N° d'ordre :

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ECHAHID HAMMMA LAKHDAR EL-OUED

FACULTE DE SCIENCES EXACTES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplome de Master en mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Par

Bouhafs Boutheyna, Kadri Fatma Zohra

Thème

Equations Différentielles Stochastiques Rétrogrades et leurs applications

Soutenu publiquement, le 23 Juin 2020 devant le jury composé de :

Dr.	Beloul Said	Président	Univ-Eloued.
Dr.	Touati Mohammed Said	Examinateur	Univ-Eloued.
Dr.	Boukaf Samira	Encadreur	Univ-Eloued.

Remerciements

Nous tienons à exprimer nos plus vifs remerciements à ALLAH pour nous'avoir facilité ce travail. Nos premiers remerciements vont à professeure Boukaf Samira, qui a dirigé nos travaux de recherches avec beaucoup de patience et de gentilesse.

Nos remercions vont également à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils nos font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Nous remercions également les membres du département de Mathématique de nous'avoir permis de travailler dans de bonnes conditions pendant la réalisation de nos travail.

Merci également a tous les enseignants qui nous'ont aidé pendant nos cursus, sans oublier leurs conseils précieux.

Enfin, nous remercions tous ceux qui nous'ont aidé de près ou de loin quelqu 'ils soient et d'où qu'ils soient.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

Je dédie cet humble travail à la mémoire de mon père décédé

À ma chère mère,à mes frère.

À tous les membres de ma famille,un par un

Àtous ceux qui m'ont accompagné dans ce travail

Kadri Fatma Zohra

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

A la plus belle créature que Dieu a crée sur terre „,

A ma chère mère !

A qui ma donne le courage, la confiance et la force de continuer ... ,

A mon cher père !

A mes fréres.

A toute la famille.

A toute mes amies.

Bouhafs Boutheyna

Abstract

In this work, we introduce the notion of retrograde stochastic differential equations which we will note EDSR. We recall properties of probabilities, stochastic calculus and Itó's formula and then we study existence and uniqueness results of the solution in the Lipschitzian case and that of monotony, we then give some a priori estimates for the solutions of EDSR and then we recall a result of comparison, Peng's theorem. Also an explicit formula of the solution of linear EDSR is given. At the end we gave a representation of the EDSR in the Markovian framework.

In the first chapter, is a troductive one gave the main notions of stochastic caleul.

In the second chapter, we are interested in the study of EDSR, such as existence and uniqueness, a priori estimates and the comparison theorem which calls upon the notion of linear EDSR.

In the third chapter, we study the EDSR from a Markovian point of view. We do a reminder on EDS and then we give the Markov property for this type of equation. In the last chapter, we study the application of these equations and their roles in finance by giving a financial example.

Résumé

Dans ce travail, nous introduisons la notion des équations différentielles stochastique rétrogrades que l'on notera EDSR. Nous rapplons des proprietés de probabilités, de calcul stochastique et la formule d'Itó et puis nous étudions des résultats d'existence et d'unicité de la solution dans le cas lipschitzien et celui de monotonie, nous donnons ensuite quelques estimations a priori pour les solutions des EDSR et puis nous rappelons un résultat de comparaison, théorème de Peng. Aussi une formule explicite de la solution des EDSR linéaires est donnée. En fin on a donnée une représentation des EDSR dans le cadre markovien

Au premier chapitre,est un troductif on a donné des notions principales de calcul stochastique

Au second chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude des EDSR, telle que l'existence et l'unicité, les estimations a priori et le théorème de comparaison qui fait appel à la notion des EDSR linéaires.

Au troisiéme chapitre, on étudie les EDSR d'un point de vue markovien. On fait un rappel sur les EDS et ensuite on donne la propriété de Markov pour ce type d'équations

Dans le dernier chapitre, on étudie l'application de ces équations et leurs rôles dans la finance en donnant un exemple financier.

Table des matières

Introduction

L'objectif de cette mémoire est de présenter la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades EDSR dans toute la suite du mémoire et d'en donner une application dans le domaine des mathématiques financières

De nombreux mathématiciens ont contribué et contribuent toujours à la théorie des EDSR ; il n'est pas possible de tous les citer. Néanmoins, signalons les travaux de E. Pardoux et S. Peng [PP90, PP92, PP94] et l'article de N. El Karoui, S. Peng et M.-C. Quenez [EKPQ97]. Résoudre une EDSR, c'est trouver un couple de processus adaptés par rapport à la filtration du mouvement brownien $(W_t)_{0\leq t\leq T}$, $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ vérifiant l'équation différentielle stochastique

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t, \qquad 0 \leq t \leq T,$$

avec la condition finale (c'est pour cela que l'on dit rétrograde) z est une variable aléatoire de carré intégrable. Comme les EDS, ces équations doivent être comprise au sens intégral i.e.

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Les EDSR ont été introduites en 1973 par J.-M. BISMUT [Bis73] dans le cas où f est linéaire par rapport aux variables Y et Z. Il a fallu attendre le début des années 90 et le travail de E. PARDOUX et S. PENG [PP90] pour avoir le premier résultat d'existence et d'unicité dans le cas où f n'est pas linéaire.

Depuis de nombreux travaux ont été effectués : la théorie n'a cessé de se développer en raison de ses relations étroites avec les mathématiques financières et les EDP.

En finance, une question importante est de déterminer le prix d'une option- un produit financier. Prenons le cas le plus simple, celui du modèle de Black Scholes et d'un « call européen » Le prix de ce produit financier, $(V_t)_{0\leq t\leq T}$ Satisfait l'équation :

$$dV_t = (rV_t + \theta Z_t)dt + Z_t dW_t,$$

où r est le taux d'intéret à court terme et est le « risk premium », avec une condition finale $V_T = (S_T - K)^+$ où S_t est le prix de l'action sous-jacente et K une constante, un prix fixé à l'avance. Nous voyons que c'est une EDSR linéaire dans ce modèle simple mais qui peut étre non-linéaire dans des modèles financiers plus compliqués.

Chapitre 1

Notions générales

1.1 Rapels sur les probabilités

Dèfinition 1.1.1. *Soit Ω un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une classe de parties de Ω.*

On dit que $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω si :

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$;

(ii) *$\mathcal{F}$ est stable par passage au complémentaire : si A appartient à $\mathcal{F}$ alors A^c appartient à $\mathcal{F}$;*

(iii) *$\mathcal{F}$ est stable par union dénombrable : si $(A_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ alors $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{F}$.*

Si $\mathcal{F}$ est une tribu sur Ω, $(\Omega,\ \mathcal{F}\ )$ est appelé espace mesurable et les éléments de $\mathcal{F}$ des événements.

Dèfinition 1.1.2. *Soit $\mathcal{A}$ une partie quelconque de $\mathbb{P}(\Omega)$.*

On appelle tribu engendrée par $\mathcal{A}$ l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{A}$, notée $\sigma(\mathcal{A})$.

Dèfinition 1.1.3. *On appelle tribu borélienne sur $\mathbb{R}$, notée $B(\mathbb{R})$, la plus petite tribu, au sens de l'inclusion, contenant tous les intervalles de $\mathbb{R}$.*

Dèfinition 1.1.4. *Soient $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace mesurable.*

On appelle mesure sur $\mathcal{F}$ toute fonction d'ensemble $\mathbb{P}$ définie sur $\mathcal{F}$ positive telle que :

(i) $\exists A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) < \infty$

(ii) Si $(A_n)_{\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints $A_n \bigcap A_m = \phi$ si $n \neq m$, alors

$$\mathbb{P}(\cup_n A_n) = \sum_n \mathbb{P}(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est alors appelé espace mesuré.

Notons que si $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, alors $\mathbb{P}$ est dite mesure de probabilité et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est dit espace probabilisé.

Dêfinition 1.1.5. *Soient $(\Omega, \mathcal{F})$, (E, Σ) deux espace mesurable. Une application $f : \Omega \longrightarrow E$ est dite $(\mathcal{F}, \Sigma)$ mesurable si ;*

$$f^{-1}(A) \in \mathcal{F}, \qquad \forall A \in \Sigma.$$

Dans le cas ou Σ est une tribu borélienne, on écrira simplement $\mathcal{F}-$mesurable.

Dêfinition 1.1.6. *On appelle variable aléatoire (v.a. en abrégé) discrète définie sur Ω toute application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

a) L'ensemble $X(\Omega) = \{x_i; i \in D\}$ des valeurs prises par X est fini ou dénombrable.

b) (condition de mesurabilité) Pour tout $x_i \in X(\Omega)$, on a

$$[X = x_i] = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x_i\} \in \mathcal{F}$$

(i.e. l'ensemble $[X = x_i]$ est un événement). On dit que c'est l'événement « X prend la valeur x_i ».

Lemme 1.1.1. *Soient $Y \in \mathcal{S}^2(\mathbb{R}^k)$ et $Z \in M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$. Alors $\left\{\int_0^t Y_s Z_s dW_s, t \in [0,T]\right\}$est une martingale uniformément intégrable.*

Preuve. Les inégalités BDG donnent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Y_r.Z_r|dW_r\right] &\leq C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |Y_r|^2 \left\|Z_r\right\|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \left(\int_0^T \left\|Z_r\right\|^2 dr\right)\right],\end{aligned}$$

et par suite, comme $ab \leq a^2/2 + b^2/2$,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Y_r.Z_r|dW_r\right] \leq C'\left(\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T}\int_0^T \left\|Z_r\right\|^2\right]\right).$$

Or cette dernière quantité est finie par hypothèse ; d'où le résultat. □

1.2 Rappels de calcul stochastique

Dèfinition 1.2.1. *Ici* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *est un espace de probabilité complet*

Généralités

Dèfinition 1.2.2. *Soit* T *un ensemble. On appelle processus stochastique indexé par* T *et à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *une famille* $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *d'applications mesurables de* $(\Omega, \mathcal{F})$ *dans* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ *pour tout* $t \in T$, X_t *est une variable aléatoire*

Remarque 1.2.1. *Dans cette mémoire nous aurons* $T = \mathbb{N}$ *ce qui correspond aux processus à temps discret* $T = \mathbb{R}_+$ *ou* $T = [0, a]$ *pour les processus à temps continu.*
Pour simplifier les énoncés qui suivent sont donnés avec $T = \mathbb{R}_+$ *pour alléger l'écriture, nous noterons un processus* X *plutôt que* $(X_t)_{t\geq 0}$.

Dèfinition 1.2.3. *Un processus* X *est mesurable si l'application* $(t, \omega) \longmapsto X_t(\omega)$ *de* $\mathbb{R}_+ \times\Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport aux tribus* $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$
On peut noter qu'un processus stochastique peut être vu comme une fonction aléatoire : à chaque ω, *on associe la fonction* $t \longmapsto X_t(\omega)$ *qui est appelée trajectoire (sample path en anglais).*

Dèfinition 1.2.4. *Soient* X *et* Y *deux processus.* X *est une modification de* Y *si, pour tout* $t \geq 0$ *les v.a.* X_t *et* Y_t *sont égales* $\mathbb{P}$*–p.s. :* $\forall t \geq 0 \;\; P(X_t = Y_t) = 1$. X *et* Y *sont indistinguables si,* $\mathbb{P}$*–p.s., les trajectoires de* X *et de* Y *sont les mêmes c'est à dire* $P(X_t = Y_t, \forall t \geq 0) = 1$ *La notion d'indistinguabilité est plus forte que la notion de modification. Notons que si* X *est une modification de* Y *et si* X *et* Y *sont à trajectoires continues à droite (ou à gauche) alors* X *et* Y *sont indistinguables*

Comme dans le cas discret, les tribus jouent un rôle très important dans l'étude des processus stochastiques car elles représentent l'information disponible et permettent de traduire les notions de passé, présent et futur.

Dèfinition 1.2.5. *Nous travaillerons avec une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *de* $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ *c'est à dire une famille croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}_t$ *i.e. pour* $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. *On définit alors* $\mathcal{F}_\infty = \sigma\{\cup_t \mathcal{F}_t\}$ *ainsi que, pour tout* t, $\mathcal{F}_{t^+} = \cap_{\epsilon>0}\mathcal{F}_{t+\epsilon}$.

