Remerciements

Nous remercions Mons Dieu qui Mons donnons la force et la sagesse pour achever ce modeste travail.

Nous adressons tous mes respects et mes remerciements à ceux qui m'ont aidons de prés ou de loin pour l'élaboration de ce modeste travail et particulièrement à

- Mon promoteur Mm N.AZIZA pour sa contribution à l'élaboration de ce mémoire.
- A tous les enseignants de l'U O qui ont contribués à Mons formation.
- Aux membres de jury qui ont bien voulu examiner Mons travail et de l'apprécier à sa juste valeur.

Merci à tous .

Table des matières

Introduction générale

Depuis l'époque de Newton, les équations différentielles sont utilisés pour comprendre les phoenoménes physiques, biologiques et architecturales, est plus de ce elles contribuent à l'étude de l'analyse mathématique, l'économie et la socioloogie.

On dit équation différentielle tou équation qui contient des dérivées et ces derniers sont les inconnues de ces équations, le but de la résolution de ces équations est de trouver des primitives de ces fonctions telles que leurs dérivées verifient ces équations.

Notre mémoire comporte 3 chapitre principales .

Dans le premier chapitre, on a vire létude des équations différentielles de premiere degré et premier ordre et pour la résolution on utilise les méthodes suivantes :

- La méthode de séparation de variables.

- équations différentielles homogéne .

Equations différentielles de degré supérieur et d'ordre 1 .

Equations différentielles de deuxiéme ordre.

Dans le deuxiéme chapitre, on va traiter les systémes différentielles homogéne d'ordre p, avec des coefficients de matrice constant en utilisation les valeurs propres réel ou complexe.

On résoudre aussi des systémes différentielles à coefficients variables.

Dans le dernier chapitre, on va tester la stabilité des systémes différentielles à coefficient constant et on va voir un exemple qui va bien détaillé les cas .

Chapitre 1

Équations différentielles ordinaires d'ordre 1 et 2

On rencontre fréquemment des problémes consistant la recherche d'une fonction inconnu $y(x)$ d'une variable x . Beaucoup de ces problémes conduisent, à une équation différentielle c'est-à-dire à une équation de la forme:

$$f(x, y, ý, ÿ) = 0 .... \ (1.1).$$

On distingue trois classes principales d'équations différentielles du premier ordre :

1. Équations dont on peut séparer les variables.
2. Équations homogènes (où ý ne dépend que du rapport y/x).
3. Équations linéaires.

1.1 Méthode de résolution de certaines équations différentielles linéaires d'ordre 1

1.1.1 Équations aux variables séparée

On appelle équations à variables séparées les équations différentielles du prémiére ordre qui peuvent s'écrire sous la forme:

$$\acute{y}f(y) = g(x) \qquad (1),$$

f(y) étant une fonction de y et g(x) une fonction de x.

En utilisant la notation diférentielle une telle équation peut s'écrire encore:

$$f(y)dy = g(x)dx \quad (2),$$

en désignant par F(y) une primitive prise par rapport à la variable y de la fonction f(y) et par G(x) une primitive prise par rapport à la variable x de la fonction g(x).

L'égalité (2) exprime que la différentielle de F(y) est égale à la différentielle de G(x), c'est- à- dire que les fonctions F(y) et G(x) différent d'une constante l'égalité (2) est donc équivalente à :

$$F(x) \ = \ G(x) \ + \ c.$$

1.1.2 Équation homogène

$f(x, y)$ est une fonction homogène de degré n, c'est -à-dire vérifiant:

$$F(tx, ty) = t^n F(x, y), \ \forall t \ \in \ \mathbb{R}^*, n \in \mathbb{N}$$

une équation différentielle $\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f(tx, ty)$ est dite homogène si $f(x, y)$ homogêne de degré 0.

L'équation homogène elle est de la forme :

$$\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x}).$$

$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = f(tx, ty)$ on pose $t = \frac{1}{x}$ alors $\frac{dy}{dx} = f(1, \frac{y}{x}) = g(\frac{y}{x})$.

L'équation homogène se transforme en équation à variables separes, on pose le changement de variable suivant: $v = \frac{y}{x}$.

Exemple 1.1.1 $y'(x) = \frac{y}{x} - 1 = g(\frac{y}{x})$

on pose $v = \frac{y}{x}$, alors : $y(x) = xv(x)$

$\Rightarrow y' = v(x) + xv'(x)$

$$\Rightarrow y'(x) - v(x) = -1 = xv'(x)$$

$v'(x) = -\frac{1}{x}$ Alors:

$$v = -ln\,|x| + c \ \Rightarrow y(x) = x(-ln\,|x| + c).$$

1.1.3 Équation homogène de la forme $\acute{y} = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$

De la forme :

$$\frac{dy}{dx} = \acute{y} = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}).$$

Si on pose : $a_1x + b_1y + c_1$ est l'équation de la droite $\triangle_1$ et $a_2x + b_2y + c_2$ est l'équation de la droite $\triangle_2$.

Alors l'équation homogène:

$$\acute{y} = f(\ \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}),$$

se transforme en une équation à variable séparée :

Si: $a)$: $(\triangle_1)\|(\triangle_2)$ alors :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k \ \Longleftrightarrow\ a_2 = ka_1, b_2 = kb_1$$

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ka_1x + kb_1y + c_2}) = f(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}).$$

on pose :

$$z = a_1x + b_1y$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a_1 + b_1\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = a_1 + b_1f(\frac{z + c_1}{kz + c_2}),$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{a_1 + b_1f(\frac{z+c_1}{kz+c_2})} = dx,$$

on trouve : $z = Q(x)$, pour revenir aux variables d'origine $y = q(x)$, elle est la solution générale de l'équation donnée.

$b)$: Équation différentielle homogène puis équation à variables séparées si:

$$(\triangle_1) \cap (\triangle_2) \neq \phi,$$

c'est-à- dire $\triangle_1$ coupe $\triangle_2$ telle que:

$$\triangle_1 \ : \ a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$\triangle_2 \ : a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

Soient :

$$((\triangle_1) \cap (\triangle_2)) = \ \{A(x_0, y_0)\} \Longleftrightarrow \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2},$$

on utilise la transformation suivante:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$$

$$dy = dY, dx = dX, \ \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX},$$

$$\frac{dY}{dX} = f(\frac{a_1(X + x_0) + b_1(Y + y_0) + c_1}{a_2(X + x_0) + b_2(Y + y_0) + c_2}) = f(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}),$$

elle est une équation différentielle homogêne et peut être transformé en équation à variable séparer si on pose:$Y = vX$.

Exemple 1.1.2 $(x - y + 5)dy - (x + y - 1)dx = 0 \ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x+y-1}{x-y+5}$

cette équation unhomogène, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

Donc la droite $(\triangle_1)$ intersect à $(\triangle_2)$ telle que :$\begin{cases} (\triangle_1) : x + y - 1 = 0 \\ (\triangle_2) : x - y + 5 = 0 \end{cases}$,

pour trouver le point d'intersection, on résolut la système suivante :

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ x-y+5=0 \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$$

on pose : $x = X - 2$; $y = Y + 3$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX} = \frac{(X-2)+(Y+3)-1}{(X-2)-(Y+3)+5} \Longrightarrow \frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y}$.

c'est une équation différentielle homogène pour la résoudre on utilise la transformation suivante :$Y = vX$,

$\frac{dY}{dX} = X\frac{dv}{dX} + v = \frac{X+vX}{X-vX} = \frac{1+v}{1-v} \Longrightarrow X\frac{dv}{dX} + v = \frac{1+v}{1-v}$

$\Leftrightarrow X\frac{dv}{dX} = \frac{1+v}{1-v} - v \Longrightarrow X\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1-v}$,

alors: $\frac{1-v}{1+v^2}dv = \frac{dX}{X}$ cette équation est à variables séparers.

