات عشوائية متعددة الأبعاد..... 11
1.3.1.2 ـ التوقع الرياضي..... 11
2.3.1.2 ـ التباين..... 11
2.2 ـ ثنائية المتغيرات العشوائية..... 12
1.2.2 ـ قانون الثنائية..... 12
1.1.2.2 ـ المتغيرات العشوائية غير المتصلة..... 12
2.1.2.2 ـ المتغيرات العشوائية المتصلة..... 12
2.2.2 ـ القوانين الهامشية..... 13
1.2.2.2 ـ التوزيعات المشتركة المتقطعة..... 13
أ) ـ دالة الكثافة الاحتمالية..... 13

ب) ـ الدالة التجميعية..... 14
2.2.2.2 ـ التوزيعات المشتركة المتصلة والدالة الهامشية..... 14
أ) ـ الدالة التجميعية(التراكمية)..... 14
ب) ـ الدوال الهامشية..... 14
3.2.2 ـ التغاير المشترك..... 15
4.2.2 ـ معامل الارتباط..... 15
3.2 ـ العمليات على المتغيرات العشوائية..... 18
1.3.2 ـ الدوال من الشكل $Y = \phi(X)$..... 18
2.3.2 ـ الدوال من الشكل $Z = \phi(X, Y)$..... 18
3.3.2 ـ العمليات على المتغيرات العشوائية..... 19
1.3.3.2 ـ توزيع مجموع متغيرين عشوائيين..... 19
2.3.3.2 ـ توزيع طرح متغيرين عشوائيين..... 21
3.3.3.2 ـ توزيع جداء متغيرين عشوائيين..... 23
4.3.3.2 ـ توزيع حاصل قسمة متغيرين عشوائيين..... 24
4.3.2 ـ تغيير المتغير..... 25
1.4.3.2 ـ (X, Y) شعاع عشوائي متصل..... 25
2.4.3.2 ـ (X, Y) شعاع عشوائي غير متصل..... 26
5.3.2 ـ نظرية فوبيني..... 26
6.3.2 ـ نظرية التوقع الرياضي..... 27
4.2 ـ القاعدة العامة..... 28
3 ـ الفصل الثالث: دراسة بعض التوزيعات الاحتمالية.....
1.3 ـ التوزيع غاما..... 29
1.1.3 ـ التابع غاما..... 29
2.1.3 ـ قانون غاما..... 29
2.3 ـ توزيع χ^2..... 30
1.2.3 ـ دالة توزيع χ^2..... 30
2.2.3 ـ تدرج منحنى χ^2..... 30
3.2.3 ـ منحنى توزيع χ^2..... 32
3.3 ـ توزيع ستيودنت..... 34
1.3.3 ـ تدرج منحنى ستيودنت..... 34

2.3.3 ـ أهم استخدامات توزيع ستيودنت..... 35
4.3 ـ توزيع فيشر..... 36
1.4.3 ـ تدرج منحنى فيشر..... 36
2.4.3 ـ أهم استخدامات توزيع فيشر..... 37
خاتمة..... ii
قائمة المراجع..... VI
الملاحق..... IX
الملخص.....

مـقدمـــــة

لقد تم تعريف الاحتمال بطرق عديدة، و أبسطها "مقياس إمـكانية وقوع حدث معين " وكثيراً ما نستعمـــل في حياتنا اليومية كلمات يحتمل ويمكن ويجوز، أي أن الاحتمال مرتـبـط بالأحـــداث فمثلاً من الممـــكن أو من المحتمل أن تمطر السماء اليوم، ونعني بهذا أن الظواهر الطبيعية المحيطة بنا اليوم مشابهة لـــنفس الظواهر الطبيعية في أوقات سابقة التي حدث فيها أن أمطرت السماء.

لقد شهد القرنين 16 و 17 اهتماماً بارزاً بهذا النوع من الدراسات و البحوث حيث كانت الظروف ملائـمة في تلك الفترة إذ أن ألعاب المقامرة بورق اللعب و رمي حجر النرد كانت منتشرة في أوروبا خاصةً في فرنسا وتزامنت هذه الـفترة مع النهضة العلمية وخاصة في مـجال الرياضـيات وقد احتاج المـقامرون إلى أســس علمية تسـاعدهم على حـساب فرصـهم في الربـح والخســارة، فلـجؤا إلى علمـاء الرياضـيات أمثال باسكال (PASCAL) و فرمــا (FERMAT) و برنولي (BERNOULLI) وغيرهم وهنا كانت نقطة الانـطلاق فـي الدراسات الجارية في علم الاحتمال.

نهتم في بحثنا بدراسة الموضوعات الأساسية في نظرية الاحتمالات بحيث سلطنا الضوء على العـشوائية أحادية ومتـعددة الأبعـاد المــكونة لدوال المتغيرات العشـــوائية، فكيف تتم دراستــها؟ وتحديد خصــائصها؟ ومجالات استخدامها؟

خلال إنجازنا لهذا البحث تعرضنا للعديد من الصعوبات وهي كالتالي:

- ضيق الوقت.
- صعوبة التعامل مع الرموز الرياضية في برنامج الكتابة.
- ترجمة بعض البراهين.
- كثافة معلومات البحث.

ولقد جزأنا بحثنا هذا إلى ثلاثة فصول كالآتي:

الفصل الأول: تعرضنا لمفاهيم أساسية للحساب الاحتمالي، وكيفية دراسة المتغيرات العشوائية وحيدة البعد ومميزاتها العددية، وناقشنا بعض التوزيعات الاحتمالية.

الفصل الثاني: تطرقنا لدراسة المتغيرات العشوائية ثنائية البعد وتحليلها، وعالـجنا توابعها وقوانينها وكيـفية تعميم النتائج المتحصل عليها على المتغيرات المتعددة الأبعاد.

الفصل الثالث: درسنا دوال ذات استخدام واسع في الإحصاء الاستدلالي، بحيث تكون هذه الدوال مكونة من متغيرات عشوائية و التي تمثل توزيعاتها: ك2، ستيودنت، فيشر.

تمهيد: سنتطرق في هذا الفصل إلى مفاهيم أساسية في الاحتمال و قوانينه، و بصفة خاصة ركّزنا على المتغير العشوائي أحادي البعد و خصائصه.

1.1 ـ الاحتمال:

1.1.1ـ الفضاء القابل للقياس أو القابل للاحتمال:

لتكن Ω مجموعة الإمكانات الكلية لتجربة عشوائية و$\mathcal{A}$ عشيرة.

- تسمى الثنائية $(\Omega,\mathcal{A})$ فضاءًا قابلاً للقياس أو فضاء قابل للاحتمال.
- يسمى كل عنصراً من $\mathcal{A}$ حدثاً.
- لتكن $r \in \Omega$ النتيجة التي حققتها التجربة نسمي r حدثا بسيطاً أو أولياً.

2.1.1 ـ الفضاء المزود بالاحتمال:

تعريف1.2.1.1: ليكن $(\Omega,\mathcal{A})$ فضاءًا قابلا للاحتمال.

احتمال P هو تعريفاً:

تطبيق من $\mathcal{A}$ في $[0,1]$أي $P: \mathcal{A} \to [0,1]$ يحقق:

- $P(\Omega) = 1$.
- $P\left(\bigcup_I A_i\right) = \sum_I P(A_i)$ حيث A_iأجزاء غير متقاطعة مثنى مثنى حيث I مجموعة عدودية.

نتيجة1.2.1.1:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ إذا كان: $A \cap B = \varnothing$.

تعريف2.2.1.1: نسمي فضاءاً احتمالياً الثلاثية $(\Omega,\mathcal{A},P)$ حيث:

- Ω: مجموعة.
- $\mathcal{A}$: عشيرة من اجل Ω.
- P: قياس موجب على $\mathcal{A}$ بحيث $P(\Omega) = 1$.

3.1.1 ـ الاحتمال الشرطي:

ليكن $(\Omega,\mathcal{A},P)$ فضاء احتمال A حدث بحيث $P(A) \neq 0$.

إذا علمنا أن A قد وقع فيمكن عندئذ الحصول على فضاء احتمالي جديد$(\Omega,\mathcal{A},P_A)$ بحيث:

$$\forall B \in \mathcal{A}\ , P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \qquad (1,1)$$

وعموما: $P_A(B) \neq P(B),$

ونلاحظ أن:

- $P_A(\varnothing) = 0.$
- $P_A(\Omega) = 1.$
- $\forall (B_n) \subset \mathcal{A}.$

$(B_n)_n$ متنافية مثنى مثنى.

$$P_A\left(\dot{\bigcup} B_n\right) = \frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \left(\dot{\bigcup} B_n\right)\right)}{P(A)} = \frac{P\left(\dot{\bigcup}(A \cap B_n)\right)}{p(A)}$$

$$= \sum_n \frac{P(A \cap B_n)}{p(A)} = \sum_n P_A(B_n), \qquad (1,2)$$

P_A هو احتمال على $\mathcal{A}$ و يسمى الاحتمال الشرطي علماً أن A قد وقع.

4.1.1 ـ الأحداث المستقلة:

تعريف 1.4.1.1: ليكن $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ فضاءًا مزوداً باحتمال، نقول أن الحدثين A و B مستقلان إذا حققا العلاقة:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \qquad (1,3)$$

5.1.1 ـ المتغيرات العشوائية:

1.5.1.1 ـ المتغير العشوائي: يعرف المتغير العشوائي الحقيقي على أنّه تطبيق قابل للقياس X من فضاء مزوداً باحتمال $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ في $(\mathbb{R},\mathrm{B}_{\mathbb{R}})$ أي أن $X^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathcal{A}$ مهما كان، وهكذا نستطيع أن نرفق بكل حدث B احتمالاً بواسطة X وهو $P\left\{X^{-1}(B)\right\}$.

أ) ـ المتغير العشوائي غير المتصل (المتقطع):

تعريف 1.5.1.1: نقول عن متغير عشوائي حقيقي أنّه غير متصل إذا أخذ قيمة في مجموعة جزئية غير متصلة D (منتهية أو قابلة للعد من $\mathbb{R}$).

ب) ـ المتغير العشوائي المتصل (المستمر):

تعريف 2.5.1.1: هو المتغير الذي يأخذ أي قيمة داخل مدى معين (مجموعة لها قوة المستمر).

2.5.1.1 ـ استقلال متغيرين عشوائيين:

تعريف 3.5.1.1: نقول عن متغيرين عشوائيين X و Y أنهما مستقلان إذا كانت العشيرتان المولدتان عنهما $\mathcal{A}_X$ و $\mathcal{A}_Y$ مستقلتين.

