



N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Méthode mathématique pour le débruitage d'images

Présenté par: Gherbi Hadda.
Sebbak abdel kader Hana.

Soutenu le 05/06/2018 devant le jury composé de

Ben Ali Ibrahim
Dehda Bachir
Doudi Nedjet

M.A.A
M.A.A
MAB.

Président
Rapporteur
Examineur

Univ. El Oued
Univ. El Oued
Univ. El Oued

Année universitaire: 2017 – 2018

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier « **Allah** » le tous puissant, pour nous avoir donné la force et la patience.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements :

À notre encadreur de mémoire **Dr. Dehda Bachir** Maître de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements, sa patience qu'il n'a cessé de nous apporter tout au long de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

Un remerciement spécial et sincère au **Prof. Zaiz Fouzi**, pour son aide.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de nos familles.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également à nos camarades de la promotion 2018 de Mathématiques et nos amis surtout **Tefaha, Oum El Fadhel, Fatima, Nacira** et **Soumya** pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Finalement, Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Résumé

Ce mémoire, est consacré à l'étude d'effet pratique d'une nouvelle technique pour le débruitage d'images. On commence par un rappel sur l'espace de Hilbert et quelques propriétés principales. Puis, on fait un survol sur la théorie des signaux, où on définit quelques notions de base comme, le signal, l'image numérique et le bruit. Ensuite, on démontre par une étude approfondie sur l'analyse multirésolution, que l'on peut construire des variétés des bases orthonormées d'ondelettes. On propose également, une nouvelle fonction du seuillage caractérisée par des avantages par rapport aux seuillage dur et doux.

Enfin, on compare par des critères informatiques la performance pratique des techniques classiques avec la nouvelle technique.

Mots-clés : Analyse de Fourier, ondelettes, analyse multirésolution, seuillage dur et doux, débruitage d'images, nouvelle fonction du seuillage.

Abstract

This work is devoted to the study of the practical effect of a new technique for images denoising. We begin with a reminder on the Hilbert space and some main properties. Next, we do an overview of the signal theory, where we define some basic notions as : the signal, the digital image and the noise. Then, we demonstrate through a detailed study on the multiresolution analysis, that we can build from it varieties of orthonormal wavelet bases. We also propose a new thresholding function characterized by advantages over hard and soft thresholding.

Finally, we compare by informatics criteria the practical performance of classical techniques with the new technique.

Keywords : Fourier analysis, wavelets, multiresolution analysis, Hard and Soft thresholding, images denoising, new thresholding function.

Notations générales

H	Espace de Hilbert.
$\mathbb{R}$	Ensemble réel.
$\langle ., . \rangle$	Produit scalaire.
$B(a, r)$	La boule ouverte .
$\bar{B}(a, r)$	La boule fermée.
$\oplus$	Somme directe.
$\Re$	La partie réelle.
$L^p, 1 < p < \infty$	Espace de Lebesuge.
$\sum$	Somme.
$ \cdot $	La valeur absolue.
η_{New}	La nouvelle fonction de seuillage.
η_H	Fonction de seuillage dur.
η_S	Fonction de seuillage doux.
$C(\mathbb{T})$	Espace des fonctions continues et 2π -périodiques.

Table des figures

2.1	Signal 1D.	12
2.2	Image numérique en niveaux de gris.	12
2.3	Image numérique en couleur.	13
2.4	Bruit speckle $\sigma = 0.2$	16
2.5	Bruit poivre et sel $\sigma = 0.2$	16
2.6	Bruit gaussien $\sigma = 0.2$	17
2.7	Bruit poisson $\sigma = 0.2$	17
3.1	Schéma de décomposition j=1 et j=2.	39
3.2	Schéma de décomposition j=3.	40
4.1	Graphique de Dur, Doux, garrot et seuillage proposé avec ($\alpha = 0,05$, $\alpha=0,2$, $\alpha=0,3$) respectivement à $\lambda=10$)	44
4.2	Comparaison des PSNR (dB) entre les méthodes de débruitage.	48
4.3	Images originales et corrompues pour Barbara avec niveau de bruit gaussien $\sigma=20$	49
4.4	Images débruitées, (a), (b), (c), (d) en utilisant dur, doux, Garrot et Méthode proposée respectivement au niveau de bruit gaussien $\sigma=20$	49

Table des matières

Introduction générale	1
1 Rappel sur l'espace de Hilbert	3
1.1 L'espace vectoriel normé	3
1.1.1 Produit scalaire	3
1.1.2 Espace vectoriel normé	4
1.1.3 Exemple sur les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$	5
1.1.4 Limites	6
1.2 Espaces de Hilbert	6
1.2.1 Notion de base hilbertienne	8
1.2.2 Théorème de la projection orthogonale[20]	9
2 Généralités sur la théorie des signaux	11
2.1 Notions de base	11
2.2 Types du bruit	13
2.3 Analyse De Fourier	18
2.3.1 Séries de Fourier	18
2.3.2 Coefficients de Fourier	19
2.3.3 Transformée de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$	20
2.3.4 Transformée de Fourier des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$	20
2.3.5 Bases trigonométriques de $L^2(\mathbb{T})$	21
2.4 Transformée en ondelettes	21
2.4.1 Transformée en ondelettes discrète	23

2.4.2	Mise en oeuvre numérique	24
3	Analyse multirésolution	25
3.1	Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$	25
3.1.1	Quelques exemples	26
3.1.2	La fonction d'échelle	27
3.2	Construction des ondelettes	32
3.2.1	Exemples d'ondelettes	35
3.3	Ondelette à support compact	35
3.4	Ondelettes périodiques	36
3.5	Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$	37
4	Nouvelle méthode de seuillage et ses applications dans le débruitage d'images	41
4.1	Principe du débruitage d'images par seuillage des coefficients d'ondelettes . .	41
4.2	Rappel sur les traditionnelles techniques de seuillage	42
4.3	Nouvelle fonction de seuillage des coefficients d'ondelettes	43
4.4	Résultats expérimentaux et discussion	47
	Conclusion	50
	Bibliographie	51

Introduction générale

L'image numérique est souvent altérée par le bruit durant sa transmission ou son acquisition. Le débruitage d'images est un sujet de recherche très important aujourd'hui dans le domaine du traitement d'images, en ce qu'il diminue ou supprime le bruit de l'image pour améliorer l'aspect visuel de celle-ci. De nombreux chercheurs sont intéressés aux méthodes de réduction du bruit. Les méthodes de débruitage par transformation sont largement utilisées ces dernières années. Ces méthodes décomposent l'image bruitée dans une base orthonormée, puis elles modifient les coefficients de décomposition à l'aide d'une fonction du seuillage d'une façon à nous pouvons éliminer les petits coefficients et réduire de l'effet des gros coefficients sans altérer de manière significative l'aspect visuel de l'image originale.

En fait, les ondelettes ont donné beaucoup des contributions dans le domaine de débruitage d'images depuis 1985, telles qu'on peut construire des diverses bases orthonormées d'ondelettes à l'aide d'une analyse multirésolution, ces bases se différencient selon leur compétence, en ce qu'elles peuvent de mettre le plus grand nombre de coefficients d'ondelettes à zéro en respectant l'aspect visuel significatif de l'image originale, citons les ondelettes de Daubechies et celles de Coifman.

D'autre part, Donoho et Johnstone ont introduit les deux premières fonctions du seuillage, qui sont le seuillage dur (Hard) et le seuillage doux (Soft). La fonction du seuillage dur est discontinue et celle du seuillage doux est continue avec une dérivée constante et discontinue. En raison de ces caractéristiques, l'image débruitée avec le seuillage dur sera motivée par des artefacts et celle avec le seuillage doux sera floue dans certains cas. Pour cela, notre but dépend de réponse à la question suivante :

Y a-t-elle une fonction de seuillage des coefficients d'ondelettes peut donner une meilleure

performance par rapport aux seuillages dur et doux ? En effet, la fonction du seuillage qui utilise la fonction d'erreur de Gauss et le paramètre de forme dans son expression mathématique, c'est une nouvelle technique du seuillage des coefficients d'ondelettes. Cette technique donne une meilleure performance par rapport aux seuillages dur et doux.

Ce mémoire est structuré comme suit :

Dans le premier chapitre, on rappelle l'espace de Hilbert et quelques propriétés principales.

Dans le deuxième chapitre, on définit quelques notions de base sur la théorie des signaux comme ; le signal, l'image numérique et le bruit. Puis, on introduit deux techniques de traitement des signaux telles que, l'analyse de Fourier et la transformée en ondelettes.

Dans le troisième chapitre, on étudie le concept théorique de l'analyse multirésolution et les propriétés principales de sa fonction d'échelle, ensuite on démontre le théorème de construction d'une base orthonormée d'ondelettes à partir d'une analyse multirésolution, aussi on généralise cette étude au cas multidimensionnel.

Dans le dernier chapitre, on propose premièrement une nouvelle fonction de seuillage caractérisée par un paramètre de forme et des propriétés mathématiques. Deuxièmement, on justifie la meilleure performance de cette nouvelle méthode de seuillage pour une image aux niveaux de gris.

Finalement, on complète ce mémoire par une conclusion générale et des références principales.

Chapitre 1

Rappel sur l'espace de Hilbert

Dans ce chapitre nous introduisons quelques notions fondamentales sur le produit scalaire, espace vectoriel normé, l'espace de Hilbert et le théorème de la projection orthogonale que nous utiliserons dans les autres chapitres.

1.1 L'espace vectoriel normé

1.1.1 Produit scalaire

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ est un corps). On appelle produit scalaire sur E , toute application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) $\forall x \in E, \varphi_x : y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.
- (iii) $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$.
- (iv) $\forall x \in E, \varphi(x, x) = 0 \implies x = 0$.

Remarque 1.1.1. La propriété (ii) s'appelle **symétrie** du produit scalaire, la propriété (i) associée à la propriété (ii) (symétrie du produit scalaire) permettent de montrer qu'un produit scalaire est linéaire par rapport à chacune des deux variables. Cette propriété s'appelle **bilinéarité** du produit scalaire.

Notation : Un produit scalaire peut se noter $\langle x, y \rangle$.

Exemple 1.1.1. $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire défini comme suit :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Définition 1.1.1. [2] On appelle espace préhilbertien (réel ou complexe) tout espace vectoriel muni d'un produit scalaire (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Proposition 1.1.1. (Cauchy-Schwarz) Si φ est produit scalaire sur l'espace vectoriel E , alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |\varphi(x, y)|^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y). \quad (1.1)$$

1.1.2 Espace vectoriel normé

Définition 1.1.2. [2] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une **norme** si et seulement si :

1. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x).$
2. $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y).$
3. $\forall x \in E, N(x) \geq 0.$
4. $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0.$

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé** (en abrégé : « EVN »), et on peut utiliser $\|x\|$ au lieu de $N(x)$.

