

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur
Et De La Recherche Scientifique



UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR
D'EL OUED
FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales

Thème

Problème de contact entre deux corps
thermo-électro-élastiques avec frottement,
adhésion et compliance normale

présente par: Rehouma Basma
Hamidatou Fatma Zahra

Devant le jury composé de :

HADJ AMMAR Tedjani	MCA	Président	Univ. El Oued
DOUIB Bachir	MAA	Encadreur	Univ. El Oued
AZEB AHMED A.Alaziz	MCA	Examineur	Univ. El Oued

Promotion : 2020/2021

Dédicaces

A qui le seigneur tout-puissant a dit « *Et ton seigneur a décrété que tu n'adores que lui, et que tu sois bon envers les parents-l'un d'eux ou les deux atteignent la vieillesse avec toi, alors ne leur dis pas "Af" et ne les reprimande pas, mais dis à leur un mot gentil* ».

Avec fierté et honneur, je suis fière de ce que j'ai accompli au-dessus du devoir je consacre le fruit de ce humble travail à la joie du cœur et au don du seigneur.

À celui qui a travaillé dur pour se reposer et est resté éveillé et a rêvé d'obtenir. Au soleil qui éclaire mes matins et à la lune qui éclaire mes nuits,

"ma mère"

À celui qui a bu la coupe vide pour me donner une goutte d'amour, à celui dont les doigts sont fatigués pour nous offrir un moment de bonheur et m'ouvrir le chemin de connaissance, au grand cœur,

"mon père"

À mon soutien et ma force à ceux qui m'ont parlé à eux,

"mes frères"

Aux cœurs purs et doux, aux vents de ma vie,

"mes sœurs"

À ceux qui m'ont montré les plus belles choses de la vie, et à toute ma famille et mes proches.

Remerciements et Gratitude

Nous louons Dieu tout-puissant, qui nous a inspiré patience et constance et nous a donné la force et la détermination de poursuivre notre cheminement académique et notre réussite dans l'accomplissement de ce travail.

Nous remercions sincèrement le docteur vertueux **Dr.DOUIB Bachir** en raison de sa préférence pour la supervision de cette recherche et de son ampleur et de sa volonté d'avoir ce travail sous une forme complète qui ne soit dénaturé par aucune carence, nous demandons à Dieu de le récompenser de tout le bien avant de superviser ce travail simple, les efforts qu'il a déployés pour nous, et les grands conseils, les directions qu'il a mis à l'esprit en suivant attentivement cette recherche. Dieu l'a fait dans l'équilibre de ses bonnes actions.

Comme nous tenons à remercier vivement **Dr. HADJ AMMAR Tedjani** pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de ce mémoire.

Nos remerciements vont également à **Dr. AZEB AHMED A.Alaziz** d'avoir accepté de juger notre travail.

Nous adressons nos sincères remerciements et notre gratitude à l'administration de la faculté de Sciences Exactes, Université de la combatant Hamma Lakhdar.

Enfin que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail reçoivent mes remerciements.

Table des matières

Notations générales	vi
Introduction	1
1 Modélisation	4
1.1 Cadre physique	4
1.1.1 Modèle mathématique.	6
1.2 Lois de comportements matériaux piézoélectrique.	8
1.3 Conditions aux limites.	10
1.3.1 Condition aux limites de déplacement.	10
1.3.2 Condition aux limites de traction.	10
1.3.3 Conditions aux limites électriques.	10
1.3.4 Conditions continue aux limites de contact.	10
1.3.5 Loi de contact avec frottement	11
1.3.6 Loi de frottement de type Coulomb.	12
1.3.7 Lois de contact avec frottement et adhésion.	12
2 Outils Mathématiques	16
2.1 Espaces de Hilbert	16
2.2 Espaces de Sobolev	18
2.3 Espaces fonctionnels	19
2.4 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles	23
2.5 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	24
2.6 Triplet de Gelfand	27

2.7	Lemmes de Gronwall	29
3	Problème de contact entre deux corps thermo-électro-élastiques avec frottement, adhésion et compliance normale	31
3.1	Formulation du problème	31
3.2	Formulation Variationnelle	33
3.3	Existence et unicité de la solution	45
	Conclusion générale	59

Notations générales

Soit Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ on note par :

\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels,
\mathbb{R}	l'ensemble des nombres réels,
$\partial_i \psi$	la dérivée partielle de ψ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ composante de x : $\partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	le gradient de l'application ψ : $\nabla \psi = (\partial_1 \psi, \dots, \partial_d \psi)$,
$\text{div} \psi$	divergence de l'application ψ : $\text{div} \psi = \partial_1 \psi + \dots + \partial_d \psi$,
$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de X ,
$\ \cdot \ _X$	La norme de X ,
\mathbb{S}^d	L'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$,
Ω^ℓ	ouvert de \mathbb{R}^d occupé par un corps déformable,
$\bar{\Omega}^\ell$	l'adhérence de Ω^ℓ ,
Γ^ℓ	la frontière de Ω^ℓ supposée régulière : $\Gamma^\ell = \partial \Omega^\ell$,
Γ_i^ℓ	les parties de frontière Γ^ℓ , ($i = 1, 2, 3$) ,
$\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$	l'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
$\text{mes} \Gamma_i^\ell$	mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_i^ℓ ,
$d\Gamma_i^\ell$	mesure superficielle sur Γ_i^ℓ ,
ν^ℓ	la normale unitaire sortante à Γ^ℓ ,
v_ν^ℓ, v_τ^ℓ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v^ℓ défini sur $\bar{\Omega}^\ell$,
u^ℓ	vecteur de déplacement dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^ℓ	tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ , on écrit σ_{ij}^ℓ les composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν^ℓ	le composante normale du champ tensoriel σ^ℓ : $\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell$,
σ_τ^ℓ	le composante tangentielle du champ tensoriel σ^ℓ : $\sigma_\tau^\ell = \sigma^\ell \nu^\ell - \sigma_\nu^\ell \nu^\ell$,

