

N° d'ordre :

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL-OUED
FACULTÉ DE SCIENCES EXACTES**



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Master
en mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Par

Megdoud abd elbasset, Ben bordi talha el khair

THÈME

**METHODES NUMERIQUES POUR RESOUDRE
DES EQUATIONS NON LINEAIRES**

Soutenu publiquement, le 08 Juin 2017 devant le jury composé de :

Mr.	Mesai Aoun Mohammed Salah	Président	Univ-Eloued
Mr.	DEHDA BACHIR	Rapporteur	Univ-Eloued
Mme	Doudi Nadjjet	Examineur	Univ-Eloued

Remerciements

Nous remercions Dieu le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.

*Ce travail a été réalisé sous l'encadrement du professeur **Dehda Bachir**, à l'université **EChahid Hamma lakhdar** à El-Oued. Nous voudrions lui exprimer notre profonde gratitude pour la disponibilité, l'aide et les conseils pour réaliser ce travail.*

Nous remercions vivement nos parents pour l'aide et le soutien moral qu'ils nous ont prodigués.

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude d'effet pratique des méthodes numériques pour résoudre des équations non linéaires. On commence par un rappel sur les fonctions réelles, où on cite quelques théorèmes et notions principales comme le théorème des accroissements finis, les formules de Taylor et développements limités et les fonctions convexes. Ensuite, on introduit par une étude théorique et algorithmique des variétés méthodes itératives telles que, la méthode de dichotomie, la méthode du point fixe, la méthode de la sécante, la méthode de la corde, la méthode de Lagrange et la méthode du Newton. Finalement, on applique les méthodes précédentes pour trouver les racines des polynômes réels à racines réelles et calculer l'inverse d'un nombre réel non nul et résoudre d'une équation d'état d'un gaz.

Mots -clés: Méthodes itératives, approximation des racines, équations non linéaires, fonctions convexes.

Abstract

This work is devoted to the study of the practical effect of numerical methods for solving nonlinear equations. We begin with a reminder of the real functions, where we recall some principal theorems and notions as the theorem of finite increases, Taylor formulas and limited developments and convex functions. Next, we introduce by a theoretical and algorithmic study, various iterative methods such as, dichotomy method, fixed point method, secant method, cord method, Lagrange method and Newton method. Finally, we apply the previous methods to find the roots of real polynomials with real roots and calculate the inverse of the non-zero real number and solve a gas state equation.

Keywords: Iterative methods, root approximation, nonlinear equations, convex functions.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Rappel sur les fonctions réelles	2
1.1 Définition et quelques exemples	
1.2 Limite d'une fonction	3
1.2.1 Limite finie et infinie en x_0	3
1.2.2 Limite finie et infinie en $+\infty$	3
1.2.3 Limite à gauche et limite à droite	4
1.3 Continuité d'une fonction	6
1.3.1 Cas d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$	6
1.3.2 Cas d'un intervalle fermé $[a, b]$	7
1.3.3 Résultats généraux sur la continuité	8
1.3.4 Théorème des valeurs intermédiaires	8
1.4 Dérivation d'une fonction	9
1.4.1 Définitions et propriétés	9
1.4.2 Propriétés générales	10
1.4.3 Dérivées successives	10
1.4.4 Conséquences de la dérivation	11
1.5 Formules de Taylor et développements limités	11
1.5.1 Diverses formules de Taylor	12
1.6 Les fonctions convexes	14

2	Méthodes itératives d'approximation des racines	16
2.1	Méthode de dichotomie	17
2.1.1	Principe de la méthode	17
2.1.2	Convergence de la méthode	18
2.1.3	Majoration d'erreur	18
2.1.4	Programme sous Matlab associé à cette méthode	19
2.2	Méthode du point fixe	20
2.2.1	Principe de la méthode	20
2.2.2	Convergence de la méthode	21
2.2.3	Majoration d'erreur	22
2.2.4	Programme sous Matlab associé à cette méthode	23
2.3	Méthode de la sécante	24
2.3.1	Principe de la méthode	24
2.3.2	Convergence de la méthode	25
2.3.3	Majoration d'erreur	26
2.3.4	Programme sous Matlab associé à cette méthode	26
2.4	Méthode de la corde	28
2.4.1	Principe de la méthode	28
2.4.2	Convergence de la méthode	29
2.4.3	Majoration d'erreur	30
2.4.4	Programme sous Matlab associé à cette méthode	30
2.5	Méthode de Lagrange	31
2.5.1	Principe de méthode	31
2.5.2	Convergence de la méthode de Lagrange	32
2.5.3	Programme sous Matlab associé à cette méthode	33
2.6	Méthode de Newton	34
2.6.1	Principe de méthode	34
2.6.2	Convergence de la méthode	35
2.6.3	Programme sous Matlab associé à cette méthode	38
2.7	Vitesse de convergence	40

2.7.1	Vitesse de convergence de la méthode du point fixe	41
2.7.2	Vitesse de convergence de la méthode de Newton	41
2.7.3	Vitesse de convergence de la méthode de la corde	42
2.7.4	Vitesse de convergence de méthode de Lagrange	42
2.8	Comparaison entre les méthodes précédentes	42
3	Applications	44
3.1	Méthode de Newton pour les polynômes réels à racines réelles	44
3.2	Calcul d'inverse d'un nombre réel non nul	45
3.3	Équation d'état d'un gaz	46

Introduction générale

L'analyse numérique est une discipline des mathématiques. Elle s'intéresse tant aux fondements théoriques qu'à la mise en pratique des méthodes permettant de résoudre, par des calculs purement numériques, des problèmes d'analyse mathématique. Cela signifie qu'elle s'occupe principalement de répondre numériquement à des questions à variable réelle ou complexe comme l'algèbre linéaire numérique sur les champs réels ou complexes, la recherche de solution numérique d'équations différentielles et d'autres problèmes liés survenant dans les sciences physiques et l'ingénierie.

Certains problèmes de mathématiques peuvent être résolus numériquement (c-à-d., sur ordinateur) de façon exacte par un algorithme en un nombre fini d'opérations. Ces algorithmes sont parfois appelés méthodes directes ou qualifiés de finis. Des exemples sont l'élimination de Gauss-Jordan pour la résolution d'un système d'équations linéaires.

Cependant, aucune méthode directe n'est connue pour résoudre d'équation $f(x) = 0$, si f est non linéaire. Ce problème concernait déjà les mathématiciens de l'antiquité puisque les babyloniens et les grecs s'intéressaient déjà aux racines des polynômes de degré 2. Plus tard, c'est en s'intéressant aux racines des polynômes de degré 2 et 3 que les mathématiciens italiens du seizième siècle, Cardan et Bombelli découvrirent les nombres complexes. On sait aujourd'hui qu'il n'existe pas de formule générale exacte pour calculer les racines des polynômes de degré supérieur ou égal à cinq. Cette situation fait appel à introduire une méthode itérative pour tenter de déterminer une approximation de la solution. Une telle méthode démarre depuis une valeur devinée ou estimée grossièrement et trouve des approximations successives qui devraient converger vers la solution sous certaines conditions. Même quand une méthode directe existe, une méthode itérative peut être préférable car elle est souvent plus efficace et même souvent plus stable (notamment elle permet le plus souvent de corriger des erreurs mineures dans les calculs intermédiaires).

Notre mémoire est composé d'une introduction et de trois chapitres:

Dans le premier chapitre nous sommes intéressés à donner quelques notions préliminaires des fonctions réelles et quelques propriétés.

Le second chapitre présente une étude détaillée et approfondie sur quelques méthodes itératives pour résoudre des équations non linéaires et leurs algorithmes.

Le troisième chapitre contient l'application de méthode du Newton pour trouver les racines des polynômes réels à racines réelles et la méthode du point fixe pour trouver l'inverse d'un nombre réel non nul.

Finalement, nous complétons ce mémoire par une conclusion générale et des références principales.

Chapitre 1

Rappel sur les fonctions réelles

Ce chapitre est consacré essentiellement à l'introduction de quelques notions fondamentales des fonctions réelles et certains des propriétés que nous utiliserons dans le chapitre 2 [23].

1.1 Définition et quelques exemples

Définition 1.1.1 *On appelle fonction réelle, toute application définie de I vers $\mathbb{R}$. où (I est une partie de $\mathbb{R}$)*

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Exemple 1.1.1 *La fonction indicatrice sur un ensemble A est définie par*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Exemple 1.1.2 *La fonction sinus est définie par*

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\rightarrow [-1, 1] \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

Remarque 1.1.1 *Toute fonction définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, est appelée suite numérique.*

1.2 Limite d'une fonction

1.2.1 Limite finie et infinie en x_0

Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$ et $I =]a, b[$ un intervalle ouvert contenant x_0 . On se donne une fonction f définie en tout point de I , sauf peut-être en x_0 . On dit que $f(x)$ tend vers une limite finie l pour $x \rightarrow x_0$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

On écrira

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \tag{1.2}$$

De même, on dira que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \tag{1.3}$$

si et seulement si pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \eta \implies f(x) > A$$

D'une manière similaire,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \tag{1.4}$$

si et seulement si pour tout $A > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x_0| < \eta \implies f(x) < -A$$

1.2.2 Limite finie et infinie en $+\infty$

Lorsque la fonction f est définie sur un intervalle $]a, +\infty[$, on dit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \tag{1.5}$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B > 0$ tel que

$$x \geq B \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

D'une manière similaire, on définit les autres cas de limites.