$\frac{dv}{1+v^2} - \frac{v}{1+v^2}dv = \frac{dX}{X}$, on intégre les deux membres on a :

$arctg(v) - \frac{1}{2}log(1+v^2) = log\left|x\right| + c_1$

$2arctg(v) - log(1+v^2) = 2log\left|x\right| + 2c_1$

$2arctg(v) = log(X^2)(1+v^2) + 2c_1$,

on a: $Y = vX$

$2arctg\frac{Y}{X} = log(X^2)(1+\frac{Y^2}{X^2}) + 2c_1$

$2arctg\frac{Y}{X} = log(X^2+Y^2) + 2c_1$,

on retoure aux les variables d'origine:

$2arctg(\frac{y-3}{x+2}) = log(y^2 + x^2 - 6y + 4x + 13) + c_2$.

1.1.4 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Ce sont les équations de la forme:

$$\acute{y} = P(x)y + Q(x)......(1),$$

où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions données de la variable x.sur le mème intevalle.

Dans la cas où la fonction $Q(x)$ est nulle, l'équation (1) est dite sans second membre.on homogéne De toute façon l'équation :

$$\acute{y} = P(x)y \;........(2),$$

est dite l'équation sans second membre associeé à l'équation (1).

pour intégrer l'équation (1) on commance par intégrer l'équation sans deuxiéme membre associée.

En laissant de côté l'intégrale particulière $y = 0$, on voit que l'équation (2) s'écrit:

$$\frac{dy}{y} = P(x)dx,$$

cette derniére équation est à variables séparées .

Désignons par $A(x)$ une primitive de la fonction $P(x)$ et intégrons membre à membre on obtient:

$$log\,|y| = A(x) + c$$

on encore :

$$|y| = e^c e^{A(x)}$$

c'est -à-dire:

$$y = \pm e^c e^{A(x)}$$

on pose $k = \pm e^c$ donc:

$$y = ke^{A(x)}.k \in \mathbb{R}$$

Définition 1.1.1 *Soient* (1) *une équation différentielle du premier ordre et (2) l'équation différentielle homogène associée on note(s) l'ensemble des solutions de (1) et* (s_h) *l'ensemble des solution de (2).*

Soit y_p une solution particuliere de (1), alors:

$$s = \{y_p + y_h \quad , y_h \in s_h\}\,.$$

Résolution de y_p par la méthode de la variation de la constante

On peut procéder de la façon suivante pour la recherche de la solution générale de l'équation y_p :

on cherche la solution sous la forme:

$$y = k(x)e^{-A(x)}$$

où A est primitive de p.

$$\acute{y} = \acute{k}(x)e^{-A(x)} - k(x)p(x)e^{-A(x)} = (\acute{k}(x) - k(x)p(x))e^{-A(x)}$$

$$\Longleftrightarrow \; (\acute{k} - kp)(x)e^{-A(x)} + p(x)k(x)e^{-A(x)} = Q(x),$$

$$\Longleftrightarrow \acute{k}(x) = Q(x)e^{A(x)}$$

$$k(x) = \int Q(t)e^{A(t)}dt \ ,$$

par conséquent la solution générale de y_p est :

$$y = e^{-A(x)} \int e^{A(t)} Q(t)dt \ .$$

1.1.5 Équation de lagrange

Ceci s'applique en particulier aux équations de lagrange, c'est - à - dire aux équations de la forme :

$$y = xf(\acute{y}) + g(\acute{y}),$$

telle que : $f(\acute{y}) \neq \acute{y}, \acute{y} = \frac{dy}{dx}$,

on pose $\acute{y} = p$, alors équation de la forme $y = xf(p) + g(p)$, et on est donc ramené à intégrer l'équation :

$$p = f(p) + \left[x\acute{f}(p) + \acute{g}(p) \right] \frac{dp}{dx},$$

en exceptant certaines solutions possibles correspondant aux cas où p serait constant, on est ramené à intégrer l'équation linéaire :

$$[p - f(p)]\frac{dx}{dp} = x\acute{f}(p) + \acute{g}(p),$$

on remarquera que si λ est une racine de l'équation:

$p - f(p) = 0$, c'est-à- dire on a $\lambda = f(\lambda)$, on peut prendre p constant égale à λ, cequi condui à l'intégrale singuliére:

$$y = xf(\lambda) + g(\lambda),$$

de l'équation de lagrange .

Exemple 1.1.3 *soit à intégrer l'équation de lagrange:*

$$y = 2x\acute{y} + \acute{y}^3$$
$$f(\acute{y}) = 2\acute{y}, \quad g(\acute{y}) = \acute{y}^3,$$

on pose : $p = \acute{y}$

alors : $y = 2xp + p^3$,

$$p = 2p + 2x\frac{dp}{dx} + 3p^2\frac{dp}{dx}$$
$$\Longrightarrow -p = (2x + 3p^2)\frac{dp}{dx} \Longrightarrow -p\frac{dx}{dp} - 2x = 3p^2,$$

on est donc raméne à intégrer l'équation différentielle linéaire :$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = -3p$, on utilisé la méthode de facteur d'intégration pour résolut là :

$$\rho = e^{\int \frac{2}{p}dp} = e^{\log p^2} = p^2$$
$$\frac{d}{dp}(p^2x) = -3p^3 \Longrightarrow d(p^2x) = -3p^3dp.$$

L'équation différentielle linéaire admet donc pour intégrale générale:

$$x = \frac{-3}{4}p^2 + \frac{c}{p^2},$$

et l'intégrale générale de l'équation de lagrange est définie sous forme paramétrique par les équations :

$$\begin{cases} x = -\frac{-3}{4}p^2 + \frac{c}{p^2} \\ y = 2xp + p^3 \end{cases}$$

l'équaion $f(p) = p$ admet ici pour une seule solution $p = 0$ qui conduit à la seule intégrale singuliére $y = 0$.

1.1.6 Équations de Clairaut

Si dans l'application précédente la fonction $f(p)$ est égale à p, le raisonnement précédent ne s'applique pas .

L'équation de lagrange prend alors la forme particuliére :

$$y = x\acute{y} + g(\acute{y})$$

et elle est dite dans ce cas équation de Clairaut.

Cette fois on a pour toute valeur λ la relation $f(\lambda) = \lambda$ et par suite on a la famille de solutions :

$$y = \lambda x + g(\lambda),$$

pour toute valeur λ telle que $g(\lambda)$ soit défini .

$$(x + g'(p))\frac{dp}{dx} = 0,$$

qui conduit aux solutions $p =$ constante que nous venons d'envisager et à la solution $x + g'(p) = 0$ qui permet de définir l'intégrale particuliére :

$$\begin{cases} x = -g'(p) \\ y = px + g(p) \end{cases} \qquad (1)$$

on voit donc qu'ici c'est la fonction linéaire $y = xp + g(p)$ (p étant une constante quelconque) qui est l'intégrale générale de l'équation de Clairaut et c'est la courbe C, représentée paramétriquement par les équation (1) qui sont représanté par des courbes intégrales singuliéres.