6.1.1 ـ استقلال عشيرتين:

تعريف 1.6.1.1: نقول عن عشيرتين جزئيتين Ω_1، Ω_2 من $\mathcal{A}$ أنّهما مستقلتان إذا تحققت المساواة:

$$\forall \Omega_i \in \mathcal{A}_i, i = 1,2$$

$$P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\Omega_1)P(\Omega_2). \qquad (1,4)$$

7.1.1 ـ دالة كثافة الاحتمال:

1.7.1.1 ـ دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي غير المتصل:

تعريف 1.7.1.1: دالة كثافة الاحتمال للمتغير X هي الاحتمال بأن يأخذ X أي قيمة من قيمه الممكنة أي:

$P(X = x_i)$ ويرمز لها بالرمز $f(x)$ على أن يتحقق ما يلي:

- $f(x) \geq 0.$
- $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1.$

وتأخذ دالة كثافة الاحتمال للمتغير غير المتصل X الشكل التالي:

$X = x$	x_1	x_2	.....	x_n
$f(x) = P(\mathrm{X} = \mathrm{x})$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	.....	$f(x_n)$

2.7.1.1 ـ دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل:

تعريف 2.7.1.1: نسمي f دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي المتصل X والتي تعرف كما يلي:

- $f(x) \geq 0.$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

بحيث f قابلة للقياس: $P_X(\mathrm{A}) = \int_A f dx \ , \forall A \in \mathrm{B}(\mathbb{R})$

8.1.1 ـ دالة التوزيع الاحتمالي:

1.8.1.1 ـ دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي غير متصل:

تعريف 1.8.1.1: دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي الاحتمال بأن X اقل من أو تساوي x أي: $P(X \leq x)$ ويرمز لها بالرمز $F(x)$ ويكون:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \qquad (1,5)$$

إذا كانت X تأخذ عدداً منتهياً من القيم فإن $F(x)$ يمكن تعريفها كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) & x_n \leq x < +\infty \end{cases} \qquad (1,6)$$

2.8.1.1 ـ دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل:

تعريف 2.8.1.1: تعرف دالة التوزيع كما يلي:

$$F(x) = P(X = x) = \int_{-\infty}^{X} f(x_i)dx_i , \qquad (1,7)$$

بفرض a,b نقطتان من مجال تعريف x بحيث $a<b$ لحساب احتمال X تنتمي إلى المجال $[a,b[$.

$$P(a<x\leq b)=P(X\leq b)-P(X\leq a)=F(b)-F(b). \qquad (1,8)$$

خواص 2.8.1.1: [8]

ليكن F تابع توزيع المتغير العشوائي X :

- $F(+\infty)=1$.
- $F(-\infty)=0$.
- F متزايد.
- F تطبيق من $\mathbb{R}$ في $[0,1]$.
- $P(a<X<b)=F(b)-F(a)$.
- يملك F نهاية من اليمين ونهاية على اليسار على التوالي عندما يؤول X إلى X_0 من اليمين (اليسار على التوالي).

2.1 ـ المميزات العددية للمتغير العشوائي:

1.2.1 ـ التوقع الرياضي:

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين حقيقيين على $(\Omega,\mathcal{A},P)$

$$X:(\Omega,\mathcal{A},P)\to(\mathbb{R},B_{\mathbb{R}},P_X),$$

التوقع الرياضي لـ X تعريفا هو المقدار الذي نرمز له بـ $E(X)$

$$E(X)=\int_{\Omega} X\,dp \qquad (1,9)$$

$$=\begin{cases}\int_{\mathbb{R}} x f(x)dx & X \text{ متصل}\\ \sum_{x} x f(x) & X \text{ غير متصل}\end{cases}$$

خواص 1.1.2.1: [5]

(C عدد ثابت)

- $E(c)=c.$
- $E(cX)=cE(X).$
- $E(X+c)=E(X)+c.$
- $E(X+Y)=E(X)+E(Y).$
- $E(XY)=E(X)E(Y),$

إذا كانت X,Y مستقلتان.

2.2.1 ـ التباين:

X متغير عشوائي حقيقي على $(\Omega,\mathcal{A},P)$ نعرف التباين بـ:

$$V(X)=E(x-E(X))^2, \qquad (1,10)$$

$$V(X)=\int_{\Omega}(x-E(X))^2dp=\begin{cases}\int_{\Omega}(x-E(X))^2 f(x)dx & X \text{ متصل}\\ \sum_{x}(x-E(X))f(x) & X \text{ غير متصل}\end{cases}$$

خواص 1.2.2.1: [1]

(C عدد ثابت)

- $V(c)=0.$
- $V(cX)=c^2V(X).$
- $V(X+c)=V(X-c)=V(X).$
- $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2,$

في حالة استقلال المتغيرين عن بعضهما:

- $V(X-Y)=V(X)+V(Y).$
- $V(X+Y)=V(X)+V(Y).$

3.2.1 ـ الانحراف المعياري:

هو جذر التباين أي:

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}.$$

4.2.1 ـ العزوم:

يعتبر العزوم كما التباين من تطبيقات توقع دالة، نميز بين نوعين من العزوم:

العزم المركزي والعزم المرتبط بالأصل.

1.4.2.1 ـ العزم المركزي:

يعرف العزم المركزي من الدرجة r للمتغير العشوائي X كما يلي:

$$\mu_r = E((X-\mu)^r),\ r = 0,1,2\ldots. \qquad (1,11)$$

2.4.2.1 ـ العزم المرتبط بالأصل:

يعرف العزم الأصلي كما يلي:

$$\mu_r' = E(X^r),\ r = 0,1,2\ldots. \qquad (1,12)$$

5.2.1 ـ الدالة المولدة للعزوم:

هي دالة مرتبطة بمتغير t (وسيط) بالإضافة إلى ارتباطها بـ X و تعرف كما يلي:

$$M_X(t) = E(e^{tX}). \qquad (1,13)$$

خواص 1.5.2.1: [7]

إذا كان X متغيراً عشوائياً دالته المولدة للعزوم $M_X(t)$ وكان $Y = aX + b$ فإن التابع المولد للعزوم للمتغير العشوائي Y يكتب كما يلي:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t(aX+b)}) = E(e^{bt}e^{at(X)})$$
$$= e^{bt}E(e^{(at)X}) = e^{bt}M_X(at). \qquad (1,14)$$

6.2.1 ـ الدالة المميزة:

الدالة المميزة ذات المتغير العشوائي X معرفة كما يلي:

$$\forall\ t \in \mathbb{R} : \phi_X(t) = E\left(e^{iXt}\right). \qquad (1,15)$$

خواص 1.6.2.1: [7]

- $\phi_X(0) = 1$.
- $|\phi_X(t)| \leq 1$.
- $\lim_{\pm\infty} \phi_X(t) = 0$.
- $\phi_X(t)$ مستمرة على $\mathbb{R}$.

- إذا كانت كل X و Y مستقلتان فإن:

$$\phi_{X+Y}(t) = \phi_X(t) \cdot \phi_Y(t). \qquad (1,16)$$

- إذا كان $\phi_X(t) = \phi_Y(t)$ فإن X و Y يتبعان نفس القانون.

نظرية 1.6.2.1: [2]

$$E(X^r) = \frac{d^r \phi_X(t)}{i^r dt} \qquad (t = 0). \qquad (1,17)$$

3.1 ـ قوانين الاحتمال:

1.3.1 ـ التوزيعات الاحتمالية المتصلة:

1.1.3.1 ـ التوزيع الطبيعي المعياري:

- دالة الكثافة: $f(\mathrm{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \qquad -\infty < z < +\infty$
- التوقع الرياضي: $E\ (\mathrm{Z}) = 0$
- التباين: $V\ (\mathrm{Z}) = 1$

2.1.3.1 ـ التوزيع الأسي:

- دالة الكثافة: $f(\tau) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda\tau} & , \tau > 0 \\ 0 & , \tau \le 0 \end{cases}$
- التوقع الرياضي: $E\ (\tau) = \frac{1}{\lambda}$
- التباين: $\mathrm{V}(\tau) = \frac{1}{\lambda^2}$
- دالة التوزيع: $F(X) = 1 - e^{-\lambda X}$

3.1.3.1 ـ التوزيع بيتا: $(X \to B(\alpha,\beta))$

- دالة الكثافة: $f(x) = \begin{cases} f(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \textit{ailleurs} \end{cases} \quad ,(\alpha,\beta > 0)$
- التباين: $V\ (\mathrm{X}) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$

2.3.1 ـ التوزيعات الاحتمالية غير المتصلة (المتقطعة):

1.2.3.1 ـ الهندسي الزائد: $(X \to H(N,b,p))$

- الاحتمال: $P(X = x) = \frac{C_b^x \cdot C_r^{n-x}}{C_N^n}$

  $X = \{0,1,2,\ldots.b\}, b \le b + r = N$
- التوقع الرياضي: $E\ (X) = np$
- التباين: $V\ (X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

2.2.3.1 ـ الهندسي الزائد المتعدد:

- الاحتمال: $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, \mathrm{X}_K = x_k) = \frac{C_{N_1}^{x_1} C_{N_2}^{x_2} \ldots C_{N_K}^{x_k}}{C_N^n}$

  $X_i = \{0,1,2,\ldots,\mathrm{N}_i\}$

  $\sum x_i = n$

  $\sum N_i = N$
- التوقع الرياضي: $E\ (\mathrm{X}_i) = \mathrm{n}(N_i / N) = \mathrm{npi}$

3.2.3.1 ـ برنولي:

- الاحتمال:

$$P(X=1)=p$$
$$P(X=0)=1-p=q$$
$$X=\{0,1\}$$

- التوقع الرياضي:

$$E(X)=p$$

- التباين:

$$\mathrm{V}(X)=pq$$

4.2.3.1 ـ الثنائي: $(X \to B(n,p))$

- الاحتمال:

$$P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x}$$

بحيث:

$$C_n^x=\frac{n!}{\mathrm{x}!(n-x)!}$$
$$X=\{0,1,2,...,n\}$$

- التوقع الرياضي:

$$E(\mathrm{X})=\mathrm{np}$$

- التباين:

$$\mathrm{V(X)}=\mathrm{npq}$$

5.2.3.1 ـ التوزيع المتعدد:

- الاحتمال:

$$P(X_1=x_1,X_2=x_2,...,X_k=x_k)=\frac{n!}{\mathrm{x}_1!...\mathrm{x}_k!}p_1^{x_1}...p_k^{x_k}$$

$$\forall i,\ 0 \le x_i \le N_i,$$
$$\sum_{i=1}^{k} x_i = n,$$
$$\sum_{i=1}^{k} N_i = N$$

- التوقع الرياضي:

$$E(X_k)=np_k$$

- التباين:

$$\mathrm{V}(X_k)=np_kq_k$$

6.2.3.1 ـ بواسون: $(X \to P(\lambda))$

- الاحتمال:

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{\mathrm{x}!}$$
$$P(X=0)=e^{-\lambda}$$
$$P(X\ge 1)=1-e^{-\lambda} \qquad X=\{0,1,...+\infty\}$$

- التوقع الرياضي:

$$E(X)=\lambda$$

- التباين:

$$\mathrm{V}(X)=\lambda$$

4.1 ـ تقارب المتغيرات العشوائية:

1.4.1 ـ متباينة تشيبتشيف:[4]

هي قانون يخص المتغيرات العشوائية المتصلة وغير المتصلة على السواء، التي يكون لها متوسط (التوقع الرياضي) وتباين محدود.