Exemple 1.2.1 Soit f définie sur $]1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

On cherche la limite de $f(x)$ en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

Montrons-le. Fixons $\varepsilon > 0$. L'inégalité

$$\left| \frac{2x+3}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon$$

est équivalente à

$$\left| \frac{5}{x-1} \right| < \varepsilon,$$

ou encore à

$$\left| \frac{x-1}{5} \right| > \frac{1}{\varepsilon},$$

qui est vérifiée dès que

$$x > A = \frac{5}{\varepsilon} + 1.$$

1.2.3 Limite à gauche et limite à droite

On dira que f admet l pour limite à gauche en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$x_0 - \eta < x < x_0 \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

On notera

$$\lim_{\substack{< \\ x \rightarrow x_0}} f(x) = l \quad (1.6)$$

On définit de même la limite à droite de x_0 comme suit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$x_0 < x < x_0 + \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

On notera

$$\lim_{\substack{> \\ x \rightarrow x_0}} f(x) = l. \quad (1.7)$$

f admet l pour limite en x_0 si et seulement si f admet l pour limite à gauche et à droite de x_0 .

Par exemple, pour la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

D'où

$$\lim_{\substack{< \\ x \rightarrow 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \rightarrow 1}} (1 - x^2) = 0$$

et

$$\lim_{\substack{> \\ x \rightarrow 1}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \rightarrow 1}} x = 1$$

Par conséquent, f n'admet pas une limite en 1.

Le théorème suivant peut caractériser la limite d'une fonction par la limite d'une suite numérique.

Théorème 1.2.1 Une fonction f admet une limite l pour $x \rightarrow x_0$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ convergente vers x_0 , la suite $(f(x_n))_{n \geq 0}$ converge vers l .

1.3 Continuité d'une fonction

1.3.1 Cas d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$

Définition 1.3.1 Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$ un point donné. La fonction f est dite continue au point x_0 si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1.8)$$

Cela traduit le fait que lorsque la variable x est proche de x_0 , la valeur $f(x)$ est proche de $f(x_0)$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

En posant $x = x_0 + h$, on a la définition équivalente

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \quad (1.9)$$

On définit aussi la continuité à gauche en x_0 (resp. à droite en x_0). Par exemple, f est continue à gauche en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$x_0 - \eta < x < x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

On notera

$$\lim_{\substack{< \\ x \rightarrow x_0}} f(x) = f(x_0) \quad (1.10)$$

f est continue à droite en x_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$x_0 < x < x_0 + \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

On notera

$$\lim_{\substack{> \\ x \rightarrow x_0}} f(x) = f(x_0) \quad (1.11)$$

f est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0 .

Définition 1.3.2 *La fonction f est continue sur l'intervalle I lorsqu'elle est continue en tout point de I .*

1.3.2 Cas d'un intervalle fermé $[a, b]$

Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé $[a, b]$ (avec $a < b$). On peut définir comme ci-dessus la continuité en x_0 , pour $x_0 \in]a, b[$, ainsi que la continuité à droite en a , et la continuité à gauche en b .

Définition 1.3.3 *La fonction f est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si*

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur l'intervalle ouvert }]a, b[\\ f \text{ est continue à droite en } a \\ f \text{ est continue à gauche en } b \end{array} \right.$$

Exemple 1.3.1 *Considérons la fonction suivante*

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x\frac{\pi}{2}) & \text{si } x \in]-\infty, 2[\\ 2x - 4 & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

On calcule les limites à gauche et à droite, au point 2 de $f(x)$

$$\lim_{\substack{< \\ x \rightarrow 2}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x \rightarrow 2}} \sin(x\frac{\pi}{2}) = 0$$

et

$$\lim_{\substack{> \\ x \rightarrow 2}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x \rightarrow 2}} (2x - 4) = 0 = f(2)$$

Les deux limites sont égaux à $f(2)$, la fonction est continue en 2.

1.3.3 Résultats généraux sur la continuité

1. On donne deux fonctions $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues en x_0 et un réel quelconque λ .

Alors on a les résultats suivants:

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet f + g \text{ et } f - g \text{ sont continues en } x_0 \\ \bullet \lambda f \text{ et } f \times g \text{ sont continues en } x_0 \\ \bullet \frac{f}{g} \text{ est continue en } x_0, (\text{si } g(x_0) \text{ est non nulle}) \end{array} \right.$$

2. Lorsque on a

$$f : I \rightarrow J, \quad g : J \rightarrow \mathbb{R}$$

où J est un autre intervalle de $\mathbb{R}$ et si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$ alors la composée $g \circ f$ définie sur I par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

est continue en x_0 .

3. Les fonctions usuelles: polynomiales, trigonométriques, logarithme, exponentielle, ... sont continues sur leur domaine de définition.

1.3.4 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème important en analyse et concerne des fonctions continues sur un intervalle. Ce théorème donne dans certains cas l'existence de solutions d'équations non linéaires.

Théorème 1.3.1 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Si $f(a)f(b) < 0$, alors il existe au moins un réel c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

1.4 Dérivation d'une fonction

1.4.1 Définitions et propriétés

Définition 1.4.1 Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I est un intervalle ouvert) est dérivable en un point $x_0 \in I$ si le taux

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.12)$$

défini sur $I \setminus \{x_0\}$, admet une limite finie lorsque $x \rightarrow x_0$. Ainsi, cette limite est dite la dérivée de f au x_0 et notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

De même ici, on peut définir une dérivée à gauche et une dérivée à droite au point x_0 : par exemple la dérivée à gauche est, quand elle existe,

$$f'_g(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.13)$$

et la dérivée à droite est, quand elle existe,

$$f'_d(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1.14)$$

Si f est dérivable en x_0 alors

$$f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0) \quad (1.15)$$

Définition 1.4.2 Une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$), est dite dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur l'intervalle ouvert }]a, b[\\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f \text{ est dérivable à gauche en } b \end{array} \right.$$

Exemple 1.4.1 La fonction $x \rightarrow f(x) = x^2$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$

en effet

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 = f'(x_0).$$

1.4.2 Propriétés générales

- Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet (f + g)' = f' + g' \\ \bullet (\lambda f)' = \lambda f' \\ \bullet (fg)' = f'g + fg' \\ \bullet \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, (si \ g \neq 0) \\ \bullet (f^n)' = n f' f^{n-1} \\ \bullet (\ln f)' = \frac{f'}{f} \text{ (dérivée logarithmique de } \ln f, \text{ si } f > 0) \end{array} \right.$$

- Lorsqu'on a

$$f : I \rightarrow J, \quad g : J \rightarrow \mathbb{R}$$

où J est un autre intervalle de $\mathbb{R}$, alors, si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J , on a

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

- Si f est dérivable et est une bijection de I dans J , alors f^{-1} est dérivable en tout point où $f'(x_0) \neq 0$, et on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

avec $y_0 = f(x_0)$.

1.4.3 Dérivées successives

Définition 1.4.3 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . Si la fonction f' est dérivable, on dira que f est deux fois dérivable et on note

$$f''(x) = (f')'(x) \tag{1.16}$$

En réitérant, on définit de même la dérivée à l'ordre n de f notée $f^{(n)}$ par

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x) \quad (1.17)$$

On peut montrer par récurrence la formule dite de Leibnitz:

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \quad (1.18)$$

$$\text{où } C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

1.4.4 Conséquences de la dérivation

Les premiers résultats de la dérivation sont:

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } f \text{ est définie sur } I =]a, b[\text{ et dérivable en } x_0 \in I \text{ et admet} \\ \text{un extremum en } x_0 \text{ alors } f'(x_0) = 0. \end{array} \right.$$

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } f \text{ est continue sur } [a, b] \text{ avec } f(a) = f(b) \text{ et est dérivable} \\ \text{sur }]a, b[\text{ alors il existe un point } c \text{ de }]a, b[\text{ tel que } f'(c) = 0. \end{array} \right.$$

Ce dernier résultat est connu sous le nom du théorème de Rolle et exprime le fait qu'il y a au moins un point où la courbe représentative de f admet une tangente horizontale (c'est-à-dire parallèle à l'axe des abscisses).

L'autre résultat est donné par

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Si } f \text{ est continue sur } [a, b] \text{ et est dérivable sur }]a, b[\text{ alors} \\ \text{il existe un point } c \text{ de }]a, b[\text{ tel que } f(b) - f(a) = (b - a) f'(c). \end{array} \right.$$

C'est le théorème des accroissements finis (T.A.F). Il exprime le fait qu'il existe au moins une tangente à la courbe de f parallèle à la sécante joignant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

1.5 Formules de Taylor et développements limités

Nous avons vu précédemment que la dérivation est essentielle dans l'étude des fonctions. On va voir que les développements limités fournissent encore plus de précision dans l'allure

et le comportement d'une fonction au voisinage d'un point donné. Une autre application importante de cette notion est le calcul approché de la valeur d'une fonction en un point, en particulier pour celles qui ne sont pas de type polynomial.

1.5.1 Diverses formules de Taylor

Dans toute cette section, on se donne une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(n + 1)$ fois dérivable.