Exemple 1.1.4 $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$

on pose: $y' = \frac{dy}{dx} = p$.

pour dériver deuxiéme membre l'équation, on trouve :

$\frac{dy}{dx} = p = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\frac{dp}{dx}$

$\Longrightarrow (x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}})\frac{dp}{dx} = 0$

alors: $\frac{dp}{dx} = 0$, donc $p = \lambda$, telle que (λ étant une constante quelconque) la solution générale de l'équation de Clairaut donnée: $y = \lambda x + \sqrt{1 + \lambda^2}$

$x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$, donc $x = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$,

est pour courbe intégrale singuliére la courbe définie paramétriquement par les égalités :

$\begin{cases} x=-\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ y=xp+\sqrt{1+p^2} \end{cases}.$

1.2 Méthodes de résolution des équations différentielles du second ordre

Définition 1.2.1 *:On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants une équation de la forme :*

$$a\ddot{y}(x) + b\acute{y}(x) + cy(x) = f(x) \quad ....(E)$$

où a,b et c sont des une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.

On dit qu'une équation différentielle est homogène au sans second membre si f est fonction nulle sur I:

$$a\ddot{y}(x) + b\acute{y}(x) + cy(x) = 0 \quad .... \quad (E_h).$$

1.2.1 Méthode de résolution l'équation sous la forme a$\ddot{y}(x)+b\acute{y}(x)+cy(x) = 0$

On appelle équation caractéristique de l'équation (E) l'équation du second dégré :$ar^2 + br + c = 0$

on se place sous les hypothéses de cétte section, et on pose $\triangle = b^2 - 4ac$.

Si: 1) $\triangle > 0$: L'équation caractéristique admet deux racines réelles r_1 et r_2, telle que:

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a},$$

et les solutions de (E_h) sont les fonctions définies par :

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}, \quad c_1 \ , c_2 \ \in \mathbb{R}.$$

2) $\triangle = 0$: L'équation caractéristique admet une racine réelle double r_0 telle que : $r_0 = \frac{-b}{2a}$ et les solutions de (E_h) sont les fonctions définies par $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{r_0 x}$, c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$.

3) $\triangle < 0$: L'équation caractéristique admet deux racine complexes conjuguées:

$$r_1 = \alpha + i\beta \ et \ r_2 = \alpha - i\beta, \quad \alpha \ , \beta \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de (E_h) sont les fonctions par :

$$y(x) = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x), \ \ c_1, c_2 \ \in \mathbb{R}.$$

1.2.2 Équation sous la forme

Soit:

$$\text{ÿ}(x) + a\acute{y}(x) + by(x) = f(x)......(1),$$

$f : I \ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $a, b \in \mathbb{R}$.

Résoudre sans second membre:

$$\text{ÿ(x)} + a\acute{y}(x) + by(x) = 0...... \ (2),$$

qui devient : $r^2 + ar + b = 0....(2)$ admet comme solution générale:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

aprés : on concidère

La solution depend de $\triangle$: $\ c_1 \ \rightarrow c_1(x)$ et $c_2 \ \rightarrow \ c_2(x)$.

Trouvons (2) fonctions c_1, c_2 telle que :

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x).$$

Soit la solution générale de l'équation (1)

$$\acute{y}(x) = \acute{c}_1(x) y_1(x) + c_1(x) \acute{y}_1(x) + \acute{c}_2(x) y_2(x) + c_2(x) \acute{y}_2(x),$$

cherchons $\acute{c}_1$ et $\acute{c}_2$ telle que :

$$\acute{c}_1(x) y_1(x) + \acute{c}_2(x) y_2(x) = 0$$

$$\acute{y}(x) = c_1(x)\acute{y}_1(x) + c_2(x)\acute{y}_2(x)$$

$$\ddot{y}(x) = \acute{c}_1(x)\acute{y}_1(x) + \acute{c}_2(x)\acute{y}_2(x) + c_1(x)\ddot{y}_1(x) + c_2(x)\ddot{y}_2(x),$$

on injecte $\acute{y}(x)$ et $\ddot{y}(x)$ dans (1)

$(\acute{c}_1\acute{y}_1 + \acute{c}_2\acute{y}_2 + c_1\ddot{y}_1 + c_2\ddot{y}_2) + a(c_1y_1' + c_2y_2') + b(c_1y_1 + c_2y_2) = f(x),$

$c_1(\ddot{y}_1 + a\acute{y}_1 + by_1) + c_2(\ddot{y}_2 + a\acute{y}_2 + by_2) + \acute{c}_1\acute{y}_1 + \acute{c}_2\acute{y}_2 = f(x),$

on a : $\ddot{y}_1 + a\acute{y}_1 + by_1 = 0$ *et* $\ddot{y}_2 + a\acute{y}_2 + by_2 = 0$ car y_1 et y_2 solution.

$$\acute{c}_1\acute{y}_1 + \acute{c}_2\acute{y}_2 = f(x),$$

$\acute{c}_1$et $\acute{c}_2$ sont solution du systéme :

$$\acute{c}_1y_1 + \acute{c}_2y_2 = 0,$$

$$\acute{c}_1y_1' + \acute{c}_2\acute{y}_2 = f(x),$$

$$\acute{c}_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & \acute{y}_2(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \acute{y}_1(x) & \acute{y}_2(x) \end{vmatrix}}, \qquad \acute{c}_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ \acute{y}_1(x) & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ \acute{y}_1(x) & \acute{y}_2(x) \end{vmatrix}},$$

Aprés on intégré $\acute{c}_1(x)$ et $\acute{c}_2(x)$ pour trouver $c_1(x)$ et $c_2(x)$.

La solution de (1) est donnée par :

$$y(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x).$$

Remarque 1.2.1 *La solution générale de l'équation :*

$\ddot{y}+a\acute{y} + by = f(x), (a, b \in \mathbb{R})$ est donnée par:

$$y(x) = k_1y_1(x) + k_2y_2(x) + y^*(x),$$

telle que : $k_1y_1(x) + k_2y_2(x)$ c'est un solution générale, $y^*(x)$ solution particuliere de (1).

Exemple 1.2.1 $\ddot{y}(x) - 3\acute{y}(x) + 2y(x) = e^{2x}$ (1)

La solution l'équation homogène :

$$\H{y} - 3\acute{y} + 2y = 0 \qquad (\ 2).$$

La solution équation caracteristique:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \qquad (3),$$

$$(3) \iff (r-2)(r-1) = 0$$

$$\iff r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 2.$$

Alors les solution l'équation (2):

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$

on pose: $c_1 = c_1(x)$ et $c_2 = c_2(x)$ la solution le systéme.

$\acute{c}_1(x)e^x + \acute{c}_2(x)e^{2x} = 0$

$\acute{c}_1(x)e^x + 2\acute{c}_2(x)e^{2x} = e^{2x}$

$\Longrightarrow \acute{c}_2(x)e^{2x} = e^{2x}$

$\iff \acute{c}_2(x) = 1$

$\iff c_2(x) = x + k_2$

$\acute{c}_1(x)e^x = -\acute{c}_2(x)e^{2x}$

$\Longrightarrow \acute{c}_1(x)e^x = -e^{2x}$

$\iff \acute{c}_1(x) = -e^x$

$\iff c_1(x) = -e^x + k_1.$

Alors la solution l'équation (1) de la forme:

$$\begin{aligned} y(x) &= (-e^x + k_1)e^x + (x + k_2)e^{2x} \\ &= -e^{2x} + k_1 e^x + xe^{2x} + k_2 e^{2x} \end{aligned}$$

$y(x) = (x - 1 + k_2)e^{2x} + k_1 e^x.$

Chapitre 2

Les systémes différentieles linéairs

Les systémes différentieles linéairs ont une grande importance pratique, carde nombreux phénoménes naturels peuvent se modéliser par de tels systémes .