يستخدم هذا القانون لقياس الحد الأقصى لاحتمال المفردات التي المسافة بينهما وبين μ (التوقع الرياضي) تزيد عن مقدار ما:

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (1,18)$$

2.4.1 ـ نظرية النهاية المركزية:[2]

لتكن المتغيرات $X_1, X_2, ...$ متغيرات عشوائية مستقلة لها نفس التوزيع الاحتمالي بتباين ومتوسط محددين.

أي: $V(X_i) = \sigma^2 < \infty, \quad E(X_i) = \mu,$

إذا كانت:

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_i, \quad (n = 1,...,i)$$

فإن S_n تتبع التوزيع الطبيعي عندما $n \to +\infty$ و بما أن $E(S_n) = n\mu$ و $\sigma_{S_n} = \sigma\sqrt{n}$

فإننا نكتب:

$$\lim_{n \to \infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2} dz,$$

أي:

$$Z = \frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{Var(S_n)}} \to N(0,1). \qquad (1,19)$$

تمهيد: سندرس في هذا الفصل العمليات على المتغيرات العشوائية ذات بعدين، مع العلم أن جميع النتائج المتحصل عليها يمكن تعميمها على المتغيرات المتعددة الأبعاد.

1.2ـ المتغيرات العشوائية ذات بعدين:

1.1.2 ـ تعاريف:

تعريف 1.1.1.2: نعرف متغيرا عشوائيا بعده 2 على أنّه تطبيق قابل للقياس من $(\Omega,\mathcal{A})$ في $\left(\mathbb{R}^2,B_{\mathbb{R}^2}\right)$ حيث يمثل $B_{\mathbb{R}^2}$ العشيرة البوريلية لـ $\mathbb{R}^2$.

تعريف2.1.1.2: العشيرة البوريلية على $\mathbb{R}^2$، إذا زودنا $\mathbb{R}$ بالعشيرة البوريلية فإننا نستطيع تزويد $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ بالعشيرة المولدة عن جماعة البلاطات : $\zeta=\left\{A_1\times A_2, A_i\in B_{\mathbb{R}^2}\right\}$

2.1.2 ـ إحداثيات متغير عشوائي:

نظرية1.2.1.2:[1]

حتى يكون التابع $Z=(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ متغيرا عشوائيا على $(\Omega,\mathcal{A})$ يلزم ويكفي أن يكون X , Y متغيرين عشوائيين من$(\Omega,\mathcal{A})$ على $(\mathbb{R},B_{\mathbb{R}})$.

3.1.2 ـ توقع وتباين المتغيرات العشوائية المتعددة الأبعاد:

بتطبيق كل من تعريف التوقع الرياضي والتباين اللذان تناولناهما فيما سبق، على المتغيرات العشوائية المتعددة الأبعاد.

X , Y متغيرين عشوائيين غير متصلين و $f(x,y)$ دالة احتمال الثنائية (X,Y):

1.3.1.2 ـ التوقع الرياضي:

$$\mu_X=E(\mathrm{X})=\begin{cases}\sum_x\sum_y xf(x,y) & X \text{ غير متصل}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,dx\,dy & X \text{ متصل}\end{cases} \qquad (2,1)$$

2.3.1.2 ـ التباين:

$$\sigma_x^2=\mathrm{V}(\mathrm{X})=\begin{cases}\sum_x\sum_y (x-E(X))^2 f(x,y) & X \text{غير متصل}\\ \iint (x-E(X))^2 f(x,y)\,dx\,dy & X \text{ متصل}\end{cases} \qquad (2,2)$$

ملاحظة1.3.1.2: توقع الثنائية (X,Y) هو $\left(E(X),\mathrm{E}(\mathrm{Y})\right)$ في حالة وجودهما.

2.2 ـ ثنائية المتغيرات العشوائية:

1.2.2 ـ قانون الثنائية:

1.1.2.2 ـ المتغيرات غير المتصلة (المتقطعة):

ليكن X, Y متغيرين عشوائيين، قانون احتمالهما معرفان بـ:

$$P(\mathrm{Y} = y_j) = P_j, \forall j \in J \quad \text{و} \quad P(X = x_i) = P_i, \forall i \in I$$

حيث I و J مجموعتان منتهيتان أو قابلتان للعد.

تعريف1.1.2.2: نعرف قانون الثنائية (X,Y) بالأعداد:

$$P(\mathrm{X} = \mathrm{x}_i \cap \mathrm{Y} = y_j) = P_{ij}, \forall (i,j) \in I \times J, \qquad (2,3)$$

بحيث:

- $P_{ij} \geq 0.$
- $\sum P_{ij} = 1.$

2.1.2.2 ـ المتغيرات المتصلة (المستمرة):

ليكن V شعاعا عشوائيا من $\mathbb{R}^2$: $V = (X,Y)$

تعريف2.1.2.2: نعرف تابع توزيع الشعاع العشوائي V التابع F من $\mathbb{R}^2$ في $[0,1]$ بحيث $F(x,y) = P\left(\{X \geq x\} \bigcap \{Y \leq y\}\right)$ إذا كانت المشتقات الجزئية الثنائية :

$$f(x,\mathrm{y}) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial x}(x,y), \qquad (2,4)$$

موجودة فان f يسمى كثافة احتمال الشعاع V، نقول في هذه الحالة أن الشعاع العشوائي له قانون احتمال مستمر.

2.2.2 ـ القوانين الهامشية:

1.2.2.2 ـ التوزيعات المشتركة المتقطعة و الدالة الهامشية:

أ) ـ دالة الكثافة الاحتمالية:

تعريف1.2.2.2: لتكن X , Y متغيرين عشوائيين غير متصلين لنرمز للاحتمال $P(X=x,Y=y)$ بـ $f(x,y)$:

$$f(x,y)=\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x},\mathrm{Y}=\mathrm{y}), \qquad (2,5)$$

بحيث:

- $f(x,y)\geq 0.$
- $\sum_x \sum_y f(x,y)=1,$

تسمى الثنائية (X,Y) متغيرة ذات بعدين $f(x,y)$ دالة الكثافة الاحتمالية لها و نقول أيضا دالة الكثافة المشتركة لمتغيرين X , Y و يمكن التعبير عنها عن طريق جدول الاحتمالات المشتركة:

X \ Y	y_1	y_2	.....	y_m	$f_1(x)$
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	.....	$f(x_1,y_m)$	$f_1(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	.....	$f(x_2,y_m)$	$f_1(x_2)$
.....	.....	.....	.....	.....	.....
x_n	$f(x_n,y_1)$	$f(x_n,y_2)$	.....	$f(x_n,y_m)$	$f_1(x_n)$
$f_2(y)$	$f_2(y_1)$	$f_2(y_2)$	.....	$f_2(y_m)$	1

احتمال $X=x$ يحسب ويكتب كما يلي: $P(X=x)=f_1(x)=\sum_{k=1}^{m} f(x,y_k),$

احتمال $Y=y$ يحسب ويكتب كما يلي: $P(Y=y)=f_2(y)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y),$

الدالتين $f_1(x)$ و $f_2(\mathrm{y})$ تسميان الدالتان الهامشيتان حيث : $\sum f_1(x)=\sum f_2(\mathrm{y})=1.$

ب) ـ الدالة التجميعية:

تكتب الدالة التجميعية للمتغيرة الثنائية (X,Y) كمايلي:

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\sum_{u\le x}\sum_{v\le y}f(u,v). \qquad (2,6)$$

2.2.2.2 ـ التوزيعات المشتركة المتصلة والدالة الهامشية:

$$P(X=x,Y=y)=f(x,y), \qquad (2,7)$$

حيث:

- $f(x,y)\ge 0.$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1.$

أ) ـ الدالة التجميعية (التراكمية):

نكتب دالة التوزيع كما يلي:

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y)=\int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{y}f(u,v)dudv, \qquad (2,8)$$

ويمكن استنتاج دالة الكثافة المشتركة من الدالة التراكمية بالاشتقاق:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, \qquad \left(F\in C^2\left(\mathbb{R}^2,[0,1]\right)\right)$$

من جهة أخرى:

$$F_1(x)=P(X\le x)=\int_{u=-\infty}^{x}\int_{v=-\infty}^{v=+\infty}f(u,v)dudv, \qquad (2,9)$$

$$F_2(y)=P(Y\le y)=\int_{u=-\infty}^{u=-\infty}\int_{v=-\infty}^{y}f(u,v)dudv,$$

ونسمي الدالتان $F_2(y)$ و $F_1(x)$ الدالتان التجميعيتان الهامشيتان، ولتحديد x و y محصورتان في مجال ما تكتب:

$$P(a\le x\le b,c\le y\le d)=\int_{x=a}^{b}\int_{y=c}^{y}f(x,y)dxdy. \qquad (2,10)$$

ب) ـ الدوال الهامشية:

الدالتان الهامشيتان للكثافة الاحتمالية للثنائية (X,Y) يعبر عنها كما يلي:

$$f_1(x)=\int_{v=-\infty}^{+\infty}f(x,v)dv. \qquad (2,11)$$

$$f_2(y)=\int_{u=-\infty}^{+\infty}f(u,y)du.$$

3.2.2 ـ التغاير المشترك:

تعريف1.3.2.2: يعرف التغاير المشترك كما يلي:

$$Cov(X,Y)=E\left[(x-E(X))(y-E(Y))\right], \qquad (2,12)$$

$$\mathrm{Cov(X,Y)}=\begin{cases}\sum_x\sum_y (\mathrm{x}-\mathrm{E(X)})(\mathrm{y}-E(\mathrm{Y}))f(x,y) & \text{غير متصل}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mathrm{x}-\mathrm{E(X)})(\mathrm{y}-E(\mathrm{Y}))f(x,y)dxdy & \text{متصل}\end{cases}$$

خواص1.3.2.2: [5]

أ)

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]\\&=E\left[XY-XE(Y)-E(X)Y+E(X)E(Y)\right]\\&=E(XY)-E(X)E(Y).\end{aligned}$$

ب) إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين مستقلين فان:

$$E(XY)=E(X)E(Y),$$

ومنه:

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E(XY)-E(X)E(Y)\\&=E(XY)-E(XY),\end{aligned}$$

$$Cov(X,Y)=0.$$

ج) X و Y مستقلان أو غير مستقلان:

$$Var(X\pm Y)=V(X)+V(Y)\pm 2Cov(X,Y).$$

د) القيمة المطلقة للتغاير المشترك لا تكون اكبر من جداء الانحرافين المعياريين:

$$\left|Cov(X,Y)\right|\le Cov(X)Cov(Y).$$

هـ) في حالة X و Y متغيرين مرتبطين تماما مثلا $X=Y$ فان:

$$Cov(X,Y)=V(X)V(Y).$$

4.2.2 ـ معامل الارتباط:

تعريف1.4.2.2: معامل الارتباط بين X و Y نرمز له بالرمز $\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ العلاقة التالية:

$$\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y})=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}, \qquad (2,13)$$

حيث:

- σ_X الانحراف المعياري للمتغير X.
- σ_Y الانحراف المعياري للمتغير Y .