φ^ℓ	valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
β	vecteurs d'adhésion sur la surface de contact Γ_3 ,
D^ℓ	valeurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	les dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps,
$\varepsilon(u^\ell)$	tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon_{ij}(u^\ell) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell)$,
$\text{Div}\sigma$	Divergence de σ : $\text{Div}\sigma = (\sigma_{ij,j})$,
$L^2(\Omega^\ell)$	espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega^\ell)}$	la norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell\ _{L^2(\Omega^\ell)} = \left(\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega^\ell)$	espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que, $\exists c > 0 : u^\ell < c$, p.p. sur Ω^ℓ ,
H^ℓ	l'espace $L^2(\Omega^\ell)^d$,
H_1^ℓ	l'espace $H^1(\Omega^\ell)^d$,
\mathcal{H}^ℓ	l'espace $L^2(\Omega^\ell)^{d \times d}$,
\mathcal{H}_1^ℓ	l'espace $\{\sigma^\ell = (\sigma_{ij})^\ell \in \mathcal{H}^\ell \mid \text{Div}\sigma \in H^\ell\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ ,
H_{Γ^ℓ}	l'espace $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell))^d$,
H'_{Γ^ℓ}	l'espace dual de H_{Γ^ℓ} ,
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application de trace pour les fonctions vectorielles,
Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par :	
$C([0, T]; H)$	l'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1([0, T]; H)$	l'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p([0, T]; H)$	l'espace des fonctions p-intégrable sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot\ _{L^p([0, T]; H)}$	la norme de $L^p([0, T]; H)$ définie par $\ u\ _{L^p([0, T]; H)} = \left(\int_0^T \ u(t)\ _H^p dt\right)^{1/p}$,
$W^{k,p}([0, T]; H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}([0, T]; H)}$	la norme de $W^{k,p}([0, T]; H)$; $\ u\ _{W^{k,p}([0, T]; H)} = \left(\int_0^T \sum_{ \alpha \leq k} \ D^\alpha u(t)\ _H^p dt\right)^{1/p}$,
c	constante réelle strictement positive,
i.e.	c'est-à-dire,
p.p.	presque partout.

Introduction générale

La piézoélectricité traduit la propriété que présentent certains cristallins à se polariser sous l'action d'une contrainte mécanique (effet direct) ou bien à se déformer lorsqu'il leur est appliqué un champ électrique (effet inverse). Bien qu'ayant été prédit par Coulomb et découvert par Becquerel en 1879, l'effet piézoélectrique n'a été correctement expliqué par expérimentation qu'en 1880 par les frères Jacques et Pierre Curie. Par la suite le formalisme de la piézoélectricité a été développé par P. Duhem, F. Pockels et particulièrement par W. Voigt en 1894. Une présentation des débuts de la piézoélectricité peut être trouvée dans [30], et plus récemment [5]. Dans la plupart des systèmes de la mécanique des structures, il existe des situations dans lesquelles un corps (piézoélectrique) déformable entre en contact avec d'autre corps, Il est évident que le caractère de ce contact peut jouer un rôle fondamental dans le comportement de la structure : sa déformation, son mouvement, la distribution des efforts, etc.... Avant l'application de forces sur un corps, la surface de contact réelle sur laquelle les corps se touchent est inconnue ; par ailleurs, les conditions de frontière sur cette surface inconnue fait intervenir des efforts et des déplacements inconnus. En conséquence, les modèles mathématiques de contact impliquent des systèmes d'inégalités ou d'équations non linéaires. D'ailleurs, quand le frottement est présent, des solutions multiples de ces équations décrivant le contact peuvent exister, et la description du mouvement des corps en contact devient extrêmement complexe. Signorini fut le premier à énoncer un problème de contact entre un corps déformable et une fondation rigide. La Théorie Mathématique de la Mécanique du Contact débute avec Duvaut et Lions [12], qui présentent des formulations variationnelles des problèmes de contact et des résultats d'existence et d'unicité. En particulier, on trouvera dans [27] des résultats concernant l'étude des problèmes de contact des corps piézoélectriques. Du fait de l'importance des processus de contact, un effort considérable a été fait

dans leurs modélisations et la littérature sur ce sujet est large. Ceci étant dit, il y a encore très peu de résultats mathématiques concernant les problèmes de contact impliquant des matériaux piézoélectriques et c'est pourquoi, il y a une demande pour étendre les résultats des modèles de contact de corps déformables à des modèles de corps déformables incluant le couplage entre les propriétés électriques et mécanique. Des modèles généraux pour des matériaux élastiques avec effets piézoélectriques peuvent être trouvés plus récemment dans [27, 29, 28]. Il y a aussi un intérêt considérable dans les problèmes de contact avec adhésion concernant des matériaux piézoélectrique.

L'adhésion est un phénomène d'interface qui accompagne le contact. Dans les travaux [13]-[17], ici Frémond propose une théorie moderne du contact avec adhésion. Cette théorie se base sur les conditions du contact unilatéral de Hertz-Signorini-Moreau ; elle utilise une variable interne le champ d'adhésion $\beta \in [0, 1]$ qui décrit la densité fractionnelle des adhésifs actifs sur la surface de contact et qu'est régie par une loi d'évolution au delà du seuil d'adhésion. En un point de la surface de contact adhésif, lorsque $\beta = 1$, l'adhésion est complète et tous les adhésifs sont actifs ; lorsque $\beta = 0$, tous les adhésifs sont inactifs, sévères et il n'y a pas d'adhésion. Lorsque $0 < \beta < 1$, l'adhésion est partielle et seulement une fraction des adhésifs est active.