Dèfinition 1.2.6. *soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espace de probabilité.*

- *une filtration une famille* $(\mathcal{F}, n \in \mathbb{N})$ *de sous-tribus de* $\mathcal{F}$ *tq*

$$\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

- *un processus alétoire à temps discret* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *est adapté à la filtration* $(\mathcal{F}, n \in \mathbb{N})$ *si* X_n *et* $\mathcal{F}_n$*-mesurable* $\forall n \in \mathbb{N}$
- *la filtration naturelle d'un processus* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *est donnée par* $(\mathcal{F}_n^X, \in \mathbb{N})$*, où*

$$\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_i, 0 \leq i \leq n).$$

Dèfinition 1.2.7. *On dit qu'une filtration* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ *est continue à droite si* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t_+}$ *pour tout* t*. On dit qu'elle vérifie les conditions habituelles si elle est continue à droite et si* $\mathcal{F}_0$ *contient tous les ensembles* $\mathbb{P}$*–négligeables de* $\mathcal{F}$*, noté* $\mathcal{N}$ *dans la suite. Si l'on se donne un processus* X*, on introduit la filtration* $\mathcal{G} = \sigma\{X_s, s \leq t\}$ *Cette filtration s'appelle la filtration naturelle de* X*. Mais* $\mathcal{G}_0$ *ne contient pas nécessairement* $\mathcal{N}$*. C'est pour cela que l'on introduit souvent la filtration naturelle augmentée de* X *définie par* $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{\mathcal{N} \cup \mathcal{G}_t\}$*. Lorsque nous parlerons de filtration naturelle il s'agira toujours de filtration naturelle augmentée.*

Dèfinition 1.2.8. *Un processus* X *est adapté par rapport à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$ *si pour tout* t*,* X_t *est* $\mathcal{F}_t$*–mesurable.*
Il est inutile de dire qu'un processus est toujours adapté par rapport à sa filtration naturelle.

Remarque 1.2.2. *Si* $\mathcal{N} \subset \mathcal{F}_0$*, et si* X *est adapté par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}$ *alors toute modification de* X *est encore adaptée*

Dèfinition 1.2.9. *Un processus* X *est progressivement mesurable par rapport à* $\{\mathcal{F}_t\}$ *si pour tout* $t \geq 0$*, l'application* $(s, \omega) \longmapsto X_s(\omega)$ *de* $[0, t[\times\Omega$ *dans* $\mathbb{R}^d$ *est mesurable par rapport à* $\mathbb{B}([0, t[) \otimes \mathcal{F}_t$ *et* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$*. Un processus progressivement mesurable est mesurable et adapté. On peut également noter que si* X *est un processus mesurable et adapté alors il possède une modification progressivement mesurable. Rappelons également le résultat suivant :*

Proposition 1.2.1. *Si X est un processus stochastique dont les trajectoires sont continues à droite (ou continues à gauche) alors X est mesurable et X est progressivement mesurable s'il est de plus adapté. Finissons ces généralités par la notion de temps d'arrêt.*

Dêfinition 1.2.10. *Soit τ une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ τ est un $\{\mathcal{F}_t\}$–temps d'arrêt si, pour tout t, $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ Si τ est un temps d'arrêt, on appelle tribu des évènements antérieurs à τ la tribu définie par*

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}_\infty, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t\}.$$

1.3 Espérance conditionnelle

Nous donnons dans cette section quelques définitions et propriétés qui nous seront utiles dans la suite. Notons $L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ l'ensembles des fonctions réelles $\mathcal{F}-$mesurables et intégrables par rapport à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Dêfinition 1.3.1. *Soit $X \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$. On définit l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$, l'unique variable aléatoire*
$\mathcal{G}-$mesurable sur Ω telle que :

$$\int_B X d\mathbb{P} = \int_B \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) d\mathbb{P}, \forall B \in \mathcal{G}.$$

Propriétés de l'espérance conditionnelle *Soient $X, Y \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, presque sûrement on a*

1. *Linéarité : Si $X, Y \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$, $\forall \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ alors :*

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y|\mathcal{G}) = \lambda \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) + \mu \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}).$$

2. *Monotonie : Si $X, Y \in L^1_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathbb{P})$ alors :*

$$X \geq Y \Rightarrow \mathbb{E}(X|\mathcal{G}) \geq \mathbb{E}(Y|\mathcal{G}),$$

en particulier

$$X \geq 0 \Rightarrow E(X|\mathcal{G}) \geq 0.$$

3. *Si X est $\mathcal{G}-$mesurable alors :*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = X.$$

4. *Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires, Si Y est $\mathcal{G}-$mesurable alors :*

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{G}) = Y\mathbb{E}(X|\mathcal{G}),$$

en particulier

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G})Y|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G})\mathbb{E}(Y|\mathcal{G}).$$

5. *Si X est indépendante de $\mathcal{G}$ alors :*

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbb{E}(X).$$

6. *Si $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ alors :*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{G}_2)|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(X|\mathcal{G}_1).$$

1.4 Martingales

soit $(\omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

Dèfinition 1.4.1. *Un processus X à valeurs réelles est une surmartingale par rapport à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}$ si :*

1. *pour tout $t \leq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$ –mesurable*
2. *pour tout $t \leq 0$, X_t^- est intégrable –adapté, à trajectoires continues à droite.*
3. *pour $0 \leq s \leq t$, $\mathbb{E}\left(X_t \mid \mathcal{F}_s\right) \leq X_s$ X est une sous-martingale lorsque X est une surmartingale, X est une martingale si X est la fois une surmartingale et une sous-martingale*

Remarque 1.4.1. *Si W est un MB, alors $\{W_t^2 - t\}_{t\geq 0}$ et $\{\exp\left(\sigma W_t - \sigma^2 t/2\right)\}_{t\geq 0}$*

Remarque 1.4.2. *On dit que X est une martingale locale s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt τ_n*

Dèfinition 1.4.2. *Une martingale locale est un processus stochastique qui est localement une martingale*

Dèfinition 1.4.3. *Un processus X est une martingale locale s'il existe une séquence de temps d'arrêt T, avec $T_n \longrightarrow \infty$ p.s., $T_n < T$ p.s. sur $T > 0$, et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} T_n = T$ p.s. et en plus $X_{t\wedge T_n}$ est une martingale pour chaque n.*

Dèfinition 1.4.4. *une sous-martingale (resp. surmartignale ;sousmartingale) á la temps discret par rapport á la filtration* $(\mathcal{F}_n)$ *si*

i) (M_n) *est adapté,*

ii) $\forall n, E(|M_n|) < \infty$,

iii) $\forall n, E(M_{n+1}/\mathcal{F}_n) = M_n, p.s.(resp, E(M_{n+1}, \mathcal{F}_n \leq M_n; E(M_{n+1}, \mathcal{F}_n \geq M_n))$

une martignale une processus qui á la fois une sous-martingale et une sur-martingale (i.e un processus qui vérifie (i) et l'égalité au point (ii)).

Dèfinition 1.4.5. *un temps d'arrêt par rapport á* $(\mathcal{F}_n)$ *est une v.a.* T *á valeurs dans* $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ *telle que* $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dèfinition 1.4.6. *soit* (X_n)*un processus adapté áune filtration* $(\mathcal{F}_N)$ *et* T *un temps d'arrêt (p.r.á* $(\mathbb{F}_n)$*). on pose*

$$X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} X_n(\omega) 1_{(T=n)}(\omega),$$

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_T, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

1.5 Mouvement browien

Mouvememt Brownier standard

Dèfinition 1.5.1. *On appelle mouvement brownien standard un processus stochastique* W *à valeurs réelles tel que :*

1. *Les trejictoires* $t \longmapsto W_t$ *p.s est continues sur* $\mathbb{R}_+$,
2. *pour* $0 \leq s \leq t, W_t$-W_s *est indépendant de la tribu* $\sigma\{W_u, u \leq s\}$ *et suit la loi gaussienne* $W(0, t-s)$,
3. $W_0 = 0$ $\mathbb{P}$,*p.s* *Pour tout* $t > 0$, *la variable aléatoire* W_t *suit la loi gaussienne centrée de variance* t *donc a une densité. On dit qu'un mouvement brownien (*MB *dans la suite) part d'un point* x *si* $W_0 = x$.

Remarque 1.5.1. *On dit que* W *est un* $\{\mathcal{F}_t\}$*–*MB *si* W *est un processus continu, adapté à la filtration* $\{\mathcal{F}_t\}$*, vérifiant :*

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad 0 \leq s \leq t, \qquad \mathbb{E}\left(e^{iu(W_t\text{-}W_s)|\mathcal{F}_s}\right) = \exp\{-u^2(t-s)/2\}.$$

Dêfinition 1.5.2. *On appelle* MB *standard à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*, un vecteur* $W = (W^1, \ldots, W^d)$ *où les* W^i *sont des* MB *réels indépendants.*

Dêfinition 1.5.3. *un mouvement browien standard (abrégé m.b.s)est un processus aléatoire á temps continu* $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$*telle que*

$$\begin{cases} B_0 = 0 \ p.s \ .; \\ (B_t) \ \text{est accroissements indpendants et stationnaires}, \\ B_t \sim \mathcal{N}(0,t), \forall t > 0, \\ (B_t) \ \text{est trajectoires continues}. \end{cases}$$

1.6 Calcul d'Itô

intégrale stochastique : L'objectif de ce paragraphe est de définir $\int_0^t H_s dW_s$. $\times$ Ceci n'est pas évident car comme nous l'avons rappelé précédemment les trajectoires du MB ne sont pas à variation finie et donc l'intégrale précédente n'est en aucun cas une intégrale de Lebesgue-Stieljes. Dans toute la suite, on fixe un réel T strictement positif. Les processus sont définis pour $t \in [0,T]$; on notra X pour $(X_t)_{t\in[0,T]}$.

Dêfinition 1.6.1. *On appelle processus élémentaire* $H = (H_t)_{0\leq t\leq T}$ *un processus de la forme :*

$$H_t = \phi_0 1_0(t) + \sum_{i=1}^{p} \phi_0 1_{]i-1,i]}(t)$$

où $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T, \phi_0$ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_0$*-mesurable bornée et, pour* $i = 1, \ldots, p, \phi$ *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_{i-1}$*-mesurable et bornée pour un tel processus, on peut définir l'intégrale stochastique par rapport à* W *comme étant le processus continu* $\{I(H)_t\}_{0\leq t\leq T}$ *défini par :*

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(W_{t_i}) - W_{t_{i-1}}),$$

soit encore, si $t \in]t_k, t_{k+1}]$,

$$I(H)_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{t_k})$$

On note $\int_0^t H_s dW_s$ *pour* $I(H)_t$ *On obtient alors directement à l'aide de cette définition le résultat suivant :*

Proposition 1.6.1. *Si* H *est un processus élémentaire, alors* $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est une* $\mathcal{F}_{t\geq 0}$ *martingale continue telle que*

$$\forall t \in [0, T], \qquad \mathbb{E}\left[|\int_0^t H_s dW_s|^2\right] = \mathbb{E}\left[|\int_0^t H_s^2 ds|\right].$$

On veut à présent définir l'intégrale stochastique pour une classe plus vaste de processus H. Pour la première extension, on utilise la densité des processus élémentaires dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}^2$ *suivant :*

$$\mathcal{M}^2 = \left\{ (H_t)_{\leq t\leq T}, progressivement\ mesurable, \mathbb{E}\left[|\int_0^t H_s^2 ds|\right] < \infty \right\}$$

On désigne par $\boldsymbol{H}^2$ *l'espace vectoriel des martingales bornées dans* $\mathcal{L}^2$ *le sous-espace de* $\boldsymbol{H}^2$ *formé par les martingales qui sont continues est noté* $\boldsymbol{H}_c^2$ *On munit* $\boldsymbol{H}^2$ *de la norme définie par* $\left\|M\right\|_{H^2} = \mathbb{E}[|M_t|^2]^{1/2}$ *qui en fait un espace de Hilbert. L'inégalité de Doob montre que cette norme est équivalente à la norme* $\left\|M\right\|_{H^2} = \mathbb{E}[\sup_t |M_t|^2]^{1/2}$, *par suite,* $\boldsymbol{H}_c^2$ *est un sous-espace fermé.* $\boldsymbol{H}_c$ *et* $\boldsymbol{H}_c^2$ *désignent les sous-espaces de* $\boldsymbol{H}_c$ *et* $\boldsymbol{H}_c^2$ *constitués des martingales nulles en 0, ces deux sous-espaces sont fermés. On obtient alors le résultat suivant :*

Théorèm 1.6.1. *Il existe une unique application linéaire* J' *de* $\mathcal{M}_{loc}^2$ *dans l'ensemble des martingales locales continues telle que :*

1. *si* H *est un processus élémentaire alors* $J'(H)$ *et* $I(H)$ *sont indistinguables*
2. *si* $(H_n)_n$ *est une suite de processus de* $\mathcal{M}_{loc}^2$ *telle que* $\int_0^T H_s^n dW_s$ *tend vers 0 en probabilité alors* $\sup\limits_{0\leq t\leq T} |J'(H^n)_t|$ *tend vers 0 en probabilité. On note encore* $\int_0^t H_s dW_s$ *pour* $J'(H)_t$.

Remarque 1.6.1. *Atention, lorsque* $H \in \mathcal{M}_{loc}^2$, $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0\leq t\leq T}$ *est seulement une martingale locale et pas nécessairement une martingale.*

Défnition de l'intégrale d'Itô

Notre but est de définir l'intégrale stochastique

$$\int_0^t X_s dB_s \tag{1.1}$$

simultanément pour tous les $t \in [0, T]$, où X_t est lui-même un processus stochastique. Plus précisément, nous supposerons que X_t est une fonctionnelle Brownienne non-anticipative, c'est-á-dire ($\{F_t\}_{t \leq 0}$ désignant la filtration canonique engendrée par $\{B_t\}_{t \leq 0}$)

1. X est mesurable par rapport á $\mathcal{F}$;
2. X_t est mesurable par rapport á $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \in [0, T]$.