خواص1.4.2.2:[5]

- $\rho(X,Y)=\rho(\mathrm{X},\mathrm{Y}).$
- $\rho(X,\mathrm{X})=1.$
- $\rho(X,-\mathrm{X})=-1.$
- $\forall a,b\neq 0,\rho(\mathrm{a}X+b,\mathrm{c}\mathrm{Y}+d)=\rho(\mathrm{X},Y).$
- $-1\leq\rho(\mathrm{X},Y)\leq 1.$

مثال1.4.2.2: ليكن لدينا التوزيع المشترك المطلوب حساب:

$$: E(X), E(Y), \mathrm{E(XY)}, \sigma^2_X, \sigma^2_Y, \mathrm{Cov(X,Y)}, \rho(\mathrm{X,Y})$$

y / X	−4	−2	7
1	1/8	¼	1/8
−5	¼	1/8	1/8

حسب العلاقات السابقة $(2,1)$و $(2,2)$نجد:

$$E(X) = \sum_x \sum_y x\, f(x,y) = 1(1/8 + 1/4 + 1/8) - 5(1/4 + 1/8 + 1/8)$$
$$= 1/2 - 5/2 = -4/2 = -2$$
$$E(Y) = \sum_x \sum_y y\, f(x,y) = -4(1/8 + 1/4) - 2(1/4 + 1/8) + 7(1/8 + 1/8)$$
$$= -1/2$$
$$V(X) = \sigma^2_x = E[(x-\mu_x)^2] = \sum_x \sum_y (x-\mu_x)^2 f(x,y)$$
$$= (1+2)^2(1/8 + ¼ + 1/8) + (-5+2)^2(1/4 + 1/8 + 1/8)$$
$$= 9(1/2) + 9(1/2) = 9$$
$$V(X) = \sigma^2_y = E\left[(y-\mu_y)^2\right] = \sum_x \sum_y (y-\mu_y)^2 f(x,y)$$
$$= (-4 + 1/2)^2(1/8 + 1/4) + (-2 + 1/2)^2(1/4 + 1/8)$$
$$+ (7 + 1/2)^2(1/8 + 1/8)$$
$$= 49/4(3/8) + 9/2(3/8) + (15/2)^2(2/8) = 651/32 = 20,34$$
$$E(XY) = \sum_x \sum_y xyf(x,y) = (1)(-1/2 - 1/2 + 7/8) + (-5)(-1 + 10/8 - 35/8) = 1.75$$

كما يمكن حساب كل من القيم السابقة باستخدام الدوال الهامشية $f_1(x), f_2(y)$

Y / X	−4	−2	7	**$f_1(x)$**
1	1/8	¼	1/8	**4/8**
−5	¼	1/8	1/8	**4/8**
$f_2(y)$	**3/8**	**3/8**	**2/8**	1

$$E(x) = \sum_x x\, f_1(x) = 1(4/8) - 5(4/8) = -2$$
$$V(x) = E(x^2) - E^2(x)$$
$$= \left[1^2(4/8) + (-5)^2(4/8)\right] - (-2)^2 = 9$$
$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1.75 - 1 = 0.75$$
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0.75}{13.52} = 0.05$$

3.2 ـ العمليات على المتغيرات العشوائية:

1.3.2 ـ الدوال من الشكل $Y=\phi(X)$:

نفرض أن X و Y متغيرين عشوائيين معرفين على نفس فضاء العينة S. يقال أن Y هو دالة في X إذا كان المتغير Y يمكن كتابته على الصورة $Y=\phi(X)$ لدالة حقيقية ϕ في المتغير الحقيقي، وهذا يدل على أن:

$$Y(s)=\phi[X(s)],$$

لكل $s\in S$.

فمثلا : $kX, X^2, X+k, (X+k)^2$ كلها دوال للمتغير العشوائي X حيث:

$kx=\phi(x), x^2, x+k, (x+k)^2$ على التوالي ،و تتحقق النظرية الأساسية التالية.

نظرية 1.1.3.2:[2]

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين معرفين على نفس فضاء العينة S بحيث كان $Y=\phi(x)$ فإن:

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}\phi(x_i)f(x_i), \qquad (2,14)$$

حيث f هي توزيع X.

2.3.2 ـ الدوال من الشكل $Z=\phi(X,Y)$:

يقال أن المتغير العشوائي Z دالة في Xو Y إذا أمكن تمثيل Z على الصورة $Z=\phi(X,Y)$ حيث ϕ دالة حقيقية في متغيرين في أي أنّ:

$$Z(s)=\phi[X(s),Y(s)], \qquad (2,15)$$

لكل $s\in S$.

نظرية1.2.3.2:[1]

نفرض أن X,Y,Z متغيرات عشوائية معرفة على نفس فضاء العينة S بحيث إذا كان $Z=\phi(X,Y)$:

$$E(Z)=\sum_{i,j}\phi(x_i,y_j)f(x_i,y_j), \qquad (2,16)$$

حيث f هو التوزيع المشترك للمتغيرين Xو Y.

3.3.2 ـ العمليات على المتغيرات العشوائية:

1.3.3.2 ـ توزيع مجموع متغيرين عشوائيين:

الحالة الأولى:

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين متصلين على الفضاء الاحتمالي $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ وكثافة توزيعهما المشترك $f(x, y)$ ويطلب إيجاد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $Y = X_1 + X_2$ نجد:

$$F_Y(y) = \iint_{X_1+X_2<y} f(x_1, x_2)dx_1dx_2$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{y} f(x_1, z - x_1)dz$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{y} f(z - x_2, x_2)dz,$$

وعندما يكون المتغيرين X_1 و X_2 مستقلين فان:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)dx_1 \int_{-\infty}^{y} f_2(z - x_1)dz$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2)dx_2 \int_{-\infty}^{y} f_1(z - x_2)dz,$$

وبالتالي:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, y - x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y - x_2, x_2)dz, \qquad (2,17)$$

وإذا كان X_1 و X_2 مستقلين:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) f_2(y - x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y - x_2) f_2(x_2)dx_2. \qquad (2,18)$$

مثال1.3.3.2:

ليكن X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين مستقلين، لكل منهما توزيع منتظم في المجال $[0,1]$ والمطلوب إيجاد تابع الكثافة للمتغير العشوائي: $Y = h(X_1, X_2) = X_1 + X_2$

إن تابعي الكثافة الهامشيين لـ X_1 و X_2 هما:

$$f_1(x_1) = f_2(x_2) = \begin{cases} 1 & x_1, x_2 \in [0,1] \\ 0 & x_1, x_2 \notin [0,1] \end{cases}$$

يعطى تابع الكثافة $f_Y(y)$ كالتالي:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) f_2(y - x_1)dx_1 = \int_{0}^{1} f_2(y - x_1)dx_1.$$

وعندما : $0 \le y - x_1 \le 1$ يكون تابع الكثافة $f_2(y-x)=1$ ويساوي الصفر من أجل بقية القيم وبما أن

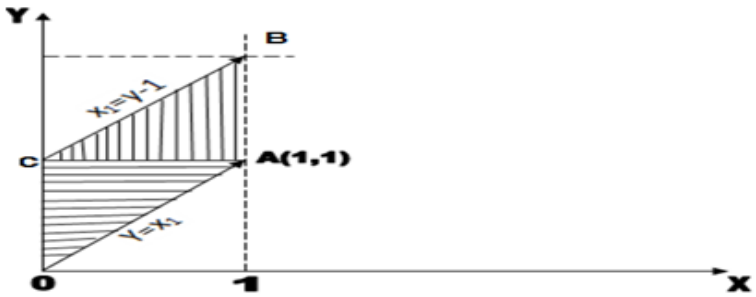
x_1 يتحول من 0 إلي 1 فان y يتحول من 0 إلي 2 أي أن:

$$\begin{cases} 0 \le x_1 \le 1 \\ 0 \le y - x_1 \le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le y \le 2 \Rightarrow f_Y(y) = 0; y \notin [0,2]$$

وبالتالي، عندما $0 \le y \le 1$ فإن حدود التكامل تتعين من سطح المثلث OAC (الشكل 1) أي أن

$$f_Y(y) = \int_0^y dx_1 = y$$

وعندما $1 \le y \le 2$ فإن حدود التكامل تتعين من سطح المثلث ABC (الشكل1) :



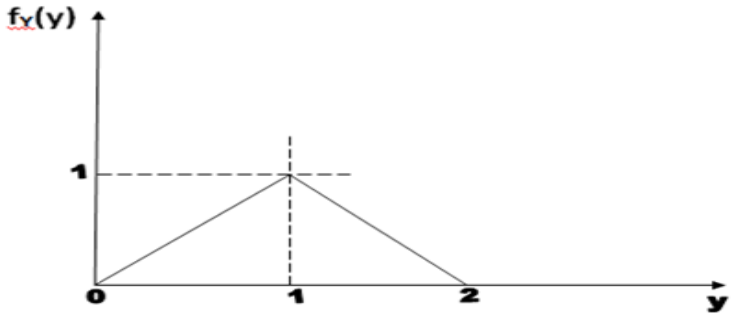
(الشكل1)

$$f_Y(y) = \int_{y-1}^{1} dx_1 = 2 - y$$

ونلخص النتائج السابقة بما يلي:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & , y \notin [0,2] \\ y & , y \in [0,1] \\ 2-y & , y \in [1,2] \end{cases}$$

يدعى هذا التوزيع بالتوزيع المثلثي وتمثيله البياني يبدو كما في (الشكل 2):



(الشكل2)

الحالة الثانية:

المتغير العشوائي ذو البعد 2 (X_1,X_2) غير متصل وتابع احتماله $P(x_1,x_2)$

والمطلوب إيجاد التوزيع الاحتمالي لـ: Y

$$Y = h(X_1,X_2) = X_1 + X_2,$$

يكون تابع توزيع Y:

$$F_Y(y) = (X_1 + X_2)\sum P(x_1,x_2),$$

وإذا كان المتغيرين العشوائيين الغير متصلين مستقلين فإن إيجاد تابع الاحتمال أسهل من إيجاد تابع توزيعه. وتابع الاحتمال Y للمتغير العشوائي المستنتج يعطى بالعلاقة P_Y:

$$P(Y = y) = P(x_1,x_2) = P(x_1)P(x_2), \qquad (2,19)$$

و $x_1 + x_2 = y$.