Exemple 1.1.2. a) L'espace vectoriel $E = \mathbb{R}$ muni de l'application « valeur absolue » $x \longmapsto |x|$.

b) L'espace vectoriel $E = \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ muni de l'application « module » $x \longmapsto |x|$.

c) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, l'espace vectoriel $E = C^\infty([a, b])$ muni de la norme :

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, \quad \|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}, \quad \|f\|_1 := \sqrt{\int_a^b |f(x)| dx}$$

est un espace vectoriel normé.

Exemple 1.1.3. Soit $\mathbb{H}$ un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad (1.2)$$

définit une norme.

1.1.3 Exemple sur les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$

Les normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note :

- $\|x\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|, \|x_2\| := \sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2}.$
- $\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$

Définition 1.1.3. [2] Soit E un espace vectoriel réel. Deux normes N_1 et N_2 sur E sont dites *équivalentes* si et seulement si $\exists c_1, c_2 > 0$ telle que :

$$\forall x \in E, \quad c_1 N_1(x) \leq N_2(x) \leq c_2 N_1(x). \quad (1.3)$$

Proposition 1.1.2. Sur $\mathbb{R}^n$ les trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Définition 1.1.4. [2] Si (E, N) est un espace vectoriel normé, alors l'application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x, y) \longmapsto N(x - y)$ est appelée la distance associée à N .

Proposition 1.1.3. On a $\forall x, y, z, a \in E$,

1. $d(x, y) = d(y, x).$
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$ (inégalité triangulaire)
3. $d(x, x) = 0$ et $(d(x, y) = 0, x = y).$
4. $d(x + a, y + a) = d(x, y).$ (invariance par translation)

Définition 1.1.5. [2] Soit (E, N) un espace vectoriel normé, $a \in E$ et $r \in [0, +\infty[.$

1. La boule ouverte de centre a et de rayon r est :

$$B(a, r) := \{x \in E | d(x, a) < r\}. \quad (1.4)$$

2. **La boule fermée** de centre a et de rayon r est :

$$\overline{B}(a, r) := \{x \in E \mid d(x, a) \leq r\}. \quad (1.5)$$

Remarque 1.1.2. Pour tout sous-ensemble B de E et pour tout $a \in E$ on note $a + B := \{a + x \mid x \in B\}$. Alors on a $B(a, r) = a + B(0, r)$ et $\overline{B}(a, r) = a + \overline{B}(0, r)$. De plus on a toujours $B(a, r) \subset \overline{B}(a, r)$.

1.1.4 Limites

On se place dans un EVN (E, N) .

Définition 1.1.6. [2] Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans E et $l \in E$. On dit que **la suite** u_k **converge vers** l **pour la norme** N si et seulement si :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} N(u_k - l) = 0. \quad (1.6)$$

Proposition 1.1.4. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(u'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites de E qui convergent respectivement vers l et l' pour la norme N , alors, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la suite $\lambda u_k + \mu u'_k$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.

Lemme 1.1.1. Une suite $(u_k)_k \in \mathbb{N}$ de $\mathbb{R}^n$ converge vers $l \in \mathbb{R}^n$ pour $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si chaque composante $(u_{k,i})_{k \in \mathbb{N}}$ de la suite converge vers l_i dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.1.1. [2] Soit E un espace vectoriel et N_1 et N_2 deux normes sur E . Alors si N_1 et N_2 sont équivalentes, pour toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de E et pour tout $l \in E$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = l \text{ pour } N_1 \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = l \text{ pour } N_2.$$

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.2.1. [2] Soit E un espace vectoriel sur K , si E soit muni d'un produit scalaire complet par la norme définie comme suite :

$$\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad (1.7)$$

on dit alors que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Hilbert ou espace Hilbertienne.

Lemme 1.2.1. *Soit H un espace vectoriel réel ou complexe muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors, pour tous $x, y \in H$*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re\langle x, y \rangle + \|y\|^2. \quad (1.8)$$

Proposition 1.2.1. *(Inégalité de Cauchy Schwarz). Soit H un espace vectoriel (réel ou complexe) muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors pour tous $x, y \in H$*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|. \quad (1.9)$$

Preuve. Si $\|x\| = 0$ c'est que $x = 0$ et l'inégalité est immédiate. Sinon, $\|x\| > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons

$$0 < \|tx + y\|^2 = \|x\|^2 t^2 + 2\Re\langle x, y \rangle t + \|y\|^2, \quad (1.10)$$

Le discriminant de ce polynôme quadratique doit donc être ≤ 0 :

$$0 \geq (2\Re\langle x, y \rangle)^2 - 4\|x\|^2 \|y\|^2, \quad (1.11)$$

d'où

$$\|x\| \|y\| \geq |\Re\langle x, y \rangle| \geq \Re\langle x, y \rangle. \quad (1.12)$$

De plus il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $\langle x, y \rangle = \alpha |\langle x, y \rangle|$, d'où $\bar{\alpha} \langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle|$ et

$$\|x\| \|y\| = \|x\| \|\alpha y\| \geq \Re\langle x, \alpha y \rangle = \Re(\bar{\alpha} \langle x, y \rangle) = \Re|\langle x, y \rangle| = |\langle x, y \rangle|. \quad (1.13)$$

□

Exemple 1.2.1. *L'espace L_0 des fonctions $L^2([0, 1])$ de moyenne nulle muni de produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx, \quad (1.14)$$

est un espace de Hilbert.

En effet, c'est un fermé de $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ car $F(f) = \int_0^1 f(t) dt$ est continue sur $L^2([0, 1])$ d'après Cauchy-Schwarz :

$$|F(f) - F(g)| \leq \left(\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.15)$$

donc $F^{-1}(0)$ est fermé.

Définition 1.2.2. [2] *On dit que deux vecteurs x, y d'un espace vectoriel complexe sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si $\langle x, y \rangle = 0$.*

1.2.1 Notion de base hilbertienne

Cette partie contient des résultats un peu théoriques sur les espaces de Hilbert. Dans toute la suite, H désignera un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dont la norme induite est notée $\|\cdot\|$.

Définition 1.2.3. [2] Soit H un espace de Hilbert séparable. On appelle base orthonormale de H tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_n$ qui vérifie :

- (i) $\|e_n\| = 1$ et $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$.
- (ii) le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_n$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans H .

Définition 1.2.4. [14] Soit I , un ensemble d'indices et $(e_i)_{i \in I}$, une famille d'éléments de H . On dit que $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de H si et seulement si :

- (i) La famille $(e_i)_{i \in I}$ est orthonormale.
- (ii) Pour tout $x \in H$, $x = \sum_{i \in I} \langle e_i, x \rangle \cdot e_i$.

Remarque 1.2.1. Le système orthonormal $(e_i)_{i \in I}$ est une base orthonormale si et seulement si le sous espace vectoriel engendré par $(e_i)_{i \in I}$ est dense dans H , autrement dit :

$$\overline{\{e_i, i \in I\}} = H. \quad (1.16)$$

Théorème 1.2.1. [2] Un espace de Hilbert H est séparable s'il possède une suite des éléments qui est dense dans H .

Exemple 1.2.2. $L^2(\Omega) = \{f : \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < +\infty\}$.

Exemple 1.2.3. $H = L^2_{pr}([0, 2\pi])$ avec produit scalaire $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$ et e_n la fonction $t \mapsto e^{int}$, $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormale de H .

Lemme 1.2.2. Soit $(e_i)_{i < n}$ une famille orthonormée et soit F le sous-espace engendré (donc $\langle e_i, e_j \rangle = \sigma_{i,j}$, mais on ne demande pas que F soit dense). Alors pour tout $x : P_F(x) = \sum_{i < n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Théorème 1.2.2. [20] (*Existence des bases orthonormales*). *Tout espace de Hilbert séparable possède une base orthonormale, alors Soient H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormale*

(i) *Pour toute $(\lambda_n)_n \in l^2(\mathbb{N})$ la série $\sum_{n \geq 0} \lambda_n e_n$ converge dans H et sa somme*

$x = \sum_{n \geq 0} \lambda_n e_n$ vérifie :

$$\|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} |\lambda_n|^2, \quad (1.17)$$

où on a posé

$$\langle x, e_n \rangle = \lambda_n. \quad (1.18)$$

(ii) *Pour tout $x \in H$ la série $\sum_{n \geq 0} |\langle x, e_n \rangle|^2$ converge et*

$$x = \sum_n \langle x, e_n \rangle e_n, \quad (1.19)$$

$$\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2. \quad (1.20)$$

Définition 1.2.5. [2] *Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Une isométrie entre H_1 et H_2 est une application linéaire $U : H_1 \longrightarrow H_2$ qui satisfait $\forall x \in H_1 : \|U(x)\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$. H_1 et H_2 sont isomorphes s'il existe une isométrie bijective entre eux.*

Corollaire 1.2.1. *Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isomorphe à $l^2(\mathbb{N})$.*

1.2.2 Théorème de la projection orthogonale[20]

Soit E , un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté φ . Soit F , un sous espace vectoriel de E , et $x \in E$. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :

- y est une projection de x sur F , autrement dit, y est une solution du problème (P_F) .
- $y \in F$ et $x - y \in F^\perp$.

Preuve. La méthode est toujours la même. On va démontrer les deux implications qui composent l'équivalence :

- (i) $\implies$ (ii) : Supposons que $y \in F$ soit une projection de x sur F . Alors, on a immédiatement, par définition de l'infimum d'une partie que $\forall z \in F, \|x - y\| \leq \|x - z\|$. Choisissons au lieu de z , le point $z_\lambda := y + \lambda(z - y)$, avec $\lambda \in]0, 1[$. Cette situation est résumée par le schéma qui suit. Puisque, F est un espace vectoriel, $z_\lambda \in F$. On en déduit que $\forall z \in F, \|x - y\| \leq \|x - y - \lambda(z - y)\|$, et en élevant cette inégalité au carré, puis en divisant par $\lambda \neq 0$, on obtient :

$$\|x - y\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \lambda^2 \|z - y\|^2 - 2\lambda \varphi(x - y, z - y). \quad (1.21)$$

On obtient : $\varphi(x - y, z - y) \leq \lambda \|z - y\|^2$. Faisons à présent tendre λ vers 0. En remarquant que le vecteur $u = z - y$ décrit F , l'inégalité devient : $\lambda \varphi(x - y, u) \leq 0$. Or, cette inégalité étant vérifiée pour tout $u \in F$, elle est en particulier vérifiée pour tous les $-u \in F$, c'est à dire que : $\forall u \in F, \varphi(x - y, u) \geq 0$, et ainsi, $\varphi(x - y, u) = 0$. On en déduit que $x - y \in F^\perp$.

- (ii) $\implies$ (i) : Supposons que $x - y \in F^\perp$ et $y \in F$. Alors, $\forall z \in F$, $\|x - (y + z)\|^2 = \|x - y\|^2 + \|z\|^2$, car $\varphi(x - y, z) = 0$. On remarque, comme précédemment, que lorsque y est fixé et que z décrit F , $y + z$ décrit F , car F est un espace vectoriel. On en déduit, en appelant $d(x, F)$, la distance de x à F , que :

$$d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\| = \inf_{z \in F} \|x - (y + z)\| = \sqrt{\inf_{z \in F} \|x - y\|^2 + \|z\|^2}. \quad (1.22)$$

Il est donc clair que l'infimum est atteint pour $z = 0$, et ainsi, $d(x, F) = \|x - y\|$. y est donc bien une projection de x sur F .