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'évolution quasi-statique des matériaux électro-thermoélastique. Pour cela nous utilisons une loi de comportement électro-thermoélastique avec mémoire à long terme. Dans ce mémoire, nous étudions un problème de contact quasi-statique entre deux corps thermoélastiques avec mémoire à long terme et frottement. Le contact est modélisé avec une compliance normale où l'adhésion des surfaces de contact est prise en compte et est modélisée avec un variable de champ de collage. Nous présentons une formulation variationnelle du problème mécanique pour laquelle nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible du problème étudié.

Le mémoire se compose de trois chapitres que nous décrivons brièvement.

Dans la premier chapitre, introduit des notations générales de la mécanique nécessaire pour une bonne compréhension de la suite du problème traité. Nous commençons par le cadre physique, lois de comportements piézoélectrique et condition aux limites.

Dans le deuxième chapitre nous donnons quelques rappels sur les espaces fonctionnels et les principales notations utilisées. Ensuite nous passons aux résultats fondamentaux d'analyse non linéaire, les inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution, Triplet de

Gelfand et les lemmes de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

Enfin dans le troisième chapitre qui s'inspire de l'article [11] nous étudions un problème quasi-statique de contact à mémoire longue entre deux corps électro-thermoélastiques avec frottement, adhésion et compliance normale ; nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible, en utilisant quelques théorèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution, théorème du Lax-Milgram, théorème de Cauchy-Lipshitz, puis les techniques de point fixe de Banach et les inégalités du lemme de Gronwall.

Modélisation

Ce chapitre, représente un bref rappel de la mécanique des milieux ou nous allons introduire les cadres physiques utilisés dans ce mémoire, nous commençons de rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement matériau électro-élastiques et thermo-électro-élastiques. Par ailleurs nous précisons les conditions aux limites de contact avec frottement et adhésion.

1.1 Cadre physique

Nous considérons deux corps matériels qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2, d = 2, 3$), avec une frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ , tel que $mes\Gamma_1^\ell > 0$. Nous notons par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ , les corps est encastrées sur $\Gamma_1^\ell, \ell = 1, 2$ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité $f_2^\ell, \ell = 1, 2$ et dans Ω^ℓ agissent des forces volumiques de densités $f_0^\ell, \ell = 1, 2$. Nous supposons f_2^ℓ , et $f_0^\ell, (\ell = 1, 2)$ varient très lentement par rapport au temps et soient $T > 0$ et $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. En plus de l'action des forces des tractions, les corps et soumis à l'action des chaleurs électriques de densité volumiques $q_0^\ell, \ell = 1, 2$ et de chaleurs électriques surfaciques $q_2^\ell, \ell = 1, 2$. Pour le décrire, nous considérons une partition de la frontière $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$ en deux parties mesurables, Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ telles que $mes\Gamma_a^\ell > 0$. Le contact entre les deux corps est avec frottement et adhésion sur la partie commune $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$ que nous avons noté par Γ_3 , les potentiels électriques sont annulés sur Γ_a^ℓ , et les charges électriques superficielles de densités $q_2^\ell, \ell = 1, 2$ sont prescrites sur Γ_b^ℓ . La différence entre cadre physiques mécanique et cadre physique électro-mécanique résulte du fait que nous

prenons en considération les propriétés mécaniques et aussi les propriétés électriques dans les deux corps.

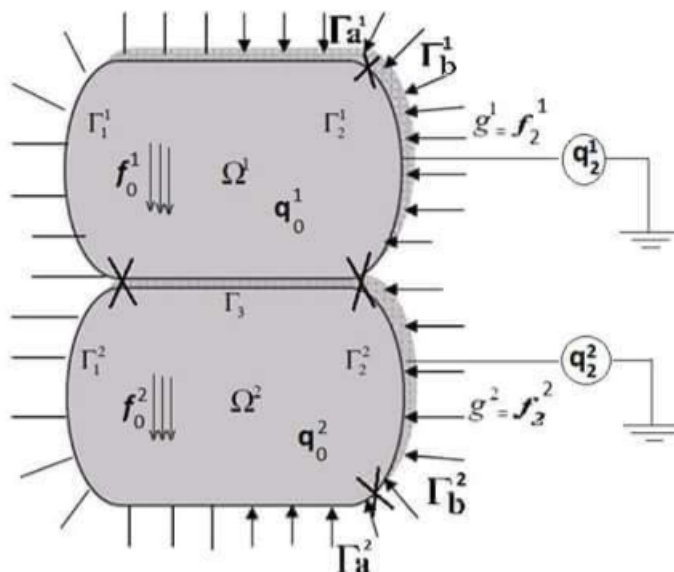


Fig.1. contact entre deux corps électro-élastiques.

Nous désignons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), " \cdot " et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} u^\ell \cdot v^\ell &= u_i^\ell \cdot v_i^\ell, & \|v^\ell\| &= (v^\ell \cdot v^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall u^\ell, v^\ell \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma^\ell \cdot \tau^\ell &= \sigma_{ij}^\ell \cdot \tau_{ij}^\ell, & \|\tau^\ell\| &= (\tau^\ell \cdot \tau^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \sigma^\ell, \tau^\ell \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Pour chaque élément $v^\ell \in H^1(\Omega^\ell)$, nous notons par v_ν^ℓ et v_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$v_\nu^\ell = v^\ell \cdot \nu^\ell, \quad v_\tau^\ell = v^\ell - v_\nu^\ell \nu^\ell. \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\sigma^\ell = \sigma^\ell(x, t)$ le champ des contraintes, par $u^\ell = u^\ell(x, t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u^\ell)$ le champ des déformations infinitésimales.

Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}^\ell$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes σ^ℓ nous dénotons par σ_ν^ℓ et σ_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell, \quad \sigma_\tau^\ell = \sigma^\ell \nu^\ell - \sigma_\nu^\ell \nu^\ell. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot v^\ell = \sigma_\nu^\ell v_\nu^\ell + \sigma_\tau^\ell \cdot v_\tau^\ell, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement de la formulation variationnelle du problème mécanique de contact.

1.1.1 Modèle mathématique.

En outre, les points au-dessus d'une fonction représentent la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt}, \quad \ddot{u}^\ell = \frac{d^2u^\ell}{dt^2},$$

où \dot{u}^ℓ désigne le champ des vitesses et \ddot{u}^ℓ désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses \dot{u}^ℓ les notations \dot{u}_ν^ℓ et \dot{u}_τ^ℓ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est à dire

$$\dot{u}_\nu^\ell = \dot{u}^\ell \cdot \nu^\ell, \quad \dot{u}_\tau^\ell = \dot{u}^\ell - \dot{u}_\nu^\ell \cdot \nu^\ell.$$

Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon^\ell(u^\ell) = (\varepsilon_{ij}^\ell(u^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}^\ell(u^\ell) = \frac{1}{2}(\partial_j u_i^\ell + \partial_i u_j^\ell).$$

En outre, le champ électrique est défini par la relation suivante

$$E(\varphi^\ell) = -\nabla \varphi^\ell = -(\varphi_{,i}^\ell).$$

Les fonctions inconnues du problème sont le champ des déplacements $u^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ des contraintes $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$. Notons la densité de la masse par $\rho^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques par $f_0^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de cauchy

$$\text{Div} \sigma^\ell + f_0^\ell = \rho^\ell \ddot{u}^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.4)$$

où "Div" représente l'opérateur divergence pour les tenseurs $\text{Div} \sigma^\ell = (\sigma_{ij,j}^\ell)$. Les processus d'évolution sont modélés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier : par exemple dans le cas où $\dot{u}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statique), ou bien dans le cas où le champ des vitesse \dot{u}^ℓ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme

$\rho^\ell \ddot{u}^\ell$ peut être négligé (processus quasi statique). Dans ces deux cas l'équation du mouvement (1.4) devient

$$\text{Div} \sigma^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.5)$$

puisque le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ , le champ des déplacements s'annule

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (1.6)$$

la condition aux limites en tractions est

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T). \quad (1.7)$$

Nous allons compléter ultérieurement le modèle mathématique (1.4)-(1.7) par les conditions de contact sur la partie Γ_3 de la frontière.

A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et le champ des déplacements électriques $D^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ des déplacements électriques

$$\text{div} D^\ell = q_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.8)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\text{div} D^\ell = D_{i,i}^\ell$, et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^ℓ . Rappelons que dans les cadres physiques, le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.9)$$

tandis que sur Γ_b^ℓ , une charge électrique de densité q_2^ℓ est prescrite,

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.10)$$

Ce modèle piézoélectrique (1.4)-(1.10) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact Γ_3 .

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui même, c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

1.2 Lois de comportements matériaux piézoélectrique.

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement électro-mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ^ℓ , le tenseur des déformations infinitésimales $\varepsilon(u^\ell)$. Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique $D^\ell = (D_i^\ell)$ ainsi que le champ électrique $E^\ell(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$. Nous présentons par la suite les lois de comportement de matériaux : matériaux électro-élastiques.

Nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique D^ℓ le champ électrique $E^\ell(\varphi^\ell)$, le tenseur piézoélectrique \mathcal{E}^ℓ l'opérateur de élasticité \mathcal{A}^ℓ et la fonction de relaxation \mathcal{Q}^ℓ etc..., ceci est naturellement il lui faut ajouté d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de solide.

Loi de comportement des matériaux électro-élastiques.

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ^ℓ et le vecteur des déplacements électriques D^ℓ sont reliés par la loi de comportement

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell)) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell), \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell E^\ell(\varphi^\ell), \end{cases} \quad (1.11)$$

où $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ est l'opérateur de thermo-élasticité non linéaire à champ électrique nul, $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul ; $\mathcal{G}^\ell = (b_{ij}^\ell)$ est l'opérateur de la permittivité électrique à déformation nulle qui constitue un opérateur symétrique défini positif et $E^\ell(\varphi^\ell) = -\nabla\varphi^\ell$, où $\nabla\varphi^\ell = (\varphi_{,i}^\ell)$ représente le champ électrique. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^{\ell,*})$ où $(e_{ijk}^{\ell,*})^* = e_{kij}^\ell$ dénote le transposé du tenseur \mathcal{E}^ℓ , tel que

$$\mathcal{E}^\ell \sigma.v = \sigma.(\mathcal{E}^\ell)^* v \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}^d, \quad v \in \mathbb{R}^d. \quad (1.12)$$

Pour plus de détails sur les lois de comportement (1.11), nous renvoyons le lecteur à voir par exemple [5, 6].

Loi de comportement électro-élastiques avec mémoire longue.

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell)) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell(s))) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E(\varphi^\ell), \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell)), \end{cases} \quad (1.13)$$

où $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_{ij})$ est un tenseur de relaxation. Si $\mathcal{Q} = 0$, on retrouve la loi électro-élastiques donnée par (1.11).

Loi de comportement thermo-électro-élastiques avec mémoire longue.

La loi de comportement d'un matériau thermo-électro-élastique avec mémoire longue est donnée par

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \theta^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell(s)), \theta^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell), \quad (1.14)$$

où \mathcal{Q}^ℓ représente une fonction de relaxation non linéaire qui décrit le comportement électro-élastique du matériau, nous considérons également que \mathcal{Q}^ℓ dépend de variable interne la température absolue θ^ℓ .