2.3.3.2 ـ توزيع طرح متغيرين عشوائيين:

الحالة الأولى:

ليكن X و Y متغيران عشوائيان متصلان على الفضاء الاحتمالي $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ وكثافة توزيعهما المشترك $f(x,y)$ ويطلب إيجاد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $Y = X_1 - X_2$ نجد:

$$F_Y(y) = \iint_{X_1 - X_2 < y} f(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{y} f(x_1, z + x_1)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{y} f(z + x_2, x_2)dz, \qquad (2,20)$$

وعندما يكون المتغيرين X_1, X_2 مستقلين فإن:

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1)dx_1 \int_{-\infty}^{y} f_2(z + x_1)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_2)dx_2 \int_{-\infty}^{y} f_1(z + x_2)dz,$$

وبالتالي:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, y + x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y + x_2, x_2)dz, \qquad (2,21)$$

وإذا كان X_1, X_2 مستقلين:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x_1) f_2(y + x_1)dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y + x_2) f_2(x_2)dx_2. \qquad (2,22)$$

الحالة الثانية:

المتغير العشوائي ذو البعد 2 (X_1,X_2) غير متصل وتابع احتماله $P(x_1,x_2)$ والمطلوب إيجاد التوزيع الاحتمالي لـ Y .

$$Y = h(X_1,X_2) = X_1 - X_2,$$

يكون تابع توزيع Y :

$$F_Y(y) = (X_1 - X_2)\sum P(x_1,x_2),$$

وإذا كان المتغيرين العشوائيين الغير متصلين مستقلين فإن إيجاد تابع الاحتمال للمتغير العشوائي المستنتج Y أسهل من إيجاد تابع توزيعه وتابع الاحتمال P_Y يعطى بالعلاقة:

$$P(Y = y) = P(x_1,x_2) = P(x_1)P(x_2), \qquad (2,23)$$

و $y = x_1 - x_2.$

مثال2.3.3.2: ليكن X_1 و X_2 متغيرين عشوائيين غير متصلين ومستقلين لهما توزيع احتمالي نفسه:

$$P(X_1 = K) = P(X_2 = K) = 2^{-K} \quad ,K = 1...n$$

المطلوب: إيجاد التوزيع الاحتمالي لـ $Y = h(X_1,X_2) = X_1 - X_2$

بما أن: $\Omega_{X_1} = \{1,2,...,n\}, \Omega_{X_2} = \{1,2,...,n\},$

فالمتحول العشوائي Y المستنتج يفترض مجموعة القيم:

$$\Omega_Y = \{2,3,...\},$$

بالاحتمالات:

$$P_Y = P(Y = j) = P(X_1 - X_2 = j) = \sum_{i=1}^{j-1} P(X_1 = i, X_2 = i - j)$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} P(X_1 = i)P(X_2 = i - j) = \sum_{i=1}^{j-1} 2^{-i}\, 2^{-(i-j)}$$

$$= \frac{(j-1)}{2^{2i-j}}, \qquad j = 2,3,.....$$

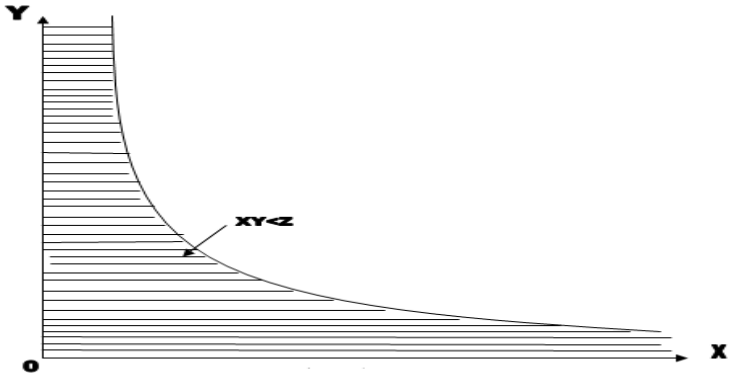
3.3.3.2 ـ توزيع جداء متغيرين عشوائيين:

ليكن YوX متغيرين عشوائيين مستمرين و موجبين، وكثافة توزيعهما المشترك $f(x,y)$.

إن تابع التوزيع الاحتمالي للمتغير $Z=XY$، حسب التعريف العام يعطى بالعلاقة:

$$F_z(z) = P(Z < z) = P(XY < Z), \qquad (2,24)$$

و هو عبارة عن احتمال وقوع الحادث: $\{(X,Y)|XY < Z\}$ ، و يمثل هذا الحادث بيانيا بالمنطقة المخططة على الشكل التالي:



(الشكل 3)

$$F_Z(z) = \iint_{x<y<z} f(x,y)dxdy = \int_0^{\infty} dy \int_0^{\frac{z}{y}} f(x,y)dx = \int_0^{\infty} dx \int_0^{\frac{z}{x}} f(x,y)dy \ldots..(*)$$

و باشتقاق طرفي $(*)$ بالنسبة ل z نجد أن تابع الكثافة المتحول العشوائي المستنتج Z:

$$f_Z(z) = \int_0^{\infty} \frac{1}{y} f(\frac{z}{y}, y)dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} f(x, \frac{z}{x})dx . \qquad (2,25)$$

مثال3.3.3.2:

ليكن X متغير عشوائي كثافته احتماله $f(x) = 3x^2$ ، $x \in [0,1]$

Y متغير عشوائي القانون المنتظم على المجال $[0,1]$ ، نفترض أن $X \amalg Y$:

حدد قانون $Z = XY$.

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = 3x^2$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 : y \in [0,1] \\ 0 : ailler \end{cases}$$

$$f_{Z,Y}(Z,Y) = f_{Z,Y}(\frac{z}{y}, y)\frac{1}{y} = \frac{3z^2}{y^2}\cdot\frac{1}{y} = \frac{3z^2}{y^3}, 0 \le z \le y < 1$$

$$f_Z(z) = \int_z^1 \frac{3z^2}{y^3}dy = 3z^2\left[-\frac{1}{2y^2}\right]_z^1$$

$$= 3z^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2z^2}\right) = \frac{3}{2}(1-z^2), z \in [0,1]$$

4.3.3.2 ـ توزيع حاصل القسمة:

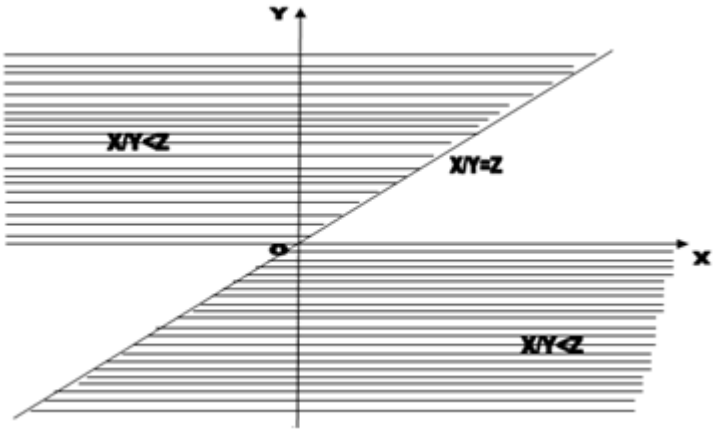
ليكن X و Y متغيرين عشوائيين معرفين على الفضاء الاحتمالي$(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$ وكثافة توزيعهما المشترك $f(x,y)$ ، ويطلب إيجاد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي $Z=\frac{X}{Y}$.

إن تابع توزيع المتغير العشوائي المستنتج $Z=\frac{X}{Y}$ ، حسب التعريف العام يعطى بالعلاقة:

$$F_Z(z)=\mathrm{P}(Z<z)=\mathrm{P}\left(\frac{X}{Y}<z\right), \qquad (2,26)$$

إذا اعتبرنا Z و Y احداثيي نقطة في المستوي:

فإن $F_Z(z)$ يساوي احتمال وقوع النقطة (X,Y) في المنطقة التي تحقق إحداثيات تقاطعها المتراجحة $\frac{X}{Y}<z$ ، وتبدو هذه المنطقة بالمساحة المخططة في الشكل التالي:



(الشكل4)

وبالتالي:

$$F_Z(z)=\iint_{\frac{x}{y}<z} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\infty}dy\int_{-\infty}^{yz}f(x,y)\,dx+\int_{-\infty}^{0}dy\int_{yz}^{}f(x,y)\,dx,$$

و باشتقاق طرفي $(*)$ بالنسبة ل z نجد أن تابع الكثافة المتحول العشوائي المستنتج Z:

$$f_Z(z)=\int_0^{\infty}yf(zy,y)\,dy=\int_0^{\infty}xf(x,zx)\,dx. \qquad (2,27)$$

مثال4.3.3.2:

ليكن X متغير عشوائي كثافته احتماله $f(x)=3x^2$ ، $x\in[0,1]$

Y متغير عشوائي القانون المنتظم على المجال $[0,1]$ ، نفترض أن $X \amalg Y$:

حدد قانون $Z=\frac{X}{Y}$.

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = 3x^2$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 : y \in [0,1] \\ 0 : ailler \end{cases}$$

$$f_{Z,Y}(Z,Y) = f_{Z,Y}(zy, y)\frac{1}{y} = 3z^2 y^2 \cdot y = 3z^2 y^3, 0 \le z \le y < 1$$

$$f_Z(z) = \int_z^1 3z^2 y^3 dy = \frac{3}{4} z^2 \left[y^4 \right]_z^1$$

$$= \frac{3}{4} z^2 \left(1 - z^4\right) = \frac{3}{4}(z^2 - z^6), z \in [0,1]$$

4.3.2 ـ تغيير المتغير:

تعريف1.4.3.2: نفرض أن (X,Y) ثنائية عشوائية حقيقية على $(\Omega,\mathcal{A},P)$ ونفرض أن التابع φ قابل للقياس:

$$(\Omega,\mathcal{A},P) \xrightarrow{(X,Y)} (\mathbb{R}^2, B_{\mathbb{R}^2}, P_{(X,Y)}) \xrightarrow{\varphi} (\mathbb{R}^2, B_{\mathbb{R}^2}, P_{(u,v)}),$$

حيث $\varphi(X,Y) \to (\varphi_1(X,Y), \varphi_2(X,Y)) = (u,v)$ مع φ متباين .

إذا علمنا قانون احتمال (X,Y) فما هو قانون احتمال (u,v)؟

1.4.3.2 ـ (X,Y) شعاع عشوائي متصل :

كثافته هي $f(x,y)$ ، باعتبار أن :

$$(U,V) = \varphi(x,y) = (\varphi_1(X,Y), \varphi_2(X,Y)),$$

أي أن:

$$(u,v) = \varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)),$$

وتكون φ متباين نجد:

$$x = \psi_1(u,v), y = \psi_2(u,v), (x,y) = (\psi_1, \psi_2),$$

$$P(u_1 < U < u_2, v_1 < V < v_2) = P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2),$$

و باعتبار g هي كثافة (U,V)و f هي كثافة (X,Y)، ينتج :

$$\int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2} g(u,v)\,du\,dv = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)\,dx\,dy,$$

بالتعويض:

$$\int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2} g(u,v)\,du\,dv = \int_{v_1}^{v_2}\int_{u_1}^{u_2} f(\psi_1(u,v), \psi_2(u,v))\,|J|\,du\,dv,$$

حيث :

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{dy}{\partial v} \end{vmatrix},$$

بالمقارنة نجد:

$$g(u,v) = (f(x,y) \bullet |J|)_{\substack{x = x(u,v) \\ y = y(u,v)}}. \qquad (2,28)$$

2.4.3.2ـ (X,Y) شعاع عشوائي غير متصل:

إذا كان $\varphi(X,Y)\to(u,v)$ متباينا فإن (u,v) تكون غير متصلة.