□

Chapitre 2

Généralités sur la théorie des signaux

La théorie de Fourier permet d’interpréter certains “signaux” (autrement dit, certaines fonctions définies sur un intervalle réel) comme résultant de la superposition d’une infinité de signaux sinusoïdaux de fréquences différentes. L’idée d’une telle décomposition apparaît en 1807 dans une première communication de Joseph Fourier à l’Académie des Sciences de Paris, concernant la résolution de l’équation aux dérivées partielles qui régit la propagation de la chaleur dans les solides. L’inconvénient remarqué sur l’analyse de Fourier est qu’elle ne donne que des informations globales sur le signal f alors que l’ondelette ont été introduite au début des années 1980 dans le contexte de l’analyse des signaux. Il s’agit à l’époque de donner une représentation des signaux permettant la mise en valeur simultanément des informations temporelles et fréquentielles (localisation temps-fréquence). Dans ce chapitre, on définit quelques notions de base sur la théorie des signaux, telles que, l’analyse de Fourier et la transformée en ondelettes.

2.1 Notions de base

Définition 2.1.1. [20] *Un signal est une représentation physique de l’information. Sa nature physique peut être très variable : acoustique, électronique, optique, etc. D’un point de vue mathématique le signal S est une application de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

$$S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

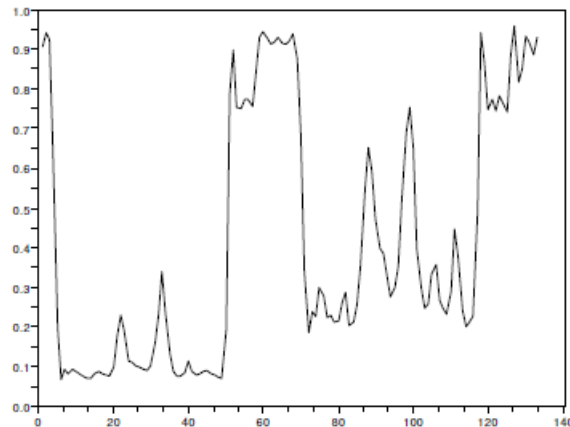


FIGURE 2.1 – Signal 1D.

$n = 1.$ S s'appelle signal 1D.

$n = 2.$ S s'appelle signal 2D.

- **Signaux 1D** : $x(t)$ (signal reçu par un microphone monophonique),
- **Signaux 2D** : $I(x, y)$ (image, signal reçu par un camera).

Définition 2.1.2. [20] L'image numérique est un signal 2D telle que :

$$f : [1, N] \times [1, M] \longrightarrow [0, 255], \quad (2.1)$$

si elle est au niveau de gris.



FIGURE 2.2 – Image numérique en niveaux de gris.

$$f : [1, N] \times [1, M] \longrightarrow [0, 255]^3, \quad (2.2)$$

si elle est en couleur.



FIGURE 2.3 – Image numérique en couleur.

Définition 2.1.3. [4] *Le bruit est un processus aléatoire $s(t)$ caractérisé par :*

- *Une fonction de distribution $F(x, t) = P(s(t) \leq x)$.*
- *Une fonction de densité de probabilité : $f(x, t) = F'_x(x, t)$.*

2.2 Types du bruit

1) Bruit Gaussien :

Définition 2.2.1. [4] *Le bruit Gaussien est obtenu en ajoutant à chaque pixel une valeur aléatoire suivant une loi de probabilité Gaussienne :*

$$G_{\sigma, \mu}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.3)$$



Originale

 $\sigma = 20$ $\sigma = 40$ $\sigma = 60$

2) Bruit quantique (ou poissonien) :

Définition 2.2.2. [4] C'est le bruit électronique, généré par la nature quantique de la lumière. Pour une intensité moyenne I , le nombre de photons observés sur une durée T est une variable aléatoire distribuée selon une loi de Poisson :

$$P(K|I, T) = \frac{(IT)^K e^{-IT}}{K!}. \quad (2.4)$$

(I : intensité moyenne, photons/s). Espérance et variance : IT .

3) Bruit poivre et sel :

Définition 2.2.3. [4] Un bruit "poivre et sel" d'ordre n est obtenu en ajoutant n pixels blancs et n pixels noirs aléatoirement dans une image. On le caractérise souvent par le pourcentage de pixels remplacées.



Originale



5%



15%



30%

4) Bruit speckle :

Définition 2.2.4. [4] *La fonction de densité de probabilité de l'image en amplitude, qui est, en fait, celle du speckle*

$$f_{\sigma}(A) = \left(\frac{A}{\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{-A}{2\sigma^2}\right), \quad \text{pour } A \geq 0. \quad (2.5)$$



$\sigma=0.2$.



FIGURE 2.4 – Bruit speckle $\sigma = 0.2$.



FIGURE 2.5 – Bruit poivre et sel $\sigma = 0.2$.



FIGURE 2.6 – Bruit gaussien $\sigma = 0.2$.



FIGURE 2.7 – Bruit poisson $\sigma = 0.2$.

2.3 Analyse De Fourier

L'analyse de Fourier [1] est une méthode qui permet d'analyser un signal sur son comportement fréquentiel et ses propriétés. Pour réaliser cette tâche, on décompose le signal sur une base des éléments simples appelés fonctions élémentaires.

2.3.1 Séries de Fourier

Dans un mémoire célèbre daté de 1807, Joseph Fourier annonça sa fameuse théorie [1] qui précise que toute fonction périodique de période T peut être décomposée par une série infinie de la forme :

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inwt}. \quad (2.6)$$

Avec

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{inwt} dt, w = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.7)$$

Où :

les c_n représentent les coefficients de Fourier. Une série de Fourier peut s'écrire aussi sous la forme trigonométrique suivante :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(wnt) + 2b_n \sin(wnt). \quad (2.8)$$

Où les valeurs de a_n et b_n sont définies par les expressions :

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \cos(wnt) dt. \quad (2.9)$$

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(t) \sin(wnt) dt. \quad (2.10)$$

Espaces de fonctions 2π -périodiques

On note $C(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continues et 2π -périodiques. On le munit de la norme définie par :

$$\forall f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|. \quad (2.11)$$

En raison de la 2π -périodique, il est clair que l'on peut remplacer l'intervalle $[0, 2\pi]$ par n'importe quel intervalle de longueur 2π dans le supremum ci dessus.

Proposition 2.3.1. *Si $f \in C(\mathbb{T})$, f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 2.3.2. *Pour $1 \leq p \leq r < +\infty$, on a les inclusions topologiques :*

$$\mathbb{C}(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^r(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{T}). \quad (2.12)$$

2.3.2 Coefficients de Fourier

Définition 2.3.1. [1] Notons $E := \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$, la famille des fonctions

$$e_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad e_n(x) := e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Si $f \in L^1(\mathbb{T})$, on appelle n -ième coefficient de Fourier de f , le nombre complexe

$$c_n(f) := \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} f(x) e^{-inx} dx. \quad (2.14)$$

La série formelle $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e_n$ est appelée série de Fourier de f .

- Remarque 2.3.1.**
1. Les $c_n(f)$ étant définis par des intégrales relativement à la mesure m , ne dépendent pas du choix du représentant de f modulo l'égalité m -p.p., il est donc légitime de parler de série de Fourier d'un élément de $L^1(\mathbb{T})$.
 2. Nous ne prétendons pas que la série de Fourier de f converge vers f . La question que nous nous proposons d'étudier est précisément : « sous quelles hypothèses relatives à f et pour quel forme de convergence peut-on dire que f est la somme de sa série de Fourier ? ».
 3. Si $f \in L^2(\mathbb{T})$, les $c_n(f)$ s'interprètent comme les produits scalaires :

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle. \quad (2.15)$$

L'interprétation des $c_n(f)$ comme produits scalaires est limitée aux $f \in L^2$. Voici une relation plus générale, basée sur les produits de convolution, qui nous sera utile dans la suite.

Proposition 2.3.3. *Pour toute $f \in L^1(\mathbb{T})$, le produit de convolution étant défini ici par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f * e_n)(x) := \int_{[0, 2\pi]} f(t) e_n(x - t) dt.$$

2.3.3 Transformée de Fourier des fonctions de $L^1(\mathbb{R})$

On part d'une fonction $f(t)$, définie sur toute la droite réelle, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, c'est-à-dire vérifiant $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt < +\infty$. On pose :

$$\hat{f}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iwt}dt, \quad w \in \mathbb{R}. \quad (2.16)$$

Alors cette fonction $\hat{f}(w)$ est continue sur la droite réelle et tend vers 0 quand $w \rightarrow +\infty$. Voici quelques propriétés de la transformée de Fourier. Si g, h appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, il en est de même pour leur produit de convolution $f = g * h$ défini par :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t - \tau)h(\tau)d\tau. \quad (2.17)$$

En fait l'intégrale est absolument convergente pour presque tout t et l'on a par un calcul immédiat.

$$\hat{f}(w) = \hat{g}(w)\hat{h}(w). \quad (2.18)$$

Si f appartient à $L^1(\mathbb{R})$, il est en général que l'on ait $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Par exemple si $f(x) = 1$ sur $[-1, 1]$ et $f(x) = 0$ si $|x| > 1$, $\hat{f}(w) = 2\frac{\sin(w)}{w}$ et cette fonction n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$. Mais si f et $\hat{f}$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ alors $f(t)$ est nécessairement continue et l'on a :

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(w)e^{-iwt}dw. \quad (2.19)$$

L'intégrale est (par hypothèse) absolument convergente et (2.19) est la formule d'inversion de Fourier.

2.3.4 Transformée de Fourier des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$

Si f et sa transformée de Fourier $\hat{f}(w)$ appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(w)|^2dw = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2dt, \quad (2.20)$$

et l'opérateur J défini par $J(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ se prolonge en un isomorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$. Si $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ mais $f(t) \notin L^1(\mathbb{R})$, alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{iwt}dt$ n'existe

plus au sens usuel. On doit considérer les intégrales tronquées $\int_{-m}^{+m} f(t)e^{iw}dt = \hat{f}_m(w)$ et l'on a : $\|\hat{f}(w) - \hat{f}_m(w)\|_2 \longrightarrow 0 \quad (m \longrightarrow +\infty)$

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.21)$$

On a également, si $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle = 2\pi \langle f, g \rangle. \quad (2.22)$$

Où :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt. \quad (2.23)$$

On observera que les deux intégrales figurant dans (2.22) sont absolument convergentes.

2.3.5 Bases trigonométriques de $L^2(\mathbb{T})$

Proposition 2.3.4. $E = \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$.