On sait d'autre part résoudre complétement lrs systémes à coefficients constants, le calcul des solution se ramenant à des calculs d'algébre linéaire (diagonalisation on triangularisation de matrices). Dans toute la suite, $\mathbb{k}$ désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.0.2 *Un systéme différentielle linéaire du premier ordre dans $\mathbb{k}^n$ est une équation :*

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)..........(E).$$

où $y(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{y}_1(t) \\ \vdots \\ \mathrm{y}_m(t) \end{pmatrix} \in \mathrm{k}^m$, est la fonction inconnue et

$$A(t) = (a_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq m} \in M_m(\mathbb{k}), \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_m(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^m,$$

sont des fonctions continues données :

$$A : I \rightarrow \ M_m(\mathbb{k}) = \{matrices\ carrées\ m \times m\ sur\ \mathbb{k}\},\ B : I \rightarrow \mathbb{k}^m,$$

définies sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$.

2.1 Systémes différentiels à coefficients constants

Ce sont les systémes de la forme:

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t).......(E),$$

où la matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\Bbbk)$ est indépendante de t.

2.1.1 Solutions exponentielles élémentaires $\frac{dy}{dt} = Ay$

On cherche une solution de la forme $y(t) = e^{\lambda t}v$ où $I \in \Bbbk$, $v \in \Bbbk^m$ sont des constantes .

Cette fonction est solution si et seulement si $\lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av$, soit:

$$Av = \lambda v.$$

On est donc amené à chercher les valeurs propres et vecteurs propres de A.

Cas simple : A est diagonalisable

Il existe alors une base $(v_1, ..., v_m) de$ $\Bbbk^m$ constituée de vecteurs propres de A, de valeurs propres respectives $\lambda_1, ..., \lambda_m$.

On obtient donc m solutions linéairement indépendantes

$$t \to e^{\lambda_j t}v_j, 1 \leq j \leq m.$$

La solution générale est donnée par

$$y(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}v_1 + ... + \alpha_m e^{\lambda_m t}v_m , \quad a_j \in \Bbbk.$$

Lorsque A est n'est pas diagonalisable, on a besoin en général de la notion d'exponentielle d'une matrice. Toutefois le cas des systémes 2×2 à coefficients constants est suffisamment simple pour qu'on puisse faire les calculs "à la main".

2.1.2 Solution générale du systéme sans second membre$\frac{dy}{dt} = Ay$

Théorème 2.1.1 *La solution y telle que $y(t_0) = v_0$ est donné par:*

$$y(t) = e^{(t-t_0)A}.v_0.$$

Démonstration. On a $y(t_0) = e^0.v_0 \ = I.v_0 \ = v_0$. ■

D'autre part, la série entiére :

$$e^{tA} \ = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n,$$

est de rayon de convergence $+\infty$. On peut donc dériver terme à terme pour tout t$\in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} A^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} t^p A^{p+1},$$

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = A.e^{tA} = e^{tA}.A \quad .$$

Par conséquent, on a bien :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{(t-t_0)A}.v_0) = Ae^{(t-t_0)A}.v_0 = Ay(t).$$

En prenant $t_0 \ = 0$, on voit que la solution générale est donnée par $y(t) = e^{tA}.v_0$ avec v$\in \mathbb{k}^m$.

Le calcul de e^{tA} se raméne au cas d'un bloc triangulaire $B = \lambda I \ + N \ \in M_p(\mathbb{C})$.

Dans ce cas on a $e^{tB} = e^{\lambda t I} e^{TN} = e^{\lambda t} e^{TN}$, avec

$$e^{tN} = \sum_{n=0}^{p-1} \frac{t^n}{n!} N^n = \begin{pmatrix} 1 & Q_{1,2}(t) \; .... & Q_{1,p}(t) \\ & 1 & Q_{2,3}(t) ... Q_{2,p}(t) \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 \quad Q_{p-1,p}(t) \\ & 0 & 1 \\ & . & \end{pmatrix},$$

où $Q_{i,j}(t)$ est un polynôme de degré$\leq$ j-i, avec $Q_{i,j}(0) = 0$. Les composantes de $y(t)$ sont donc toujours des fonctions exponentielles-polynômes $\sum_{1 \leq j \leq s} p_j(t) e^{\lambda_j t}$ où $\lambda_1, ..., \lambda_s$ sont les valeurs propres complexes de A(même si $K = \mathbb{R}$).

Théorème 2.1.2 *Soit A une matrice diagonalisable $A = PQP^{-1}$, Q une matrice diagonale, alors la solution du systéme*

$$\begin{cases} \acute{y} &= Ay(t) \\ y(0) &= v_0 \end{cases} \text{.......}(*) \quad \text{s'écrit:}$$

$$y(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_m t} \\ & & . & \end{pmatrix} P^{-1}.v_0 \text{ où } Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m \\ & & . & \end{pmatrix}.$$

Démonstration. on trouve : $y(t) = e^{tA}v_0 \;= e^{t(pQp^{-1})}v_0 \;= e^{p(tQ)p^{-1}}.v_0$ ■

$$= Pe^{ta}P^{-1}.v_0$$

$$= P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_m t} \\ & & . & \end{pmatrix} P^{-1}.v_0 \quad .$$

Exemple 2.1.1 $\begin{cases} \acute{x}=2x-y \\ \acute{y}=x+2y \end{cases}$

avec $x(0) = a, y(0) = b,\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$.

si: $\lambda = 1$ alors $Av_1 \;= 1v_1, v_1 \;= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$,

$\begin{cases} 2\alpha+\beta=\alpha \\ \alpha+2\beta=\beta \end{cases} \Rightarrow \beta = -\alpha$ on prend $\beta = 1$,

$\Rightarrow v_1 \;= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

si: $\lambda = 3$ alors $Av_2 = 3v_2, v_2 \;= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

$\begin{cases} 2\alpha+\beta=3\alpha \\ \alpha+2\beta=3\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta$ on prend $\beta = 1$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2.1.3 Solution générale de $\frac{dy}{dt} = Ay + B(t)$

Si aucune solution évidente n'apparraît, on peut utiliser la méthode de variation des constantes, cest-à-dire qu'on cherche une solution particuliére sous la forme :

$$y(t) = e^{tA}.v(t)$$

où v est supposée différentiable . Il vient :

$$\acute{y}(t) = Ae^{tA}.v(t) + e^{tA}.\acute{v}(t)$$

$$= Ay(t) + e^{tA}.\acute{v}\ (t) \quad .$$

Il suffit donc de choisir v telle que $e^{tA}.\grave{v}\ (t) = B(t)$, soit par exemple

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-u\,\mathrm{A}} B(u)du\ ,\ t_0 \in I.$$

On obtient ainsi la solution particuliére

$$y(t) = e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-u\,\mathrm{A}} B(u)du = \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u)du$$

qui est la solution telle que $y(t_0) = 0$. La solution générale telle que $y(t_0) = v_0$ est donc:

$$y(t) = e^{(t-t_0)}.v_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-u)A} B(u)du.$$

2.2 Équations différentielles linéaires d'ordre p aux coefficients constants

On considére ici une équation différentielle sans second membre

$$a_p y^{(p)} + ... + a_1 \grave{y} + a_0 y = 0..........(E),$$

où $y : \mathbb{R} \to \mathbb{k}$, $t \to y(t)$ est la fonction inconnue, et où les $a_j \in \mathbb{k}$ sont des constantes, $a_p \neq 0$.