إذا كان $f(i,j)$ وقانون (X,Y) وكان $g(k,l)$ قانون (u,v) فإن:

$$g(k,l)=P(U=k,V=l)=P(X=\psi_1(k,l),Y=\psi_2(k,l))=f(i,j)_{\substack{i=\psi_1(k,l)\\ j=\psi_2(k,l)}}. \qquad (2,29)$$

مثال2.4.3.2:

ليكن X متغير عشوائي كثافته احتماله $f(x)=3x^2$ ، $x\in[0,1]$

Y متغير عشوائي القانون المنتظم على المجال $[0,1]$ ، نفترض أن $X \amalg Y$:

حدد قانون $Z=XY$.

لدينا:

$$(X,Y)\xrightarrow{\varphi}(u,v)$$
$$(X,Y)\longrightarrow(Z,Y)$$

$$f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=3x^2$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1: y\in[0,1]\\ 0: ailler\end{cases}$$

$$\begin{cases}Z=XY\\ Y=Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=xy\\ y=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{z}{y}\\ y=y\end{cases}$$

نقوم بحساب جاكوبي:

$$|J|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial z} & \dfrac{\partial x}{\partial z}\\ \dfrac{\partial y}{\partial z} & \dfrac{\partial y}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{y} & \dfrac{-z}{y^2}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\left|\frac{1}{y}\right|=\frac{1}{y}$$

$$f_{Z,Y}(Z,Y)=f_{Z,Y}(\frac{z}{y},y)\frac{1}{y}=\frac{3z^2}{y^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{3z^2}{y^3},0\le z\le y<1$$

$$f_Z(z)=\int_z^1\frac{3z^2}{y^3}dy=3z^2\left[-\frac{1}{2y^2}\right]_z^1$$
$$=3z^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2z^2}\right)=\frac{3}{2}(1-z^2),z\in[0,1]$$

5.3.2 ـ نظرية فوبيني:[9]

ليكن X و Y متغيرين عشوائيين معرفين على الفضاء الاحتمالي$(\Omega,\mathcal{A},P)$ و $f(x,y)$ كثافة توزيعهما المشترك بحيث fتابعا موجبا:

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}f(x,y)dxdy=\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}f(x,y)dy\right]dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}f(x,y)dx\right]dy.$$

6.3.2 ـ نظرية التوقع الرياضي:

ليكن X متغير عشوائي و f دالة بورال معرفة على $]-\infty,+\infty[$:

$$E(f(X)) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dP_X(x) \qquad (*)$$

إذا كان P_X احتمال له كثافة $g(x)$ فان:

$$E(f(X)) = \int f(x)g(x)\,d\lambda(x). \qquad (2,30)$$

لأجل $f > 0$، الدالة $f(X)$ قابلة للقياس وهي كافية لإثبات $(*)$ نرمز لـ: $f(x) = 1_{A(x)}$

نفرض مجموعات بورال $A \subset \mathbb{R}$ هذه الدوال فإن: $(*) = \int_A dP_X(A) = P_X(A),$

من ناحية أخرى:

$$f(X) = 1_A(X) = 1_{\{X \in A\}},$$

$$E(f(X)) = \int_\Omega 1_{\{X \in A\}} dP$$

$$= P(X \in A) = P_X(A) = \int_{\mathbb{R}} X_A P_X(x). \qquad \square$$

نتيجة1.6.3.2:

$$Z = g(X,Y),$$

$$E(g(Z)) = \int_{\mathbb{R}^2} g(z)f(x,y)\,dx\,dy.$$

مثال1.6.3.2:

تعيين قانون $Z = \frac{X}{Y}$:

$$Y \to N(0,1), X \to N(0,1)$$

$$f(x,y) = f_x(x)f_y(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

لتكن g دالة قابلة للقياس معطاة:

$$E(g(z)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{x}{y}\right) f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{x}{y}\right) e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dx\,dy, y > 0$$

$$z = \frac{x}{y} \Rightarrow x = zy \Rightarrow dx = y\,dz$$

$$E(g(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)e^{-\frac{1}{2}(z^2y^2+y^2)} \cdot y\,dz\right)dy$$

$$\underline{\underline{fubini}}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |y|\,e^{-\frac{1}{2}y^2(z^2+1)}dy\right)dz = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\left[-\frac{1}{z^2+1}e^{-\frac{1}{2}y^2(z^2+1)}\right]_0^{+\infty} dz$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(z)\frac{1}{z^2+1}dz$$

$$f(z) = \frac{1}{\pi(z^2+1)}, z \in \mathbb{R}$$

$$z \to C(1)$$

(كوشي).

4.2 ـ القاعدة العامة:

لتكن المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ معرفة على الفراغ الاحتمالي $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ولتكن:

$$h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

مجموعة توابع حقيقية قابلة للاشتقاق. ولنفترض المتغيرات العشوائية المستنتجة:

$$Y_i = h_i(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n) : i = \overline{1,n}$$

إذا رمزنا بـ $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ لتابعي التوزيع المشترك لكل من المتغير $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ والمتحول $(Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n)$ فإن:

$$\forall (Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n) \in \mathbb{R}^n :$$

$$\begin{aligned} F_Y(y_1, y_2, \ldots, y_n) &= P(Y_1 < y_1, Y_2 < y_2, \ldots, Y_n < y_n) \\ &= P\left[h_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) < y_1, \ldots, h_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) < y_n\right] \\ &= P\left[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \langle h^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n)\right]. \end{aligned}$$

حيث أن : $h = (h_1, h_2, \ldots\ldots, h_n)$ التطبيق : $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

و h^{-1} التطبيق العكسي:

إذا رمزنا بـ: $y_i = h_i(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n), i = \overline{1,n}$

و افترضنا أن لجملة المعادلات هذه حلا وحيدا، أي أن h^{-1} يعطى بالشكل:

$$x_j = g_j(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n), \; j = \overline{1,n}$$

$$h^{-1} = (g_1, g_2, \ldots\ldots, g_n)$$

فنجد:

$$F_y(y_1, y_2, \ldots, y_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n) = F_x(h^{-1}(y_1, y_2, \ldots, y_n)), \quad (2,31)$$

و يكون المعين (المحدد) اليعقوبي:

$$J(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)} = \frac{\partial(g_1, g_2, \ldots, g_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}, \forall (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R_Y$$

حيث R_Y هي منطقة التطبيق h^{-1}، وبالتالي مستقرة التطبيق h إذا كان المتغير العشوائي $(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ مستمرا وكثافة توزيعه $f(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ فإن التوزيع المشترك لمنظومة المتغيرات $(Y_1, Y_2, \ldots\ldots, Y_n)$ يكون مستمرا أيضا، وتابع كثافتهما المشترك:

$$f_Y(y_1, y_2, \ldots, y_n) = |J| f_X\left[g_1(y_1, y_2, \ldots, y_n), \ldots, g_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)\right]. \quad (2,32)$$

تمهيد: سنتطرق في هذا الفصل إلى عدد من التوزيعات ذات الاستخدام الواسع في الإحصاء الاستدلالي خاصة في مجالي التقدير و اختبار الفروض بحيث تستخدم هذه التوزيعات من أجل الوصول إلى نتيجة بشأن المجتمع المدروس، انطلاقا من بيانات يتحصل عليها من عينة.

1.3 ـ التوزيع غاما:

1.1.3 ـ التابع غاما:

تعريف1.1.1.3: نسمي التابع:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx\,, \qquad (3,1)$$

بالتابع غاما ذو الوسيط α.

نتائج1.1.1.3: [4]

- $\Gamma(r+1)=r\Gamma(r).$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi},\ \Gamma(1)=1.$
- $\Gamma(n+1)=n!,\quad n\in\mathbb{N}.$

2.1.3 ـ قانون غاما:

تعريف1.2.1.3: ليكن X متغير عشوائي موجب، نقول أن X يتبع توزيع Γ ذو الوسيطين (α,β) إذا كانت كثافة احتماله تعطى بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\beta(\alpha,\beta)} & 0<x<1\\ 0 & ailleurs\end{cases}, \qquad (\alpha,\beta>0) \qquad (3,2)$$

حيث $\Gamma(\alpha)$ هي التابع غاما.

خواص1.2.1.3:

- التوقع: $E(X)=r.$

البرهان:

$$E(X)=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\infty} x^{r}e^{-x}dx=\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)}=r\,. \qquad \square$$

- التباين: $V(X)=r.$

البرهان:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^{\infty} x^{r+1}e^{-x}dx-r^2$$

$$V(X)=\frac{\Gamma(r+2)}{\Gamma(r)}-r^2=(r+1)\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r)}-r^2$$

$$=r(r+1)-r^2=r^2+r-r^2=r\,. \qquad \square$$

2.3 ـ توزيع χ^2 :

1.2.3 ـ دالة توزيع χ^2 :

توزيع χ^2 هو من أكثر التوزيعات استخداما في مجال اختبار الفروض بأنواعها.

تعريف1.1.2.3:

لتكن $X_1, X_2, ..., X_v$ متغيرات عشوائية مستقلة كل منها تتبع التوزيع الطبيعي المعياري $(\mu = 0, \sigma = 1)$.

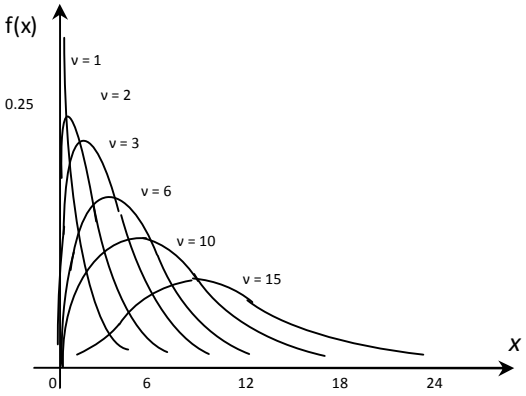
المتغيرة $X = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_v^2$ لها دالة الكثافة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{(v/2)-1} e^{-x/2}}{2^{v/2}\,\Gamma(v/2)} & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}, \qquad (3,3)$$

حيث: $\Gamma(\alpha)$ هي الدالة غاما.

ونقول أن X تتبع التوزيع χ^2 بـ v درجة حرية ونكتب $X \to \chi_v^2$.

2.2.3 ـ تدرج منحنى χ^2 حسب درجة الحرية:[5]



(الشـــكل1)

خواص1.2.2.3:

$$P(X^2 \leq x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} \displaystyle\int_0^x u^{(v/2)-1} e^{-u/2} du & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}, \qquad (3,4)$$

- $E(X) = v,$
- $V(X) = 2v,$
- $M(t) = (1-2t)^{-v/2}.$

البرهان:

لتكن

$$Y_v = \sum X_i^2,$$

$$E(Y_v) = E\left(\sum X_i^2\right) = \sum E\left(X_i^2\right) = v,$$

لأن:

$$E\left(X_i^2\right) = 1, \forall i \in \{1,2,...v\},$$

لدينا:

$$Var(Y_v) = Var\left(\sum X_i^2\right) = \sum Var X_i^2,$$

لأن X_i^2 مستقلة إذن:

$$Var(Y_v) = 2v.$$ □

مثال1.2.2.3: لتكن X متغير عشوائي حيث $X \to N(0,1)$، بين أن $X^2 \to \chi^2_{v=1}$.