Formule de Taylor-Lagrange

$$\left\| \begin{array}{l} \text{On considère } f \text{ sur un intervalle fini } [a, b] \text{ et } n \in \mathbb{N}. \\ \text{Alors il existe un point } c \in]a, b[\text{ tel que :} \\ f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \frac{1}{2!}(b-a)^2 f''(a) + \dots + \frac{1}{n!}(b-a)^n f^{(n)}(a) \\ + \frac{1}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c). \end{array} \right.$$

C'est la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour f .

Pour $n = 0$, la formule précédente est celle du théorème des accroissements finis.

Lorsqu'on sait que la dérivée d'ordre $(n + 1)$ de f est majorée par une constante M , la formule précédente fournit une approximation polynomiale de $f(a + h)$ pour h petit, en fonction des dérivées successives de f en a . En effet, en posant $b - a = h$, on a

$$\begin{aligned} & \left| f(a + h) - \left(f(a) + hf'(a) + \frac{1}{2!}h^2 f''(a) + \dots + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(a) \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{(n+1)!} h^{n+1} f^{(n+1)}(c) \right| \\ &\leq \frac{M |h|^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Formule de Mac-Laurin

On se place dans le cas où l'intervalle $[a, b]$ est de la forme $[0, x]$, x étant une variable positive réelle quelconque. Alors la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n devient :

$$\left\| \begin{array}{l} f(x) - f(0) = xf'(0) + \frac{1}{2!}x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^n f^{(n)}(0) \\ + \frac{1}{(n+1)!}x^{n+1} f^{(n+1)}(c), \end{array} \right.$$

où $c \in]0, x[$.

Formule de Taylor-Young

Considérons maintenant le cas où f est une application d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, et soit a et x deux points de I . Alors on montre qu'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que

$$\left\| f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \right.$$

avec

$$\varepsilon(x) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad x \rightarrow a.$$

Le terme $(x-a)^n \varepsilon(x)$ est appelé reste d'ordre n pour $x \rightarrow a$.

Noter qu'à l'opposé des autres formules données précédemment, cette dernière précise le comportement du reste d'ordre n pour x tendant vers a .

Dans le cas particulier où $a = 0$, on obtient

$$\left\| \begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + x^n \varepsilon(x) \\ &= f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x) \end{aligned} \right.$$

On peut noter, en utilisant les notations de Landau

$$x^n \varepsilon(x) = o(x^n) \quad (x \rightarrow 0)$$

et

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0) + o(x^n) \quad (1.19)$$

On dira que

$$f(0) + x f'(0) + \frac{1}{2!} x^2 f''(0) + \dots + \frac{1}{n!} x^n f^{(n)}(0),$$

est le développement limité (en abrégé D.L.) d'ordre n de f au voisinage de 0.

Les D.L. sont très utiles pour l'étude locale des fonctions puisqu'ils permettent:

- une expression plus simple de f , (au voisinage du point),
- une recherche facile de limites,
- un tracé plus précis de la courbe (recherche d'asymptotes, position de la courbe par rapport à celles – ci, ...).

Exemple 1.5.1 On va donner le D.L. à l'ordre 2 et au voisinage de 0 de la fonction définie par

$$\sqrt{1+x} \sin(x)$$

Le D.L. de $\sqrt{1+x} \sin(x)$ à l'ordre 2 est donc

$$x + \frac{1}{2}x^2,$$

on écrira aussi que

$$\sqrt{1+x} \sin(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \cdot \varepsilon(x).$$

avec

$$\varepsilon(x) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad x \rightarrow 0.$$

1.6 Les fonctions convexes

Dans cette section, on introduit la notion de la convexité et sa relation avec la dérivabilité.

Définition 1.6.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe sur I si

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in I; \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (1.20)$$

Si l'inégalité est stricte, f est dite strictement convexe.

Proposition 1.6.1 Si $I = [a, b], \alpha \in]a, b[$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, alors la fonction

$$\Phi_\alpha : x \rightarrow \Phi_\alpha(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \quad (1.21)$$

est croissante sur $I - \{\alpha\}$.

Proposition 1.6.2 *Si $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, alors*

$$f^{(2)} \geq 0 \Rightarrow f \text{ convexe}$$

$$f^{(2)} > 0 \Rightarrow f \text{ strictement convexe}$$

Chapitre 2

Méthodes itératives d'approximation des racines

Les méthodes itératives d'approximation des racines sont des méthodes numériques de recherche d'un zéro d'une fonction connue. Elles permettent de trouver une valeur approchée à la solution des équations linéaires ou non linéaires à l'aide des itérations successives. En effet, après d'assurer l'existence d'une solution à l'équation de forme

$$f(x) = 0 \tag{2.1}$$

on cherche à calculer cette solution. Dans ce chapitre, nous allons introduire des méthodes et des algorithmes pour résoudre telle équation, citons: méthode de dichotomie, méthode du point fixe, méthode de la sécante, méthode de la corde, méthode de Lagrange et méthode de Newton. Hormis la méthode de dichotomie qui utilise le théorème des valeurs intermédiaires, et la méthode du point fixe, toutes ces méthodes reposent sur l'itération d'une suite de la forme:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{\lambda_n} \tag{2.2}$$

où la limite de $(a_n)_n$ est la solution exacte de l'équation $f(x) = 0$.

2.1 Méthode de dichotomie

La méthode de dichotomie ou méthode de la bisection [1] repose sur le théorème des valeurs intermédiaires, où elle consiste à répéter des partages d'un intervalle en deux parties puis à choisir le sous-intervalle dans lequel existe un zéro de la fonction.

2.1.1 Principe de la méthode

Supposons d'abord que le problème se formule de la forme $f(x) = 0$ telle que, f est une fonction réelle continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $f(a)f(b) < 0$. On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$.

- Si $f(a_0)f(\frac{a_0+b_0}{2}) \leq 0$, alors il existe $c \in [a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ tel que $f(c) = 0$. Dans ce cas, on pose $a_1 = a_0$, $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$.

- Si $f(a_0)f(\frac{a_0+b_0}{2}) > 0$, cela implique que $f(\frac{a_0+b_0}{2})f(b_0) < 0$, et alors il existe $c \in [\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$ tel que $f(c) = 0$. Dans ce cas, on pose $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$, $b_1 = b_0$.

On répète alors le procédé pour diviser de nouveau l'intervalle en deux, on obtient un algorithme récursif. Après n étapes, on a un intervalle $[a_n, b_n]$ de longueur $\frac{b-a}{2^n}$ contient une solution de l'équation $f(x) = 0$.

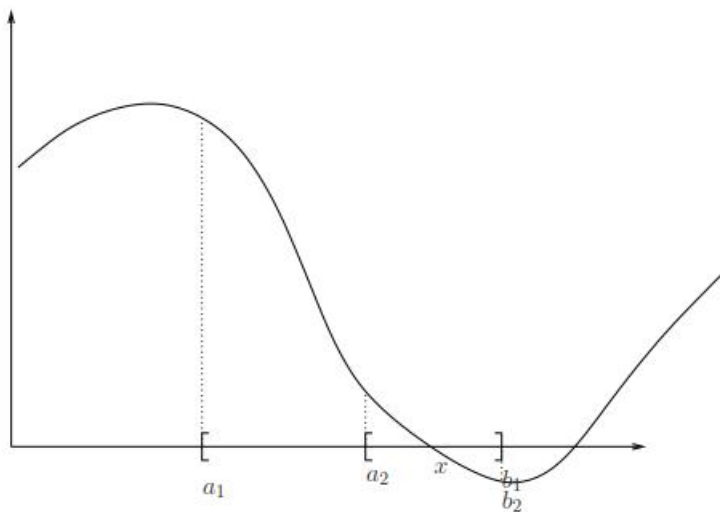


Figure 2.1. Méthode de dichotomie pour s'approcher de la racine

2.1.2 Convergence de la méthode

Comme $(a_n)_n$ est par construction une suite croissante, $(b_n)_n$ une suite décroissante, et $(b_n - a_n) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes et donc elles admettent une même limite ℓ . Par la continuité de f , on trouve que $f(\ell) = 0$.

2.1.3 Majoration d'erreur

Il est facile d'avoir une majoration de l'erreur pour cette méthode. En effet, à chaque étape i , la taille de l'intervalle contenant ℓ est $\frac{b-a}{2^i}$. Donc,

$$|a_i - \ell| \leq b_i - a_i = \frac{b-a}{2^i} \quad (2.3)$$

Si, par exemple, on souhaite obtenir une approximation de ℓ à 10^{-N} près, il suffit de choisir i tel que

$$|a_i - \ell| \leq \frac{b-a}{2^i} < 10^{-N} \quad (2.4)$$

Nous allons utiliser le logarithme décimal :

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{2^i} < 10^{-N} &\Leftrightarrow \frac{b-a}{10^{-N}} < 2^i \\ &\Leftrightarrow i > \frac{\ln(b-a) + N \ln(10)}{\ln(2)} \\ &\Leftrightarrow i > \frac{\log_{10}(b-a) + N}{\log_{10}(2)} \end{aligned}$$

On peut donc prendre

$$i = \left\lceil \frac{\log_{10}(b-a) + N}{\log_{10}(2)} \right\rceil + 1 \quad (2.5)$$

Exemple 2.1.1 Nous allons calculer une approximation de $\sqrt{10}$. On définit la fonction f par $f(x) = x^2 - 10$. c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\pm\sqrt{10}$. De plus $\sqrt{10}$ est l'unique solution positive de l'équation $(f(x) = 0)$. Nous pouvons restreindre la fonction f à l'intervalle $[3, 4]$, en effet $9 < 10 < 16$. En d'autres termes $f(3) = -1$ et $f(4) = 6$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[3, 4]$.