La température θ^ℓ est défini par une équation parabolique, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\theta}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \theta^\ell = \Theta^\ell(\sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell), \theta^\ell) + \rho^\ell, \quad (1.15)$$

où Θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici et ci-dessous κ_0^ℓ est une constante strictement positive et ρ^ℓ une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

Nous utilisons la loi de comportement des matériaux thermo-électro-élastiques avec mémoire longue dans le problème qu'on va étudier dans le troisième chapitre de ce mémoire.

Finalement, afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution de deux corps, il faut préciser les conditions aux limites sur Γ^ℓ , c'est l'objet des conditions de contact et des lois de frottement que nous décrirons dans le paragraphe suivant.

1.3 Conditions aux limites.

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ^ℓ .

1.3.1 Condition aux limites de déplacement.

Les corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^\ell \times [0, T]$, le champ des déplacements u^ℓ est par conséquent nul

$$u^\ell = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T]. \quad (1.16)$$

1.3.2 Condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2^ℓ agit sur $\Gamma_2^\ell \times [0, T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma^\ell \nu^\ell$ satisfait

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell, \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T]. \quad (1.17)$$

1.3.3 Conditions aux limites électriques.

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations

$$\varphi^\ell = 0, \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.18)$$

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell, \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.19)$$

1.3.4 Conditions continue aux limites de contact.

On définit le déplacement normal par relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 par

$$[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2, \quad (1.20)$$

et le déplacement tangentiel par relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 par

$$[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2. \quad (1.21)$$

La continuité des contraintes sur l'interface Γ_3 se traduit par

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.22)$$

1.3.5 Loi de contact avec frottement

Par une condition de contact nous comprenons une relation impliquant les composantes normales du champ des déplacements, des vitesses ou des contraintes. Par une loi de frottement nous comprenons une relation entre la contrainte tangentielle σ_τ^ℓ et le déplacement tangentiel u_τ^ℓ . Notons ici que σ_τ^ℓ s'appelle aussi force de frottement. Les égalités et les inégalités qui suivent sont considérées vraies presque partout sur $\Gamma_3 \times [0, T]$.

Contact avec compliance normale.

Dans ce cas, les deux corps sont supposés déformables et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν^ℓ satisfait la condition dite de compliance normale

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g), \end{cases} \quad (1.23)$$

où $[u_\nu]$ est le déplacement normale par relatif d'un corps par rapport à l'autre, g représente l'interstice entre les deux corps et p_ν est une fonction positive donnée appelée fonction de compliance normale.

Cette condition indique qu'un corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu] - g$. Précisons que dans le troisième chapitre de ce mémoire nous considérons le cas où un corps repose sur l'autre corps, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g = 0$. Pour la fonction de compliance normale p_ν on prend comme exemple la fonction suivante

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (1.24)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases} \quad (1.25)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.23) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Maintenant, nous présentons la loi de frottement intervenant dans ce mémoire.

1.3.6 Loi de frottement de type Coulomb.

C'est une loi de frottement le plus répandue dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \|\sigma_\tau\| < \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow [u_\tau] = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda[u_\tau], \end{cases} \quad (1.26)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement.

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement σ_ν de la loi (1.26), par la condition de compliance normale (1.23), de façon à obtenir les conditions suivantes.

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq \mu p_\nu([u_\nu] - g), \\ \|\sigma_\tau\| < \mu p_\nu([u_\nu] - g) \Rightarrow [u_\tau] = 0, \\ \|\sigma_\tau\| = \mu p_\nu([u_\nu] - g) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \sigma_\tau = -\lambda[u_\tau]. \end{cases} \quad (1.27)$$

Dans (1.27) lorsque l'interstice est nul, i.e. $g = 0$, ce choix ne représente guère une restriction du point de vue mécanique, mais il est imposé pour raison de simplification des calculs.

Une version quasi statique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq p_\tau([u_\nu] - g), \\ [u_\tau] \neq 0 \Rightarrow \sigma_\tau = -p_\tau([u_\nu] - g) \frac{[u_\tau]}{\|[u_\tau]\|}, \end{cases} \quad (1.28)$$

où p_τ est une fonction positive. Dans (1.28), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau([u_\nu] - g)$.

De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement.

1.3.7 Lois de contact avec frottement et adhésion.

On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, on introduit une variable interne d'état définie sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, qui représente l'intensité

d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complétée et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus de détails sur ce section, on renvoie par exemple à [12]. On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.29)$$

où σ_ν est la contrainte normale, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s \leq -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \quad (1.30)$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens. La condition (1.29) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion à la tension de surface. Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.29) a été déjà utilisée dans [10, 20].

Quand le champ d'adhésion β est nul, (1.29) devient

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.31)$$

qui représente la condition de compliance normale.

Ensuite, nous supposons que la composante tangentielle satisfait la condition suivante

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [u_\tau] = 0, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \\ \text{telle que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) = -\lambda [u_\tau], \end{cases} \quad \text{on } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.32)$$

où γ_τ est un coefficient positif et μ est le coefficient de frottement, supposé être positif.

$R_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ est l'opérateur de troncature défini par

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si } \|v\| \leq L, \\ L \frac{v}{\|v\|} & \text{si } \|v\| > L. \end{cases} \quad (1.33)$$

Notons que les conditions de frottement similaires à ceux dans (1.32) ont été considérées dans [18] dans le cas particulier $R_\tau([u_\tau]) = [u_\tau]$ et $R_\nu([u_\nu]) = -[u_\nu]$, pour L très grand.