Ceci revient á exiger que X_t ne dépende que de l'histoire du processus de Wiener jusqu'au temps t, ce qui est raisonnable au vu de (2.2). En outre, nous allons supposer que

$$\mathbb{E}\{\int_0^T X_t^2 dt < \infty\} = 1 \tag{1.2}$$

Une fonctionnelle Brownienne non-anticipative $e_{t \in [0,T]}$ est dite simple ou élémentaire s'il existe une partition $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ de $[0, T]$ telle que

$$e_t = \sum_1^N e_{t_k} 1[t_{k-1}, t_k)(t) \tag{1.3}$$

Pour une telle fonctionnelle, nous définissons l'intégrale stochastique par

$$\int_0^t e_s dB_s = \sum_{k=1}^m e_{t_{k-1}} [B_{t_k - B_{t_{k-1}}}]$$

Processus d'Itô : Nous introduisons à présent une classe de processus qui sera très utile dans la suite.

Dêfinition 1.6.2. *On appelle processus d'Itô un processus X à valeurs réelles tel que*

$$\mathbb{P} - p.s. \qquad \forall 0 \leq t \leq T, \qquad X_t = X_0 + \int_0^t k_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

où est $\mathcal{F}_0$- mesurable, K et H sont deux processus progressivement mesurables vérifiant les conditions, $\mathbb{P}$-p.s. :

$$\int_0^T |K_s| ds < \infty \quad et \quad \int_0^T |H_s|^2 ds < \infty.$$

On peut montrer que si un processus d'Itô est une martingale locale continue alors $K_t = 0$ $m \otimes \mathbb{P}$*–p.p. On en déduit alors que la décomposition d'un processus d'Itô est unique au sens où si*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X_0^{'} + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dW_s$$

alors $X_0 = X_0'$ $\mathbb{P}$*–p.s. et* $H_t^{'} = H_t, K_t = K_t^{'}$ $m \otimes \mathbb{P}$*–p.p. Si* X *et* Y *sont deux processus d'Itô*

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s et y_t = X_0 + \int_0^t K_s^{'} ds + \int_0^t H_s^{'} dW_s$$

$< X, Y >_t = \int_0^t H_s H_s^{'} ds$ *et* $dX_t = K_t dt + H_t dW_t$.

Formule d'Itô : Considérons une intégrale stochastique de la forme

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s ds + \int_0^t g_s dB_s, \qquad t \in [0, T] \tag{1.4}$$

oú X_0 est indépendante du mouvement Brownien, et f_s et g_s sont des fonctionnelles nonanticipatives satisfaisant

$$\mathbb{P}\{\int_0^t |f_s| ds < \infty\} = 1 \tag{1.5}$$

$$\mathbb{P}\{\int_0^t g_s^2 ds < \infty\} = 1. \tag{1.6}$$

Le processus (1.1) s'écrit également sous forme différentielle

$$dX_t = f_t dt + g_t dB_t$$

La formule d'Itô permet de déterminer de manière générale l'effet d'un changement de variables sur une différentielle stochastique.

Lemme 1.6.1. *Soit* $u : [0, \infty) \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}, (t, x) \longmapsto u(t, x)$ *une fonction continument différentiable par rapport á t et deux fois continument différentiable par rapport á x. Alors le processus stochastique* $Y_t = u(t, X_t)$ *satisfait l'équation*

$$dY_t = \frac{\partial u}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial u}{\partial x}(t, X_t)[f_t dt + g_t dB_t] + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, X_t) g_2 dt$$

Chapitre 2

Èquations Différentielles Stochastiques

2.1 Introduction

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et ξ une variable aléatoire mesurable par rapport à $\mathcal{F}_T$. On voudrait résoudre l'équation différentielle stochastique suivante :

$$-\frac{dY_t}{dt} = f(Y_t), \quad t \in [0,T] \quad avec,$$
$$Y_T = \xi.$$

en imposant que la solution au moment t ne dépende que du passé, c'est à dire que le processus Y soit adapté à la filtration $(F_t)_{t\geq 0}$. Prenons pour commencer le cas où $f \equiv 0$. On est tenté de donner comme solution $Y_t = \xi$ qui n'est adaptée que si ξ est déterministe. Nous n'avons qu'une approximation (dans L^2) qui soit adaptée et qui est la martingale $Y_t = \mathbb{E}(\xi/F_t)$. Si $(F_t)_{t\geq 0}$ est la filtration du mouvement brownien, on peut construire par le théoréme de représentation des martingales un processus Z adapté de carré intégrable tel que :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi/\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s.$$

On peut écrire ceci autrement, en effet :

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s, \forall t \in [0;T],$$

d'où

$$\begin{aligned}
Y_T &= \mathbb{E}(\xi) + \int_0^T Z_s dW_s, \\
\xi &= \mathbb{E}(\xi) + \int_0^t Z_s dW_s + \int_t^T Z_s dW_s, \\
\xi &= Y_t + \int_t^T Z_s dW_s.
\end{aligned}$$

On a alors

$$Y_t = \xi - \int_t^T Z_s dW_s, \quad ie. \quad dY_t = -Z_t dW_t \quad avec, Y_T = \xi.$$

On voit donc apparaître le processus Z qui a pour rôle de rendre le processus Y adapté. Par conséquent, comme une seconde variable apparaît, pour obtenir la plus grande généralité, on permet à f de dépendre du processus Z. L'équation devient donc :

$$-dY_t = f(t, Y_t, Z_t)dt - Z_t dW_t \quad avec, Y_T = \xi.$$

Notations

- prog.mes :
- $\mathbb{P}$-p.s : $\mathbb{P}(X) = 1$ alors X est presques sûr
- Soient $(\Omega, F, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité complet et un W mouvement brownien- d dimensionnel sur cet espace.
- $\{F_t\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle du MB.
- $S^2(\mathbb{R}^k)$ désigne l'espace vectoriel formé par des processus Y, progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, tels que :

  $$\|Y\|^2_{S^2} = \mathbb{E}\left[\sup |Y_t|^2\right] < \infty,$$

  et $S^2_c(\mathbb{R}^k)$ le sous espace formé par les processus continus.
- $M^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ désigne l'espace vectoriel formé par des processus Z progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^{k\times d}$, tels que :

  $$\|Z\|^2_{M^2} = \mathbb{E}\left[\int_0^T \|Z_t\|^2 dt\right] < \infty,$$

  où si $z \in \mathbb{R}^{k\times d}$, $\|z\|^2 = trace(zz^*)$.

- $f : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tq, $\forall (y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, (f(.,t,y,z))_{0\leq t\leq T}$ est progressivement mesurable.
- ξ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^k$ $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Soit l'EDSR

$$\begin{aligned} -dY_t &= f(t,Y_t,Z_t)dt - Z_t dB_t \quad 0 \leq t \leq T \quad , \\ Y_T &= \xi, \end{aligned}$$

ou sous la forme intégrale :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.1}$$

La fonction f s'appelle le générateur et ξ la condition terminale de l'EDSR (1.2). Supposons qu'il existe un processus prog. mes. $(\bar{f}; 0 \leq t \leq T) \in \mathbb{M}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et des constantes μ et $\lambda > 0$ tels que

H1. $\forall (y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{kxd} f(.,y,z)$ est prog. mes

H2. On a

$$\forall t,y,z |f(t,y,z)| \leq \bar{f}_t + \lambda(|y| + \|z\|), \mathbb{P}-p.s,$$

H3. $f(t,y,.)$ est lipschitzienne, i.e.,

$$\forall t,y,z,z' |f(t,y,z) - f(t,y,z')| \leq \lambda \|z - z'\|, \mathbb{P}-p.s,$$

H4. $f(t,.,z)$ est monotone, i.e.,

$$\forall t,y,y',z, (y - y', f(t,y,z) - f(t,y',z)) \leq \mu |y - y'|^2, \mathbb{P}-p.s,$$

H5. $\forall t,y,z f(t,y,z)$ est continue, $\mathbb{P}-p.s.$

Dêfinition 2.1.1. *Une solution de l'EDSR (2.1) est un couple de processus $\{(Y_t,Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ vérifiant*

1- Y et Z sont progressivement mesurables, à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ et $\mathbb{R}^{k\times d}$ respectivement.

2- $\mathbb{P}$-p s $\int_t^T (|f(r,Y_r,Z_r)| + \|Z_r\|^2)dr < \infty$.

3- $\mathbb{P}$-p s, on a $Y_t = \xi + \int_t^T f(r,Y_r,Z_r)dr - \int_t^T Z_r dW_r, \quad 0 \leq t \leq T$.

La proposition suivante montre, que sous une hypothése relativement faible sur f, le processus Y appartient à S^2.

Proposition 2.1.1. *Supposons qu'il existe un processus $(f_t)_{0\leq t\leq T}$ positif, appartenant à $\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^k)$ et une constante positive λ tels que :*

$$\forall (t,y,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}, |f(t,y,z)| \leq f_t + \lambda(|y| + \|z\|).$$

Si $\{(Y_t, Z_t)\}_{0\leq t\leq T}$ est une solution de l'EDSR (2,1) telle que $Z \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$ alors Y appartient à S^2

Preuve. On a pour tout $t \in [0;T]$,

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t f(r, Y_r, Z_r)dr - \int_0^t Z_r dW_r$$

En utilisant l'hypothése sur f,

$$\begin{aligned} |Y_t| &\leq |Y_0| + \int_0^t |f(r,Y_r,Z_r)|dr + |\int_0^t Z_r dW_r|, \\ &\leq |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda \|Z_r\|)dr + \sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Z_r dW_r| + \lambda \int_0^t |Y_r|dr, \end{aligned}$$

posons

$$\zeta = |Y_0| + \int_0^T (f_r + \lambda\|Z_r\|)dr + \sup_{0\leq t\leq T} |\int_0^t Z_r dW_r|.$$

Par hypothése, Z appartient $\mathbb{M}^2$ et donc via l'inégalité de Doob, le troisiéme terme est de carré intégrable, il en est de méme pour $(f_t)_{0\leq t\leq T}$ et Y_0 est une constante, donc de carré intégrable, il s'en suit que ζ est une variable aléatoire de carré intégrable. Comme Y est un processus continu qui vérifie,

$$|Y_t| \leq \zeta + \lambda \int_0^t |Y_r|dr,$$

Par le lemme de Gronwall, on aura

$$|Y_t| \leq \zeta e^{\lambda T},$$

et donc

$$\sup_{0\leq t\leq T} |Y_t| \leq \zeta e^{\lambda T},$$

comme ζ est de carré intégrable, alors Y appartient à S^2. □

2.2 cas lipschitzien

2.2.1 Le résultat de Pardoux-Peng

Dans ce paragraphe, nous allons montrer un premier résultat d'existence et d'unicité. Ce résultat est dû à E. Pardoux et S. Peng c'est le premier résultat d'existence et d'unicité pour les EDSR dans le cas où le générateur est non-linéaire. Voici les hypothéses sous lesquelles nous allons travailler :

L1. Il existe une constante $\lambda > 0$, telle que $\mathbb{P} - p.s$

Condition de Lipschitz en (y, z) pour tous t, y, y', z, z'

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq \lambda(|y - y'| + \|z - z'\|),$$

L2. Condition d'intégrabilité :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(r, 0, 0)|^2 dr\right] < \infty.$$

Nous commençons par un cas trés simple où f ne dépend ni de y ni de z, i.e. on se donne ξ de carré intégrable et un processus $\{F_t\}_{0\leq t\leq T}$ dans $\mathbb{M}^2\mathbb{R}^k$ et on veut trouver une solution de l'EDSR

$$Y_t = \xi + \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r, 0 \leq t \leq T \tag{2.2}$$

Lemme 2.2.1. *Soient $\xi \in L^2, \mathcal{F}_T-$mesurable et $(F_t)_{0\leq t\leq T}$ dans $\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^k)$. L'EDSR (2.2) posséde une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in \mathbb{M}^2(\mathbb{R}^{k\times d})$.*

Preuve. soit (Y, Z) une solution de (2.2) telle que $Z \in \mathbb{M}^2$ En prenant l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$, on a,

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi + \int_t^T F_r dr|\mathcal{F}_t).$$

Y est donc défini à l'aide de cette formule et il reste à trouver $Z.F = (F_t)_{0\leq t\leq T}$ est de carré intégrable et

$$(\int_t^T F_r dr)_{t\in[0;T]}$$

est un processus adapté à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$, car il est progressivement mesurable

$$Y_t = \mathbb{E}\left(\xi + \int_0^T F_r dr|\mathcal{F}_t\right) - \int_0^t F_r dr = M_t - \int_0^t F_r dr.$$

$(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale brownienne. On construit, à l'aide du théoréme de représentation des martingales, un processus Z de $\mathbb{M}^2$ tel que

$$M_t = M_0 + \int_0^t Z_r dB_r.$$

et donc

$$Y_t = M_t - \int_0^t F_r dr = M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr.$$

(Y, Z) ainsi construit est une solution de l'EDSR (2.2) puisque comme $Y_T = \xi$

$$\begin{aligned} Y_t - \xi &= M_0 + \int_0^t Z_r dB_r - \int_0^t F_r dr - (M_0 + \int_0^T Z_r dB_r - \int_0^T F_r dr) \\ &= \int_t^T F_r dr - \int_t^T Z_r dB_r. \end{aligned}$$

L'unicite est évidente pour les solutions vérifiant $Z \in \mathbb{M}^2$. □

Théorèm 2.2.1. *Sous les hypothées L1,L2 l'EDSR* (1.1) *possede une unique solution* (Y, Z) *telle que* $Z \in \mathbb{M}^2$.