Voici les premières étapes:

1. On pose $a_0 = 3$ et $b_0 = 4$, alors on a $f(a_0)f(b_0) < 0$. On calcule $\frac{a_0+b_0}{2} = 3.5$, puis $f\left(\frac{a_0+b_0}{2}\right) = f(3.5) = 2.25$.

Donc, $\sqrt{10}$ est dans l'intervalle $[3, 3.5]$ et on pose $a_1 = 3$ et $b_1 = 3.5$

2. On sait donc que $f(a_1)f(b_1) < 0$. On calcule $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right) = f(3.25) = 0.5625 > 0$, on pose $a_2 = 3$ et $b_2 = 3.25$.

3. On calcule $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right) = f(3.125) = -0.23438 < 0$. Comme $f(b_2) > 0$, alors cette fois f s'annule sur l'intervalle $\left[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2\right]$ et on pose $a_3 = \frac{a_2+b_2}{2}$, $b_3 = b_2$.

Jusqu'à cette étape, on conclut que $a_3 = 3.125 \leq \sqrt{10} \leq b_3 = 3.25$.

D'autre part, si on veut d'obtenir une approximation de $\sqrt{10}$ à 10^{-N} près, il suffit de répéter le procédé jusqu'à l'étape i tel que

$$\begin{aligned} i &= \left\lceil \frac{\log_{10}(b-a) + N}{\log_{10}(2)} \right\rceil + 1 \\ &= \left\lceil \frac{N}{\log_{10}(2)} \right\rceil + 1 \end{aligned}$$

2.1.4 Programme sous Matlab associé à cette méthode

Le code Matlab suivant permet de calculer la valeur de i (nombre des étapes suffisantes) pour atteindre la précision $\epsilon = 10^{-N}$.

```
f=inline('expression de la fonction');
a=input('a=');
b=input('b=');
N=input('N=');
E=10^-N;
c=(a+b)/2;
i=0;
while and(f(c)~=0,(b-a)>=E)
if f(c)*f(a)<0;
b=c;
else
a=c;
end
c=(a+b)/2;
i=i+1;
end
```

```
c
f(c)
i
```

Exemple 2.1.2 *On applique le programme ci-dessus pour la fonction précédente, où $a = 3$, $b = 4$ et $N = 6$. On trouve le résultat suivant:*

```
c =
3.162277698516846
ans =
2.425369984848658e-007
i =
20
```

Exemple 2.1.3 *On applique le programme ci-dessus pour la fonction $f(x) = x^2 - 3$, où $a = 0$, $b = 2$ et $N = 10$. On trouve le résultat suivant:*

```
c =
1.732050807593623
ans =
8.572209608814774e-011
i =
35
```

2.2 Méthode du point fixe

2.2.1 Principe de la méthode

La méthode du point fixe [1, 25] est basée sur la possibilité de réécrire l'équation $f(x) = 0$ sous forme $g(x) = x$. Ainsi, on construit la suite $(a_n)_n$ comme suit:

$$a_{n+1} = g(a_n) \tag{2.6}$$

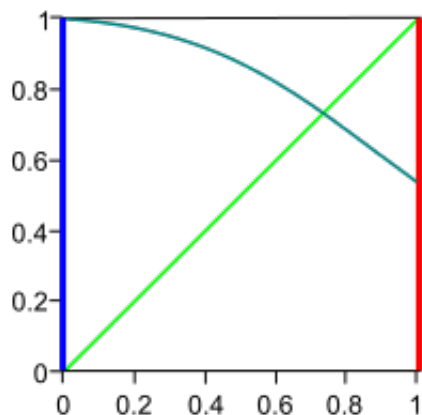


Figure 2.2. Illustration de la méthode du point fixe

2.2.2 Convergence de la méthode

Théorème 2.2.1 (*Existence d'un point fixe*). Soit g une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant $g([a, b]) \subset ([a, b])$. Alors il existe $\ell \in [a, b]$ tel que

$$g(\ell) = \ell \quad (2.7)$$

Preuve. On pose

$$f(x) = g(x) - x$$

et on applique le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction f sur $[a, b]$. Ainsi, il existe $\ell \in [a, b]$ vérifie (2.7). ■

Théorème 2.2.2 Soit g une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que $g([a, b]) \subset [a, b]$ et qu'il existe $k, 0 < k < 1$ tel que pour tout $x \in [a, b]$,

$$|g'(x)| < k \quad (2.8)$$

alors,

1. La fonction g admet un unique point fixe ℓ dans $[a, b]$.
2. Pour tout a_0 de $[a, b]$, la suite $(a_n)_n$ définie par la récurrence

$$a_{n+1} = g(a_n) \quad (2.9)$$

vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [a, b] \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \ell \quad (2.10)$$

Preuve. Puisque la fonction g est continue et que $g([a, b]) \subset [a, b]$, le théorème précédent assure l'existence d'un point fixe. Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux points fixes de g avec $\ell_1 \neq \ell_2$. D'après le théorème des accroissements finis, on a:

$$|\ell_1 - \ell_2| = |g(\ell_1) - g(\ell_2)| \leq k|\ell_1 - \ell_2| < |\ell_1 - \ell_2|$$

C'est une contradiction, donc $\ell_1 = \ell_2$ et le point fixe est unique. Le fait que $a_n \in [a, b]$ résulte du fait que $g([a, b]) \subset [a, b]$. Par ailleurs pour tout $n > 0$,

$$|a_n - \ell| = |g(a_{n-1}) - \ell| = |g(a_{n-1}) - g(\ell)| \leq k |a_{n-1} - \ell|$$

On peut montrer facilement par récurrence que

$$|a_n - \ell| \leq k^n |a_0 - \ell| \quad (2.11)$$

Puisque $0 < k < 1$, cela implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - \ell| = 0$$

■

Remarque 2.2.1 Si on remplace la condition (2.8) par la condition que g est contractante, le théorème reste vrai.

2.2.3 Majoration d'erreur

Pour obtenir une majoration d'erreur avec cette méthode, il suffit de remarquer la relation (2.11) devient

$$|a_n - \ell| \leq k^n (b - a) \quad (2.12)$$

Ainsi, pour que la valeur de a_n de la suite à la n -ième itération soit une valeur approchée de ℓ à $\epsilon > 0$ près, il suffit que n vérifie:

$$k^n |a_0 - \ell| \leq k^n (b - a) < \epsilon \quad (2.13)$$

L'inégalité $k^n (b - a) < \epsilon$ équivaut à

$$n > \frac{\ln(\epsilon) - \ln(b - a)}{\ln(k)}$$

On peut alors prendre

$$n = \left\lceil \frac{\ln(\epsilon) - \ln(b - a)}{\ln(k)} \right\rceil + 1 \quad (2.14)$$

2.2.4 Programme sous Matlab associé à cette méthode

% Méthode du point fixe

g=inline('expression de la fonction g');

a=input('a=');

b=input('b=');

k=input('k=');

n=1;

a(1)=input('a(1)='); % a(1) est quelconque dans l'intervalle d'étude

E=input('E='); % E c'est la précision souhaitée

while (b-a)*k^n > E

a(1)=g(a(1));

n=n+1;

end

n

a(1)

Exemple 2.2.1 On exécute le programme ci-dessus pour la fonction définie par $f(x) = x - 0.2 \sin(x) - 0.5$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Remarquons d'abord que l'équation $x - 0.2 \sin(x) - 0.5 = 0$ est équivalente à $x = 0.5 + 0.2 \sin(x)$, donc si on prend $g(x) = 0.5 + 0.2 \sin(x)$, alors g vérifie les conditions du théorème 2.2.2 sur l'intervalle $[0, 1]$ où $k = 0.2$.

- Pour obtenir une précision E de 10^{-5} et pour $a_0 = a$, il suffit que

n =

7

ans =

0.615454128801807

- Pour obtenir une précision E de 10^{-10} et pour $a_0 = a$, il suffit que

n =

14

ans =

0.615468169446484

- Pour obtenir une précision E de 10^{-20} et pour $a_0 = a$, il suffit que

n =

29

ans =

0.615468169489965

2.3 Méthode de la sécante

2.3.1 Principe de la méthode

La méthode de la sécante considère une fonction f réelle et continue sur un intervalle $[a, b]$ avec $f(a)f(b) < 0$, puis il trace le segment $[AB]$ où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Si le segment reste au-dessus du graphe de f , alors la fonction s'annule sur l'intervalle $[a', b]$ où $(a', 0)$ est le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses. La droite (AB) s'appelle la sécante. On recommence en partant maintenant de l'intervalle $[a', b]$ pour obtenir une valeur a'' [1, 25]. En d'autre terme, cette méthode prend λ_n de la formule (2.2) comme suit:

$$\lambda_n = \frac{f(b) - f(a_n)}{b - a_n} \quad (2.15)$$

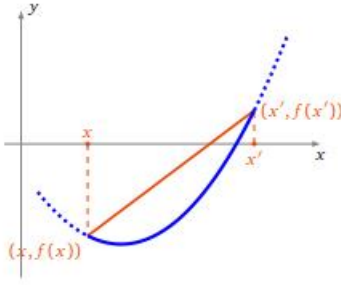


Figure 2.3. Graphe d'une fonction convexe

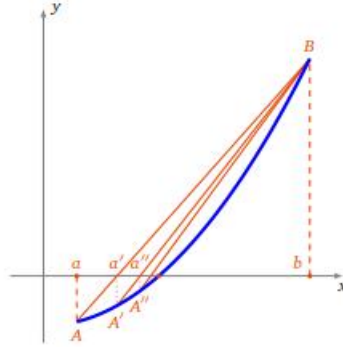


Figure 2.4. Méthode de la sécante

2.3.2 Convergence de la méthode

Proposition 2.3.1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et convexe telle que $f(a) \leq 0$, $f(b) > 0$. Alors la suite définie par:

$$\begin{cases} a_0 &= a \\ a_{n+1} &= a_n - \left(\frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)} \right) f(a_n), \quad \forall n \geq 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

est croissante et converge vers la solution ℓ de $(f(x) = 0)$.