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_\nu([u_\nu]), R_\tau([u_\tau]), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.34)$$

$$\beta(0) = \beta_0, \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (1.35)$$

où H_{ad} est une fonction générale qui s'annule quand le premier de ses variable s'annule et ξ_β est un coefficient d'adhérence positif, et $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$ est le déplacement tangentiel relatif de corps Ω^1 par rapport l'autre corps Ω^2 sur la zone de contact, et β_0 l'adhésion initiale, tel que

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (1.36)$$

On considère la possibilité d'une diminution de l'efficacité de collage quand les cycles de collage et de décollage continuent. Par conséquent, le processus est supposé dépendre de l'histoire d'adhésion qu'on note par

$$\xi_\beta(x, t) = \int_0^t \beta(x, s) ds \quad \text{dans } \Gamma_3 \times [0, T]. \quad (1.37)$$

On donne quelques exemples de ce genre de fonction

$$H_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_1, R_2) = -\beta_+ \gamma_\nu R_1^2,$$

où γ_ν est le coefficient de taux normal et $\gamma_\nu L$ est la traction normale maximale que l'adhésif peut fournir et $\beta_+ = \max(0, \beta)$.

Une équation de taux différente pour l'évolution du champ d'adhésion est

$$H_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_1, R_2) = -(\beta(\gamma_\nu R_1^2 + \gamma_\tau |R_2|^2) - \epsilon_a)_+, \quad (1.38)$$

Ici γ_τ est le coefficient de vitesse tangentielle, qui peut également être interprété comme coefficient de rigidité tangentielle de l'interface lorsque l'adhérence est complète ($\beta = 1$).

Un autre exemple, dans lequel H_{ad} dépend de toutes les variables est

$$H_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_1, R_2) = -\gamma_\nu \beta_+ R_1^2 - \gamma_\tau \beta_+ |R_2|^2 + \gamma_r \frac{\beta_+(1-\beta)_+}{1 + \xi_\beta^2},$$

où γ_r est le coefficient du taux de rebond. pourtant, le collage ne peut excéder $\beta = 1$ et de plus, le rebondage s'affaiblit au fur et à mesure que le processus se poursuit, qui est représenté par la fonction $1 + \xi_\beta^2$ dans le dénominateur.

Outils Mathématiques

Ce chapitre est consacré à la description des espaces utilisés dans ce mémoire. Nous supposons que Ω^ℓ est un domaine bornée et de lipschitz de \mathbb{R}^d , ($d = 2, 3$), c'est à dire que sa frontière Γ^ℓ est présentable comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de \mathbb{R}^{d-1} avec une partitions de trois parties mesurables disjointes $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ d'un côté et une partition de $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$, en deux parties ouvertes Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ d'un autre côté, telles que $mes\Gamma_1^\ell > 0$ et $mes\Gamma_a^\ell > 0$.

2.1 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|u\|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.2)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (2.1). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{|\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}|}{\|v\|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente le produit de dualité entre H' et H .

Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 2.1.1 (Espace de Lebesgue). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \text{ Lebesgue intgrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mesurable, alors on définit $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{supess}(v) = \inf\{c : |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Théorème 2.1.1 Pour tout $p \in [1, +\infty[$, les espaces $L^p(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes

- 1) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
- 2) Pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$ et toute $v \in L^q(\Omega)$, l'inégalité de Hölder est vérifiée

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}, \text{ avec } \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

- 3) Les espaces $L^2(\Omega)$ sont des espaces séparables pour $[1, +\infty[$.

- 4) L'espace $L^2(\Omega)$ muni de produit scalaire

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

est un espace de Hilbert. De plus l'inégalité de Cauchy-Schwartz correspondant à l'inégalité de Hölder est vérifiée

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inégalité de Hölder des sommations.

On peut aussi vérifier aisément que pour tout $1 \leq p \leq \infty$ et $1 \leq q \leq \infty$, il résulte

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k v_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ avec } \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

2.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega), \quad i = 1, \dots, d\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée $\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{1/2}$, qu'on peut écrire

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants

Théorème 2.2.1 (de densité)

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 2.2.2 (Rellich)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 2.2.3 (trace de Sobolev)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.2.1 L'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace des fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle da . L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \mapsto u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.2.2 On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

Définition 2.2.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u\}.$$

Remarque 2.2.3 Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 2.2.4 Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\|\cdot\|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.

Pour plus des détails sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur aux [1, 8].

2.3 Espaces fonctionnels

Dans ce qui suit les indices i et j sont compris entre 1 et d , la convention de sommation sur des indices répétés est adoptée et l'indice qui suit une virgule indique une dérivé partielle par rapport à la composante correspondante de la variable indépendante.

Pour le champ de déplacements u^ℓ et le champ des contraintes σ^ℓ nous utilisons les espaces de Hilbert suivants

$$\begin{cases} H^\ell = \{u^\ell = (u_i^\ell) \mid u_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = L^2(\Omega^\ell)^d, \\ \mathcal{H}^\ell = \{\sigma^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) \mid \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = L^2(\Omega^\ell)_s^{d \times d}, \\ H_1^\ell = \{u^\ell = (u_i^\ell) \mid u_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell)\} = H^1(\Omega^\ell)^d, \\ \mathcal{H}_1^\ell = \{\sigma^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) \in \mathcal{H}^\ell \mid \text{Div} \sigma^\ell = (\sigma_{ij,j}^\ell) \in H^\ell\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les espaces H^ℓ , \mathcal{H}^ℓ , H_1^ℓ et \mathcal{H}_1^ℓ sont des espaces réels de Hilbert munis respectivement des produits scalaires suivants

$$\begin{cases} (u^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u_i^\ell v_i^\ell dx, \\ (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \tau_{ij}^\ell dx, \\ (u^\ell, v^\ell)_{H_1^\ell} = (u^\ell, v^\ell)_{H^\ell} + (\varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \\ (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} = (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \sigma^\ell, \text{Div} \tau^\ell)_{H^\ell}, \end{cases} \quad (2.4)$$

où $\varepsilon : H_1^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1^\ell \rightarrow H^\ell$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u^\ell) = (\varepsilon_{ij}(u^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}(u^\ell) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\ell + u_{j,i}^\ell).$$