Preuve. Nous utilisons un argument de point fixe dans l'espace de Banach B^2 en construisant une application Ψ de β^2 dans lui-même de sorte que $(Y, Z) \in \beta^2$ est solution de l'EDSR $(1, 1)$ si et seulement si c'est un point fixe de Ψ. Pour (U, V) élément de β^2, on définit $(Y, Z) = \Psi(U, V)$ comme étant la solution de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(r, U_r, V_r) dr - \int_t^T Z_r dB_r, \quad 0 \leq t \leq T.$$

□

Remarque 2.2.1. *que cette derniére EDSR posséde une unique solution qui est dans* β^2 *En effet, posons* $F_r = f(r, U_r, V_r)$. *Ce processus appartient à* $\mathbb{M}^2$ *puisque* f *étant Lipschitz,*

$$|F_r| \leq |f(r, 0, 0)| + \lambda |U_r| + \lambda \|V_r\|,$$

et ces trois derniers processus sont de carré intégrable. Par suite, nous pouvons appliquer le Lemme (2.2.1) pour obtenir une unique solution (Y, Z) *telle que* $Z \in \mathbb{M}^2$*, de plus* (Y, Z) *appartient à* β^2. *L'intégralité de* Z *est obtenue par construction et d'aprés la Proposition (2.1.1)* Y *appartient à* S^2 *L'application* Ψ *de* β^2 *dans lui-même est donc bien définie.*

Soient (U,V) *et* (U',V') *deux éléments de* β^2 *et* $(Y,Z)=\Psi(U,V),(Y',Z')=\Psi(U',V')$. *Notons* $y=Y-Y$ *et* $z=Z-Z'$. *On a* $y_T=0$, *et*

$$dy_t=-\{f(t,U_t,V_t)-f(t,U_t',V_t')\}dt+z_tdB_t.$$

On applique la formule d'Itô à $e^{\alpha t}|y_t|^2$ *pour obtenir :*

$$\begin{aligned}d(e^{\alpha t}|y_t|^2)&=\alpha e^{\alpha t}|y_t|^2dt-2e^{\alpha t}y_t.\{f(t,U_t,V_t)-f(t,U_t',V_t')\}dt\\&\quad+2e^{\alpha t}y_t.z_tdB_t+e^{\alpha t}\|z_t\|^2dt.\end{aligned}$$

Par conséquent, intégrant entre t *et* T, *on obtient,*

$$\begin{aligned}e^{\alpha t}|y_t|^2+\int_t^T e^{\alpha t}\|z_r\|^2dr&=\int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|y_r|^2+2y_r.\{f(r,U_r,V_r)-f(r,U_r',V_r')\}dr)\\&\quad-\int_t^T 2e^{\alpha r}y_r.z_rdB_r\end{aligned}$$

et, comme f *est Lipschitz, il vient, notant* u *et* v *pour* $U-U'$ *et*$V-V'$ *respectivement,*

$$\begin{aligned}e^{\alpha t}|y_t|^2+\int_t^T e^{\alpha t}\|z_r\|^2dr&\leq\int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha|y_r|^2+2\lambda|y_r||u_r|+2\lambda|y_r|\|v_r\|)dr\\&\quad-\int_t^T 2e^{\alpha r}y_t.z_rdB_r\end{aligned}$$

Pour tout $\epsilon>0$, *on a*

$$2ab\leq\frac{a^2}{\epsilon}+\epsilon b^2,$$

et donc, l'inégalité précédente donne,

$$\begin{aligned}e^{\alpha t}|y_t|^2+\int_t^T e^{\alpha t}\|z_r\|^2dr&\leq\int_t^T e^{\alpha r}(-\alpha+\frac{2\lambda^2}{\epsilon}|y_r|^2dr-\int_t^T 2e^{\alpha r}y_t.z_rdB_r\\&\quad+\epsilon\int_t^T e^{\alpha r}(|u_r|^2+\|v_r\|^2)dr\end{aligned}$$

et prenant $\alpha=\dfrac{2\lambda^2}{\epsilon}$ *on a, notant*

$$R_\epsilon=\epsilon\int_t^T e^{\alpha r}(|u_r|^2+\|v_r\|^2)dr, \tag{2.3}$$

$$e^{\alpha t}|y_t|^2+\int_t^T e^{\alpha t}\|z_r\|^2dr\leq R_\epsilon-\int_t^T 2e^{\alpha r}y_t.z_rdB_r\quad\forall t\in[0,T]$$

D'aprés le lemme (2,2,1), la martingale locale $\{\int_0^t y_r.z_r dB_r\}_{t\in[0,T]}$ *est en réalité une martingale nulle en* 0*, puisque* Y, Y' *appartiennent à* S^2*et* Z, Z' *appartiennent à* $\mathbb{M}^2$ *En particulier, prenant l'esprance ce qui fait partir l'intégrale stochastique via on obtient facilement, pour* $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2 dr\right] \leq \mathbb{E}[R_\epsilon]. \tag{2.4}$$

Revenant à l'inégalité, les inégalités BDG fournissent

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\alpha r}|y_r|^2\|z_r\|^2)dr\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\ &\leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + C\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}}|y_t|\left(\int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2)dr\right)^{\frac{1}{2}}\right],\end{aligned}$$

puis, comme

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2\right] &\leq \mathbb{E}[R_\epsilon] + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\frac{\alpha t}{2}}|y_t|^2\right] \\ &+ \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2)dr\right].\end{aligned}$$

Prenant en considération l'inégalité (2.4), on obtient finalement

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2)dr\right] \leq (3 + C^2)\mathbb{E}[R_\epsilon].$$

et par suite, revenant à la définition de R_ϵ,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|y_t|^2 + \int_0^T e^{\alpha r}\|z_r\|^2)dr\right] \leq \epsilon(3 + C^2)(1 \vee T)\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|u_t|^2 \int_0^T e^{\alpha r}\|v_r\|^2)dr\right].$$

Prenons ϵ *tel que* $\epsilon(3+C^2)(1\vee T) = \frac{1}{2}$*, de sorte que l'application* Ψ *est alors une contraction stricte de* B^2 *dans lui-méme si on le munit de la norme,*

$$\|(U, V)\| = \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq T} e^{\alpha t}|U_t|^2 \int_0^T e^{\alpha r}\|V_r\|^2)dr\right]_{\frac{1}{2}}$$

qui en fait un espace de Banach-cette derniére norme étant équivalente à la norme usuelle correspondant au cas $\alpha = 0$, Ψ *posséde donc un unique point fixe, ce qui assure l'existence et l'unicité díune solution de l'EDSR (2.1) dans* β^2

On obtient ensuite une unique solution vérifiant $Z \in \mathbb{M}^2$ *puisque la Proposition (2.1.1) implique qu'un telle solution appartient à* β^2

Remarque 2.2.2. *À partir de maintenant et sans plus insister, l'expression la solution de l'EDSR signifiera la solution de l'EDSR vérifiant* $Z \in \mathbb{M}^2$

2.3 cas monotone

comme dans cas lipschizien, nous allons donner un résultat dû a peng d'existence et d'unicité de la solution de l'EDSR s'affiranchssant de la condition de lipshitz en y. Ce résultat repose sur la proposition suivante :

Proposition 2.3.1. *soit* $V \in \mathbb{M}^2[0,T]$*. Il existe un seul couple de processus* (Y,Z) *progressivement mesurables á valeur dans* $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d}$*, tel que*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, avec$$
$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left\|Z_s\right\|^2 ds\right] < \infty.$$

En utilisant cette proposition on peut donner le résultat suivant :

Théorèm 2.3.1. *sous les hypothéses H1, H5 et H4. l'EDSR*

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s \qquad 0 \leq t \leq T \tag{2.5}$$

admet une unique solution

Preuve. **1-Unicité**

soit (Y,Z) et (Y',Z') deux solutions de l'EDSR (2.1). On applique la formule d'Itô á appliquation $x \longrightarrow |x|^2$ oú $x(t) \triangleq Y'_t - Y_t$. Ceci nous donne

$$|Y_T - Y'_T|^2 = |Y_t - Y'_t|^2 + \int_t^T 2(Y'_s - Y_s.d(Y_s - Y'_s)) + \int_t^T d < Y - Y' >_s \tag{2.6}$$

or

$$Y'_t - Y_t = \int_t^T (f(s,Y'_s,Z'_s) - f(s,Y_s,Z_s))ds - \int_t^T (Z_s - Z'_s)dW_s,$$

et donc

$$d(Y'_s - Y_s) = (f(s,Y'_s,Z'_s) - f(s,Y_s,Z_s))ds + (Z_s - Z'_s)dW_s,$$
$$d < Y' - Y >_s = \left\|Z_s - Z'_s\right\|^2 ds$$

Il vient

$$
\begin{aligned}
|Y'_t - Y_t|^2 &= 2\int_t^T (Y'_s - Y_s.f(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y_s, Z_s))ds \\
&- 2\int_t^T (Y'_s - Y_s, (Z'_s - Z_s)dW_s) - \int_t^T \left\| Z'_s - Z_s \right\|^2 ds
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Prenons l'espérance dans l'expression (2.7), on obteint

$$
\mathbb{E}\left[|Y_t - Y'_t|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\| Z'_s - Z_s \right\|^2 ds\right] = 2\mathbb{E}\left[\int_t^T (Y'_s - Y_s, f(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y'_s, Z'_s))ds\right].
$$

comme

$$
\begin{aligned}
&|f(s, U'_s, V'_s) - f(s, U_s, V_s)| \\
&= |f(s, U'_s, V'_s) - f(s, U_s, V_s) - f(s, U'_s, V_s) + f(s, U'_s, V_s)| \\
&\leq |f(s, U'_s, V'_s) - f(s, U'_s, V_s)| + |f(s, U'_s, V_s) - f(s, U_s, V_s)|,
\end{aligned}
$$

Et par l'hypothèse H4, on a

$$
(Y'_s - Y_s, f(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y_s, Z_s)) \leq \mu |Y_s - Y'_s|^2 + \lambda |Y_s - Y'_s|. \left\| Z_s - Z'_s \right\| ds.
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[|Y_t - Y'_t|^2 + \int_t^T \left\| Z_s - Z'_s \right\|^2 ds.\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\mu \int_t^T |Y_s - Y'_s|^2 ds + \lambda \int_t^T |Y_s - Y'_s|. \left\| Z_s - Z'_s \right\| ds.\right] \\
&\leq 2\mu \mathbb{E}\left[\int_t^T |Y_s - Y'_s|^2 ds\right] + \lambda^2 \mathbb{E}\left[\int_t^T |Y - Y'|^2 ds\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\int_t^T \left\| Z_s - Z'_s \right\|^2 ds\right].
\end{aligned}
$$

Il veint

$$
\mathbb{E}\left[|Y_t - Y'_t|^2\right] \leq (2\mu + \lambda^2)\mathbb{E}\left[\int_t^T |Y_s - Y'_s|^2 ds\right],
$$

et d'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$\mathbb{E}\left[Y_s - Y_s'|^2\right] \leq 0.$$

Ainsi, on a

$$Y_t = Y_t' \ \mathbb{P} - p.s.$$

En reportant ceci dans l'inégalité précédente, on obteint

$$Z_t = Z_t' \ \mathbb{P} - p.s.$$

D'oú l'unicité de la solution. **2-Existence**.
Considérons les processus

$$\overline{Y}_t = e^{\lambda t} Y_t, \overline{Z_t} = e^{\lambda t} Z_t, \ \ et \ \overline{f_t'} = e^{\mu t} \overline{f}_t, \tag{2.8}$$

et l'application

$$f' : (t, y, z) \longmapsto e^{\lambda t} f(t, e^{-\lambda t} y, e^{-\lambda t} z) - \lambda y. \tag{2.9}$$