Théorème 2.3.1. [1] $E = \{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$. On a donc le développement :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{T}), f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k, \quad (2.24)$$

avec convergence commutative de cette série pour la topologie de $L^2(\mathbb{T})$. En particulier on a

$$S_n(f) := \sum_{K=-n}^{k=+n} c_k(f) e_k \longrightarrow f, \quad (2.25)$$

ce qui se traduit par :

$$\int_{[0, 2\pi]} |S_n(f) - f|^2 dm \longrightarrow 0, \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow +\infty \quad (2.26)$$

2.4 Transformée en ondelettes

Définition 2.4.1. [16] Une ondelette Ψ est une fonction de carré sommable de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$, le plus souvent oscillante et de moyenne nulle, choisie comme outil d'analyse et de reconstruction multi-échelle.

On définit ainsi une famille $\psi_{s,\tau}$ (où $(s, \tau) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$) d'ondelettes à partir de l'ondelette :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi \left(\frac{t - \tau}{s} \right). \quad (2.27)$$

Théorème 2.4.1. [13] Soit $\psi \in L_1 \cap L_2$ une fonction, appelée ondelette, vérifiant les conditions suivantes :

$$(i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega = K < \infty.$$

$$(ii) \|\psi\|_2 = 1.$$

On construit alors les ondelettes de base :

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad b \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad (2.28)$$

et pour tout signal $f \in L^2$ on considère $C_f(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \bar{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$ est appelée la transformée en ondelettes du signal f , ou $C_f(a, b)$ sont les coefficients d'ondelettes.

Alors on a :

(a) Conservation de l'énergie :

$$\frac{1}{K} \int \int_{\mathbb{R}^2} |C_f(a, b)|^2 \frac{da db}{a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (2.29)$$

(b) La formule de reconstruction :

$$f(t) = \frac{1}{K} \int \int_{\mathbb{R}^2} C_f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}, \quad (2.30)$$

au sens suivant si :

$$f_\epsilon(t) = \frac{1}{K} \int \int_{|a|>\epsilon, b \in \mathbb{R}} C_f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}, \quad (2.31)$$

alors $f_\epsilon \rightarrow f$ dans L^2 quand $\epsilon \rightarrow 0$. La démonstration de ce théorème se trouve dans [13].

Remarque 2.4.1. L'hypothèse (i) sur ψ implique, puisque $\hat{\psi}$ est continue, que $\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$. Dans tous les cas pratiques, cette condition est également suffisante.

Exemple 2.4.1.

(a) Nous avons déjà indiqué que l'ondelette initialement utilisée par J. Morlet

$$\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t). \quad (2.32)$$

N'est pas normalisée, mais ceci est de peu d'importance. Par contre, l'hypothèse (i) n'est pas vérifiée puisque :

$$\hat{\psi}(0) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{25}{2}} > 0. \quad (2.33)$$

On a donc $K = +\infty$. Mais cette valeur $\hat{\psi}(0)$ est de l'ordre 10^{-5} . Dans un calcul en ordinateur on peut estimer qu'elle est numériquement nulle, et donc être assez proche des conditions d'applications du théorème, qui reste, malgré tout, inapplicable dans ce cas précis.

(b) L'exemple le plus simple de fonction ψ est évidemment celui d'une fonction constante par morceaux c'est l'ondelette de Haar définie par :

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a dans ce cas :

$$\hat{\psi}(\xi) = ie^{-i\pi\xi \frac{1-\cos(\pi\xi)}{\pi\xi}}. \quad (2.34)$$

(c) Pratiquement, toute fonction ψ oscillante, bien localisée ainsi que $\hat{\psi}$ et d'intégrale nulle fera l'affaire. Par exemple le chapeau mexicain :

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{\frac{1}{4}}}(1-x^2)e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad (2.35)$$

ou l'on a :

$$\hat{\psi}(\xi) = K\xi^2 e^{-2\pi^2\xi^2}. \quad (2.36)$$

On distingue deux types de transformées en ondelettes suivant que le sous-groupe Λ est discret ou continu. On distingue deux types de transformées en ondelettes suivant que le sous-groupe Λ est discret ou continu. Où

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega, \quad (2.37)$$

$\hat{\Psi}$ étant la transformée de Fourier de l'ondelette Ψ .

2.4.1 Transformée en ondelettes discrète

On peut adapter la transformée en ondelettes dans le cas où l'on se trouve dans un ensemble discret. Cette technique est notamment utilisée dans la compression de données numériques avec ou sans perte. La compression est réalisée par approximations successives de l'information initiale du plus grossier au plus fin. On réduit alors la taille de l'information

en choisissant un niveau de détail.

Il s'agit alors d'échantillonner s sur une échelle dyadique et τ . On écrit alors :

$$\psi_{m,n}[t] = s_0^{-m/2} \psi(s_0^{-m}t - n\tau_0), \quad (2.38)$$

où s_0 et τ_0 sont des constantes.

Dans le cas où les $\psi_{m,n}$ forment une base de Hilbert de $L^2(\mathbb{R})$ (c'est le cas par exemple de l'ondelette de Haar), la décomposition en ondelette d'un signal g consiste à calculer les produits scalaires $\langle g, \psi_{m,n} \rangle$. La recomposition du signal s'obtient alors par :

$$g = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle g, \psi_{m,n} \rangle \psi_{m,n}. \quad (2.39)$$

2.4.2 Mise en oeuvre numérique

$$a_m = 2^{-m} \text{ et } b_n = n2^{-m} \text{ avec } (n, m \in \mathbb{Z}) \quad (2.40)$$

On restreint les paramètres a et b à sous ensemble discret (et même fini) de $\mathbb{R}$. Par exemple d'où :

$$\psi_{a_m b_m}(t) = 2^{\frac{m}{2}} \psi(2^m t - n) \quad (2.41)$$

ou plus généralement, avec $\alpha > 1$ et $\beta > 0$:

$$\psi_{a_m b_m}(t) = \alpha^{\frac{m}{2}} \psi(\alpha^m t - n\beta) \quad (2.42)$$

Plus α est proche de 1 et β proche de 0, et plus l'information est redondante, nécessitant d'ailleurs de gros calculs. I. Daubechies des laboratoires Bell, a étudié dans quelles conditions l'application :

$$C : f \longrightarrow C_f = (C_f(a_m, b_n))_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} \quad (2.43)$$

Chapitre 3

Analyse multirésolution

Il s'agit d'un cadre fonctionnel qui permet de représenter une fonction comme une limite de ses approximations à différents niveaux de résolutions ou à des échelles successives. En effet, Mallat et Meyer ont mis au point en 1985 un outil très efficace et très flexible qui est l'analyse multirésolution. Grâce à ce concept il a été possible l'implémentation pratique de la décompositions. Dans ce chapitre, on étudie le concept théorique de l'analyse multirésolution et quelques propriétés principales.

3.1 Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

Définition 3.1.1. [17] Une analyse multirésolution est une famille croissante de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ notée $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, qui ont les propriétés suivantes :

- (a) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$ et $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
- (b) Pour tout $f \in V_0$ et $k \in \mathbb{Z}$ on a $f(\cdot - k) \in V_0$.
- (c) Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $f \in V_j$ si et seulement si $D_2 f \in V_{j+1}$, où on a posé $D_a f(x) = f(ax)$.
- (d) Il existe une fonction $\theta \in V_0$, telle que la suite $\{\theta(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de Riesz de V_0 .
Rappelons la définition de la base de Riesz.

Définition 3.1.2. [17] Une suite $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ d'éléments indépendants d'un espace de Hilbert H , constituent une base de Riesz de H , si les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) L'ensemble de combinaisons linéaires finies de $\{e_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, est dense dans H . i.e

$$\left\{ \sum_{k \in K} \alpha_k e_k, \quad |K| < +\infty \quad \text{et} \quad \alpha_k \in \mathbb{C} \right\}, \quad (3.1)$$

est dense dans H .

(ii) Il existe deux constantes A et B avec $B > A > 0$, telle que : pour toute suite finie $\{\alpha_k\}_{k \in K}$, on a

$$A \left(\sum_{k \in K} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e_k \right\|_H \leq B \left(\sum_{k \in K} |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Définition 3.1.3. [15] Une analyse multirésolution est dite r -régulière ($r \in \mathbb{N}$), si l'on peut choisir la fonction θ soit r -régulière. i.e.

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0, \forall 0 \leq k \leq r, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$|\theta^{(k)}(x)| \leq C_m (1 + |x|)^{-m}. \quad (3.3)$$

Dans toute la suite, on dit analyse multirésolution régulière si elle est 0-régulière.

Remarque 3.1.1. La condition (d) exprime dans le sens qu'il existe un isomorphisme continu entre V_0 et $l^2(\mathbb{Z})$.

3.1.1 Quelques exemples

Présentons quelques exemples bien connus.

Exemple 3.1.1. La fonction $\theta = 1_{[0,1]}$ et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par :

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} \quad f|_{[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}] = c^{te}} \right\}. \quad (3.4)$$

Exemple 3.1.2. La fonction θ définie par :

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x \leq 0 \\ x & \text{si} & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & \text{si} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si} & x \geq 2 \end{cases} \quad (3.5)$$

et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par :

$$V_j = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^0(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} \ f_{/[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}[} = P_k \\ \text{où } P_k \text{ est un polynôme de degré 1} \end{array} \right\}.$$

3.1.2 La fonction d'échelle

D'une analyse multirésolution qui permet d'obtenir la base de Riesz, on peut construire une base orthonormée $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de V_0 , la fonction φ appelée fonction d'échelle.

Le théorème ci-dessous affirme notre assertion :

Théorème 3.1.1. [17] Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution régulière de $L^2(\mathbb{R})$. Alors, il existe deux constante C_1 et C_2 avec $C_2 \geq C_1 > 0$, telle que :

$$C_1 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(w + 2k\pi)|^2 \leq C_2, \quad \forall w \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Où $\hat{\theta}$ est la transformée de Fourier de θ .

Supposons que $\hat{\theta} \in L^1(\mathbb{R})$ et on définit ensuite $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ par :

$$\hat{\varphi}(w) = \hat{\theta}(w) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\theta}(w + 2k\pi)|^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

alors la suite $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_0 .

Si v est une autre fonction de V_0 telle que la suite $\{v(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_0 , alors la relation qui existe entre $\hat{\varphi}$ et $\hat{v}$ est :

$$\hat{v}(w) = \theta(w) \hat{\varphi}(w), \quad (3.8)$$

pour tout $w \in \mathbb{R}$, où $\theta \in L^\infty(\mathbb{R})$ est 2π -périodique et $|\theta(w)| = 1$.

Exemple 3.1.3. La fonction θ définie dans l'exemple (3.7) est une base orthonormée de V_0 car :

Pour tout $f \in V_0$, on a

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \chi_{[k, k+1[}, \quad (3.9)$$

et

$$\hat{\varphi}(w) = \begin{cases} \frac{i}{w}(e^{-iw} - 1) & \text{si } w \neq 0 \\ 1 & \text{si } w = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Mallat a démontré qu'on peut obtenir directement une base orthonormée de V_j et se passer donc de la construction que suggère le théorème ci-dessus.