L'hypothèse f convexe signifie exactement que pour tout x, x' dans $[a, b]$ la sécante (ou corde) entre $(x, f(x))$ et $(x', f(x'))$ est au-dessus du graphe de f .

Preuve. 1. Justifions d'abord la construction de la suite récurrente.

L'équation de la droite passant par les deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

$$y = (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a)$$

Cette droite intersecte l'axe des abscisses en $(a', 0)$ qui vérifie donc $0 = (a' - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a)$, donc $a' = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$

2. Croissance de $(a_n)_n$. Montrons par récurrence que $f(a_n) \leq 0$. C'est vrai au rang 0 car $f(a_0) = f(a) \leq 0$ par hypothèse. Supposons que l'hypothèse est vraie au rang n . Si $a_{n+1} < a_n$, alors comme f est strictement croissante, on a $f(a_{n+1}) < f(a_n)$, et en particulier $f(a_{n+1}) \leq 0$. Sinon $a_{n+1} > a_n$. Comme f est convexe: la sécante entre $(a_n, f(a_n))$ et $(b, f(b))$ est au-dessus du graphe de f . En particulier le point $(a_{n+1}, 0)$ (qui est sur cette sécante par définition de a_{n+1}) est au-dessus du point $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$, et donc $f(a_{n+1}) \leq 0$ aussi dans ce cas, ce qui conclut la récurrence.

Comme $f(a_n) \leq 0$ et f est croissante, alors par la formule $a_{n+1} = a_n - (\frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)})f(a_n)$ montre que $a_{n+1} > a_n$.

3. Convergence de $(a_n)_n$.

La suite $(a_n)_n$ est croissante et majorée par b , donc elle converge. Notons ℓ sa limite. Par continuité $f(a_n) \rightarrow f(\ell)$.

Comme pour tout n , $f(a_n) \leq 0$, on en déduit que $f(\ell) \leq 0$. En particulier, comme on suppose $f(b) > 0$, on a $\ell < b$. Comme $a_n \rightarrow \ell$, $a_{n+1} \rightarrow \ell$, $f(a_n) \rightarrow f(\ell)$, l'égalité $a_{n+1} = a_n - (\frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)})f(a_n)$ devient à la limite (lorsque $n \rightarrow +\infty$) : $\ell = \ell - (\frac{b-\ell}{f(b)-f(\ell)})f(\ell)$, ce qui implique $f(\ell) = 0$.

Conclusion : $(a_n)_n$ converge vers la solution de $(f(x) = 0)$. ■

2.3.3 Majoration d'erreur

La méthode de la sécante fournit l'encadrement $a_n \leq \ell \leq b$. Mais comme b est fixe cela ne donne pas d'information exploitable pour $|\ell - a_n|$. Voici une façon générale d'estimer l'erreur, à l'aide du théorème des accroissements finis.

Proposition 2.3.2 *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et ℓ tel que $f(\ell) = 0$. S'il existe une constante $m > 0$ telle que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| > m$ alors*

$$|x - \ell| \leq \frac{|f(x)|}{m}; \quad \text{pour tout } x \in I. \quad (2.17)$$

Preuve. Par l'inégalité des accroissements finis entre x et ℓ : $|f(x) - f(\ell)| > m|x - \ell|$ mais $f(\ell) = 0$, d'où la majoration. ■

2.3.4 Programme sous Matlab associé à cette méthode

```
% Méthode de la sécante
f=inline('expression de la fonction');
a0=input('a0=');
b=input('b=');
N=input('N='); % N est le nombre des itérations
a(1)=a0;
% Boucle calculant N-1 termes de la suite
for n=1:N-1
    a(n+1)=a(n)-((b-a(n))/(f(b)-f(a(n))))*f(a(n));
end
a'
% a' c'est le vecteur de N termes de la suite, a(1), a(2), ..., a(N)
```

Exemple 2.3.1 On exécute le programme ci-dessus pour la fonction définie par $f(x) = x - 0.2 \sin(x) - 0.5$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Remarquons d'abord que f satisfait: $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$, $f'(x) = 1 - 0.2 \cos(x) > 0$ et $f''(x) = 0.2 \sin(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, alors f vérifie les conditions de la proposition 2.3.1 sur l'intervalle $[0, 1]$.

- Pour $N = 20$, on a les termes de a_0 jusqu'à a_{19}

```
ans =
0
0.601174114901423
0.615040435742275
0.615455317056422
0.615467783256024
0.615468157883042
```

0.615468169141160
0.615468169479483
0.615468169489650
0.615468169489956
0.615468169489965
0.615468169489965
0.615468169489965
0.615468169489965
0.615468169489965
0.615468169489965
0.615468169489965
0.615468169489965
0.615468169489965
0.615468169489965

2.4 Méthode de la corde

2.4.1 Principe de la méthode

La méthode de la corde, consiste à choisir

$$\lambda_n = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.18)$$

d'où la formule (2.2) devient

$$a_{n+1} = a_n - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(a_n) \quad (2.19)$$

Soit $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Soit $A_n = (a_n, f(a_n))$ et Δ_n la droite parallèle à (AB) passant par A_n . Géométriquement, a_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection entre Δ_n et l'axe des abscisses. Avec cette méthode, on n'est pas assuré de la convergence vers une solution mais certaines hypothèses permettent d'assurer la convergence [1, 25].

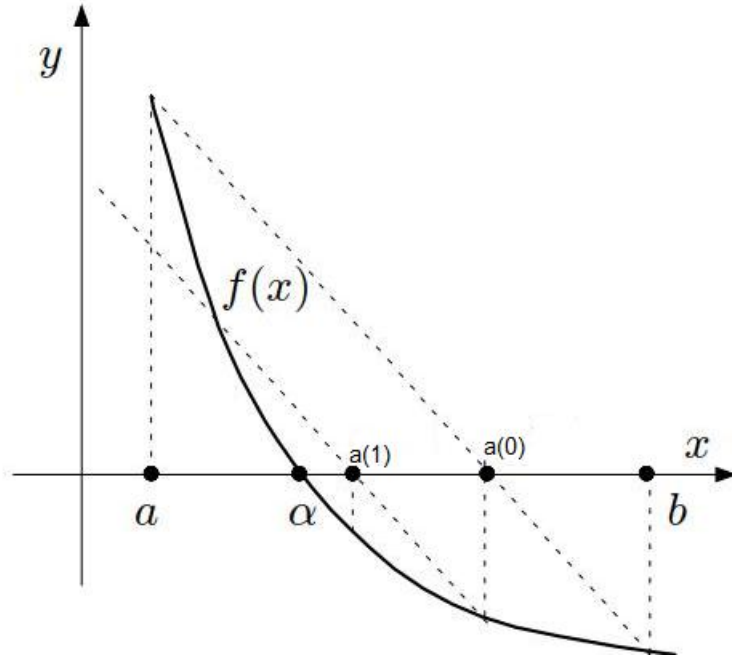


Figure 2.5. Méthode de la corde

2.4.2 Convergence de la méthode

La suite de la méthode de la corde peut donc s'écrire comme une suite des itérés de la méthode du point fixe:

$$a_{n+1} = g(a_n) \quad (2.20)$$

avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{\lambda}$ et $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

D'après le théorème 2.2.2, pour que la méthode de point fixe converge, il suffit que: f est de classe C^1 sur $[a, b]$ et vérifie les conditions suivantes:

1. Pour tout $x \in [a, b]$

$$\min(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) < f(x) < \max(\lambda(x-a), \lambda(x-b)) \quad (2.21)$$

2. Pour tout $x \in [a, b]$

$$\min(0, 2\lambda) < f'(x) < \max(0, 2\lambda) \quad (2.22)$$

2.4.3 Majoration d'erreur

La majoration d'erreur pour cette méthode est analogue à celle de la méthode du point fixe, qui est exprimée par (2.12).

2.4.4 Programme sous Matlab associé à cette méthode

```
% Méthode de la corde
f=inline('expression de la fonction');
a0=input('a0=');
b=input('b=');
N=input('N='); % N est le nombre des itérations
a(1)=a0;
% Boucle calculant N-1 termes de la suite
for n=1:N-1
    a(n+1)=a(n)-((b-a0)/(f(b)-f(a0)))*f(a(n));
end
a'
% a' c'est le vecteur de N termes de la suite, a(1), a(2), ..., a(N)
```

Exemple 2.4.1 On exécute le programme ci-dessus pour la fonction définie par $f(x) = 1 - 3e^{-x}$ sur l'intervalle $[1, 2]$.