Il est clair, que le couple $(\overline{Y}, \overline{Z})$ et prograssivement mesurable puisque (Y, Z) l'est et en outre $\overline{Z} \in \mathbb{M}^2 \mathbb{R}^{k \times d}$. Nous allons montrer que $(\overline{Y}, \overline{Z})$ est solution de L'EDSR de générateur f' et de condition finale $e^{\lambda T \xi}$ si et seulement si (Y, Z) et solution de L'EDSR (2.1) soit $(\overline{Y}, \overline{Z})$ solution de L'EDSR $(e^{\lambda T \xi}, f')$ En utilisant la formule d'Itô, on obtient

$$\begin{align}
Y_t &= e^{-\lambda t} \overline{Y_t} \tag{2.10}\\
&= e^{-\lambda t} \overline{Y_t} + \int_t^T \lambda e^{-\lambda s} \overline{Y_s} ds - \int_t^T e^{-\lambda s} d\overline{Y_s} \tag{2.11}\\
&= \xi + \int_t^T \lambda e^{-\lambda s} \overline{Y_s} ds + \int_t^T e^{-\lambda s} f'(s, \overline{Y_s}, \overline{Z_s}) ds - \int_t^T e^{-\lambda s} \overline{Z_s} dW_s \tag{2.12}\\
&= \xi + \int_t^T \lambda Y_s ds + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) - \lambda Y_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{2.13}\\
&= \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{2.14}
\end{align}$$

Donc (Y, Z) est solution de L'EDSR (2.1). La réciproque s'obtient exactement de la même façons. Posons $\lambda = \mu$ on vérifie alors que si f satisfait les hypothèses $H1 - H5$, alors f' satisfait $H1, H2, H3, H4$ et $H5$. En effet, il est clair que $\overline{f_t'}$ est un processus prog. mes. appartient á $\mathbb{M}^2(\mathbb{R}^+)$, de plus on a $\forall(y,z) \in \mathbb{R}^k \times R^{k\times d} f'(.y,z)$ st prog. mes. d'oú $(H1)$.

$$\begin{aligned}
|f'(t,y,z)| &\leq e^{\mu t}(\overline{f_t} + \lambda(|e^{-\mu t}y| + \left\|e^{-\mu t}z\right\|)) + \mu|y| \\
&\leq \overline{f'_t} + \lambda'|y| + \left\|z\right\|, avec \\
\lambda' &= \lambda + \mu, d'oú \qquad (H2).
\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}
&|f'(t,y,z) - f'(t,y,z')| = |e^{\mu t}|.|f(t,e^{-\mu t}y, e^{-\mu t}z) - f(t,e^{-\mu t}y, e^{-\mu t}z')| \\
&\leq \lambda|e^{\mu t}|. \left\|e^{-\mu t}z - e^{-\mu t}z'\right\| \\
&\leq \lambda\left\|z - z'\right\| \\
&\leq \left\|z - z'\right\|, d'oú \qquad (H3).
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
(y - y', f'(t,y,z) - f'(t,y',z)) &= e^{\mu t}(y - y', f(t,e^{-\mu t}y, e^{\mu t}z) - f(t,e^{\mu t}y, e^{-\mu t}z)) \\
&- \mu|y - y'|^2 \\
&\leq e^{2\mu t}\mu|e^{-\mu t}y - e^{-\mu}y'|^2 - \mu|y - y'|^2 \\
&\leq \mu|y - y'|^2 - \mu|y - y'|^2 \\
&\leq 0, d'oú \qquad (H4).
\end{aligned}$$

$f'(t,y,z)$ est continue. $\mathbb{P} - p.s.$ d'oú$(H5)$. on se ramène donc on cas oú la fonction f satisfait ces 5 dernières hypothèses.
Introduisons la même aplication ψ définie dans le cas lipschitzien, on montre de manière similaire que ψ admet un poit fixe et celui-ci est un unique et il est notre solution. □

2.4 Estimation á priori

Dans ce pragraphe en mémoire une première estimation sur les EDSR :
il s'agit en fait d'étudier la dépendance de la solution de L'EDSR par rapport aux données qui sont $\xi, f(s,0,0)\}_{0\leq t\leq T}$ et $\mathcal{F}_t^w = \sigma(w(s), 0 \leq s < t)$.

Proposition 2.4.1. *supposons que (ξ, f) vérifie les hypothése L1 et L2. soit (Y, Z) la solution de L'EDSR(2.1) telle que $Z \in \mathbb{M}^2$. Alors, ils existe une constante C telle que, pour tout $\beta \geq 1 + 2\lambda + 2\lambda^2$*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\beta t}\left\|Z_t\right\|^2 dt\right] \leq C\mathbb{E}\left[e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta t}|f(t,0,0)|^2 dt\right].$$

Preuve. on applique la formule d'Iltô á $e^{\beta}|Y_t|^2$ pour obtenir

$$e^{\beta t}|Y_t|^2 + \int_t^T e^{\beta s}\left\|Z_s\right\|^2 ds = e^{\beta t}|\xi|^2 + \int_t^T e^{\beta s}(-\beta|Y_s|^2 + 2Y_s.f(s,Y_s,Z_s))ds - \int_t^T 2e^{\beta s}Y_s.Z_s dW_s,$$

comme f est λ-lipschitz, on a, pour tout (t, y, z)

$$2y.f(t,y,z) \leq (2 + 2\lambda + 2\lambda^2)|y|^2 + |f(t,0,0)|^2 + |y|\left\|z\right\|.$$

et donc utilisant le fait que $2ab \leq \epsilon a^2 + \frac{b^2}{\epsilon}$ pour $\epsilon = 1$ puis 2,

$$2y.f(t,y,z) \leq (2 + 2\lambda + 2\lambda^2)|y|^2 + |f(t,0,0)|^2 + \frac{\left\|z\right\|^2}{2}.$$

pour $\beta \leq (1 + 2\lambda + 2\lambda^2)$ on obteint, pour tout $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} e^{\beta t}|Y_t|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T e^{\beta s}\left\|Z_s\right\|^2 ds \leq{}& e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_s^T e^{\beta s}|f(s,0,0)|^2 ds \\ &- 2\int_t^T e^{\beta s}Y_s.Z_s dW_s. \end{aligned} \qquad (*.*)$$

la martingale locale

$$\left\{\int_0^T e^{\beta s}Y_s.Z_s dW_s, t \in [0,T],\right\},$$

est une martingale d'aprés le lemme 1.1.1. En particulier, prenant l'espérance, on obtient facilement, pour $t = 0$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s}\left\|Z_s\right\|^2 ds\right] \leq 2\mathbb{E}\left[e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta s}|f(t,0,0)|^2 ds\right].$$

Revenant á l'inégalité (**), les l'inégalité Brukholder-Davis-Gundy donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|Y_t|^2\right] \leq{}& \mathbb{E}\left[e^{\beta T}|\xi|^2 + \int e^{\beta s}|f(t,0,0)|^2 ds\right] \\ &+ C\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{2\beta s}|Y_s|^2\left\|Z_s\right\|^2 ds\right)\right]. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$C\mathbb{E}\left[(\int_0^T e^{2\beta s}|Y_s|^2 \left\|Z_s\right\|^2)^{\frac{1}{2}}\right] \leq C\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t/2}|Y_t| \left(\int_0^T e^{\beta s}\left\|Z_s\right\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$
$$\leq \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|Y_t|^2\right] + \frac{C^2}{2}\mathbb{E}\left[\int_0^T e^{\beta s}\left\|Z_s\right\|^2 ds\right].$$

Il vient alors,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|Y_t|^2\right]$$
$$\leq 2\mathbb{E}\left[e^{\beta T}|\xi|^2 + 2\int_0^T e^{\beta s}|f(t,0,0)|^2 ds\right] + C^2\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T e^{\beta s}\left\|Z_s\right\|^2 ds\right)\right],$$

et facilement on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} e^{\beta t}|Y_t|^2 + \int_0^T e^{\beta s}\left\|Z_s\right\|^2 ds\right]$$
$$\leq 2(2+C^2)\mathbb{E}\left[e^{\beta T}|\xi|^2 + \int_0^T e^{\beta s}|f(t,0,0)|^2 ds\right].$$

Ce que tremine la preuve de la proposition prenant $C' = 2(2+C^2)$. □

2.5 Estimation de la différence des solutions

Théorèm 2.5.1. *Etant donner deux conditions finales ξ et ξ' et deux générateurs f et f' satisfaisant les condition $H1-H5$. Supposons que (Y,Z) et (Y',Z') soient les solution des EDSR asociées. Alors il existe une constante C qui dépend seulement des constantes de lipschitz et de monotonie de f' telle que*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t - Y'_t|^2 + \int_0^T \left\|Z_t - Z'_t\right\|^2 dt\right]$$
$$\leq C.\mathbb{E}\left[|\xi-\xi'|^2 + \int_0^T |f(s,Y_s,Z_s) - f'(s,Y_s,Z_s)|^2 ds\right].$$

2.6 Rôle de Z

Nous allons voir que le rôle, plus précisément celui du terme $\int_t^T Z_s dW_s$ est de rendre le processus Y adapté et que lorsque ceci n'est pas nécessaire Z est nul.

Proposition 2.6.1. *soit $\{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$ la solution de L'EDSR (2.1) et soit τ un temps d'arrêt majoré par T. On suppose, autre l'hypothèse L1, et L2, que*

i ξ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

ii $f(t, y, z) = 0$ dés que $t \geq \tau$.

Alors $Y_t = Y_{t\wedge\tau}$ et $Z_t = 0$ si $t \geq \tau$

***Preuve**.* On a

$$Y_t = \xi + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_\tau^T Z_s dW_s$$

et donc, pour $t = \tau$ comme, $f(t, y, s) = 0$ dés que $t \geq \tau$,

$$\begin{aligned} Y_t &= \xi + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_\tau^T Z_s dW_s \\ &= \xi - \int_\tau^T Z_s dW_s. \end{aligned}$$

il veint alors

$$Y_t = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_r) = \xi,$$

et par suite

$$\int_\tau^T Z_s dW_s = 0$$

d'oú l'on tire que

$$\mathbb{E}\left(\int_\tau^T Z_s dW_s\right)^2 = \mathbb{E}\left[\left\|Z_s\right\|^2 ds\right] = 0,$$

et finalement que

$$Z_s \chi_{s\geq\tau} = 0.$$

Il s'ensuit immédiatement que si $t \geq \tau$ $Y_t = Y_\tau$ puisque par hpothése,

$$Y_t = \xi + \int_\tau^T f(s, Y_s, Z_s)ds - \int_\tau^T Z_s dW_s = Y_t + 0 + 0.$$

ce qui termine la preuve.

Notons que dans le cas oú ξ et f sont déterministes alors Z est nul et Y est la solution de l'équation différentielle

$$-\frac{dY_t}{dt} = f(t, Y_t, 0)$$
$$Y_T = \xi = 0.$$

□

2.7 EDSR linéaires

les EDSR linéaires sont apparues en 1973 en théorie de contrôle stochastique. Comme pour les equations différentielle ordinaires, si f est linéaire, on peut donner une formule explicite de la solution de l'EDSR linéaire. mémoire simplifier prenons $K = 1$, ainsi Y est á valeur dans $\mathbb{R}$ et Z est une martrice de taille $1 \times d$

Proposition 2.7.1. *Soit $\{(a_t, b_t)\}_{t\in[0,T]}$ un processus á valeur dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ progrissivement mesurable et borné. Soient $\{(c_t)\}_{t\in[0,T]}$ un élément de $\mathbb{M}^2(\mathbb{R})$ et ξ une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable, de carré intégrable et á valeurs réelles. L'EDSR linéaire*

$$Y_t = \xi + \int_t^T (a_s Y_s + b_s Z_s + c_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{2.15}$$

admet une unique solution (Y, Z) telle que $Z \in M^2(\mathbb{R}^d)$ et Y et donné explicitement par la formule suivante

$$Y_t = \Gamma_t^{-1}\mathbb{E}(\xi\Gamma_T + \int_t^T c_s\Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t), t \in [0, T], \tag{2.16}$$

oú pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\Gamma_t = \exp(\int_0^t b_s dW_s + \int_0^t (a_s - \frac{1}{2}|b_s|^2)ds).$$

Preuve. commençons par remarque que Γ appartient á S^2 car b est borné et vérifie

$$d\Gamma_t = \Gamma_t(a_t dt + b_t dW_t), \Gamma_0 = 1 \tag{2.17}$$

De plus les hypothèses de la proposition assurent l'existence d'une unique solution $\{(Y_t, Z_t)\}_{t\in[0,T]}$ de L'EDSR linéaire. En effet, comme le générateure f et donné par

$$f(t, y, z) = a_t y + b_t z + c_t,$$

alors il est facile de vérifier les hypothèses $H1 - H5$ et donc Y appartient á S_c^2 d'après la proposition (2.1.1) d'autre part, la formule d'intégration par partie donne

$$\begin{aligned} d\Gamma_t Y_t &= \Gamma_t dY_t + Y_t d\Gamma_t + d < Y, \Gamma >_t \\ &= -\Gamma_t c_t dt + \Gamma_t Z_t dW_t + \Gamma_t Y_t b_t dW_t. \end{aligned}$$

ce qui montre que le processus

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_s \Gamma_s ds,$$

est une martingale locale qui est en fait une martingale. Par suite, on a

$$\Gamma_t Y_t + \int_0^t c_s \Gamma_s ds = \mathbb{E}(\Gamma_T Y_T + \int_0^T c_s \Gamma_s ds \mid \mathcal{F}_t).$$

ce qui achève la démonstration. ' Notons que si $\xi \geq 0$ et $c_t \geq 0$ alors la solution de L'EDSR linéaire vérifie $Y_t \geq 0$. Cette remarque va nous permettre d'obtenir le théorème de comparaison suivant. □

2.8 Théoréme de comparaison

Le résultat nous permet de comparer les solutions de deux EDSR. Soient $(\xi, f), (\xi', f')$ des paramètres vérifiant les hypothèses H1-H5 et $(Y, Z), (Y', Z')$ les solutions des EDSR associées.