Proposition 3.1.1. *Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution et φ une fonction d'échelle associée à $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$.*

Alors, la suite $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_j , où

$$\varphi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j x - k). \quad (3.11)$$

Preuve. Pour tout $k, m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,m} \rangle = \int_{\mathbb{R}} 2^j \varphi(2^j x - k) \overline{\varphi(2^j x - m)} dx. \quad (3.12)$$

En faisant le changement de variable ($y = 2^j x$), il vient :

$$\langle \varphi_{j,k}, \varphi_{j,m} \rangle = \langle \varphi_{0,k}, \varphi_{0,m} \rangle = \delta_{k,m}, \quad (3.13)$$

d'où $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont éléments orthonormés de V_j .

D'autre part,

pour tout $f \in V_j$, la fonction $D_{2^{-j}} f \in V_0$ et :

$$D_{2^{-j}} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(2^{-j} x) \overline{\varphi(x - k)} dx \right) \varphi(\cdot - k), \quad (3.14)$$

d'où

$$D_{2^j} D_{2^{-j}} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} = f, \quad (3.15)$$

donc, $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ engendre V_j .

Par conséquent, la suite $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_j . $\square$

Remarque 3.1.2. *Une approximation multirésolution d'une fonction quelconque $f \in L^2(\mathbb{R})$ à la résolution 2^j est obtenue par projection orthogonale de f dans V_j .*

Ceci s'exprime par :

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{j,k} \varphi_{j,k} \quad \text{où} \quad \alpha_{j,k} = \langle f, \varphi_{j,k} \rangle. \quad (3.16)$$

Corollaire 3.1.1. *Soit φ une fonction d'échelle associée à une analyse multirésolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$.*

Alors, il existe une suite des coefficients $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ appelées réponses impulsionnelles, telle que :

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k). \quad (3.17)$$

Preuve. On a d'abord, $V_0 \subset V_1$.

D'après la proposition (3.1.1),

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle \sqrt{2} \varphi(2x - k), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

Donc, il suffit de prendre

$$h_k = \langle \varphi, \varphi_{1,k} \rangle, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (3.19)$$

□

Exemple 3.1.4. Dans l'exemple (3.7) la fonction φ est une fonction d'échelle dont les coefficients $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ sont :

$$h_k = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } k = 0, 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 0, 1 \end{cases} \quad (3.20)$$

Le théorème suivant caractérise la fonction d'échelle par sa transformée de Fourier :

Théorème 3.1.2. [17] Etant donnée une analyse multirésolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ régulière et une fonction d'échelle φ associée à $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$.

Alors, il existe une fonction H de $L^2_{\text{per}}([0, 2\pi])$ s'appelle filtre d'échelle, telle que pour tout $w \in \mathbb{R}$, on a

$$\hat{\varphi}(w) = H\left(\frac{w}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right). \quad (3.21)$$

Preuve. D'après la relation (3.17), on a

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k). \quad (3.22)$$

En prenant la transformée de cette égalité, on obtient :

$$\hat{\varphi}(w) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ik\frac{w}{2}}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{w}{2}\right), \quad (3.23)$$

pour tout $w \in \mathbb{R}$.

Donc, il suffit de prendre

$$H(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k e^{-ikw}. \quad (3.24)$$

Un premier problème que l'on peut se poser est le suivant : disposant d'une fonction régulière θ .

On définit une suite d'espaces de Hilbert $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ par (b, c, d) de la définition (3.1.1).

Sous quelles conditions a-t-on $V_j \subset V_{j+1}$, $\forall j \in \mathbb{Z}$?

La réponse est donnée par la proposition suivante : □

Proposition 3.1.2. *Sous les conditions ci-dessus, on suppose qu'il existe une fonction 2π -périodique de $L^2([0, 2\pi])$ notée H et régulière telle que*

$$\hat{\theta}(w) = H\left(\frac{w}{2}\right)\hat{\theta}\left(\frac{w}{2}\right), \forall w \in \mathbb{R}. \quad (3.25)$$

Alors, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $V_j \subset V_{j+1}$.

Un deuxième problème est le suivant :

En admettant les hypothèses du problème précédent.

Sous quelles conditions $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est-elle dense dans $L^2(\mathbb{R})$?

La proposition ci-dessous peut répondre à notre question :

Proposition 3.1.3. *Sous les conditions du deuxième problème, on a*

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \quad (3.26)$$

si et seulement si

$$|\hat{\varphi}(0)| = 1, \quad (3.27)$$

où $\hat{\varphi}$ est définie par (3.7).

Corollaire 3.1.2. *Si la fonction d'échelle φ est régulière. Alors nous avons :*

$$\hat{\varphi}(2k\pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*. \quad (3.28)$$

Preuve. Comme la famille $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormale, on a

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(w + 2k\pi)|^2 = 1, \quad (3.29)$$

et pour $w = 0$, on a

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(2k\pi)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |\hat{\varphi}(2k\pi)|^2 + 1. \quad (3.30)$$

On déduit que

$$\hat{\varphi}(2k\pi) = 0, \text{ pour } k \in \mathbb{Z}^*. \quad (3.31)$$

□

Théorème 3.1.3. [17] *Le filtre d'échelle H satisfait les deux relations :*

$$H(0) = 1, \quad (3.32)$$

$$|H(w)|^2 + |H(w + \pi)|^2 = 1, \quad \forall w \in \mathbb{R} \quad (3.33)$$

Preuve. 1. D'après la relation (3.21), on a

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx = H(0) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx, \quad (3.34)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx \neq 0. \quad (3.35)$$

Par conséquent, $H(0) = 1$.

2. D'après la relation (3.21), on obtient :

$$|\hat{\varphi}(2w + 2k\pi)|^2 = |H(w + k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(w + k\pi)|^2. \quad (3.36)$$

Alors

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(w + 2k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(w + 2k\pi)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |H(w + \pi + 2k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(w + \pi + 2k\pi)|^2 \\ &= |H(w)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(w + 2k\pi)|^2 + |H(w + \pi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(w + \pi + 2k\pi)|^2. \end{aligned}$$

D'où

$$|H(w)|^2 + |H(w + \pi)|^2 = 1, \quad \forall w \in \mathbb{R}. \quad (3.37)$$

□

Corollaire 3.1.3. *La fonction H est nulle aux points $\{(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la relation (3.33) et la périodicité de H .

Un troisième problème, soulevé par S. Mallat, A.Cohen, est alors le suivant :

Soit H une fonction 2π -périodique et régulière vérifiant (3.32) et (3.33).

L'égalité $\hat{\varphi}(w) = \prod_{j=1}^{+\infty} H(2^{-j}w)$ nous permet-elle de reconstituer une analyse multirésolution ? En général, la réponse est non. Il nous faut donc exiger plus de cette fonction H . Ce qui se traduit dans le théorème suivant : $\square$

Théorème 3.1.4. [17] *Une fonction H engendre une analyse multirésolution régulière si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes :*

- H est 2π -périodique et régulière.
- $H(0) = 1$.
- $|H(w)|^2 + |H(w + \pi)|^2 = 1, \quad \forall w \in \mathbb{R}$.
- Il existe un compact K congru à $P = [-\pi, \pi], 0 \in \text{intérieure}(K)$, tel que

$$\forall w \in K, \forall j \geq 1, H(2^{-j}w) \neq 0. \quad (3.38)$$

Définition 3.1.4. [17] *Un compact est dit congru à $P = [-\pi, \pi]$ module 2π si et seulement si :*

$$\forall w \in P, \exists ! \zeta \in K, \text{ tel que } : (w - \zeta) \in 2\pi\mathbb{Z}. \quad (3.39)$$

3.2 Construction des ondelettes

L'effet d'ondelette consiste à analyser le signal f à l'aide d'une fonction bien localisée, ψ , de moyenne nulle, qu'on appelle ondelette, que l'on translate sur tout le signal et que l'on peut dilater.

Définition 3.2.1. [17] *Une ondelette est une fonction ψ de $L^2(\mathbb{R})$ qui vérifie la relation suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0. \quad (3.40)$$

Définition 3.2.2. [14] *L'ondelette ψ a N moments nuls si et seulement si :*

$$\int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx = 0, \quad \forall l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.41)$$

Ce qui équivaut aussi, dans l'espace de Fourier à :

$$\hat{\psi}^{(l)}(0) = 0, \quad \forall l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.42)$$

Dans cette section, nous décrivons la construction d'une base d'ondelette à partir d'une analyse mutirésolution.

Théorème 3.2.1. :[17, 15] (*Mallat, Meyer*) Etant donnée une analyse mutirésolution régulière.

Alors, il existe une ondelette $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ telle que si l'on introduit les fonctions $\psi_{j,k}$ définie par :

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (3.43)$$

la famille $\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Par conséquent, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$, il existe une unique décomposition :

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k}, \quad (3.44)$$

où $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$.

Donnons d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme 3.2.1. Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse mutirésolution.

Alors, on a les propriétés suivantes :

i) Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, il existe un sous-espace de V_{j+1} notée W_j , tel que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (3.45)$$

ii) $L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} W_k}$.

iii) Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $f \in W_j$ si et seulement si $D_2 f \in W_{j+1}$.

iv) Pour tout $f \in W_0$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $f(\cdot - k) \in W_0$.

Lemme 3.2.2. Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution régulière.

On définit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ par :

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \sqrt{2} \varphi(2x - k), \quad g_k = (-1)^k h_{1-k}. \quad (3.46)$$

Alors, la suite $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0 .

Preuve. D'après le lemme (3.2.2) $\{\psi_{0,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_0 , ensuite nous utilisons le lemme (3.2.1), on trouve que la suite $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.

Pour que la convergence d'une décomposition d'une fonction sur une base d'ondelettes soit rapide, on souhaite que la suite $\{h_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit finie c'est équivalente à dire que φ et ψ sont à support compact.

Cette rapidité est liée au nombre de moments nuls de d'ondellet ψ .

Le théorème suivant décrit la propriété d'approximation d'une ondelette. $\square$

Théorème 3.2.2. [15] *Soit ψ une ondelette a N moments nuls telle que $\text{supp}\psi \subset I, I$ est un intervalle.*

Pour tout $f \in C^N(\mathbb{R})$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|d_{j,k}| \leq C 2^{-j(N+\frac{1}{2})}, \quad d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle, \quad (3.47)$$

pour tout $j, k \in \mathbb{Z}$.

Preuve. Pour montrer cette majoration il nous suffit d'appliquer la formule de Taylor à la fonction f autour du centre de l'ondelette $\psi_{j,k}$.