Les normes associées à ces produit scalaires seront

$$\begin{cases} \|u^\ell\|_{H^\ell} = \left(\int_{\Omega^\ell} |u_i^\ell|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\sigma^\ell\|_{\mathcal{H}^\ell} = \left(\int_{\Omega^\ell} \|\sigma_{ij}^\ell\|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|u^\ell\|_{H_1^\ell} = \left(\|u^\ell\|_{H^\ell}^2 + \|\varepsilon(u^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|\sigma^\ell\|_{\mathcal{H}_1^\ell} = \left(\|\sigma^\ell\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 + \|\text{Div} \sigma^\ell\|_{H^\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (2.5)$$

Puisque la frontière Γ^ℓ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν^ℓ à la frontière est défini p.p. pour tout champ de vecteurs $v^\ell \in H_1^\ell$, nous utilisons la notation v^ℓ pour désigner la trace γv^ℓ de v^ℓ sur Γ^ℓ .

Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1^\ell \rightarrow L^2(\Gamma^\ell)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1^ℓ par cette application est notée par H_{Γ^ℓ} ; ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma^\ell)^d$. Désignons par H'_{Γ^ℓ} le dual de H_{Γ^ℓ} , et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}}$ le produit de dualité entre H'_{Γ^ℓ} et H_{Γ^ℓ} .

Pour tout $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, il existe un élément $\sigma^\ell \nu^\ell \in H'_{\Gamma^\ell}$ tel que

$$\langle \sigma^\ell \nu^\ell, \gamma v^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} = (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall v^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.6)$$

En outre, si σ^ℓ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$\langle \sigma^\ell \nu^\ell, \gamma v^\ell \rangle_{H'_{\Gamma^\ell} \times H_{\Gamma^\ell}} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.7)$$

Donc, pour σ^ℓ assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div}\sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in H_1^\ell, \quad (2.8)$$

où da est un élément de mesure de surface.

Aussi, rappelons que lorsque $D^\ell \in H^\ell$ est une fonction régulière, la formule de Green (2.8) est satisfaite

$$(D^\ell, \nabla\psi^\ell)_{H^\ell} + (\text{div}D^\ell, \psi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \int_{\Gamma^\ell} D^\ell \cdot \nu^\ell \psi^\ell da, \quad \forall \psi^\ell \in H^1(\Omega^\ell). \quad (2.9)$$

Autre formule de Green

$$\int_{\Omega^\ell} (\Delta u^\ell) v^\ell dx = - \int_{\Omega^\ell} \nabla u^\ell \cdot \nabla v^\ell dx + \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial u^\ell}{\partial \nu^\ell} v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in H^1(\Omega^\ell). \quad (2.10)$$

Nous définissons le sous-espace fermé de H_1^ℓ

$$V^\ell = \{v^\ell \in H_1^\ell \mid v^\ell = 0, \text{ sur } \Gamma_1^\ell\}. \quad (2.11)$$

Inégalité de Korn

Comme $\text{mes}\Gamma_1^\ell > 0$, alors il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_1^ℓ telle que

$$\|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \|v^\ell\|_{H_1^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (2.12)$$

Nous considérons sur l'espace V^ℓ , le produit scalaire donné par

$$(u^\ell, v^\ell)_{V^\ell} = (\varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall u^\ell, v^\ell \in V^\ell, \quad (2.13)$$

et soit $\|\cdot\|_{V^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\|v^\ell\|_{V^\ell} = \|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (2.14)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{V^\ell}$ sont des normes équivalentes sur V^ℓ et ainsi $(V^\ell, \|\cdot\|_{V^\ell})$ est un espace de Hilbert.

En effet, on a d'après (2.5)

$$\|v^\ell\|_{H_1^\ell}^2 = \|v^\ell\|_{H^\ell}^2 + \|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2,$$

donc

$$\|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \leq \|v^\ell\|_{H_1^\ell}^2, \quad (2.15)$$

ce qui donne d'après (2.12) et (2.15) que

$$c_k \|v^\ell\|_{H_1^\ell} \leq \|v^\ell\|_{V^\ell} \leq \|v^\ell\|_{H_1^\ell}.$$

Alors les normes $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{V^\ell}$ sont équivalentes .

De plus, en utilisant le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que :

$$\|v^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v^\ell\|_{V^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (2.16)$$

Pour une fonction scalaire ς , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$Z = \{\varsigma \in L^2(\Gamma_3); 0 \leq \varsigma \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3\}. \quad (2.17)$$

On introduit également les espaces suivants

$$W^\ell = \{\psi^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \mid \psi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\},$$

$$\mathcal{W}^\ell = \{D^\ell = (D_i^\ell) \in H^\ell, \text{ div} D^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\},$$

où $\text{div} D^\ell = D_{i,i}^\ell$. Ces espaces W^ℓ et \mathcal{W}^ℓ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi^\ell, \psi^\ell)_{W^\ell} = (\nabla \varphi^\ell, \nabla \psi^\ell)_{H^\ell}, \quad (D^\ell, \Phi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = (D^\ell, \Phi^\ell)_{H^\ell} + (\text{div} D^\ell, \text{div} \Phi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad (2.18)$$

soient $\|\cdot\|_{W^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^\ell}$ les normes associées, c'est-à-dire

$$\|\psi^\ell\|_{W^\ell} = \|\nabla \psi^\ell\|_{H^\ell}, \quad \|D^\ell\|_{\mathcal{W}^\ell}^2 = \|D^\ell\|_{H^\ell}^2 + \|\text{div} D^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2. \quad (2.19)$$

Puisque $mes \Gamma_a^\ell > 0$, l'inégalité de Friedrich-Poincaré est vérifiée, ainsi il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\|\nabla \psi^\ell\|_{W^\ell} \geq c \|\psi^\ell\|_{H^1(\Omega^\ell)}, \quad \forall \psi^\ell \in W^\ell. \quad (2.20)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré trouvé par exemple dans [8, 15].