نبحث عن دالة التوزيع لـ $X^2 = Y$ انطلاقا من دالة التوزيع لـ X التي هي دالة التوزيع الطبيعي:

$$P(X^2 \le y) = P(Y \le y) = P(-\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{x=0}^{x=\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2} dx,$$

لأن f متماثلة حول الصفر.

نضع:

$$t = x^2$$

و

$$x = \sqrt{y} \Rightarrow t = y$$

$$\Rightarrow dx = d(\sqrt{t}) = (1/2)t^{-1/2} dt,$$

$$P(X^2 \le y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-t/2} (1/2) t^{-1/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-t/2} t^{-1/2} dt, \qquad (*)$$

لأجل:

$$Y \to \chi^2(v),$$

$$P(X^2 \le y) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma(v/2)} \int_0^y e^{-t/2} t^{(v/2)-1} dt,$$

$$v = 1 \Rightarrow P(X^2 \le y) = \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma(v/2)} \int_0^y e^{-t/2} t^{-1/2} dt, \qquad (**)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \Rightarrow (**) = (*)$$

لتكن X و Y متغيرتين عشوائيتين مستقلتين تتبع كل منهما التوزيع الطبيعي المعياري نبين أن:

$$Z = Y^2 + X^2 \to \chi^2_{v=2}$$

نعلم أنه إذا كانت لمتغيرتين نفس الدالة المولدة للعزوم فإن توزيعهما واحد، يكفي إذن أن ثبت أن Z و $\chi^2_{v=2}$ لهما نفس دالة العزوم، بما أن X و Y مستقلتين فإن:

$$M_Z(t) = M_{X^2}(t).M_{Y^2}(t),$$

من جهة أخرى نعلم من المثال السابق أن: $X^2 \to \chi^2_{v=1}$ و $Y^2 \to \chi^2_{v=1}$

إذا الدالة المولدة للعزوم لكل من المتغيرين هي:

$$M(t) = (1-2t)^{-v/2} = (1-2t)^{-1/2}$$
$$M_Z(t) = \left[(1-2t)^{-1/2}\right]\left[(1-2t)^{-1/2}\right] = (1-2t)^{-1}$$
$$M_{\chi^2_{v=2}}(t) = (1-2t)^{-2/2} = (1-2t)^{-1} = M_Z(z)$$

وهو المطلوب.

نظرية1.2.2.3: [6]

لتكن X_i متغيرات عشوائية مستقلة عددها n حيث $X_1 \to \chi^2_{v1}$, . . ., $X_n \to \chi^2_{vn}$ مجموع هذه المتغيرات:

$$X_T = \sum_{i=1}^{n} X_i \to \chi^2_{v_T}, \qquad (3,5)$$
$$v_T = \sum v_i .$$

3.2.3 ـ منحنى توزيع χ^2 :

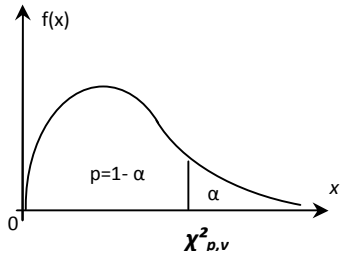
ملاحظة1.3.2.3: التوزيع χ^2 هو حالة خاصة من توزيع غاما، بوضع $\alpha = v/2, \beta = 2$.

- يأخذ منحى $f(x)$ شكله حسب قيمة الثابت v و نلاحظ من الرسم أن المنحنى يبتعد شيئاً فشيئاً عن المحور العمودي ويأخذ شكلاً جرسياً كلما زادت قيمة v .

ملاحظة 2.3.2.3: يؤول منحنى توزيع χ^2 إلى التوزيع الطبيعي $\mathrm{N}\left(v, \sqrt{2v}\right)$ عندما يكون n كبيراً.

- يعتبر التقريب جيدا عندما يكون $v \geq 30$ ونبرهن أنه عند v كبير $(v \geq 30)$ فإن $\left(\sqrt{2x^2} - \sqrt{2v-1}\right) \to \mathrm{N}(0,1)$ تتبع التوزيع الطبيعي المعياري.

ملاحظة 3.3.2.3: تعيين قيمة χ^2 من الجداول الإحصائية حسب قيم p و v (الجدول موجود في الملحق) .



(الشـكل2)

مثال1.3.2.3: ليكن مجتمع طبيعي حجمه 100 نسحب منه عينة حجمها $n=16$.

ما هو احتمال أن يكون تباين العينة S^2 أقل من أو يساوي 10 علما أن تباين المجتمع 80.

الحل:

$$X \to \mathrm{N}(\mu,\sigma) \Rightarrow \frac{S^2 n}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1} \Rightarrow \frac{S^2 n}{80} \to \chi^2_{16-1}$$

$$P\left(S^2 \le 10\right) = P\left(\frac{S^2 16}{80} \le \frac{10(16)}{80}\right) = P\left(\chi^2_{15} \le 2\right)$$

من الجداول الإحصائية نجد:

$$P\left(\chi^2_{15} \le 2\right) < 0.005$$

3.3 ـ توزيع ستيودنت[1]:

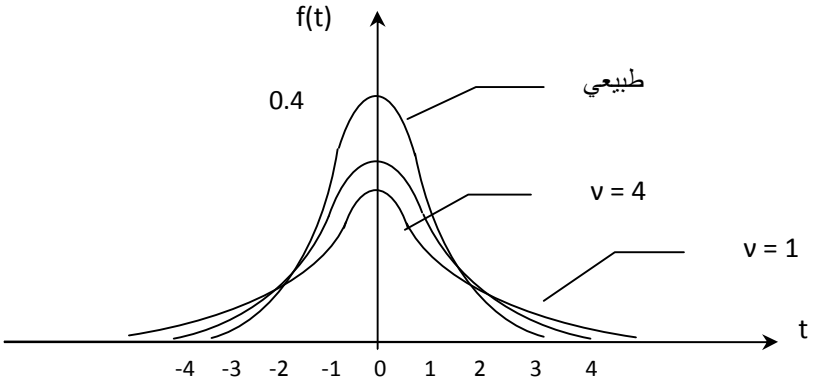
تعريف1.3.3: ليكن المتغيرين العشوائيين المستقلين Y , Z حيث $Y \to N(0,1)$ و $Z \to \chi^2_v$ المتغيرة $T = \frac{Y}{\sqrt{Z/v}}$ لها دالة الكثافة التالية:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{v\pi}\,\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{v}\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} \qquad -\infty < t < +\infty. \qquad (3,6)$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \quad , \ \alpha > 0$$

ونقول أن المتغير X تتبع توزيع ستيودنت بـ v درجة حرية ونكتب: $T \to t_v$

1.3.3 ـ تدرج منحنى ستيودنت حسب درجة الحرية: [5]



(الشـكل3)

[1] ستيودنت هو الاسم المستعار للعالم الإحصائي الانجليزي "غوسيت"، أول من وجد هذا القانون بطريقة تجريبية.

خواص1.1.3.3:[4]

$$E(T)=0,\ V(T)=\frac{v}{(v-2)}si\ (v>0).$$

ملاحظة1.1.3.3: منحنى t متماثل حول المتوسط 0 مما يعني أن لكل نقطة موجبة t نقطة مناظرة لها سالبة حيث المساحة تحت المنحنى على يمين t تساوي المساحة تحت المنحنى على يسار $-t$ ونكتب: $t_{1-p}=-t_p$.

ملاحظة2.1.3.3: منحنى $f(t)$ يقترب من المنحنى الطبيعي المعياري كلما زادت قيمة v وعموما يعتبر الإحصائيين أن المنحنيان يتطابقان تقريبا عند $v\geq 30$.

ملاحظة3.1.3.3: تعين قيمة t من الجداول الإحصائية حسب قيم p و v (الجدول موجود في الملحق).

2.3.3 ـ أهم استخدامات توزيع ستيودنت:

يستخدم توزيع ستيودنت لتحديد مجال الثقة للمتوسط إذا كان المجتمع طبيعياً والعينة صغيرة $(n<30)$ و σ مجهول.

يمكن إثبات ذلك كما يلي: $\frac{m-\mu}{\sigma_m}\to N(0,1)$ و $\frac{nS^2}{\sigma^2}\to\chi^2_{(n-1)}$

نعوض في تعريف المتغير $T=\frac{Y}{\sqrt{Z/v}}$ نجد:

$$\frac{\frac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{nS^2}{\sigma^2}/(n-1)}}\to t_{n-1}\Rightarrow\frac{m-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}S/\sigma}=\frac{\sqrt{n}(m-\mu)}{\sigma}\cdot\frac{\sigma\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}S}\to t_{n-1}\Rightarrow\frac{(m-\mu)}{S/\sqrt{n-1}}\to t_{n-1}. \qquad (3,7)$$

ومنه يمكن استخدام توزيع ستيودنت لتقدير μ بمجال فنكتب حدود مجال الثقة كما يلي:

$$\mu\in\left[m-t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}};m+t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]. \qquad (3,8)$$

مثال1.2.3.3: نريد تقدير متوسط مجتمع طبيعي بمستوى ثقة 0,95 انطلاقا من عينة حجمها 10 متوسطها 15 و انحرافها المعياري 27. لدينا $n=10<30$, σ مجهولة.