L'équation (E) est équivalente à un systéme différentiel (S) d'ordre 1 dans $\mathbb{k}^p$, qui est le systéme linéaire sans second membre $\grave{y}(t) = Ay$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{p-1} \end{pmatrix}, \; c_j = -\frac{a_j}{a_p}, \;\; avec \; A = PQP^{-1}.$$

2.2.1 Cas où P à toutes ses racines simples

Théorème 2.2.1 *Si P possède p racines distintes λ_1 ,.....,λ_p on obtient p solutions distinctes*

$$t \longmapsto e^{\lambda_j t}, \; 1 \leq j \leq p.$$

On verra plus loin que ces solutions sont linéairement indépendantes sur $\mathbb{C}$.

L'ensemble des solution est donc l'éspace vectoriel de dimension p des fonctions

$$y(t) = a_1 e^{\lambda_1 t} + ... + a_p e^{\lambda_p t}, \;\; a_j \in \mathbb{C}.$$

Démonstration. D'aprés le théoréme (2) on a :

$$y(t) = P \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_m t} \end{pmatrix} P^{-1} v_0,$$

■

on pose :

$$P^{-1}v_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}, \ P = (P_{ij})_{1\le i,j\le m} \ ,$$

$$y(t) = P\begin{pmatrix} c_1e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_me^{\lambda_m t} \end{pmatrix},$$

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{m} P_{i,j}c_je^{\lambda_j t}, \quad posons : P_{i,j}c_j = a_{i,j} \quad , alors :$$

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}e^{\lambda_j t} = a_{i,1}e^{\lambda_1 t} + ... + a_{i,m}e^{\lambda_m t}.$$

Exemple 2.2.1 $\left\{\begin{smallmatrix} \dot{x}=Ax \\ x(0)=x_0 \end{smallmatrix}\right.$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix}$,

on a trois valeurs propres distincts réels : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$.

Si: $\lambda_1 = -1$ alors

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -8 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ \ ....(1) \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \ \ ....(2) \\ -8x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0 \ \ .....(3) \end{cases}$$

$(1) - (2) + (3) \Leftrightarrow \ -8x_1 \ - 6x_2 \ = 0 \Rightarrow \ x_1 = \frac{-3}{4}x_2, \ x_3 = 2(x_1 + x_2), \ 2x_3 \ = x_2.$

on pose $x_3 = 1 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si: $\lambda_2 = 2$, alors

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -8 & -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ \ ....(1) \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \ \ ....(2) \\ -8x_1 - 5x_2 - 5x_3 = 0 \ \ .....(3) \end{cases}$$

$(1) + (2) : \Leftrightarrow x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3$, on pose $x_3 = 1$, alors : $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si: $\lambda_3 = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -8 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \; ....(1) \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \; ....(2) \\ -8x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 \; .....(3) \end{cases}$$

Alors : $x_1 = -\frac{4}{7}$, $x_2 = \frac{5}{7}, x_3 = 1.$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{5}{7} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$p = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{4}{7} & 0 \\ 2 & \frac{5}{7} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , p^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{2} & \frac{7}{4} & \frac{7}{4} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{13}{12} & -\frac{1}{12} \end{pmatrix}.$$

$$A = p \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} p^{-1} \quad , \qquad S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

$$x = e^{tA}x_0 = p \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} p^{-1}.x_0.$$

2.2.2 Cas où P a des racines multiples

On peut alors écrire:

$$P(\lambda) = a_p \prod_{j=1}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{m_j},$$

où m_j est la multiplicité de la racine λ_j, avec

$$m_1 + ... + m_s = p.$$

Considérons l'opérateur différentiel

$$P(\frac{d}{dt}) = \sum_{i=0}^{p} a_i \frac{d^i}{dt^i}.$$

On voit que l'équation différentielle étudiée peut se récrire :

$$P(\frac{d}{dt})y = 0....(E),$$

et on a d'autre part la formule :

$$P(\frac{d}{dt})e^{\lambda t} = P(\lambda)e^{\lambda t},\ \forall\lambda \in \mathbb{C}.$$

Comme les dérivées partielles $\frac{d}{dt}$et$\frac{d}{d\lambda}$commutent, on obtient

$$P(\frac{d}{dt})(t^q e^{\lambda t}) = P(\frac{d}{dt})(\frac{d^q}{d\lambda^q}e^{\lambda t}) = \frac{d^q}{d\lambda^q}(P(\frac{d}{dt})e^{\lambda t}) = \frac{d^q}{d\lambda^q}(P(\lambda)e^{\lambda t}),$$

d'où, grace à la formule de Leibnitz :

$$P(\frac{d}{dt})(t^q e^{\lambda t}) = \sum_{i=0}^{q} C_q^i p^{(i)}(\lambda)e^{\lambda t}.$$

Comme λ_j est racine de multiplicité m_j, on a $P^{(i)}(\lambda_j) = 0$ pour $0 \leq i \leq m_j - 1$, et $P^{(m_j)}(\lambda_j\ ) \neq 0$. On en déduit:

$$P(\frac{d}{dt})(t^q e^{\lambda_j t}) = 0, \quad 0 \leq q \leq m_j - 1$$

L'équation (E) admet donc les solution :

$$y(t) = t^q e^{\lambda_j t}\ ,\ 0 \leq q \leq m_j - 1,\ 1 \leq j \leq s,$$

soit au total $m_1 + ... + m_s = p$ solutions.

Lemme 2.2.1 *Si $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{C}$ sont des nombres complexes deux à deux distincts, alors les fonctions :*

$$y_{j,q}(t) = t^q e^{\lambda_j t}, \ \ 1 \leq j \leq s\ , \quad q \ \epsilon\ \mathbb{N},$$

sont linéairement indépendantes.

Démonstration. Considérons une combinaison linéaire finie :

$$\sum a_{j,q} y_{j,q} = 0, \qquad a_{j,q} \in \mathbb{C}.$$

■

Si les coefficients sont non tous nuls, soit N le maximum des entiers q tels qu'il existe j avec $a_{j,q} \neq 0$ .Supposons par exemple $\alpha_{1,N} \neq 0$.On pose alors:

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^N (\lambda - \lambda_2)^{N+1} ...(\lambda - \lambda_s)^{N+1}.$$

Il vient $Q^{(i)}(\lambda_j) = 0$ pour $j \geq 2$ et $0 \leq i \leq N$, tandis que $Q^{(i)}(\lambda_1) = 0$ pour $0 \leq i \leq N$ et $Q^{(N)}(\lambda_1) \neq 0$. On en déduit

$$Q(\frac{d}{dt})(t^q e^{\lambda_j t}) = \sum_{i=0}^{q} C_q^i Q^{(i)}(\lambda_j) t^{q-i} e^{\lambda_j t} = 0, \text{ pour } 0 \leq q \leq N \ , \quad 1 \leq j \leq s \ ,$$

sauf si $q = N$, $j = 1$, auquel cas

$$Q(\frac{d}{dt})(t^N e^{\lambda_j t}) = Q^{(N)}(\lambda_1) e^{\lambda_1 t}.$$

En appliquant l'opérateur $Q(\frac{d}{dt})$ à la relation $\sum a_{j,q} t^q e^{\lambda_j t} = 0$ on obtient alors

$$a_{1,N} Q^{(N)}(\lambda_1) e^{\lambda_1 t} = 0,$$

ce qui est absurde puisque $a_{1,N} \neq 0$ et $Q^{(N)}(\lambda_1) \neq 0$.