Si on a posé $x_0 = \frac{k}{2^j}$, on trouve que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{l!} f^{(l)}\left(\frac{k}{2^j}\right) \left(x - \frac{k}{2^j}\right)^l + \frac{1}{N!} f^{(N)}(y_0) \left(x - \frac{k}{2^j}\right)^N \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{l! 2^{jl}} f^{(l)}\left(\frac{k}{2^j}\right) (2^j x - k)^l + \frac{1}{N! 2^{jN}} f^{(N)}(y_0) (2^j x - k)^N. \end{aligned}$$

Quand on a fait le produit scalaire de f avec $\psi_{j,k}$, la somme de termes polynômiaux disparaît, et il ne reste que

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \frac{1}{N! 2^{jN}} \int_{\mathbb{R}} f^{(N)}(y_0) (2^j x - k)^N 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) dx. \quad (3.48)$$

En faisant le changement de variable ($y = 2^j x - k$), on obtient :

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle = \frac{1}{N! 2^{j(N+\frac{1}{2})}} \int_I f^{(N)}(y_1) y^N \psi(y) dy. \quad (3.49)$$

Si on a posé : $I = [-K, K]$ $K > 0$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_I f^{(N)}(y_1) y^N \psi(y) dy \right| &\leq \sup_{x \in I} |f^{(N)}(x)| \int_I |y|^N |\psi(y)| dy \\ &\leq \sup_{x \in I} |f^{(N)}(x)| \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} K^N \sqrt{2K}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|d_{j,k}| \leq C 2^{-j(N+\frac{1}{2})}, \quad (3.50)$$

où $C = \frac{K^N \sqrt{2K}}{N!} \sup_{x \in I} |f^{(N)}(x)|$. □

3.2.1 Exemples d'ondelettes

Il existe un certain nombre de familles d'ondelettes orthogonales couramment utilisées. Les plus connues sont sans doute les ondelettes de Daubechies, elles résultent de compromis optimaux entre deux critères contradictoires : Le nombre de moments nuls des ondelettes et la taille de leur support.

3.3 Ondelette à support compact

-L'ondelette de Haar

C'est la plus simple des ondelettes, définie sur l'intervalle $[0, 1]$, c'est la fonction ψ vérifie :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases} \quad (3.51)$$

Cette ondelette est très simple et est donc facile à mettre en oeuvre algorithmiquement. De plus, son support est compact : Elle est bien localisée en espace.

En contre partie, elle n'a qu'un seul moment nulle et est discontinue.

-L'ondelette de Daubechies

Elles ont été construites de telle sorte qu'elles aient le support le plus petit pour un nombre de moments nuls N , la fonction d'échelle φ possède un support de taille $2N$, notées D_{2N} , en d'autre terme :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx &= 0, \quad \forall l = 0, \dots, N-1. \\
 \text{supp} \varphi &\subset [0, 2N-1]. \\
 \text{supp} \psi &\subset [-N+1, N].
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

3.4 Ondelettes périodiques

Jusqu'à présent nous travaillons sur des fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$, or pour certaines applications en particulier en traitement du signal ou de l'image, le domaine sur lequel sont définies les fonctions étudiées est en général borné, il semble raisonnable de chercher une manière à réaliser une analyse multirésolution adaptée au domaine borné. En 1986, P.G Lemarié et Y. Meyer [17] ont construit des analyses multirésolutions sur $[0, 1]$ en se basant sur l'idée de périodiser les fonctions de base de l'analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Depuis, les travaux sont développés et de nombreux résultats ont conduit à la construction d'ondelettes sur l'intervalle et permettant de caractériser les fonctions régulières sur $[0, 1]$ (espace de sobolev et de Holder). Une manière intuitive et simple pour cette construction est les ondelettes périodiques définies de la façon suivante : Soit $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ une fonction d'échelle et $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ l'ondelette associée à une analyse multirésolution orthogonale de $L^2(\mathbb{R})$. Pour $j, l \in \mathbb{Z}$, on définit la fonction d'échelle périodique de période 1, par :

$$\tilde{\phi}_{j,l}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \phi_{j,l}(x+n), \tag{3.53}$$

et l'ondelette périodique associée :

$$\tilde{\psi}_{j,l}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_{j,l}(x+n). \tag{3.54}$$

Les fonctions $\tilde{\phi}_{j,l}$ et $\tilde{\psi}_{j,l}$ sont bien définies puisque les espace ϕ_0 et ψ_0 sont engendrés respectivement par les familles des translatés de ϕ et ψ . On montre [13] que les fonctions d'échelles et les ondelettes périodiques ainsi définies génèrent une analyse multirésolution orthonormée de $L^2[0, 1]$: Les espaces d'approximation et de détails sont respectivement $\tilde{V}_j$ et $\tilde{W}_j$ tels que :

$$\tilde{V}_j = \text{vec} \left\{ \tilde{\phi}_{j,l}, \quad l = 0, \dots, 2^{-j} - 1. \right\}. \tag{3.55}$$

$$\tilde{W}_j = \text{vec} \left\{ \tilde{\psi}_{j,l}, l = 0, \dots, 2^{-j} - 1. \right\}. \quad (3.56)$$

On obtient alors pour J_0 la décomposition de $L^2[0, 1]$:

$$L^2[0, 1] = \tilde{V}_{J_0} \oplus (\oplus_{j \geq J_0} \tilde{W}_j). \quad (3.57)$$

3.5 Analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$

Nous donnons ici la définition générale de l'analyse mutirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que l'énonce Y.Meyer.

Définition 3.5.1. [15] On appelle analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^n)$, une suite croissante $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R}^n)$ ayant les propriétés suivantes :

- (a) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$ et $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.
- (b) Pour tout $f \in V_0$ et $k \in \mathbb{Z}^n$, on a $f(\cdot - k) \in V_0$.
- (c) Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $f(\cdot - k) \in V_j$ si et seulement si $D_2 f \in V_{j+1}$.
- (d) Il existe une fonction $\theta \in V_0$, telle que la suite $\{\theta(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ est une base de Riesz de V_0 .

Définition 3.5.2. [17] Une analyse mutirésolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ est r -régulière ($r \in \mathbb{N}$), si la fonction θ de la définition ci-dessus satisfait :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0, \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ et } |\alpha| \leq r$$

$$|\partial^\alpha \theta(x)| \leq C_m (1 + |x|)^{-m}, \quad (3.58)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Le théorème suivant montre l'existence d'une analyse mutirésolution $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ à partir d'une analyse mutirésolution régulière $(V_j^1)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 3.5.1. [17] Etant donnée une analyse mutirésolution régulière $(V_j^1)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$, caractérisée par sa fonction d'échelle φ .

On définit une suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de manière suivante :

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$V_j = V_j^1 \otimes V_j^1 \otimes \dots \otimes V_j^1 (n \text{ fois}). \quad (3.59)$$

Alors, $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ est une analyse multirésolution régulière de $L^2(\mathbb{R}^n)$, caractérisée par sa fonction d'échelle ϕ , telle que :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \phi(x) = \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \varphi(x_n). \quad (3.60)$$

Théorème 3.5.2. [17] Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution régulière de $L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que sa fonction d'échelle ϕ donnée par la relation (3.60).

Alors, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, la suite des fonctions $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}^n}$ où

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{n\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k), \quad (3.61)$$

est une base orthonormée de V_j .

Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution régulière de $L^2(\mathbb{R}^n)$, si l'on note W_j le complémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} , on a en terme ensembliste

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad (3.62)$$

ce qui peut se traduire sur les opérateurs par la relation :

$$P_{j+1} = P_j + Q_j, \quad (3.63)$$

où Q_j est l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur W_j .

De la définition de l'analyse multirésolution, on a

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \overline{\bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j}, \quad (3.64)$$

ce qui signifie qu'une base de $L^2(\mathbb{R}^n)$ peut être constituée des bases des différents sous-espaces W_j .

En dimension 2, une construction peut se faire par le théorème suivant :

Théorème 3.5.3. [17] Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse multirésolution régulière de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Soit $\phi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y)$ la fonction d'échelle 2-D associée et ψ l'ondelette 1-D associée à φ .

On peut alors construire les trois ondelettes suivantes :

$$\psi^{(1)}(x, y) = \varphi(x)\psi(y), \quad (3.65)$$

$$\psi^{(2)}(x, y) = \psi(x)\varphi(y), \quad (3.66)$$

$$\psi^{(3)}(x, y) = \psi(x)\psi(y). \quad (3.67)$$

Pour tout $j, n, m \in \mathbb{Z}$, on a le système :

$$\left\{ \psi_{j,(n,m)}^{(1)}, \psi_{j,(n,m)}^{(2)}, \psi_{j,(n,m)}^{(3)} \right\}_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}, \quad (3.68)$$

qui forme une base orthonormée de W_j .

De plus, le système :

$$\left\{ \psi_{j,(n,m)}^{(1)}, \psi_{j,(n,m)}^{(2)}, \psi_{j,(n,m)}^{(3)} \right\}_{(j,n,m) \in \mathbb{Z}^3}, \quad (3.69)$$

qui constitue une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^2)$.

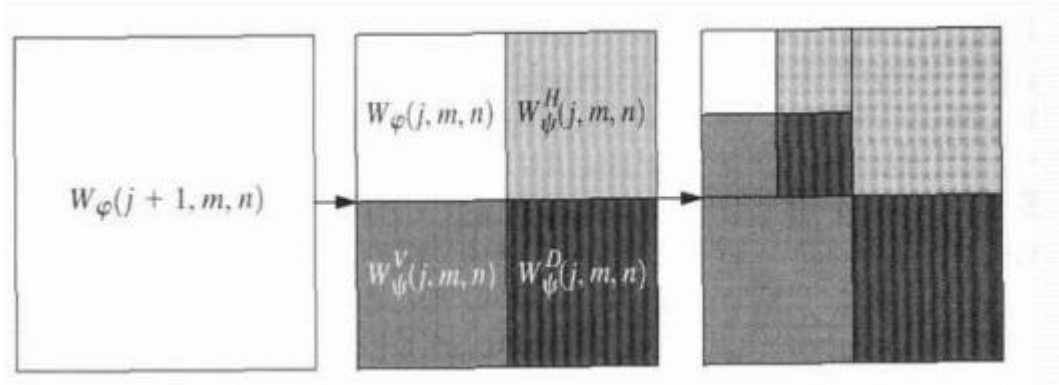


FIGURE 3.1 – Schéma de décomposition $j=1$ et $j=2$.

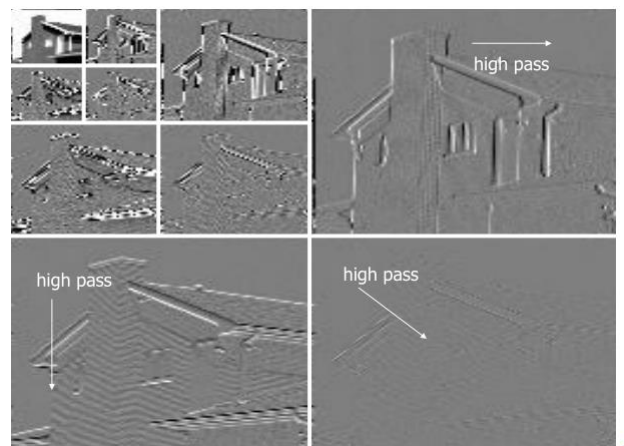


FIGURE 3.2 – Schéma de décomposition $j=3$.