Remarquons d'abord que f satisfait: $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$, $f'(x) = 3e^{-x} > 0$ pour tout $x \in [1, 2]$, alors il existe une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[1, 2]$ qui est égale à $\ln 3 = 1.098612288668110$.

- Pour $N = 20$, on a

```
ans =
1.0000000000000000
1.148557195093203
1.078723623326694
1.107517814159010
1.094809132892193
```

1.100271030227513
1.097895328593501
1.098923401653240
1.098477515594055
1.098670714966811
1.098586968016788
1.098623263591955
1.098607532008302
1.098614350313498
1.098611395113819
1.098612675952546
1.098612120811586
1.098612361420423
1.098612257135842
1.098612302334811

Ce résultat montre que la méthode de la corde donne une valeur approchée à la solution exacte avec une précision de 10^{-7} près.

2.5 Méthode de Lagrange

2.5.1 Principe de méthode

La méthode de Lagrange consiste à choisir

$$\lambda_n = \frac{f(a_n) - f(a_{n-1})}{a_n - a_{n-1}} \quad (2.23)$$

On remplace donc l'expression de λ_n dans (2.2) par (2.23), on obtient

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n - a_{n-1}}{f(a_n) - f(a_{n-1})} f(a_n) \quad (2.24)$$

Soit $A_n = (a_n, f(a_n))$, et $A_{n-1} = (a_{n-1}, f(a_{n-1}))$. Soit Δ_n la droite passant par A_{n-1} et A_n . Géométriquement, a_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection entre Δ_n et l'axe des abscisses.

Comme pour la méthode de la corde, cette méthode n'assure pas la convergence vers une solution [1, 25].

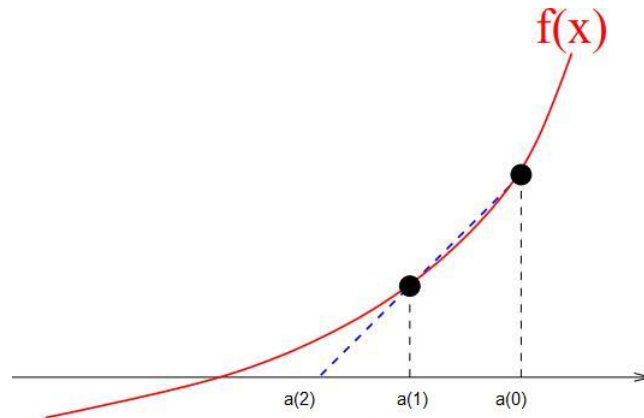


Figure 2.6. Méthode de Lagrange en terme graphique

2.5.2 Convergence de la méthode de Lagrange

Théorème 2.5.1 Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 sur $[a, b]$, telle que f' et f'' soient strictement positives sur $[a, b]$.

On suppose que $f(a)f(b) < 0$, alors si a_0, a_1 vérifient $f(a_0) > 0$ et $f(a_1) > 0$, la suite des itérés de Lagrange converge vers l'unique solution ℓ de (2.1) sur cet intervalle.

Preuve. D'après les hypothèses f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Donc, il existe un unique $c \in]a, b[$ solution de $f(x) = 0$.

D'après la convexité de f ($f'' > 0$)

$$0 = f(c) > f(a_n) + \frac{f(a_n) - f(a_{n-1})}{a_n - a_{n-1}} (c - a_n)$$

(f est au dessous de ses cordes et $c \notin [a_n, a_{n-1}]$).

Donc $a_n > a_{n+1} > c$. Alors $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée, donc elle converge. Soit ℓ sa limite, alors par passage à la limite dans (2.24) on trouve que

$$f(\ell) = 0$$

■

Théorème 2.5.2 *Sous les hypothèses du théorème précédent, si on suppose de plus que*

$$f' > 0 \quad \text{et} \quad a - \frac{f(a)}{f'(a)} < b \quad (2.25)$$

alors pour tout $a_0, a_1 \in [a, b]$, la suite des itérés de Lagrange converge vers c .

2.5.3 Programme sous Matlab associé à cette méthode

% Méthode de Lagrange

f=inline('expression de la fonction');

a0=input('a0=');

b=input('b=');

N=input('N='); % N est le nombre des itérations

a(1)=input('a(1)='); % a(1) vérifie f(a(1))>0

a(2)=input('a(2)='); % a(2) vérifie f(a(2))>0

% Boucle calculant N-2 termes de la suite

for n=2:N-1

a(n+1)=a(n)-((a(n)-a(n-1))/(f(a(n))-f(a(n-1))))*f(a(n));

end

a'

% a' c'est le vecteur de N termes de la suite, a(1), a(2), ..., a(N)

Exemple 2.5.1 *On exécute le programme ci-dessus pour la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3}{4} - 1$ sur l'intervalle $[1, 2]$.*

Remarquons d'abord que f satisfait: $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$, $f'(x) = 3\frac{x^2}{4} > 0$ et $f''(x) = 6\frac{x}{4} > 0$ pour tout $x \in [1, 2]$, $f(1.8) > 0$ et $f(1.9) > 0$, alors f vérifie les conditions du théorème 2.5.1 sur l'intervalle $[1, 2]$.

- Pour $N = 10$, on a

ans =

1.9000000000000000

1.8000000000000000

1.621616358325219

1.591546933653074

1.587488992704458

1.587401281238862

1.587401051980900

1.587401051968200

1.587401051968199

1.587401051968199

2.6 Méthode de Newton

La méthode de Newton-Raphson est beaucoup plus évoluée que les autres méthodes: elle utilise les variations de la fonction dont on cherche le zéro. En partant d'un point, on trace la tangente à la courbe que l'on suit jusqu'à intercepter l'axe des abscisses. Le nouveau point obtenu est ainsi plus proche du zéro de la fonction, et on recommence l'opération jusqu'à la précision souhaitée [1, 5, 25].

2.6.1 Principe de méthode

La méthode de Newton consiste à choisir,

$$\lambda_n = f'(a_n) \tag{2.26}$$

On obtient alors

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \tag{2.27}$$

Soit Δ_n la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a_n . Alors a_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection entre Δ_n et l'axe des abscisses. L'algorithme de Newton n'assure pas la convergence vers une solution de (2.1).

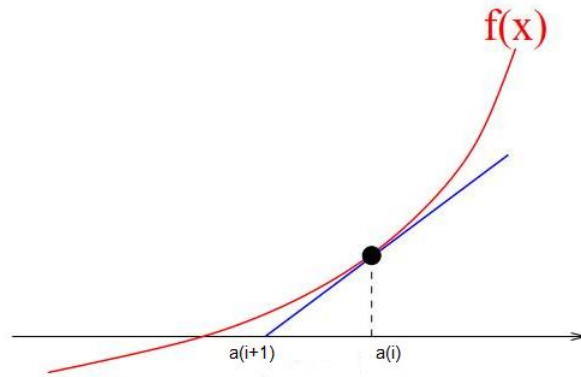


Figure 2.7. Méthode de Newton pour déterminer la racine

2.6.2 Convergence de la méthode

Pour a_0 donné, on définit la suite des itérés de Newton par la relation de récurrence:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \quad (2.28)$$

Théorème 2.6.1 *On suppose que*

- f est de classe C^2 sur $[a, b]$
- $f(a)f(b) < 0$
- $f' \neq 0$ sur $[a, b]$
- $f'' > 0$ sur $[a, b]$.

Alors si a_0 vérifie $f(a_0) > 0$, la suite des itérés de Newton converge vers l'unique solution c de (2.1) sur cet intervalle.

Preuve. On suppose $f' > 0$ sur $[a, b]$, le cas $f' < 0$ se traite de manière analogue. D'après les hypothèses f réalise une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$. Donc, il existe un unique $c \in]a, b[$ solution de $f(x) = 0$. Le fait que a_{n+1} soit plus grand que c est dû au fait que f est convexe. En effet puisque f est convexe, sa courbe est au dessus de ses tangentes. Donc la tangente coupe l'axe des abscisses en un point situé à droite de c . D'un

point de vu analytique, on a d'après la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2, que pour tout $x \in [a, b]$ il existe $\xi_n \in [a, b]$ tel que

$$f(x) = f(a_n) + f'(a_n)(x - a_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - a_n)^2$$

Donc, comme $f'' > 0$ pour tout $x \neq a_n$, on a:

$$f(x) > f(a_n) + f'(a_n)(x - a_n)$$

Ce qui donne pour $x = c$

$$0 = f(c) > f(a_n) + f'(a_n)(c - a_n)$$

Comme a_{n+1} vérifie

$$0 = f(a_n) + f'(a_n)(a_{n+1} - a_n)$$

On déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $f(a_n) + f'(a_n)(x - a_n)$ que

$$c < a_{n+1} < a_n$$

Par récurrence, on en déduit que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée, donc elle converge. Soit ℓ sa limite. Alors de l'équation,

$$f(a_n) + f'(a_n)(a_{n+1} - a_n) = 0$$

on déduit par passage à la limite que

$$f(\ell) = 0$$

■

Remarque 2.6.1 *Le théorème admet une version analogue dans le cas $f'' < 0$ sur $[a, b]$, $f(a_0) < 0$.*

Remarque 2.6.2 *Dans le théorème, on a l'hypothèse que $f(a_0) > 0$, si $f' > 0$ cela veut dire que $a_0 > c$. Si on choisit $a_0 < c$, alors du fait de la convexité ($f'' > 0$), on aura $a_1 > c$. Pour avoir la convergence, il suffit alors de vérifier que $a_1 \leq b$. Ceci est assuré par la condition suivante $a - \frac{f(a)}{f'(a)} < b$. On résume cela dans le théorème suivant.*

Théorème 2.6.2 *Sous les hypothèses du théorème précédent, si on suppose de plus que*

$$f' > 0 \text{ et } a - \frac{f(a)}{f'(a)} < b \quad (2.29)$$

alors pour tout $a_0 \in [a, b]$, la suite des itérés de Newton converge vers c .