2.2.3 Ou la matrice a des valeurs propres (complexes)

$A = c; \ a, b \in \mathbb{R}, \ b \neq 0.$

$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 + b^2).$

$\grave{\Delta} = -b^2 < 0, \ \Omega = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\begin{cases} a+\lambda_1 = ib = \bar{\lambda}_2 \\ \lambda_2 = a - ib = \bar{\lambda}_1 \end{cases}, \ \theta = \ arccos \frac{a}{\Omega}$,

$$A = \begin{pmatrix} \Omega\cos\theta & -\Omega\sin\theta \\ \Omega\sin\theta & \Omega\cos\theta \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Interprétation Géométrique

$x \in \mathbb{R}^2 \rightarrow Ax = x^*, \|x\| = 1$

$$x = \begin{pmatrix} \cos Q \\ \sin Q \end{pmatrix},$$

$$x^* = \begin{pmatrix} \cos Q & -\sin Q \\ \sin Q & \cos Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos Q \\ \sin Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + Q) \\ \sin(\theta + Q) \end{pmatrix}.$$

A est une composée d'une rotation d'angle θ et d'une homothétieΩ.

Interprétation Algébrique $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $(x, y) \longmapsto x + iy = z$

A$\downarrow$ $\quad\downarrow x = (a + ib)$

$(ax - by, bx + ay)$ $\quad (ax - by)i(bx + ay)$.

Exemple 2.2.2 $A^k = \Omega^k \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$.

Résolution du systéme

$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - by \\ \frac{dy}{dt} = bx + ay \end{cases}$ Notons $z = x + iy$,

$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt} = (ax - by) + i(bx + ay)$

$= (a + ib)(x + iy) = \lambda z$

$\frac{dz}{dt} = \lambda z \Rightarrow z(t) = ke^{\lambda t}, \quad k \in \mathbb{C}$

on prend $k = u + iv$, $u, v \in \mathbb{R}$,

$\mathrm{e}^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at}.e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$,

$x(t) + iy(t) = z(t) = (u + iv)e^{\lambda t}$

$= (u + iv)e^{at}(\cos bt + i \sin bt) = (ue^{at} \cos bt - ve^{at} \sin bt) + i(ue^{at} \sin bt + ve^{at} \cos bt)$,

d'où la solution $\begin{cases} x(t) = e^{at}(u \cos at - v \sin at) \\ y(t) = e^{at}(u \sin bt + v \cos bt) \end{cases}$ avec $\begin{cases} x(0) = u \\ y(0) = v \end{cases}$.

Exemple 2.2.3 *Résoudre* $\begin{cases} \dot{x} = -2y \\ y' = x + 2y \end{cases}$

A $= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, les valeurs propres $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$,

les valeurs propres associé à λ_1 :

$Q_1 = 1 + i = u + iv \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

les vecteurs propres associé a λ_2 :

$Q_2 = -i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Soit $u = (1, 0)$, $v = (1, -1)$,

$x = (x_1 \ , x_2)$, $x = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = y_1u + y_2v$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = -y_1 \end{cases}$, on bien : $x = py$ avec $p = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$\left\{\begin{smallmatrix} y_1=-x_2 \\ y_2=x_1+x_2 \end{smallmatrix}\right. \Rightarrow y = p^{-1}x \Rightarrow p^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$p^{-1}Ap = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B$,

$\grave{x} = Ax \Leftrightarrow \ \grave{y} = By \ \ , y = p^{-1}x$

$x = (x, y)$, $y = (z, w)$,

$y(t) = ke^{\lambda t} = \ Ke^{t+it} = Ke^t(\cos t + i\sin t)$,

$x(t) = py = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ke^t\cos t \\ ke^t\sin t \end{pmatrix}$,

$\Rightarrow \left\{\begin{smallmatrix} x(t)=ke^t(\cos t+\sin t) \\ y(t)=-ke^t\cos t \end{smallmatrix}\right.$.

2.3 Systémes différentieles linéaires à coefficients variables

2.3.1 Systémes lineaires (cas général)

On veut résoudre :

$$\grave{x} = A(t)x(t) + b(t)....(E).$$

$$A(t) \in M_{n\times n}\ (\mathbb{R})\ , A(t) = (a_{i,j}(t))_{1\leq i,j\leq n}\ ,\ a_{i,j}\ \in\ C^0(I),\ I \textit{ intervalle réelle.}$$

$$b(t) = (b_i(t)),\ b_i \in C^0(I),$$

on lui associe:

$$\left\{\begin{array}{c} \grave{x}(t) = A(t)x(t) + b(t), x(0) = a \\ b(t) = 0 \end{array}\right. .$$

Théorème 2.3.1 *Soit le systéme $\grave{x} = Ax....(\acute{E})$, Alors l'ensemble de toutes les solutions forme un sous-espace vectoriel de $C^1(I)$ de dim n.*

Soit x, y 2 solution $\in C^1(I)$ du systéme (È) et α , $\beta \in \mathbb{R}$.

$(\alpha x + \beta y)' = \alpha\grave{x} + \beta\grave{y}$

$= \alpha Ax + \beta Ay = A(\alpha x + \beta y) \Rightarrow \alpha x + \beta y$ est une solution de (È).

Théorème 2.3.2 *(Liouville)*

$$\forall\ t \in\ I\ ,\ w(t) = w(t_0)\ exp(\int_{t_0}^{t} tr(A)(s)ds).$$

Démonstration. Soit $\{x^1, ..., x^n\}$un systéme fondamental de $A(t) = (a_{i,j}(t))$ ■

$$w(t) = det \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & .... & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & .... & x_2^n \\ & \vdots & & \\ x_k^1 & x_k^2 & .... & x_k^n \\ & \vdots & & \\ x_n^1 & x_n^2 & .... & x_n^n \end{vmatrix} \ (x^j\acute{)}(t) \ = A(t)x^j(t)\ , (x_i^j\acute{)}(t) \ = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l}(t).x_l^j(t),$$

$w \in \varphi^1(I)$

$$\grave{w}(t) = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & .... & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & .... & x_2^n \\ & \vdots & & \\ (x_k^1\ )' & (x_k^2)' & .... & (x_k^n)' \\ & \vdots & & \\ (x_n^1) & x_n^2 & .... & x_n^n \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & .... & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & .... & x_2^n \\ & \vdots & & \\ \sum a_{k,l}x_k^1 & \sum a_{k,l}x_k^2 & .... & \sum a_{k,l}\ x_k^n \\ & \vdots & & \\ x_n^1 & x_n^2 & .... & x_n^n \end{vmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,k}\right) w(t) =$$

$tr(A)w(t)$

$\Rightarrow \frac{\grave{w}(t)}{w(t)} = tr(A)$, $\int_{t_0}^{t} \frac{\grave{w}(s)}{w(s)} ds = \int_{t_0}^{t} trA(s)ds \Rightarrow log \left|\frac{w(t)}{w(t_0)}\right| = \int_{t_0}^{t} trA(s)ds$

$\Rightarrow w(t) = w(t_0) \exp(\int_{t_0}^{t} tr(A)(s)ds).$

2.3.2 Systéme non homogènes b(t) $\neq 0$:

Considerons le systéme :

$$\grave{x} = A(t)x(t) + b(t)...(E),$$

où $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$

$b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continues, on lui associe le systéme homogéne

$$\grave{x}(t) = A(t)x(t)...(\grave{E})$$

Théorème 2.3.3 *Soit $y : I \rightarrow \mathbb{R} \in \varphi^1(I)$ solution de (È) alors : $x : I \rightarrow \mathbb{R} \in \varphi^1(i)$ est une solution de (È), si et seulement si :$\exists! c \in \mathbb{R}^n$*

$x(t) = \aleph(t).c + y(t)$, où $\aleph$ matrice fondamentale.