Chapitre 4

Nouvelle méthode de seuillage et ses applications dans le débruitage d'images

Dans une approche par ondelettes, le seuillage des coefficients d'ondelettes est une basique étape pour l'algorithme du débruitage. La procédure du seuillage s'applique directement aux coefficients d'ondelettes à l'aide d'une fonction η qui doit être caractérisée par le paramètre du seuillage λ et deux propriétés fondamentales telles que, l'élimination des petits coefficients d'ondelettes et la réduction de l'effet des gros coefficients. Donoho et Johnstone [8] ont introduit les deux premières méthodes du seuillage, qui sont le seuillage dur et le seuillage doux. La fonction du seuillage dur est discontinue et celle du seuillage doux est continue avec une dérivée constante et discontinue. En raison de ces caractéristiques, chaque méthode souffre de quelques inconvénients au niveau de l'image comprimée ou débruitée. Dans ce chapitre nous proposons une alternative technique pour le débruitage d'images basée sur une nouvelle fonction du seuillage η , dont nous pouvons éviter les défauts de méthodes précédentes.

4.1 Principe du débruitage d'images par seuillage des coefficients d'ondelettes

Considérons une image originale f de taille $N \times M$ pixels, qui sera récupérée. Supposons que cette image est bruitée par un bruit blanc gaussien n qui a une moyenne 0 et de variance

notée σ^2 : L'image observée g sera donnée par la relation suivante :

$$g(i, j) = f(i, j) + n(i, j), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M. \quad (4.1)$$

L'objectif du débruitage est de supprimer le bruit contenu dans g en estimant $\tilde{f}$, qui minimise l'erreur moyenne quadratique ou en anglais Mean Square Error (MSE) définie comme suit :

$$MES = \frac{1}{N \times M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\tilde{f}(i, j) - f(i, j))^2. \quad (4.2)$$

Dans le domaine d'ondelettes, le débruitage traite chaque coefficient d'ondelettes des espaces de détail **LH**, **HL**, **HH** à l'aide de la fonction du seuillage η pour obtenir $\bar{g}$. Ainsi, l'image débruitée $\tilde{f}$ sera l'inverse de la transformation en ondelette discrète de $\bar{g}$. i.e, $\tilde{f} = IDWT(\bar{g})$:

4.2 Rappel sur les traditionnelles techniques de seuillage

Il existe plusieurs types des seuillages. Nous pouvons d'abord distinguer les seuillage dur et seuillage doux.

Seuillage dur (Hard Thresholding)

Le seuillage dur est celui qui est le plus intuitif. On se fixe un seuil $\lambda > 0$. On ne conserve que les coefficients d'ondelettes supérieurs à λ et on met à zéro les autres, sa fonction η est donnée par :

$$\eta_H(x, \lambda) = \begin{cases} x & si & |x| > \lambda \\ 0 & si & |x| \leq \lambda \end{cases} \quad (4.3)$$

En raison de la discontinuité de cette fonction, l'image débruitée sera motivée par des artefacts.

Seuillage doux (Soft Thresholding)

Dans le cas du seuillage dur, on met toujours à zéro les coefficients inférieurs à un seuil λ . Par contre, pour ceux supérieurs à λ , on atténue l'amplitude des coefficients par la valeur

du seuil afin de s'assurer d'avoir enlever l'effet du bruit même pour les forts coefficients, la fonction du seuillage ici est exprimée par :

$$\eta_S(x, \lambda) = \begin{cases} x - \lambda & si & x > \lambda \\ 0 & si & |x| \leq \lambda \\ x + \lambda & si & x < -\lambda \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans ce cas, la fonction du seuillage est continue et le coefficient seuillé sera donc plus petit que le coefficient du signal. Ce type de seuillage garantit que le signal obtenu sera toujours plus régulier que le signal de départ. Notant que la valeur du paramètre de seuillage est soumise aux règles du seuillage : Donoho et Johnstone [8] ont proposé la règle Visu Shrink, où la valeur de seuillage est définie comme suit :

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(N \times M)}, \quad (4.5)$$

où $N \times M$ représente la taille de l'image et σ est l'écart type correspond au bruit. De plus, le niveau du bruit σ peut être estimé selon cette formule :

$$\hat{\sigma} = \frac{Median(|y_{i,j}|)}{0.6745}, \quad y_{i,j} \in \text{sous-bande } HH_1. \quad (4.6)$$

4.3 Nouvelle fonction de seuillage des coefficients d'ondelettes

La nouvelle fonction de seuillage que nous avons proposé dans [8] se caractérise par un paramètre de forme $\alpha (\alpha > 0)$ et elle est construite pour être continue et graphiquement située entre les traditionnelles fonctions de seuillage (dur et doux). Cette fonction vérifie un compromis entre le seuillage dur et le seuillage doux, où sa expression mathématique est donnée par :

$$\eta_{New,\alpha}(x, \lambda) = \begin{cases} x - \lambda + \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha(\frac{x-\lambda}{\lambda})} e^{-t^2} dt & si & x > \lambda \\ 0 & si & |x| \leq \lambda \\ x + \lambda - \frac{2\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha(\frac{x+\lambda}{\lambda})}^0 e^{-t^2} dt & si & x < -\lambda \end{cases} \quad (4.7)$$

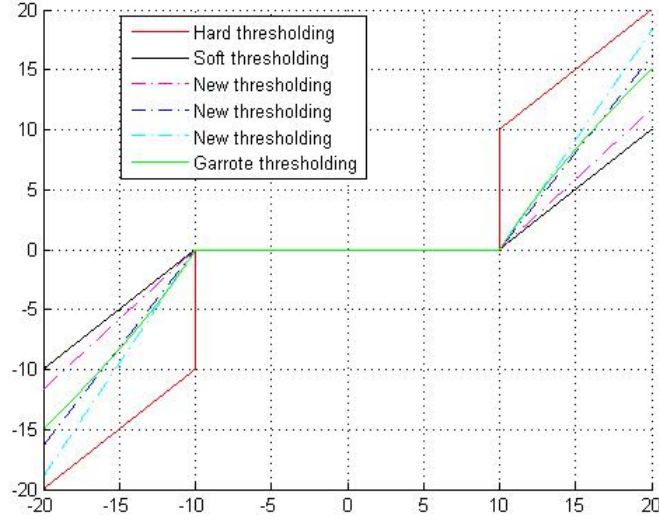


FIGURE 4.1 – Graphique de Dur, Doux, garrot et seuillage proposé avec ($\alpha = 0,05$, $\alpha=0,2$, $\alpha=0,3$) respectivement à $\lambda=10$)

D'après (4.7), quand $\alpha \rightarrow 0$, la fonction $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda) \rightarrow \eta_S(\cdot, \lambda)$ et quand $\alpha \rightarrow +\infty$, la fonction $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda) \rightarrow \eta_H(\cdot, \lambda)$: Cette propriété montre qu'on peut accéder au seuillage dur et doux par un simple ajustement du paramètre de forme α . De plus, la fonction $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$ possède les propriétés suivantes :

Théorème 4.3.1. [6] *La fonction $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$ est graphiquement située entre les traditionnelles fonctions de seuillage (dur et doux).*

Démonstration du théorème

Pour tout x , on pose

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (4.8)$$

remarquons que f est croissante sur $\mathbb{R}$ et elle a les propriétés suivantes :

$$0 \leq f(x) \leq 1, \quad \forall x \geq 0, \quad (4.9)$$

$$-1 \leq f(x) \leq 0, \quad \forall x \leq 0. \quad (4.10)$$

alors, pour $x > \lambda$ on a,

$$0 \leq f\left(\alpha \left(\frac{x - \lambda}{\lambda}\right)\right) \leq 1, \quad (4.11)$$

d'où

$$x - \lambda \leq \eta_{New,\alpha}(x, \lambda) \leq x. \quad (4.12)$$

Pour $x < -\lambda$, on a

$$\alpha\left(\frac{x + \lambda}{\lambda}\right) < 0, \quad (4.13)$$

et

$$\frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha(\frac{x+\lambda}{\lambda})}^0 e^{-t^2} dt = f\left(\alpha\left(\frac{x + \lambda}{\lambda}\right)\right) = -f\left(-\alpha\left(\frac{x + \lambda}{\lambda}\right)\right), \quad (4.14)$$

d'où

$$-1 \leq \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha(\frac{x+\lambda}{\lambda})}^0 e^{-t^2} dt \leq 0, \quad (4.15)$$

par conséquent,

$$x \leq \eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda) \leq x + \lambda. \quad (4.16)$$

Pour $|x| = \lambda$, toutes les fonctions $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$, $\eta_H(\cdot, \lambda)$ et $\eta_S(\cdot, \lambda)$ sont égales à zéro.

Théorème 4.3.2. [6] *La fonction $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$ est continue, croissante sur $\mathbb{R}$ et infiniment différentiable sur $] -\infty, -\lambda[\cup]\lambda, +\infty[$.*

Démonstration du théorème

Comme la fonction $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$ est continue aux points $|x| = \lambda$, alors elle est continue sur $\mathbb{R}$: D'autre part, pour $x < -\lambda$ on a

$$\eta'_{New,\alpha}(\cdot, \lambda) = 1 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2(\frac{x+\lambda}{\lambda})^2} > 0, \quad (4.17)$$

et pour $x > \lambda$ on a aussi

$$\eta'_{New,\alpha}(\cdot, \lambda) = 1 + \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2(\frac{x-\lambda}{\lambda})^2} > 0. \quad (4.18)$$

Donc, $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$ est croissante sur $\mathbb{R}$. D'ailleurs, d'après les formules de $\eta'(x, \lambda)$ pour $x < -\lambda$ et $x > \lambda$, la fonction $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$ est infiniment différentiable sur $] -\infty, -\lambda[\cup]\lambda, +\infty[$.

Théorème 4.3.3. (Estimation d'erreur d'approximation) : [6] *Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{R}}$ une analyse multi-résolution régulière de $L^2(\mathbb{R})$ et l'ondelette associée. Pour toute $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $J \in \mathbb{N}^*$, on définit :*

$$P_{V_J}^{Hard} f = P_{V_0} f + \sum_{j=0}^{J-1} Q_j^{Hard} f, \quad (4.19)$$

$$P_{V_J}^{Soft} f = P_{V_0} f + \sum_{j=0}^{J-1} Q_j^{Soft} f, \quad (4.20)$$

$$P_{V_J}^{New} f = P_{V_0} f + \sum_{j=0}^{J-1} Q_j^{New} f. \quad (4.21)$$

Où $P_{V_0} f$ est la projection orthogonale de f sur V_0 et $Q_j^{Hard} f$, $Q_j^{Soft} f$ et $Q_j^{New} f$ sont la projection orthogonale de f sur W_j en utilisant le seuillage dur, doux et nouveau seuillage respectivement. Alors on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\left\| f - P_{V_J}^{New} f \right\|_{L^2(\mathbb{R})} < \left\| f - P_{V_J}^{Soft} f \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = C_{J,\lambda}(f) \lambda^2 + \left\| f - P_{V_J}^{Hard} f \right\|_{L^2(\mathbb{R})}, \quad (4.22)$$

où

$$C_{J,\lambda}(f) = \text{card} \{ (j, k), j = 0, \dots, J-1, k \in \mathbb{Z}, |d_{j,k}| > \lambda \}. \quad (4.23)$$

La démonstration de ce théorème se trouve dans [6] Dans ce qui suit, on va introduire les étapes de l'algorithme correspondant à la nouvelle technique de seuillage.