Preuve. Pour $c < a_0 < b$, le résultat découle du théorème précédent. Pour $a < a_0 < c$, du fait de la convexité et de la croissance de f , a_1 est une fonction décroissante de a_0 . En effet, en posant

$$a_1 = \phi(a_0) = a_0 - \frac{f(a_0)}{f'(a_0)}$$

On trouve, en dérivant par rapport à a_0 ,

$$\phi' = 1 - \frac{(f')^2 - ff''}{(f')^2} = \frac{ff''}{(f')^2} < 0$$

■

Théorème 2.6.3 *Soit f une fonction de classe C^2 sur l'intervalle $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, avec $a < b$. Supposons qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$ et $f'(c) \neq 0$. Alors, il existe $\mu > 0$ tel que pour tout $a_0 \in [c - \mu, c + \mu]$, la suite des itérés de Newton converge vers c quand n tend vers $+\infty$.*

Avant de montrer le théorème, on montre d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.6.1 *Soit r_n une suite telle que,*

$$0 \leq r_{n+1} \leq r_n^2 \quad \text{et} \quad 0 < r_0 < 1 \quad (2.30)$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0 \quad (2.31)$$

Preuve. On peut montrer facilement par récurrence que,

$$0 \leq r_n \leq r_0^{2^n}$$

D'où le résultat ■

On va maintenant démontrer le théorème.

Preuve. On a,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - c &= a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} - c \\ &= \frac{f'(a_n)(a_n - c) - f(a_n) + f(c)}{f'(a_n)} \\ &= \frac{f''(\xi_n)(c - a_n)^2}{2f'(a_n)} \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe α tel que si $a_n \in]c - \alpha, c + \alpha[$ alors,

$$|a_{n+1} - c| \leq \frac{L}{2m} (a_n - c)^2.$$

ou encore,

$$\frac{L}{2m} |a_{n+1} - c| \leq \frac{L^2}{4m^2} (a_n - c)^2.$$

Si on choisit, a_0 tel que :

$$\frac{L}{2m} |a_0 - c| < \min \left(1, \alpha \frac{L}{2m} \right),$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in]c - \alpha, c + \alpha[$ et la suite $r_n = \frac{L}{2m} |a_n - c|$ vérifie,

$$0 \leq r_{n+1} \leq r_n^2.$$

D'où le théorème. ■

2.6.3 Programme sous Matlab associé à cette méthode

% Méthode de Newton

f=inline('expression de la fonction');

fp=inline('expression de la dérivée de la fonction f');

a0=input('a0=');

b=input('b=');

N=input('N='); % N est le nombre des itérations

a(1)=input('a(1)='); % a(1) vérifie f(a(1))>0

% Boucle calculant N-1 termes de la suite

```

for n=1:N-1
a(n+1)=a(n)-f(a(n))/fp(a(n));
end
a'
% a' c'est le vecteur de N termes de la suite, a(1), a(2), ..., a(N)

```

Exemple 2.6.1 *On exécute le programme ci-dessus pour la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3}{4} - 1$ sur l'intervalle $[1, 2]$. Puisque comme on a vu précédemment que $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$, $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ pour tout $x \in [1, 2]$, $f(1.8) > 0$, alors si on a posé $a_0 = 1.8$, la fonction f vérifie les conditions du théorème 2.6.1 sur l'intervalle $[1, 2]$.*

- Pour $N = 20$, on a

```

ans =
1.8000000000000000
1.611522633744856
1.587760307004850
1.587401133249011
1.587401051968204
1.587401051968199
1.587401051968200
1.587401051968199
1.587401051968200
1.587401051968199
1.587401051968200
1.587401051968199
1.587401051968200
1.587401051968199
1.587401051968200
1.587401051968199
1.587401051968200
1.587401051968199

```

1.587401051968200

1.587401051968199

Exemple 2.6.2 On exécute le programme ci-dessus pour la fonction définie par $f(x) = x^2 - 10$ sur l'intervalle $[3, 4]$. Puisque la fonction f vérifie $f(3) < 0$ et $f(4) > 0$, $f'(x) = 2x > 0$ et $f''(x) = 2 > 0$ pour tout $x \in [3, 4]$, $f(3.5) > 0$, alors si on a posé $a_0 = 3.5$, la fonction f satisfait les conditions du théorème 2.6.1 sur l'intervalle $[3, 4]$.

- Pour $N = 10$, on a

ans =

3.5000000000000000

3.178571428571428

3.162319422150883

3.162277660444136

3.162277660168380

3.162277660168379

3.162277660168380

3.162277660168379

3.162277660168380

3.162277660168379

2.7 Vitesse de convergence

Définition 2.7.1 On dit que la convergence d'une suite $(a_n)_n$ vers ℓ est d'ordre p ($p \in \mathbb{R}_+^*$), si il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1} - \ell|}{|a_n - \ell|^p} = C \quad (2.32)$$

Définition 2.7.2 Lorsque $p = 1$, la convergence de $(a_n)_n$ vers ℓ est dite linéaire. Lorsque $p = 2$, la convergence de $(a_n)_n$ vers ℓ dite quadratique.

2.7.1 Vitesse de convergence de la méthode du point fixe

Théorème 2.7.1 *Soit g une fonction satisfait les conditions du théorème du point fixe, alors la suite $(a_n)_n$ dont, $a_{n+1} = g(a_n)$ possède une convergence d'ordre 1.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1} - \ell|}{|a_n - \ell|} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|g(a_n) - \ell|}{|a_n - \ell|} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{g(a_n) - g(\ell)}{a_n - \ell} \right| = |g'(\ell)| > 0\end{aligned}$$

■

2.7.2 Vitesse de convergence de la méthode de Newton

Théorème 2.7.2 *Si la suite $(a_n)_n$ des itérés de Newton converge, sa vitesse de convergence est (au moins) quadratique.*

Preuve. On a

$$\begin{aligned}a_{n+1} - \ell &= a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} - \ell \\ &= \frac{(a_n - \ell) f'(a_n) - f(a_n) + f(\ell)}{f'(a_n)}\end{aligned}$$

Par application de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, on sait que $\exists \zeta_n$ compris entre a_n et ℓ tel que

$$f(\ell) - f(a_n) = f'(a_n)(\ell - a_n) + f''(\zeta_n) \frac{(\ell - a_n)^2}{2}$$

On obtient alors

$$a_{n+1} - \ell = \frac{f''(\zeta_n) \frac{(\ell - a_n)^2}{2}}{f'(a_n)}$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1} - \ell|}{|a_n - \ell|^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\zeta_n)}{f'(a_n)} \right| = C > 0$$

■

2.7.3 Vitesse de convergence de la méthode de la corde

Proposition 2.7.1 *Si la méthode de la corde converge, alors la convergence est au moins linéaire.*

Preuve. D'après (2.19), on a

$$\begin{aligned}a_{n+1} - \ell &= a_n - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a_n) - \ell \\&= a_n - \ell - \left(\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \right) f(a_n) + \left(\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \right) f(\ell) \\&= a_n - \ell + \left(\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \right) (f(\ell) - f(a_n))\end{aligned}$$

D'après le théorème d'accroissement finis appliqué à f , on trouve que

$$a_{n+1} - \ell = (a_n - \ell) \left(1 - \left(\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \right) f'(\zeta_n) \right)$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1} - \ell|}{|a_n - \ell|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| 1 - \left(\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \right) f'(\zeta_n) \right| = C > 0$$

■

2.7.4 Vitesse de convergence de méthode de Lagrange

Théorème 2.7.3 *Si la suite des itérés de Lagrange converge, alors sa convergence est d'ordre $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

2.8 Comparaison entre les méthodes précédentes

1. L'avantage de la méthode de dichotomie est qu'elle converge toujours et elle ne demande que peu d'hypothèse sur f (seulement la continuité). Par contre,

- Il faut un encadrement du zéro recherché.
- Il faut donc avoir une idée de la valeur approximative du zéro cherché. Cela peut s'obtenir en traçant la fonction et en évaluant graphiquement le zéro.
- La convergence est lente. En effet, pour la division de l'intervalle en deux, la précision de l'encadrement est multipliée par deux à chaque itération.

2. L'avantage de la méthode du point fixe est qu'elle est une méthode beaucoup plus générale que la méthode de Newton puisqu'on demande très peu sur la fonction g (on demande seulement qu'elle soit contractante, elle peut n'être même pas dérivable). Par contre, elle est en général moins rapide (surtout lorsque k est proche de 1) puisque l'erreur évolue linéairement et non quadratiquement.

3. Les principaux avantages de la méthode de Lagrange sont: les hypothèses de départ sont peu contraignantes si la fonction présente un seul zéro, la convergence est rapide dans le cas des racines simples, même si elles sont nombreuses, pour autant qu'on puisse trouver de bons précurseurs a_0 et a_1 . Le principal désavantage de cette méthode est la lenteur de sa convergence et

son manque de précision relatif lorsqu'on a affaire à une racine multiple.