Démonstration. Supposons que x : $I \rightarrow \mathbb{R} \in \varphi^1(I)$ est solution de (È). ∎

Consideronsz$(t) = x(t) - y(t)$, $z \in \varphi^1(I)$

$$\begin{aligned}
\grave{z}(t) &= \grave{x}(t) - \grave{y}(t) \\
&= (A(t)x(t) + b(t)) - (A(t)y(t) + b(t)) \\
&= A(t)(x(t) - y(t)) = A(t)z(t) \implies z \text{ solution} \\
&\Rightarrow \exists! c \in \mathbb{R}^n \text{ , } z(t) = \aleph(t).c \\
&\Rightarrow x(t) - y(t) = \aleph(t).c \\
&\Leftrightarrow \text{on a } \aleph \in \varphi^1(I) \\
&\Rightarrow \ x \in \varphi^1(I)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\grave{x}(t) &= \aleph(t).c + \grave{y}(t) \\
&= A\aleph(t).c + Ay(t) + b(t) \\
&= A\left[\aleph(t).c + y(t)\right] + b(t) \\
&= Ax(t) + b(t) \ \Rightarrow \ x \text{ solutionde } (\grave{E}).
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Stabilité des systémes linéaires à coefficients constants

On se propose ici d'étudier le comportement des solutions d'une équation différentielle et des ligne intégrales d'un champ de vecteurs lorsque le temps$t$ tend vers l'infini.On s'intéresse essentiellement au cas des équations linéaires ou ‹‹voisines›› a de telles équations.Dans ce cas, le comportement des solutions est gouverné par le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice associée à la partie linéaire de l'équation : une solution est dite stable si les solutions associées à des valeurs voisines de la donnée initiale restent proches de la solution considérée jusqu'à l'infini. Cette notion de stabilité ne devra pas être confondue avec la notion de stabilité d'une méthode numérique,qui concerne la stabilité de l'algorithme sur un intervalle de temps fixé.

3.1 Stabilité des solutions

Définition 3.1.1 *on considére le probléme de Cauchy associé à une équation différentielle:*

$$y' = f(t, y) \ldots\ldots (\mathrm{E}),$$

avec condition initiale $y(t_0) = z_0$,on suppose que la solution de ce probléme existe sur $[t_0 \ + \infty[$.

3.1.1 Cas d'un systéme linéaire à coefficients constants

Nous étudierons d'abord le cas le plus simple, à savoir le cas d'un systéme linéaire sans second membre:

$$Y' = AY \quad ......(E) \quad ,Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & a_{1m} \\ . & & & . \\ . & & & . \\ a_{m1} & . & . & a_{mm} \end{pmatrix},$$

avec $y_j, a_{ij} \in \mathbb{C}$, le cas réel peul bien entendu être vu comme un cas particulier du cas complexe. La solution du probléme de Cauchy de condition initiale $y(t_0) = z$ est donnée par $y(t,z) = e^{(t-t_0)A}.Z$, on a donc:

$$Y(t,z) - Y(t,z_0) = e^{(t-t_0)A}.(z - z_0),$$

et la stabilité est liée au comportement de $e^{(t-t_0)A}$ quand t tend vers $+\infty$, dont la norme $|||e^{(t-t_0)A}|||$ doit rester bornée. Distinguons quelques cas.

$\cdot m = 1, A = (a)$. on a alors:

$$/e^{(t-t_0)a}/ = e^{(t-t_0)\operatorname{Re}(a)}.$$

les solution sont stables si et seulement si cette quantité reste bornée quand t tend vers $+\infty$, c'est-à-dire si $\operatorname{Re}(a) \leq 0$.

De même, les solutions sont asymptotiquement stables si et seulement si $\operatorname{Re}(a) < 0$, et on peut alors prendre:

$$\gamma(t) = e^{(t-t_0)\operatorname{Re}(a)} \overrightarrow{t \longrightarrow +\infty} \quad 0.$$

$\cdot m$ quelconque. Si A est diagonalisable, on se ramène aprés un changement linéaire de coordonnées à

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & . & & & \\ & & . & & \\ & & & . & \\ 0 & & & & \lambda_m \end{pmatrix},$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_m$ désignent les valeurs propres de A. Le systéme se raméne aux équations indépendantes,

$\acute{y}_j = \lambda_j y_j$ et admet pour solution $y_j(t, z) = z_j e^{\lambda_j(t-t_0)}$, $1 \leq j \leq m$.

Les solutions sont donc stables si et seulement si $\mathrm{Re}(\lambda_j) \leq 0$ pour tout j et asymptotiquement stables si et seulement si $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ pour tout j .

Si A n'est pas diagonalisable, il suffit de regarder ce qui se passe pour chaque bloc d'une triangulation de A . Supposons donc

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & & & * \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N.$$

Où N est une matrice nilpotente (triangulaire supérieure) non nulle . Il vient alors :

$$e^{(t-t_0)A} = e^{(t-t_0)\ \lambda I}.e^{(t-t_0)}N$$

$$= e^{\lambda(t-t_0)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-t_\circ)^k}{k!} N^k,$$

donc les coefficients de $e^{(t-t_0)A}$ sont des produits de $e^{\lambda(t-t_0)}$ par des polynômes de $degré \leq m-1$ non tous constants (car $N \neq 0$, donc le degré est au moins 1).

Si $Re(\lambda) <\ 0$, les coesfficients tendent vers 0, et si $Re(\lambda) > 0$ leur module tend vers $+\infty$ car la croissance de l'exponentielle l'emporte sur celle des polynômes .Si Re(λ)=0,

on a $\left|e^{\lambda(t-t_0)}\ \right| = 1$ et par suite $e^{(t-t_0)A}$ est non bornée. On voit donc que les solutions sont asympotiquement stables si et seulement si $Re(\lambda) <\ 0$ et sinon elle sont instables .En résumé, on peut énoncer :

Théorème 3.1.1 *Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m$ les valeurs propres complexes de la matrice A Alors les solutions du systéme linéaire*

$Y' = AY$ sont.

·Asymptotiqueement stables si et seulement si $Re(\lambda_j) <\ 0$ pour tout $j = 1, ..., m$.

·Stables si et seulement si pour tout j ,ou bien $Re(\lambda_j) < 0$, ou bien $Re(\lambda_j) = 0$ et le bloc correspondant est diagonalisable .

3.1.2 Cas d'un champ linéaire de vecteurs

Considérons le systéme

$$\frac{dM}{dt} = AM, \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + by \end{cases} \quad où \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

on supposera det A≠0, de sorte que le champ de vecteurs $\overrightarrow{v}(M) = AM$ admet l'origine pour seul point critique.

Comme le champ des tangentes est invariant par les homothéties de centre O, les courbes intégrales se déduisent les unes des autres par homothéties. Distinguons maintenant plusieurs cas en fonction des valeurs propres de A.