Théorèm 2.8.1. *Si $\xi \leq \xi'$ $\mathbb{P}$- p.s et $f(t, y, z) \leq f'(t, y, z) dt \otimes d\mathbb{P}$- ps, alors $Y \leq Y'$ $\mathbb{P}$- ps. Si de plus $Y_0 = Y_0'$ alors $Y_t = Y_t'$ $\mathbb{P}$-ps. En particulier quand on a en outre $\xi < \xi'$ $\mathbb{P}$- ps ou $f(t, y, z) < f'(t, y, z) dt \otimes d\mathbb{P}$- ps, alors $Y_0 < Y_0'$.*

Preuve. La preuve s'effectue par linéarisation ce qui permet de se ramener aux EDSR linéaires. En effet, pour la première étape on va construire (α, β) comme suit. On pose

$$\alpha_t = \begin{cases} (Y_t' - Y_t)^{-1}(f(t, Y_t, Z_t) - f(t, Y_t', Z_t)) & si \quad Y_t \neq Y_t' \\ 0 & sinon, \end{cases} \tag{2.18}$$

et

$$\beta_t^i = \begin{cases} (Z_t'^i - Z_t^i)^{-1}(f(t, Y_t, Z_t^i) - f(t, Y_t', Z_t^{(i-1)})) & si \quad Z_t^i \neq Z_t'^i \\ 0 & sinon, \end{cases} \tag{2.19}$$

où le vecteur $Z_t^{(i)}, i \in \mathbb{N}^d$, dont les i premières composantes sont celles de Z_t', et des $d-i$ autre celles de Z_t, ie,

$$Z_t^{(i)} = (Z_t'^1, Z_t'^2, ..., Z_t'^i, Z_t^{(i+1)}, ..., Z_t^d).$$

On montre que

1. α_t et β_t sont progressivements mesurables (d'après les propriétés de Y_t et Z_t).
2. α_t et β_t sont bornés.

   En effet, par l'hypothèse H4, on a

   $$(Y_t' - Y_t)(f(t, Y_t, Z_t) - f(t, Y_t', Z_t)) \leq \mu |Y_t' - Y_t|^2$$

   Donc

   $$\alpha_t = (Y_t' - Y_t)^{-1}(f(t, Y_t, Z_t) - f(t, Y_t', Z_t)) \leq \mu \quad si \quad Y_t \neq Y_t'$$
   $$et \;\; \alpha_t = 0 \leq \mu \quad sinon.$$

   D'où $\alpha_t \leq \mu$.

D'après l'hypothèse H3, on a

$$|f(t, Y_t, Z_t^i) - f(t, Y_t', Z_t^{(i-1)})| \leq \lambda \| Z_t^{(i)} - Z_t^{(i-1)} \| = \lambda |Z_t'^i - Z_t^i|,$$
$$|\beta_t^i| \leq |(Z_t'^i - Z_t^i)^{-1}(f(t, Y_t, Z_t^{(i)}) - f(t, Y_t', Z^{(i-1)})| \leq \lambda \quad si \quad Z_t'^i \neq Z_t^i;$$
$$|\beta_t^i| = 0 \leq \lambda \quad sinon.$$

Ainsi on a $|\beta_t^i| \leq \lambda$.

Maintenant posons

$$(\bar{Y}t, \bar{Z}_t) \triangleq (Y_t' - Y_t, Z_t' - Z_t)$$
$$\bar{\xi} \triangleq \xi' - \xi$$
$$U_t \triangleq f'(t, Y_t', Z_t') - f(t, Y_t', Z_t').$$

Ainsi $\bar{Y}_t$ s'écrit

$$\begin{aligned}\bar{Y}_t &= \bar{\xi} + \int_t^T (f'(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y_s, Z_s))ds) - \int_t^T \bar{Z}_s dW_s, \\ &= \bar{\xi} + \int_t^T U_s ds + \int_t^T (f(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y_s, Z_s))ds) - \int_t^T \bar{Z}_s dW_s.\end{aligned}$$

Comme

$$f(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y_s, Z_s) = f(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y'_s, Z_s) + f(s, Y'_s, Z_s) - f(s, Y_s, Z_s),$$

où

$$f(s, Y'_s, Z_s) - f(s, Y_s, Z_s) = \alpha_s \bar{Y}_s,$$

ainsi, on a

$$\begin{aligned}f(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y'_s, Z_s) &= f(s, Y'_s, Z_s^{(d)}) - f(s, Y'_s, Z_s^{(0)}) \\ &= \sum_{i=1}^{d} (f(s, Y'_s, Z_s^{(i)}) - f(s, Y'_s, Z_s^{(i-1)})) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \bar{Z}_s^i \beta_s^i \\ &= \beta_s . \bar{Z}_s.\end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\bar{Y} \equiv \bar{\xi} + \int_t^T (U_s + \alpha_s \bar{Y}_s + \beta_s \bar{Z}_s)ds - \int_t^T \bar{Z}_s dW_s. \tag{2.20}$$

Et donc $(\bar{Y}_t, \bar{Z}_t)$ est solution de l'EDSR linéaire. En outre, puisque les processus ϵ et β sont progressivement mesurables et bornés et comme le U est progressivement mesurable d'après la proposition 2.7.1, l'EDSR linéaire (2.7) admet une unique solution $\bar{Y}_t$, telle que

$$\bar{Y}_t = \Gamma_t^{-1} \mathbb{E}(\bar{\xi}\Gamma_T + \int_t^T U_s \Gamma_s ds | \mathcal{F}_t), \tag{2.21}$$

Où pour tout $s \in [0, T]$

$$\Gamma_s = \exp\{\int_0^s (\alpha_u - \frac{1}{2}|\beta_u|^2)du + \int_0^s \beta_u dW_u\}. \tag{2.22}$$

D 'après la remarque 1.2.1 on montre que $\bar{Y}_t$, donné par (2.8) vérifie

$$\bar{Y}_t \geq 0, \quad i.e, \;\; Y'_t \geq Y_t, \tag{2.23}$$

Dés que

$$\bar{\xi} = \xi' - \xi \geq 0 \ \ et \ \ U_s = f'(s, Y'_s, Z'_s) - f(s, Y_s, Z_s) \geq 0.$$

Pour la seconde assertion du théorème, nous allons raisonner par l'absurde, Supposons qu'il existe $t > 0$ tel que $Y'_t > Y_t$ soit $\bar{Y}_t > 0$. Alors

$$\mathbb{E}(\bar{\xi}\Gamma^0_T + \int_0^T U_s \Gamma_s ds) = 0.$$

D'où l'on obtient

$$\bar{\xi} = 0 \ \ et \ \ U_s = 0 \ \ \forall s,$$

ainsi, on a

$$\bar{Y}_t = \mathbb{E}(0) = 0 \ \ \forall t.$$

En fin, si $\xi < \xi'$ $\mathbb{P}$- ps ou $f(t, y, z) < f(t, y, z) dt \otimes d\mathbb{P}$ - ps sur un ensemble de mesure strictement positive, alors par contraposée $Y_0 < Y'_0$. Car on a $Y'_0 = Y_0$. $\square$

Chapitre 3

Cadre Markovien Des EDSR

Dans ce chapitre nous verrons que la propriété de Markov pour les EDS se transfère aux EDSR.

3.1 Modèle et propriétés

Hypothèses et Notations

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel est défini un mouvement brownien W d-dimensionnel. On note par $\{\mathcal{F}_t^w\}_{t\geq 0}$ la filtration naturelle de W. Soient deux fonctions

$b : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ et $\sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$ continues. On suppose qu'il existe une constante $k \geq 0$ telle que, pour tout $t \geq 0$, pour tout $x, x' \in \mathbb{R}^n$, on a

(i) $|b(t,x) - b(t,x')| + \|\sigma(t,x) - \sigma(t,x')\| \leq k|x - x'|$,

(ii) $|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq k(1 + |x|)$.

Sous ces hypothèses, on peut construire, étant donnés un réel $t \in [0,T]$ et une variable aléatoire $\theta \in L^2(\mathcal{F}_t)$, $\{X_u^{t,\theta}\}_{t\leq u\leq T}$ la solution de l'EDS

$$X_u^{t,\theta} = \theta + \int_t^u b(s, X_s^{t,\theta})ds + \int_t^u \sigma(s, X_s^{t,\theta})dW_s, \quad t \leq u \leq T. \tag{3.1}$$

On convient, que si $0 \leq u \leq t$

$$X_u^{t,\theta} = E(\theta|\mathcal{F}_u).$$

Considérons deux fonctions

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \ et\ f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n\times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k.$$

Soient les hypothèses suivantes ; il existe des réels k, μ et $p \geq 1$ tels que, on a

(h1) La fonction $f(t,x,y,.)$ est lipschitzienne, i.e.,

$$\forall t, x, y, z, z' \qquad |f(t,x,y,z) - f(t,x,y,z')| \leq k\|z - z'\|,$$

(h2) La fonction $f(t,x,.,z)$ est monotone, i.e.,

$$\forall t, z, y, y', z \qquad (y - y', f(t,y,z) - f(t,y',z)) \leq u|y - y'|^2,$$

(h3) Les fonctions f et g vérifient

$$|g(x)| + |f(t,x,y,z)| \leq k(1 + |x|^P + |y| + \|z\|),$$

Sous ces hypothèses, si $\theta \in L^2(\mathcal{F}_t)$, on sait d'après le théorème 2.3.1 du chapitre 1 l'EDSR suivante

$$Y_u^{t,\theta} = g(X_T^{t,\theta}) + \int_u^T f(s, X_s^{t,\theta}, Y_s^{t,\theta}, Z_s^{t,\theta})ds - \int_u^T z_s^{t,\theta} dW_s, \quad 0 \leq u \leq T. \tag{3.2}$$

Admet une unique solution. Dans toute la suite, nous supposerons que les hypothèses sur les coefficients b, σ, f et g sont satisfaites. Parfois, nous supposerons de plus que g et f sont k-lipschitziennes en x uniformément en (t,y,z). Nous désignerons cette hypothèse par (lip).

3.2 La propriété de Markov pour les EDS

Nous allons établir la propriété de markov pour les solutions d'EDS (3.1) comme conséquence de la propriété de flot

3.2.1 Rappels sur les EDS

Proprietés du flot des EDS On va travailler ici avec conditions initiales déterministes, ce qui permet de prendre comme filtration la filtration naturelle du mouvement browien $\{\mathcal{F}_t^w\}_{t\geq 0}$. On suppose que les fonctions b et σ vérifient les hypothéses classique du théoréme d'existence et d'unicité pour les EDS, on peut alors construire pour $(t,\theta) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ la solution de l'EDS suivante

$$X_u^{t,\theta} = \theta + \int_t^u b(s, X_s^{t,\theta})ds + \int_t^u \sigma(s, X_s^{t,\theta})dW_s, \quad t \leq u \leq T.$$

et on pose

$$X_u^{t,\theta} = E(\theta|\mathcal{F}_u). \quad si \;\; 0 \leq u \leq T$$

Dans le cas déterministe, si $\sigma = 0$, le flot de l'équation diffèrentielle, noté $\varphi_u^{t,\theta}$ dans ce cas, possède les propriétés, en particulier

- $\varphi_u^{t,\theta}$ est lipschtzienne en (t,u,θ)
- pour $s \leq t \leq u$ $\varphi_u^{t,\theta} = \varphi_u^{t,\varphi_t^{t,\theta}}$

Dans le cas stochastique $X_u^{t,\theta}$, posséde aussi des propriétés du méme type.