4. La méthode de Newton est très efficace dès qu'on est proche de la racine cherchée. De plus, elle se transpose "facilement" au cas multi-dimensionnel. Elle a cependant certains inconvénients:

- Le premier inconvénient de la méthode est le besoin de la dérivée de la fonction à calculer. Si on a une expression analytique de cette fonction, cela ne pose pas de problème. Cependant, il arrive souvent que ce ne soit pas le cas. Il faut alors évaluer numériquement la dérivée de cette fonction, ce qui est très délicat.

- Une autre inconvénient de la méthode apparaît clairement dans sa formulation: si on se trouve en un point de dérivée nulle, la méthode ne va pas bien.

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, nous allons présenter des modèles d'application des méthodes précédentes telles que, pour trouver les racines des polynômes réels à racines réelles et calculer l'inverse d'un nombre réel non nul et résoudre d'une équation d'état d'un gaz.

3.1 Méthode de Newton pour les polynômes réels à racines réelles

Soit $r \in \mathbb{N}$ ($r > 1$) et $\xi_1 < \dots < \xi_r$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(m_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{N}^*$ et soit $P = \prod_{i=1}^r (X - \xi_i)^{m_i}$.
soit $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 > \xi_r$. On définit par récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Proposition 3.1.1 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, strictement décroissante et converge vers ξ_r .

Par la proposition suivante, on peut évaluer la vitesse de convergence selon si ξ_r est une racine simple ou double.

Proposition 3.1.2 Si $m_r = 1$, alors : $\forall c > 0, |x_n - \xi_r| = o(c^n)$ (on parle de convergence surlinéaire), et si $m_r > 1$, il existe $c \neq 0$ tel que $|x_n - \xi_r| \sim c \left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n$.

Plus de détail sur ces deux propositions et leurs démonstrations, on peut les trouver dans [17].

3.2 Calcul d'inverse d'un nombre réel non nul

Soient $A > 0$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = 3x - 3Ax^2 + A^2x^3$$

1. Déterminer les points fixes de g . Donner la nature de ces points fixes.
2. On construit la suite $x_{n+1} = g(x_n)$, avec x_0 dans $\mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que $g\left(\left[0, \frac{2}{A}\right]\right) = \left[0, \frac{2}{A}\right]$.
 - (b) En déduire que pour $x_0 \in \left[0, \frac{2}{A}\right]$ la suite (x_n) converge et préciser la limite.

On pose $\bar{x} = \frac{1}{A}$.

3. On prend $x_0 \in \left]0, \frac{2}{A}\right[$. Montrer que

$$\left|x_{n+1} - \bar{x}\right| = A^2 \left|x_n - \bar{x}\right|^3.$$

Préciser l'ordre de convergence de (x_n) vers $\bar{x}$.

Solution:

Les points fixes de g sont les solutions de l'équation

$$3x - 3Ax^2 + A^2x^3 = x$$

$x = 0$ est une solution évidente. En factorisant l'expression par x on est ramené à calculer les racines d'un polynôme de degré 2. On trouve $\frac{1}{A}$ et $\frac{2}{A}$. g est dérivable et $g'(x) = 3A^2(x - \frac{1}{A})^2$.

Ce qui nous donne pour les trois points fixes précédents: $g'(0) = 3$, $g'(\frac{1}{A}) = 0$, $g'(\frac{2}{A}) = 3$.

Comme g est croissante et continue, $g([0, \frac{2}{A}]) = [g(0), g(2/A)] = [0, \frac{2}{A}]$. Montrons maintenant que la suite $(x_n)_n$ est monotone. Pour cela on écrit

$$x_{n+1} - x_n = g(x_n) - g(x_{n-1})$$

Puisque la fonction g est croissante, on en déduit que le signe de $x_{n+1} - x_n$ est le même que celui de $x_n - x_{n-1}$. En itérant ce raisonnement, on en déduit que $(x_n)_n$ est croissante si $x_1 \geq x_0$

et décroissante si $x_1 \leq x_0$. La suite $(x_n)_n$ étant monotone et bornée (car à valeurs dans $[0, \frac{2}{A}]$), elle converge vers un point fixe de g (par continuité de g).

Si x_0 est différent de $0, \frac{1}{A}, \frac{2}{A}$ alors $(x_n)_n$ ne peut converger que vers $\bar{x} = \frac{1}{A}$ seul point fixe.

Comme g est un polynôme de degré 3, la formule de Taylor d'ordre 3 de g en $\bar{x}$ est exacte

$$x_{n+1} - \bar{x} = g(x_n) - g(\bar{x}) = g'(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + \frac{g''(\bar{x})}{2}(x_n - \bar{x})^2 + \frac{g'''(\bar{x})}{6}(x_n - \bar{x})^3$$

Après les calculs, on obtient

$$x_{n+1} - \bar{x} = A^2(x_n - \bar{x})^3$$

Ce qui signifie que la méthode est d'ordre 3.

3.3 Équation d'état d'un gaz

On veut déterminer le volume V occupé par un gaz de température T et de pression P .

L'équation d'état (c'est-à-dire l'équation qui lie P , V et T) est

$$\left(P + a\left(\frac{N}{V}\right)^2\right)(V - Nb) = kNT$$

où a et b sont deux coefficients dépendants de la nature du gaz, N est le nombre de molécules contenues dans le volume V et k est la constante de Boltzmann. Il faut donc résoudre une équation non linéaire d'inconnue V .

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons présenté d'une part, une étude approfondie et détaillée sur les méthodes itératives d'approximations des racines telles que la méthode de dichotomie, la méthode du point fixe, la méthode de la sécante, la méthode de la corde, la méthode de Lagrange et la méthode du Newton et leurs algorithmes. D'une autre part, des applications des ces méthodes dans les mathématiques et dans la chimie. À partir de ce qui précède, les résultats expérimentaux ont justifié la meilleure performance de ces méthodes. En conséquent, nous pouvons adopter ces méthodes pour résoudre des équations non linéaires.

Bibliographie

- [1] Alfio Quarteroni, Riccardo Sacco, Fausto Saleri. Méthodes Numériques Algorithmes, analyse et applications, Springer-Verlag Italia, Milano 2004
- [2] A.M. Ostrowski. Solution of Equations and Systems of Equations. Academic Press, NewYork, 2nd edition. [MA 65/27] (1966).
- [3] Atkinson K. An Introduction to Numerical Analysis. 2nd edition. John Wiley & Sons Inc., New York (1989).
- [4] Axelsson O. Iterative Solution Methods. Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- [5] Bank R. E. and Rose D. J. Global Approximate Newton Methods. Numer. Math. 37 : 279–295 (1981).
- [6] Björck A. Least Squares Methods : Handbook of NumericalAnalysis Vol. 1 Solution of Equations in $\mathbb{R}^N$. Elsevier NorthHolland (1988).
- [7] B. Wendro, Theoretical Numerical Analysis, Academic Press, 1966.
- [8] CHRISTOPHER G. SMALL, JINFANG WANG. Numerical Methods for Nonlinear Estimating Equations, CLARENDON PRESS OXFORD 2003.
- [9] Dennis J. and Schnabel R. Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations. Classics in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA (1996).
- [10] D. M. Young, Iterative Solution of Large Linear Systems, Academic Press, 1971.

- [11] E. Hairer. Méthodes numériques. Cours de l'université de Genève, 2004.
- [12] G. Allaire and S.M. Kaber. Algebre linéaire numérique, volume 512. Ellipses, 2002.
- [13] G. Watson, Approximation Theory and Numerical Methods, Cambridge University Press, 1981.
- [14] J. Baranger. Analyse numérique. Hermann, 1988.
- [15] J. Beuneu. Algorithmes pour le calcul scientifique. Cours de l'Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille, 1999.
- [16] Jean-Etienne ROMBALDI : Problèmes corrigés d'analyse numérique. Collection Enseignement des Mathématiques. Masson, Paris, 1996.
- [17] J.M. McNamee and V.Y. Pan, NUMERICAL METHODS FOR ROOTS OF POLYNOMIALS, PART II. Elsevier B.V 2013.
- [18] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, ITERATIVE SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS IN SEVERAL VARIABLES. ACADEMIC PRESS, I N C 1970.
- [19] Jacques Rappaz, Marco Picasso. Introduction à l'analyse numérique. Presses polytechniques et universitaires romandes, CH – 1015 Lausanne 1998
- [20] J. Reveillon. Simulation et modélisation numérique. Cours de l'université de Rouen, 2003.
- [21] K. Arbenz, A. Wohlhauser, Analyse numérique, Presses Polytechniques romandes, 1980.
- [22] K. Yosida, Functional Analysis, Springer Verlag, 1965.
- [23] Luc Jolivet, Rabah Labbas. Analyse et analyse numérique rappel de cours et exercices corrigés. LAVOISIER, 2005
- [24] P. Deuffhard. Newton Methods for Nonlinear Problems ; Affine Invariance and Adaptive Algorithms. Springer Ser. Comp. Math. 35 (2004).

- [25] P. Viot. Méthodes d'analyse numériques. Cours de DEA de Jussieu, 2003.
- [26] Walter RUDIN : Analyse fonctionnelle. discience international, 1995.