$a)$ **les valeurs propres λ_1, λ_2 de A sont réelles:**

Supposons de plus $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dans ce cas la matrice A est diagonalisable. Aprés changemant de base on peut supposer

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

et le systéme se réduit à:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1 x \\ \frac{dy}{dt} = \lambda_2 y \end{cases},$$

la solution du probléme de Cauchy avec $M(0) = (x_0, y_0)$ est donc

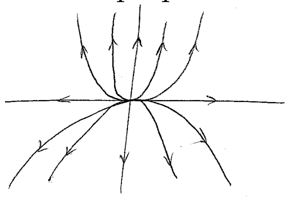
$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{cases},$$

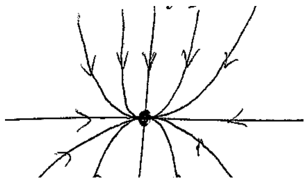
de sorte que les courbes intégrales sont les courbes

$$y = C\,|x|^{\lambda_2/\lambda_1}, \quad C \in \mathbb{R},$$

et la droite d'équation $x = 0$.Distinguons deux sous-cas :

* $\lambda_{1,}\lambda_2$ de même signe et, disons, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ .On a alors $\lambda_2/\ \lambda_1 > 1$.On dit qu'on a affaire à un noeud impropre:

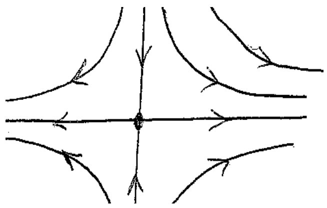




$0 < \lambda_1 < \lambda_2$ $\qquad\qquad$ $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$

noeud impropre instable $\qquad\qquad$ noeud impropre instable

* $\lambda_{1,}\lambda_2$ de signes opposés, par exemple $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Il s'agit d'un col (toujours instable):

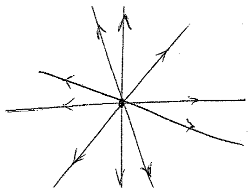


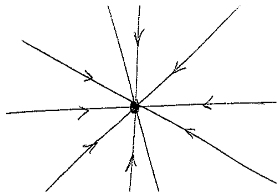
·Les valeurs propres sont confondues: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. deux cas sont possibles:

$*$A est diagonalisable. Alors A est en fait diagonale et les courbes intégrales sont données par:

$$\begin{cases} x\,(t) = x_0 e^{\lambda\ t} \\ y\,(t) = y_0 e^{\lambda\ t}, \end{cases}$$

ce sont les droites $y = \alpha x$ et $x = 0$. On dit qu'on a affaire à un noeud propre:





$\lambda\ > 0$ $\qquad\qquad$ $\lambda < 0$

noeud propre instable $\qquad\qquad$ noeud propre stable

$*$A est non diagonalisable. Alors il existe une base dans laquelle la matrice A et le systéme s'écrivent

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda x \\ \frac{dy}{dt} = x + \lambda y \end{cases}.$$

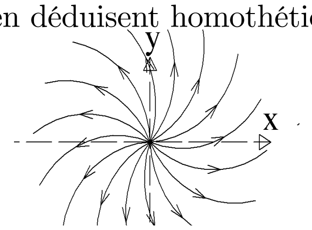
Le courbes intégrales sont données par:

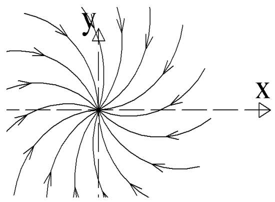
$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{\lambda t} \\ y(t) = (y_0 + x_0 t)\, e^{\lambda t} \end{cases},$$

comme toute courbe intégrale avec $x_0 \neq 0$ passe par un point tel que $|x(t)| = 1$, on obtient toutes les courbes intégrales autres que x=0 en prenant $\mathrm{x}_0 = \pm 1$, d'où:

$$\begin{cases} t = \frac{1}{\lambda} \ln |x| \\ y = y_0 |x| + \frac{x}{\lambda} \ln |x| \end{cases}.$$

On dit qu'il s'agit d'un noeud exceptionnel. Pour construire les courbes, on tracera par exemple d'abord la courbe $y = \frac{x}{\lambda} \ln |x|$ passant par $(x_0\ ,\ y_0) = (\pm 1{,}0)$ .Toutes les autres s'en déduisent homothéties.





$\lambda > 0$ — Noeud exceptionnel instable

$\lambda < 0$ — Noeud exceptionnel stable.

b) Les valeurs propres de A sont non réelles

On a des valeurs propres complexes conjuguées $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ avec disons $\beta > 0$, il existe une base dans laquelle la matrice A et le systéme s'écrivent:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta y \\ \frac{dy}{dt} = \beta x + \alpha y \end{cases}.$$

La maniére la plus rapide de résoudre un tel systéme est de poser $z = x + iy$. On trouve alors:

$$\frac{dz}{dt} = (\alpha + i\beta)\, x + (-\beta + \alpha i)\, y = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha + i\beta)\, z,$$

de sorte que la solution générale est

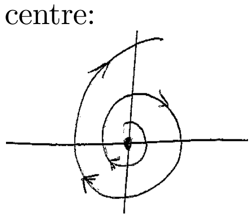
$$z(t) = z_0 e^{(\alpha+i\beta)t} \ = z_0 e^{\alpha t} \ e^{i\beta t} \ .$$

En coordonnées polaires $z = re^{i\theta}$, l'équation devient:

$$\begin{cases} r = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta = \theta_0 \ + \beta t \end{cases} \qquad , soit \quad r \ = r_0 \ e^{\ \frac{\alpha}{\beta}(\theta-\theta_0)} \ .$$

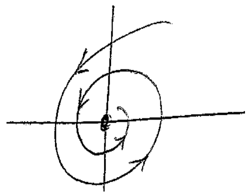
.

Il s'agit d'une spirale logarithmique si $\alpha \neq 0$ et d'un cercle si $\alpha = 0$ (noter que ce cercle donne en général graphiquement une ellipse car la base utilisée ci-dessus n'est pas nécessairement orthonormée). On dit alors que le point singulier est un foyer, respectivement un centre:



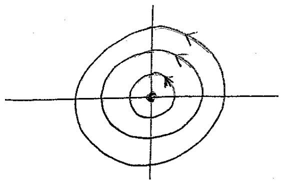
$\alpha > 0$

Foyer instable



$\alpha < 0$

Foyer stable



$\alpha = 0$

Centre

Si $\alpha \neq 0$, le rapport d'homothétie entre deux spires consécutives de la spirale est $\exp{(2\pi\alpha/\beta)}$.

Bibliographie :

[1]: A.HOCQUENGHEM, P.JAFFARD; Mathématique -tome 1 : éléments de calcul différentiel et intégral; Masson et c^{ie} éditeurs, 1962.

[2]: A.PHILIPPOV; Recueil de pronlémes d'équations difféentielles; Editions Mir · Moscou, Traduction française editions Mir 1976.

[3]: JEAN GEFFROY; Equations différentielles; Presses Universitaires de france, mars 1983 .

[4]: JAEN PIERRE Demaily; Analyse numerique et équations différentielles; Office des puvlication universitaire.

[5]: Léonce LESIEUR, Jean LEFEBVRE; MATHÉMATIQUES - Tome 3: COMPLÉMENTS d'ANALIS STATISTIQUE et PROBABILITÉS; LIBRAIRIE ARMAND COLIN, 1972.

[6]: L.PONTRIAGUINE; Équations Différentielles Ordinaires; Editions Mir · Moscou, 1969.

[7]: ROCHDI KHALIL; First course in Differential Equation; Dar Al-Manahej Publisher, 2008.

[8]: T.W.CHAUNDY; Elementary Differential Equations; OXFORD AT THE CLARENDON PRESS 1969.