نستعمل: $\frac{(m-\mu)}{S/\sqrt{n-1}}\to t_{n-1}$

$$\mu\in\left[m-t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}};m+t_{1-\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right]$$

بقراءة الجدول الإحصائي: $\Rightarrow\mu\in\left[15-t_{0.975;10-1}\frac{27}{\sqrt{10-1}};15+t_{0.975;10-1}\frac{27}{\sqrt{10-1}}\right]$

$$\Rightarrow\mu\in[15-2.262(3);15+2.262(3)]\Rightarrow\mu\in[8.214;21.687]$$

4.3 ـ توزيع فيشر :

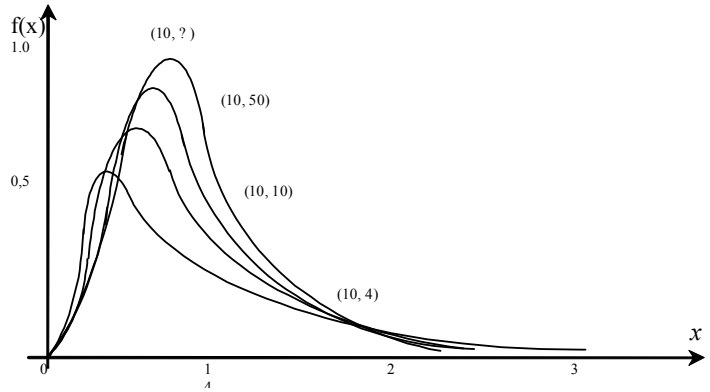
تعريف1.4.3: ليكن لدينا المتغيرين العشوائيين المستقلين : $X_1 \to \chi^2_{v_1}$ و $X_2 \to \chi^2_{v_2}$ المتغير $X = \frac{X_1/v_1}{X_1'/v_2}$

لها دالة الكثافة:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} v_1^{\frac{v_1}{2}} v_2^{\frac{v_2}{2}} x^{\left(\frac{v_1}{2}\right)-1} \left(v_2 + v_1 x\right)^{\frac{-v_1+v_2}{2}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases} \qquad (3,9)$$

ونقول أن المتغير X يتبع توزيع فيشر بـ v_1 و v_2 درجة حرية ونكتب: $X \to F_{v_1,v_2}$

1.4.3 ـ تدرج منحنى فيشر حسب درجة الحرية: [5]



(الشـكل4)

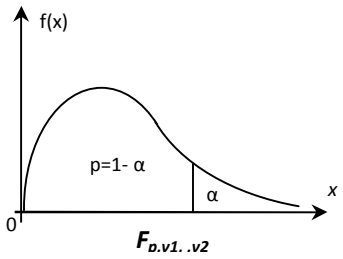
خواص1.1.4.3: [7]

$$\mu = \frac{v_2}{v_2 - 2}, \quad (v_2 > 0). \qquad (3,10)$$

$$\sigma^2 = \frac{2v_2^2(v_1 + v_2 - 2)}{v_1(v_2 - 4)(v_2 - 2)^2}, \quad (v_2 > 4). \qquad (3,11)$$

ويظهر من المعادلة تبعية منحنى $f(x)$ بالإضافة لـ x إلى كل من v_1 و v_2 ولذلك تحدد أي نقطة F من خلال ثلاثة معالم: p, v_1, v_2 (المساحة تحت المنحنى على يسار النقطة F) .

و نكتب: F_{p,v_1,v_2}، وفي الغالب تعطى الجداول الإحصائية قيم F عند $p = 0.95$ و $p = 0.99$.



(الشكل5)

نظرية1.1.4.3: [5]

$$F_{1-p,v_1,v_2} = 1/F_{p,v_2,v_1}.$$

نظرية2.1.4.3: [4]

$$F_{1-p,1,\mathrm{v}} = t^2_{1-(p/2),\mathrm{v}}.$$

نظرية3.1.4.3: [5]

$$F_{p,v,\infty} = \frac{\chi^2_{p,v}}{v}.$$

2.4.3 ـ أهم استخدامات توزيع فيشر:

يعتبر F توزيع المعاينة المشتق من نسبة تباينات لعينات مسحوبة من مجتمعين طبيعيين لهما نفس التباين، ويستخدم توزيع F في اختبار الفرضيات حول تساوي تباينين أي: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

أو (عند تحليل التباين) اختبار فرضيات حول تساوي متوسطين أو أكثر أي أن:

$$N_K = ... = H_0 : \mathrm{N}_1 = N_2 = N_3,$$

أو لتقدير فترة الثقة σ_1^2 / σ_2^2.

نظرية1.2.4.3: [10]

ليكن لدينا مجتمعان طبيعيان تباينهما σ_1^2، σ_2^2 نسحب من المجتمعين عينتين عشوائيتين حجمهما على التوالي n_1, n_2:

$$F = \frac{\left[\frac{S_1^2 n_1}{n_1 - 1}\right]\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left[\frac{S_2^2 n_2}{n_2 - 1}\right]\frac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{\hat{S}_1^2/\sigma_1^2}{\hat{S}_2^2/\sigma_2^2} \to F_{n_1-1;n_2-1}, \qquad (3,12)$$

حيث:

$$\hat{S}_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{n=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

مثال1.2.4.3: عينتين حجمهما 8 و 10 مسحوبتين طبيعيين تباينهما على التوالي 20 و 36.

ما احتمال أن يكون تباين الأول أكبر من ضعف تباين الثاني:

$$P(S_1^2 > 2S_2^2) = P(\frac{S_1^2}{\sigma_2^2} > 2) = P\left(\frac{S_1^2\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{S_2^2\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}} > 2\frac{\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}} \right)$$

$$= P\left(\frac{S_1^2\left(\frac{n_1}{n_1-1}\right)\frac{1}{\sigma_1^2}}{S_2^2\left(\frac{n_2}{n_2-1}\right)\frac{1}{\sigma_2^2}} > 2\frac{\left(\frac{8}{7}\right)\frac{1}{10}}{\left(\frac{10}{9}\right)\frac{1}{36}} \right)$$

$$= P(F_{7,9} > 3.7)$$

من الجدول الإحصائي نجد:

$0.05 > P(F_{7,9} > 3.7) > 0.01$ وفي الحقيقة $P(F_{7,9} > 3.7) = 0.036$

خاتمة

من خلال تطرقنا لدراسة المتغيرات العشوائية والتي خصصنا لها ثلاثة فصول في هذه المذكرة ، قمنا بتقديم العديد من التعاريف والتي تصب في صلب الموضوع، كما تطرقنا الى المتغير العشوائي أحادي البعد وخصائصه وابرز مميزاته، وعلى ضوء النتائج التي توصلنا إليها من خلال دراسة المتغير أحادي البعد انتقلنا إلى المتغير العشوائي ذو بعدين وقمنا بمحاولة استنتاج خصائصه ومميزاته، ثم تعميم هذه الخصائص والعمليات على المتغير العشوائي متعدد الأبعاد.

ومن أهم النتائج التي توصلنا إليها هي كيفية إيجاد دالة التوزيع وكذلك دالة الكثافة للمتغير العشوائي في حالة ما إذا كان المتغير أحادي البعد أو ثنائي البعد.

وقد تمكنا من دراسة بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة مثل توزيع غاما وك2 وتوزيع ستيودنت وتوزيع فيشر واستنتجنا في الأخير أن هذه التوزيعات تستخدم أساسا لاختبار الفروض، حيث أن توزيع فيشر يستعمل لاختبار النموذج ككل، أما اختبار ستيودنت فيستعمل لاختبار معالم النموذج.

ومن خلال هذه المذكرة تبينت العديد من المواضيع الجديرة بالبحث والدراسة والتي نذكر منها:

- تقنيات إجراء اختبار النماذج باستعمال توزيع فيشر ستيودنت.
- الانحدار الخطي البسيط.
- الانحدار الخطي المتعدد.

قـــــائمة المراجع

I. الكتب باللغة العربية:

[1] ـ جان بول ماندري، الاحتمالات، ديوان المطبوعات الجامعية، أنجز طبعه على مطابع ديوان المطبوعات الجامعية، 1981، الجزائر.

[2] ـ سيمور ليبشتز، ملخصات شوم نظريات ومسائل الاحتمالات، الدار الدولية للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، 1980، مصر.

[3] ـ عبد الحفيظ مصطفى، نظرية الاحتمالات مبادئ وتطبيقات ج2 ، ديوان المطبوعات الجامعية، الطبعة الثانية، 2004، الجزائر.

II. الكتب باللغة الفرنسية:

[4] ـ Gilbert Saborta, Probabilités Analyse Des Données Et Statistique Editions TECHNIP, 2edition révisée et augmentée, 2006, France.

III. البحوث والمواقع الالكترونية:

[5] ـ بو عبد الله صالح، محاضرات الإحصاء الرياضي، كلية العلوم الاقتصادية جامعة المسيلة، 2005-2006.

ـ http://alameel.net/download.php?IDN=30&bookdown=1

[6] ـ بو عبد الله صالح، مدخل إلى الاحتمالات والإحصاء الرياضي، بكلية العلوم الاقتصادية جامعة المسيلة.

–http://cours.univ-msila.dz/bouabdallah_salah/fichpdf/C6.pdf

[7] ـ بوساحة حورية، الاحتمالات والإحصاء،المعهد الوطني لتكوين مستخدمي التربية وتحسين مستواهم، 2008، الجزائر.

– http//www.infpe.edu.dz

[8] ـ حاكم قصد علي سهام، الاحتمالات والإحصاء، المدرسة العليا للأساتذة بالقبة،

.2008- 2007

***[9] _ Alexander Grioryan**, Measure theory and probability, University of Bielefeld, 2007-2008.*

- *http://www.math.uni-bielefeld.de/~grigor/mwlect.pdf*

***[10] _ Christel Geiss and Stefan Geiss** ,An introduction to probability theory University of Jyvaskyla ,June 3, 2009.*

- *http://users.jyu.fi/~geiss/scripts/introduction-probability.pdf*

الملحـــــــــــــــق

1- جدول التوزيع الطبيعي:

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \text{ où } X \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ et } x = x_1 + x_2$$

	x_2									
x_1	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.50	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.60	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.70	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.80	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.90	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

2- جدول توزيع χ^2 :

$t_{\nu,\alpha}$								
	α							
ν	0.6	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
1000	0.253	0.675	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.300

4- جدول توزيع فيشر :

$F_{\nu_1,\nu_2}(0.90)$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	66.12
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

$F_{\nu_1,\nu_2,0.95}$

	ν_1																		
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	395.4
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

$F_{\nu_1,\nu_2,0.975}$

	ν_1																		
ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.9	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1009	1014	1018
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.67	4.57	4.47	4.41	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	2.96	2.86	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22	2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

$F_{\nu_1,\nu_2,0.99}$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.59
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.12
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

ملخص

تناولنا في هذه المذكرة موضوع مهم وهو دوال المتغيرات العشوائية حيث ركّزنا على المتغير العشوائي ثنائي البعد، ثم عممنا النتائج المتوصل إليها إلى شعاع متغيرات عشوائية، وارتأينا في الأخير التطرق إلى بعض التوزيعات الاحتمالية الشهيرة للمتغيرات العشوائية والمعرفة كدوال لمتغيرات عشوائية، لما لها من أهمية في اختبار الفروض ودراسة النماذج وكذلك في طرق التنبؤ.

الكلمات المفتاحية: المتغير العشوائي، دوال المتغيرات العشوائية، قانون ك2، قانون ستيودنت، قانون فيشر.

Résumé

Nous avons abordé dans ce mémoire un sujet important, qui les fonctions de variables aléatoires, nous avons augmenté la recherche l'extenstion de ces variables et porté en particulier sur la variable aléatoire à deux dimensions et nous avons décidé à la fin, il est très important de répondre aux quelques distributions de probabilité célèbre de variables aléatoires définie comme des fonctions des variables aléatoires en raison de leur importance dans la test des hypothèses et des modèles d'étude ainsi que dans les méthodes de prévision.

Mots_clés: variable aléatoire, fonctions de variables aléatoires, loi Khi_2, loi de Student, loi de Fisher.

Abstract

We discussed in this mémoiry an important topic, which functions of random variables, we have expanded the search to the multiplicity of these variables and focused in particular on the two-dimensional random variable, and we decided in the end it is very important to respond to some probability distributions of random variables famous because of their importance in the testing of hypotheses and models study as well as in forecasting methods.

Keywords: random variable, functions of random variables, Distributions of Khi_2, Student Distributions, Fisher Distributions.