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T} |X_u^{t,\theta}|^q\right] \leq C(1+\mathbb{E}[|\theta|^q]), \tag{3.3}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T} |X_u^{t,\theta} - X_u^{t,\theta'}|^q\right] \leq C(1+\mathbb{E}[|\theta-\theta'|^q]).$$

Dans le même esprit, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq T} |X_u^{t,x} - X_u^{t,x'}|^q\right] \leq C\left\{|x-x'|^q + |t-t'|^{q/2}(1+|x|^q)\right\}. \tag{3.4}$$

3.3 Propriété de Markov pour les EDS

Proposition 3.3.1. *Soit $x \in \mathbb{R}^n; 0 \leq r \leq s \leq t$, on a :* $X_t^{r,x} = X_t^{s,X_s^{r,x}}$, $\mathbb{P}$*-p.s.*

Preuve. En effet, on a $\forall s, y, t$

$$X_t^{s,y} = y + \int_s^t b(u, X_u^{s,y})du + \int_s^t \sigma(u, X_u^{s,y})dW_u, \mathbb{P} - p.s,$$

il vient alors $\forall t$,

$$X_t^{s,X_s^{r,x}} = X_s^{r,x} + \int_s^t b(u, X_u^{s,x})du + \int_s^t \sigma(u, X_u^{s,x})dW_u, \mathbb{P} - p.s,$$

On remarque $X_s^{r,x}$, est un aussi solution de cette derniére EDS sur $[0,T]$ puisque

$$X_s^{r,x} = x + \int_r^t b(u, X_u^{r,x})du + \int_s^t \sigma(u, X_u^{r,x})dW_u, \mathbb{P} - p.s,$$

L'uncité des solutiond'une EDS á coafficients lipshitziennes donne alors en fait á l'indistinguabilité près sur $[s, T]$-

$$X_t^{r,x} = X_t^{s, X_s^{r,x}}$$

En fait, par continuité, l'égalité

$$X_t^{r,x} = X_s^{X_s^{r,x}},$$

a lieu pour tout x et pour tout $0 \leq r \leq s \leq t \leq T$ en dehors d'un ensemble $\mathbb{P}$-négligeable.

$\square$

3.4 Propriété de Markov pour les EDSR

Nous verrons que la Propriété de Markov pour les EDS se transfère aux EDSR. considérons deux fonctions

$$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \ \ et \ \ f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n \times d} \longrightarrow \mathbb{R}^k.$$

Proposition 3.4.1. *Soient les hypothèses suivantes ; il existe des réels k, μ et $p \geq 1$ tels que, on a*

1. *La fonction $f(t, x, y, .)$ est lipshitzienne, i.e.,*

$$\forall t, x, y, z, z' |f(t, x, y, z) - f(t, x, y, z')| \leq k \left\| z - z' \right\|,$$

2. *La fonction $f(t, x, ., z)$ est monotone,i.e.*

$$\forall t, x, y, y', z (y - y', f(t, y, z) - f(t, x, y', z)) \leq \mu |y - y'|^2,$$

3. *les fonction f et g vérifient*

$$|g(x)| + |f(t, x, y, z)| \leq k(1 + |x|^p + |y| + \left\| z \right\|),$$

Alors on a

$$Y_{t+h}^{t,x} = Y_{t+h}^{t+h.X_{t+h}^{t,x}}$$

Preuve. On considére L'EDSR suivante

$$
\begin{aligned}
Y_{t+h}^{t,x} &= g(X_T^{t,x}) + \int_{t+h}^{T} f(s, X_s^{t,x}, Y_s^{t,x}, Z_s^{t,x})ds - \int_{t+h}^{T} Z_s^{t,x} dW_s. \ Donc \\
Y_{t+h}^{t+h.X_{t+h}^{t,x}} &= g\left(X_{t+h}^{t+h.X_{t+h}^{t,x}}\right) + \int_{t+h}^{T} f\left(s, X_s^{t+h,X_{t+h}^{t,x}}, Y_s^{t+h,X_{t+h}^{t,x}}, Z_s^{t+h,X_{t+h}^{t,x}}\right) ds - \int_{t+h}^{T} Z_s^{t+h,X_{t+h}^{t,x}} dW \\
X_s^{t,x} &= X_s^{t+h,X_{t+h}^{t,x}}
\end{aligned}
$$

La propriété de Markov pour l'equation directe s'ecrit donc

$$
Y_{t+h}^{t+h.X_{t+h}^{t,x}} = g\left(X_T^{t,x}\right) + \int_{t+h}^{T} f\left(s, X_s^{t+h,x}, Y_s^{t+h,X_{t+h}^{t,x}}, Z_s^{t+h,X_{t+h}^{t,x}}\right) ds - \int_{t+h}^{T} Z_s^{t+h,X_{t+h}^{t,x}} dW_s
$$

$$
(Y_{t+h}^{t,x}, Z_{t+h}^{t,x}) \ et \left(Y_{t+h}^{t+h.X_{t+h}^{t,x}}, Z_s^{t+h,X_{t+h}^{t,x}}\right)
$$

Par unicité des solutions des EDSR ces deux couples sont solution de la même EDSR donc ils sont égaux. $\square$

Chapitre 4

Application Des EDSR

4.1 Introduction

Les mathématiciens ont depuis longtemps essayé de résoudre les questions soulevées par le monde de finance. Une des caractéristiques de ces question il suffit de penser á la bourse pour s'en convaincre -est qu'elles font apparaître des dynamiques d'apparence désordonnées et c'est porquoi les modéles probabilistes semblent relativement bien adaptés á cette situation. De nombreux probabilistes se sont penchés sur ces question raffinant sans cesse les modèles utilisés. Le modèle de Black-Scholes est, á l'origine, un modèle á deux actifs ; l'un risqué, l'autre pas. Typiquement, l'actif risqué est action (l'action sous-jacente á l'option) tandis que l'actif non risqué s'apprente á une obligation. On note R_t le prix de l'obligation, et S_t le prix de l'action. l'évolution de l'obligation est relativement simple puisque l'on suppose que

$$dR_t = r_t R_t dt, \tag{4.1}$$

et la solution s'écrit

$$R_t = R_t e^{\int_0^1 r_s ds} \quad avec \quad R_0 = 1. \tag{4.2}$$

Oú $r_t \geq 0$ représente le taux d'Itérêt instantané. le prix de l'action $\{S\}_{t\geq 0}$ est régi par l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma_t dW_t) \quad avec \quad S_0 > 0, \tag{4.3}$$

oú μ est un paramètre rèel, et $\sigma \geq 0$ est appelée la volatilité. Bien evidemment $\{W_t\}_t$ est un mouvement de brownien standard et $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. En ce qui concerne les hypothèses, nous supposerons que les processus r, μ et σ sont progressivement musurables, et que pour tout $T > 0$, on a

$$\int_0^T \{r_t + |\mu| + \sigma_t^2\}dt < \infty.\mathbb{P} - p.s.$$

En outre, nous supposons également le processus σ borné. la formule d'Itô nous donne le prix de l'action

$$S_t = S_0 \exp\left\{\int_0^t (\mu_s - \frac{1}{2}\sigma_s^2)ds + \int_0^t \sigma_s dW_s\right\}. \tag{4.4}$$

Dans le modéle de Black-Scholes original, les paramètres r, μ et σ sont des constantes, et on a dans ce cas :

$$R_t = e^{rt},$$
$$S_t = S_0 \exp\left\{\sigma W_t + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt\right\}.$$

Rappelons tout d'apord quelques définitions.

1. une option est un titre qui donne le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre suivant qu'il s'agit d'une option d'achat ou de vente-une certaine quantité d'actif financier á un prix fixe á l'avance, la durée de la vie du contrat est elle aussi fixée lors de la signature du contrat. On décrit une option á l'aide des èlément suivants :
2. la nature de l'option : on parle de call dans le cas d'une option d'achat et de put dans le cas d'option de vente.
3. l'actif sous-jacent sur lequel porte l'option : en pratique le sous-jacent peut être une action, une devise voire même une autre option.
4. Le nombre de parts d'actif áacheter ou á vendre : nous supposerons toujours ce nombre égal á un.
5. le prix d'exercice qui est le prix auquele se fera la transaction en cas d'exercice de l'option.
6. la maturité ou l'échéance qui est la durée de vie de l'option : on distingue deux types d'options :

7. les option europennes (O.E) qui ne peuvent exercées seulement á nimporte quel instant t entre la signateur du contrat et la naturité.

4.2 Modéle de marché financier

Considérons un agent qui investit dans ce marché. Designons par ϕ_t et ψ_t les nombres respectifs d'obligtions et d'action détenues par l'agent á l'instant t. La valeur du portefeuille de cet investisseure est

$$V_t = \phi_t R_t + \psi_t S_t.$$

On suppose que le processus (ϕ, ψ) est prograssivement mesurable. Le fait que (ϕ_t, ψ_t) soit adapté signifie que l'agent, pour déterminer la stratégie qu'il va adopter, n'anticipe pas sur le futur : Il ne dispose que de l'information jusqu'á l'instant t qui est véhiculée par $\mathcal{F}_t$; cela proscrit en particulier les délits d'initiés. signalons d'autre part que dans le modèle ϕ_t et ψ_t sont des réels ; lorsqu'ils sont négatifs, l'agent contracte une dette libellée dans l'actif correspondant. Un tel couple de processus s'appelle une stratégie de financement. En fait, nous ne considérons que des stratégies autofinancées c'est-á-dire pour les quelles nous avons :

$$dV_t = \phi_t dR_t + \psi_t dS_t.$$

La signification de l'autofinancement est la suivante : á l'instant $t = 0$, l'agent investit la somme V_0 dans le marché puis au cours du temps, il fait évoluer la répartition des titres dans son portefuille. Il n'y a ni apport de fonds ni retrait d'argent pour consommation.

L'équation d'autofinancement nécessite une petite hypothèse techique. En résumé pour notre modèle

Dèfinition 4.2.1. *Une stratégie autofinancée est un couple de processus (ϕ, ψ) progressivement mesurables vérifiant*

$$\int_0^T \{r_t|\phi_t| + \sigma_t^2 \psi_t^2\} dt < \infty . \mathbb{P} - p.s.$$

et tel que le processus $V_t = \phi_t R_t + \psi_t S_t$ satisfait

$$dV_t = \phi_t dR_t + \psi_t dS_t, \qquad t \geq 0.$$

On utilise la notion suivante : si $\{X_t\}_{t\geq 0}$ est un processus adapté, on note $X^a(t)$ la valeur de X_t actualisée soit

$$X^a(t) = X_t/R_t.$$

on note a_t le coefficient d'actualisation á l'instant t soit $a_t = 1/R_t$. La formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} dV^a(t) &= -r_t V^a(t)dt + a_t dV_t, \\ dS^a(t) &= -r_t S^a(t)dt + a_t dS_t \\ &\qquad -r_t a_t S_t dt + a_t dS_t. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} V_t &= \psi_t S_t + \phi_t R_t, \\ \psi_t dS^a(t) &= -r_t a_t (V_t - \phi_t R_t)dt + a_t \psi_t dS_t. \\ &= -r_t V^a(t)dt + a_t(\phi_t dR_t + \psi_t dS_t). \end{aligned}$$

On déduit immédiatement le lemme suivant :

Lemme 4.2.1. *Soit (ϕ, ψ) une stratégie. (ϕ, ψ) est autofinance si et seulement si*

$$dV^a(t) = \psi_t dS^a(t).$$

Ce résultat possède une coséquence importante : une stratégie autofinancée est entièrement caractérisée par la valeur initiale du portefeuille V_0 et le processus ψ_t

Preuve. En effet, une stratégie est une autofinancée si et seulement si

$$V^a(t) = V^a(0) + \int_0^t \psi_u dS^a(u) = V_0 + \int_0^t \psi_u dS^a(u) \qquad (*.*)$$

On obtient alors ϕ_t via la relation

$$\begin{aligned} \phi_t &= V^a(t) - \psi_t S^a(t) \\ &= V_0 + \int_0^t \psi_u dS^a(u) - \psi_t S^a(t). \end{aligned}$$

□

En vertu de ce lemme, une stratégie autofinancée sera désignée par le couple (x, ψ), x représentant la valeur initaile du portefeuille associée via la relation (.*). Si besoin, nous noterons $V_t^{x,\psi}$ la valeure du portefeuille correspondant á la stratégie autofinancée (x, ψ) mais la plupart du temps la référence á (x, ψ), sera omise.*

Dèfinition 4.2.2. *une stratégie autofinancée, (x, ψ), est dite admissible si pour tout*

$$t \geq 0, V_t^{x,\psi} \geq 0.$$

et elle est dite minorée, s'il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\forall t \geq 0, V^a(t) \geq -c.$$

Pour une stratégie admissible la valeur du portefeuille doit toujours être positive : aucune dette, même temporaire, n'est tolérée. Dans le second, les dette, même temporaire, n'est tolérée. Dans le second, les dettes sont tolérées dans une certaine mesure mais ne doivent pas dépasser un certain seuil.