Étape 1 : Charger l'image.

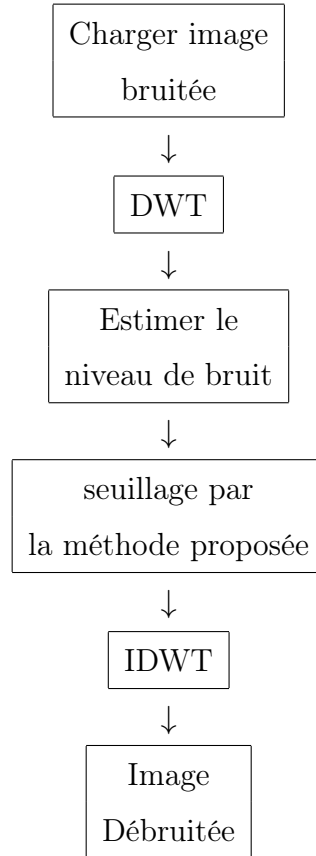
Étape 2 : Décomposer l'image avec (**DWT**) au niveau j produit les sousbandes : **LL**, **LH**, **HL**, **HH**.

Étape 3 : Estimer le niveau du bruit σ en utilisant

Étape 4 : Appliquer la règle du choix de paramètre de seuillage aux coefficients d'ondelettes avec la nouvelle fonction de seuillage $\eta_{New,\alpha}(\cdot, \lambda)$.

Étape 5 : Reconstruire l'image en appliquant (**IDWT**) pour les nouveaux coefficients d'ondelettes.

Étape 6 : Obtenir l'image débruitée.



4.4 Résultats expérimentaux et discussion

Afin de vérifier l'efficacité de notre méthode de débruitage, nous comparons cette nouvelle méthode avec les méthodes de seuillage classiques telles que Hard, Soft et Garrote à l'aide de la règle Visu Shrink. Ces méthodes de seuillage sont appliquées aux diverses images de test de taille 512×512 pixels, qui sont bruitées par un bruit gaussien avec différents niveaux de bruit. L'ondelette utilisée dans toutes les méthodes est l'ondelette de Haar au niveau de décomposition $J = 1$, où le paramètre de forme est déterminé par une méthode d'approximation stochastique (algorithme de Robbins-Monro). Alors, les résultats de simulation en utilisant Matlab sont présentés dans le tableau suivant :

Images	Noise level	Hard	Soft	Garrote	Proposed method	Shape parameter
Barbara	10	28.0440	27.7677	27.7094	28.1019	0.009
	15	24.6469	24.6132	24.5666	25.2104	0.01
	20	22.3580	22.4018	22.5437	22.6088	0.05
	25	20.0717	19.6226	20.1902	20.4312	0.1
	30	18.1999	18.1438	18.3651	18.5197	1
Boat	10	25.7620	27.7896	27.3350	27.8906	0.009
	15	24.6985	24.2036	24.7721	25.0008	0.15
	20	21.8492	22.1981	21.4785	22.2295	0.15
	25	19.9245	20.0176	20.1240	20.4384	1
	30	18.0349	18.6323	18.5476	18.7409	0.05
Cameraman	10	27.8897	28.1068	28.0274	28.1492	0.09
	15	22.9283	22.4868	22.8450	23.1930	0.9
	20	19.2072	18.9017	18.8856	19.2539	0.09
	25	16.1831	16.0629	15.7873	16.2988	0.25
	30	13.5814	13.2885	13.4052	13.6726	1

FIGURE 4.2 – Comparaison des PSNR (dB) entre les méthodes de débruitage.

Apparemment, les résultats expérimentaux montrent qu'à chaque niveau de bruit, le PSNR qui correspond à notre méthode proposée est le plus élevé par rapport à toutes les autres méthodes pour chaque image. En outre, la performance de la méthode de Garrote pour chaque image par rapport à la méthode Hard et Soft apparaît aux niveaux élevés de bruit. Alors que, notre méthode proposée évite ce problème en raison de l'existence du paramètre de forme. Ainsi, notre méthode de débruitage est supérieure à toutes les autres méthodes en termes de qualité visuelle de l'image débruitée.



FIGURE 4.3 – Images originales et corrompues pour Barbara avec niveau de bruit gaussien $\sigma=20$



(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURE 4.4 – Images débruitées, (a), (b), (c), (d) en utilisant dur, doux, Garrot et Méthode proposée respectivement au niveau de bruit gaussien $\sigma=20$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté une nouvelle technique pour le débruitage d'images, qui est basée sur une nouvelle fonction du seuillage, cette fonction se caractérise par un paramètre de forme dont on peut vérifier un compromis entre les fonctions du seuillage classiques (dur et doux). Les résultats expérimentaux ont montré la meilleure performance de cette technique par rapport au seuillage dur et doux.

Par conséquent, on peut adopter cette nouvelle technique pour le débruitage d'images.

Bibliographie

- [1] G. Bacheman L.Narici and E. Beckenstein, *Fourier and wavelet analysis*, Springer Verlag 2000.
- [2] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application*, Masson, Paris, 1983.
- [3] H. Chebli, *ANALYSE HILBERTIENNE*, Centre de Publication Universitaire Tunis, 2001.
- [4] C.Cudel, B.Colicchio, A.Dieterlen *Sources de dégradations et restauration d'images*, Université de Haute Alsace, Mulhouse, France
- [5] I.Daubechies, *Orthonormal basis with finite support. Connexion with discrete filters*, Bell labo, 1987
- [6] Dehda B., Melkemi K., *IMAGE DENOISING USING NEW WAVELET THRESHOLDING FUNCTION*, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics* 16(2), 55-65, 2017.
- [7] Donoho, D.L., *Denoising by soft thresholding*, *IEEE Trans. Information Theory*, vol. 41 (1995),
- [8] Donoho, D.L., and Johnstone, LM., *LM.*, *Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage*, *Biometrika*, vol. 81,(1994).
- [9] W. Fourati et M. S Bouhlef, *Techniques de Débruitage d'Images*, *L'Unité Sciences Et Technologies de l'Image et des Télécommunications SETIT, ISBS Sfax-TUNISIE*, March 22-26, 2009
- [10] Frazier, R., S. Samsam, L. Braidia, and A. V. Oppenheim, *"Enhancement of speech by adaptive filtering"*, *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Philadelphia, Vol.1, (1976)*.

- [11] Goswami, J. C., and Chan, A. K., *Fundamentals of Wavelets : theory, algorithms, and applications*, New York, N.Y. : J. Wiley and Sons, (1999).
- [12] Johnstone, I. M., and Silverman, B.W., *Wavelet threshold estimators for data with correlated noise*, *J. Roy. Statist*, (1997).
- [13] G. Kaiser, *A Friendly Guide to Wavelets*, Birkhauser, berlin 1994.
- [14] S.Mallat, *A wavelet tour of signal processing*. New York : Academic Press, (1998).
- [15] S.Mallat, *A theory for multiresolution signal decomposition : The wavelet representation*, *IEEE Trans. Patt. Anal Machine Intell*, (1989).
- [16] S.Mallat, *Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$* , *Transaction of the AMS* 315 69-87 septembre 1989.
- [17] Meyer, Y., *Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées, lectures données à l'Université de Torino, Italie*, (1986).
- [18] Mitisi M., Y. Mitisi, G. Oppenheim et J. Poggi, *"Les ondelettes et leur applications"*, Paris : Hermès Science Publications, (2003).
- [19] Morrison, N., *"Introduction to Fourier analysis"*, New York, N.Y. : J. Wiley and Sons, (1994).
- [20] S.Mallat, *Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$* , *Transaction of the AMS* 315 69-87 septembre 1989.
- [21] Yannick Privat, *Polycopié de cours, Institut Élie Cartan Nancy (Mathématiques) - Université Henri Poincaré Nancy 1 B.P. 239, F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex*.

Résumé

Ce mémoire, est consacré à l'étude d'effet pratique d'une nouvelle technique pour le débruitage d'images. On commence par un rappel sur l'espace de Hilbert et quelques propriétés principales. Puis, on fait un survol sur la théorie des signaux, où on définit quelques notions de base comme, le signal, l'image numérique et le bruit. Ensuite, on démontre par une étude approfondie sur l'analyse multirésolution, que l'on peut construire des variétés des bases orthonormées d'ondelettes. On propose également, une nouvelle fonction du seuillage caractérisée paravantages par rapport aux seuillage dur et doux. Enfin, on compare par des critères informatiques la performance pratique des techniques classiques avec la nouvelle technique.

Mots-clès : Analyse de Fourier, ondelettes, analyse multirésolution, Seuillage dur et doux, débruitage d'images, nouvelle fonction du seuillage.

Abstract

This work is devoted to the study of the practical effect of a new technique for images denoising. We begin with a reminder on the Hilbert space and some main properties. Next, we do an overview of the signal theory, where we define some basic notions as : the signal, the digital image and the noise. Then, we demonstrate through a detailed study on the multiresolution analysis, that we can build from it varieties of orthonormal wavelet bases. We also propose a new thresholding function characterized by advantages over hard and soft thresholding. Finally, we compare by informatics criteria the practical performance of classical techniques with the new technique.

Keywords : Fourier analysis, wavelets, multiresolution analysis, Hard and Soft thresholding, images denoising, new thresholding function.

ملخص

هذه المذكرة تخص دراسة المفعول التطبيقي لتقنية جديدة لتصفية الصور، حيث نبدأها بتذكير حول فضاء هيلبرت مع بعض الخصائص الأساسية. ثم نقدم لمحة حول نظرية الاشارات، أين نعرف بعض المفاهيم الأساسية كالإشارة، الصورة العددية و التشويش. بعد ذلك، نبرهن باستخدام دراسة مفصلة حول التحليل متعدد الحلول على أنه يمكننا من خلاله تشكيل عدة أسس موجية متعامدة ومتجانسة. نقترح بالمقابل، دالة جديدة للتعطيب تتمتع بمزايا مقارنة مع التعطيب الصلب و الناعم. و أخيراً، نقارن باستخدام معايير عددية، الأداء التطبيقي للتقنيات القديمة والتقنية الجديدة. **الكلمات المفتاحية :** تحليل فورييه، الموجات، التحليل متعدد الحلول، التعطيب.