4.3 Opportunité D'arbitrage

Une Opportunité d'arbitrage ou plus simplement un arbitrage est un moyen de gagner de l'argent sans prendre aucun risque en particulier sans mise initiale, Cela se traduit par la définition suivante lorsqu'on suppose que l'investisseur intervient durant la période $[0, T]$.

$$V_0 = 0, \ \mathbb{P}(V_T \geq 0) = 1, \quad \mathbb{P}(V_T > 0) > 0.$$

La première condition signifie que l'on part de rien, la seconde que l'on est sûr de ne pas perdre d'argent et la troisième qu'avec une probabilité strictement positive on fait un réel profit. On imagine sans peine que les gens qui tentent de régler le marché cherchent à tout prix à proscrire les opportunités d'arbitrage. En effet, si de telles opportunités sont admises le marché ne tarde pas à «exploser». Une hypothèse communément faite est donc celle d'absence d'opportunité d'arbitrage désigné par (AOA) dans la suite. Dans le modèle de Black-Scholes, nous avons

$$dS^a(t) = S^a(t)\{(\mu_t - r_t)dt + \sigma_t dW_t\}.$$

Introduisons le processus

$$\psi_t = sgn(\mu_t - r_t)\chi_{\sigma_t} = 0.$$

La stratégie autofinancée associée à $(0, \psi)$ vérifie

$$V^a(t) = \int_0^t \psi_u dS^a(u) = \int_0^t |\mu_t - r_t|\chi_{\sigma_t=0} du.$$

Sous (AOA), c'est-à-dire en l'absence d'opportunité d'arbitrage, on doit avoir

$$|\mu_t - r_t|\chi_{\sigma_t=0} = 0 \ \ m \otimes \mathbb{P} - p.p.$$

Car sinon la stratégie précédente est clairement un arbitrage et donc il existe un processus θ progressivement mesurable tel que

$$\sigma_t \theta_t = \mu_t - r_t.$$

On peut prendre par exemple

$$\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma_t}\chi_{\sigma_t \neq 0}.$$

Puisque si $\sigma_t = 0$ alors $\mu_t - r_t = 0$.

4.4 Complétude du marché

Commençons par l'exemple le plus connu d'option européenne, celui d'une option européenne d'achat ou «call européen». Il s'agit d'un titre qui donne le droit mais non l'obligation à son détenteur d'acheter à une date T fixée par avance une action S à un prix K fixé par avance. T s'appelle la maturite et K le prix d'exercice. A' la date T, ou bien $S_T \geq K$ ou bien $S_T < K$. Dans le premier cas, le détenteur de l'option exerce son droit : il achete une action au prix K; il peut revendre instantanément cette action au prix S_T réalisant ainsi un bénéfice de $S_T - K$ à la date T. Dans le second cas, le détenteur de l'option n'exercera pas son droit : il ne va pas acheter au prix K une action qu 'il peut acheter moins cher sur le marché. Il ne fait aucun bénéfice. Finalement, le gain que procure la détention d'un call européen est

$$\xi = (S_T - K)^+.$$

On parle souvent de « payoff ». Toute option européenne sera représentée par le gain que procure à maturité sa détention.

Dêfinition 4.4.1. *On appelle option européenne de maturité T toute variable aléatoire positive et $\mathcal{F}_T-$mesurable.*

Nous supposons à présent qu'il existe une probabilité risque neutre, $\mathbb{P}^*$ et nous travaillons à maturité fixée $T > 0$, nous introduisons deux notions importantes.

Dêfinition 4.4.2. *Une option européenne est $\mathbb{P}^*$ régulière si la variable aléatoire $\xi^a = a_T\xi$ est $\mathbb{P}^*$ intégrable i.e $\mathbb{E}^*[\xi^a] < \infty$.*

Dêfinition 4.4.3. *Une option régulière est simulable ou duplicable s'il existe une stratégie autofinancée (x, ψ) telle que*

$V_T = \xi, V^a$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale.

Dêfinition 4.4.4. *Le marché est $\mathbb{P}^*-$ complet si toute option régulière est simulable*

Proposition 4.4.1. *Notons tout d'abord qu'une option régilière est simulable si et seulement s'il existe une stratégie minorée telle que*

$$V_0 = \mathbb{E}^*[\xi^a], \;\; V_T = \xi.$$

Preuve. En effet, si ξ est simulable alors il existe une stratégie autofinancée telle que

V^a est une $\mathbb{P}^*$-martingale et $V^a(T) = \xi^a$, donc

$$V^a(t) = \mathbb{E}^*(V^a(T)|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^*(\xi^a|\mathcal{F}_t).$$

En particulier, puisque $\xi \geq 0$, il en est de même de

$$V^a(T) \;\; et \;\; V^a(0) = \mathbb{E}^*[\xi^a].$$

Réciproquement, si (x, ψ) est une stratégie minorée, V^a est sous $\mathbb{P}^*$ une martingale locale minorée donc une surmartingale. On a donc pour tout $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}^*[V^a(T)] \leq \mathbb{E}^*[V^a(t)] \leq \mathbb{E}^*[V^a(0)].$$

Si $V^a(0) = V_0 = \mathbb{E}^*[\xi^a]$ et $V^a(T) = \xi^a$ alors pour tout $t \in [0, T]$,

$$\mathbb{E}^*[V^a(t)] = \mathbb{E}^*[\xi^a].$$

Et V^a est alors une $\mathbb{P}^*$ -martingale, une surmartingale d'espérance constante étant une martingale. $\square$

Comme dans les modeles discrets, nous avons le résultat général suivant : s'il existe une probabilité risque neutre $\mathbb{P}^*$, le marché est $\mathbb{P}^*$-complet si et seulement si $\mathbb{P}^*$ est l'unique probabilité risque neutre.

Théorèm 4.4.1. *Dans le modéle de Black-Scholes, nous obtenons le résultat suivant : on se place dans le modele de Black-Scholes et on suppose l'existence d'une probabilité risque neutre. Le marché est complet si et seulement si $\sigma_t > 0\, m \otimes \mathbb{P} - p.p.$*

4.5 La problématique des options

Venons à présent aux questions que soulévent les options. Prenons le point de vue du vendeur de l'option, à l'instant $t = 0$, il vend le contrat -dont le gain pour l'acheteur est la variable aléatoire $\xi-$ et reçoit en échange une certaine somme d'argent que l'on appelle la prime disons x euros. Le premier problème du vendeur est de ne pas perdre d'argent : en effet, à l'instant T, la maturité, il sait qu'il devra verser au détenteur de l'option la somme (aléatoire) $\xi(\omega)$. Pour se couvrir contre ce risque le vendeur va investir la prime x dans le marché et suivre (ou essayer de trouver) une stratégie autofinancée et minorée ψ de sorte que

$$V_t^{x,\psi} \geq \xi \;\; \mathbb{P} - p.s.$$

C'est le premier aspect du problème. D'autre part, on imagine sans peine que notre agent n'est pas le seul à proposer ce produit et donc il souhaite être le plus compétitif possible c'est-à-dire vendre l'option le moins cher possible. Finalement, le prix de l'option ξ apparait comme

$$P(\xi) = \inf\{x \geq 0, \exists (x,\psi) \text{ stratégie minorée t.q. } V_t^{x,\psi} \geq \xi \;\; \mathbb{P} - p.s.\}$$

Il est très facile de montrer que $\mathbb{P}(\xi) \geq \mathbb{E}^*[\xi^a]$. En effet, si (x,ψ) est une stratégie minorée telle que $V_T \geq \xi, V^a$ est une surmartingale et

$$x = \mathbb{E}^*[V^a(0)] \geq \mathbb{E}^*[V^a(T)] \geq \mathbb{E}^*[\xi^a].$$

4.6 Exemples

1- Nous venons de voir que le prix d'une option européenne, ξ, est donné par «simulation» : plus précisément, on cherche une stratégie autofinancée de valeur finale $V_T = \xi$ et on a $\mathbb{P}(\xi) = V_0$

Or pour une stratégie autofinancée, nous avons.

$$dV_t = \phi_t dR_t + \psi_t dS_t$$

Qui devient dans le modèle Black-Scholes à coefficients constants

$$dV_t = r\phi_t R_t dt + \psi_t S_t(\mu dt + \sigma dW_t).$$

Ce qui donne, puisque

$$\begin{aligned}\phi_t R_t &= V_t - \psi_t S_t,\\ dV_t &= rV_t dt + (\mu - r)\psi_t S_t dt + \sigma\psi_t S_t dW_t.\end{aligned}$$

Déterminer le prix d'une option européenne revient donc naturellement à résoudre une EDSR :

En effet, pour simuler l'option ξ, on cherche un couple de processus (V, ψ) tel que l'évolution de V est régit par l'EDS précédente et $V_T = \xi$; on souhaite donc que (V, ψ) soit solution de

$$V_t = \xi + \int_t^T (-rV_u - (\mu - r)\psi_u S_u)du - \int_t^T \sigma\psi_u S_u dW_u.$$

Pour « coller » au formalisme EDSR, il suffit de changer d'inconnue en posant $Z_t = \sigma\psi_t S_t$, (S est connu) l'équation précédente se réécrit, si l'on note

$$\begin{aligned}\theta &= (\mu - r)/\sigma,\\ V_t &= \xi + \int_t^T (-rV_u - \theta Z_u)du - \int_t^T Z_u dW_u.\end{aligned}$$

On obtient ici une EDSR linéaire que l'on peut résoudre «explicitement»

$$V_t = \mathbb{E}^{\mathcal{F}_T}\left[\xi \exp\left(-\theta(W_T - W_t) + \frac{\theta^2}{2}(T - t) - r(T - t)\right)\right]$$
$$V_0 = \mathbb{E}\left[e^{-rT}\xi \exp\left(-\theta W_T + \frac{\theta^2}{2}T\right)\right]$$

2- Supposons maintenant que «le régulateur du marchés» veuille éviter trop de spéculation sur l'action sous-jacente. Il peut soit interdire formellement cette transaction soit, de façon plus subtile, pénaliser les investisseurs qui se livrent à cette pratique. Dans le second cas, lorsqu'un investisseur fait des dettes libellées dans le sous-jacente, il doit payer une pénalité (instantanée) proportionnelle au montant de cette dette soit $\psi_t S_t$.

Dans ce dernier cas, dupliquer une option européenne revient à résoudre l'EDSR,

$$dV_t = (rV_t + \theta Z_t - \gamma Z_t^-)dt - Z_t dW_t, \quad V_T = \xi.$$

Où γ est une constante positive. Cette EDSR n'est plus linéaire mais les hypothèses du théorème de Pardoux-Peng sont satisfaites dès que ξ est de carré intégrable.

3- Un autre exemple d'EDSR non-linéaire intervenant en finance est le suivant :

$$dV_t = (rV_t + \theta Z_t)dt + Z_t dW_t - (R - r)(V_t - Z_t/\sigma)^- dt, \quad V_T = \xi.$$

On est amené à résoudre cette dernière équation pour dupliquer une option européenne lorsque le taux d'emprunt R est supérieur au taux r auquel est rémunéré l'argent. Il n'est dans ce cas pas raisonnable d'emprunter de l'argent à un taux R et d'investir au même moment sur le placement sûr dont le taux est r.

Signalons que dans tous les exemples précédents, les stratégies sont admissibles i.e. $V_t \geq 0$.

Cela résulte très facilement du théorème de comparaison pour les EDSR.

Bibliographie

[1] **A. Djenien**, Les équations différentielles stochastiques rétrogrades avec retard. Juin 2019.

[2] Bokhila, les équations différentielles stochastiques rétrogrades et leursapplications en matimatique financière.

[3] P. Briand, Equations Differentielles stochastic Rétrogrades, cour Mars 2001. Univ. Paul Sabatier.

[4] P. Briand, Le modèle de Blak-Scholes. Mars2003.Séminaire des doctorants.Bordeaux.

[5] **J. M. Bismu**, Conjugate convex functionin optumale stochastic controle. J. Math. AnaL. Appl., 1973,44,384-404.

[6] **R. W. R. Darlling and E. Pradoux** Bakwards SEDwith random treminaltime and application to similinear elliptic PDE Ann.Proba. 25 (1997),$N°3$; 1135-1159

[7] **R. M. Dudley,** Winer functionals as Itô integrals, Ann. Probability, 5, 1977, 140-141

[8] **N.EL Karoui,S.Peng, and M. C. Quenez,** Bakward stochastic differential equations in finance, Math. finance 7 (1997)$N\circ$1,1–71

[9] **W. H. Fleming, H. M. Soner.**Controlled Markov processes and viscosity solution. Applications of Mathematics, Springer, 1993.

[10] **A. Friedman,** Stochastic diferential equations and application, I. Academie press ;New-york, 1975.

[11] **D.Lamberton and B. Lapeyer,** Introduction au calcule stochastique appliė àla finance, Ellipses édition

[12] **A. Matoussi,**Bakward stochastique Diferetial Equations and Applications in PDFs and in finance. Mathimatical Modeling in finance. ENIT, Tunis, Tunisie. October, 3-7 2005

[13] **E.Pardoux** Quelques metodes probabilistes pour les équation aux rivées partielles. ESAIM. vol, Septembre 1998, 91-109

[14] **E.Paradoux and S.Peng,** Adapted solution of a backward stochastique differential equation, Systemes control. Lett. 14(1990), $N°1$, 55-61

[15] **S.Peng,** Stochastic Hamilton-jacobi-bellman equations, SIAMJ. Control Optim.30(1992),$N°2$, 248-304.

[16] **A.Popier**,thèse de Dotorat, Labo. Prob., Univ.Pprovence.Décembre 2004

[17] **P.Protter,**stochastic Integration and Differential Equations.Springerverlag, New York, 1990.

[18] **S.Rainero,** Mémoire de DEA Septembre 2001.Univ.paris-Dauphine.

[19] **L. C. G. Rogers and D.Williams,Difusions,** Markov Procfsses and Martingales, Vol. 2 : Itô calculs cambrdge University Press, 1994.