Il s'ensuit de (2.20) que $\|\cdot\|_{H^1(\Omega^\ell)}$ et $\|\cdot\|_{W^\ell}$ sont des normes équivalentes sur W^ℓ et donc $(W^\ell, \|\cdot\|_{W^\ell})$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante \tilde{c}_0^ℓ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_a^ℓ et Γ_3 , telle que

$$\|\psi^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0^\ell \|\psi^\ell\|_{W^\ell}, \quad \forall \psi^\ell \in W^\ell. \quad (2.21)$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits

$$\begin{aligned} V &= V^1 \times V^2, \quad H = H^1 \times H^2, \quad H_1 = H_1^1 \times H_1^2, \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, \quad E_0 = L^2(\Omega^1) \times L^2(\Omega^2), \\ E_1 &= H^1(\Omega^1) \times H^1(\Omega^2), \quad W = W^1 \times W^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2, \end{aligned}$$

les espaces $V, H, H_1, \mathcal{H}, \mathcal{H}_1, E_0, E_1, W$ et \mathcal{W} sont des espaces de Hilbert réels dotés respectivement des produits scalaires canoniques notée $(\cdot, \cdot)_V, (\cdot, \cdot)_H, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}_1}, (\cdot, \cdot)_{E_0}, (\cdot, \cdot)_{E_1}, (\cdot, \cdot)_W$ et $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}}$. Les normes associés seront désignés par $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}, \|\cdot\|_{E_0}, \|\cdot\|_{E_1}, \|\cdot\|_W$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$ respectivement.

2.4 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel X . Soit $0 < T < \infty$, nous notons par $C([0, T]; X)$ l'espace de fonction continue sur $[0, T]$, avec la norme

$$\|f\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X.$$

Nous notons par $C_c([0, T]; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact de $[0, T]$ à valeurs dans X .

Définition 2.4.1 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c([0, T]; X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

Théorème 2.4.1 (Bochner) Une fonction $u : [0, T] \rightarrow X$ mesurable est intégrable si et seulement si $t \mapsto \|u(t)\|_X : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas

$$\left\| \int_0^T u(t) dt \right\|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt.$$

Soit $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(0, T; X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ mesurables, telles que l'application $t \mapsto \|u(t)\|_X$ appartient à $L^p(0, T)$. On sait que $L^p(0, T; X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \text{ si } 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \inf \{ c > 0 / \|u(t)\|_X < c \text{ p.p. } t \in (0, T) \} \text{ si } p = \infty. \end{cases}$$

Théorème 2.4.2 Dans le cas où l'espace $(H, (\cdot, \cdot)_H)$ est un espace de Hilbert et si la fonction u appartient à l'espace $H^1(0, T; V)$, alors

1. la fonction $t \mapsto \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2$ est une fonction absolument continue sur l'intervalle $]0, T[$,
2. $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_H^2 = (\dot{u}(t), u(t))_H$ p.p. $t \in]0, T[$,
3. $\frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2 = \frac{1}{2} \|u(0)\|_H^2 + \int_0^t (\dot{u}(s), u(s))_H ds, \quad \forall t \in]0, T[.$

2.5 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Opérateur non linéaire

Nous donnons quelques définitions et propriétés sur les opérateurs non linéaires et les formes bilinéaires dans un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Définition 2.5.1 Soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire, l'opérateur A est dit

1. monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X, \quad (2.22)$$

2. fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2, \quad \forall u, v \in X, \quad (2.23)$$

3. de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X, \quad (2.24)$$

4. hemicontinu si pour toute suite numérique $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \rightarrow \lambda$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ on a

$$(A(u + \lambda_n v), w)_X \rightarrow (A(u + \lambda v), w)_X, \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant

Proposition 2.5.1 Tout opérateur de Lipschitz est hemicontinu.

Définition 2.5.2 Soit une fonction $\varphi : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$.

1. La fonction φ est dite propre si $\varphi \neq +\infty$, c'est-à-dire s'il existe $u \in X$ tel que $\varphi(u) < +\infty$.

2. La fonction φ est dite convexe si

$$\varphi(tu + (1-t)v) \leq t\varphi(u) + (1-t)\varphi(v), \quad \forall u, v \in X, \quad \forall t \in [0, 1].$$

3. La fonction φ est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en u_0 si

$$\liminf_{u \rightarrow u_0} \varphi(u) \geq \varphi(u_0).$$

4. La fonction φ est dite s.c.i. sur X si elle est s.c.i. pour tout point de X .

Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution

La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques ou d'évolution, dans la fonctionnelles non différentiable dépend de la solution elles sont appelées "inégalités quasi-variationnelles". Pour cela, nous nous considérons un espaces de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$, soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Compte tenu de ces données, nous considérons l'inégalité quasi-variationnelle suivante

$$(Au, u - v)_X + j(u, v) + j(u, u) \geq (f, u - v)_X \quad \forall v \in X. \quad (2.25)$$

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que A est de Lipschitz et fortement monotone, c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_A > 0 \text{ tel que,} \\ \|Au_1 - Au_2\|_X \leq L_A \|u_1 - u_2\|_X \quad \forall u_1, u_2 \in X, \\ (b) \text{ il existe } m_A > 0 \text{ tel que,} \\ (Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_X \geq m_A \|u_1 - u_2\|_X^2 \quad \forall u_1, u_2 \in X, \end{array} \right. \quad (2.26)$$

et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) j(u, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X \text{ pour tous } u \in X \\ (b) \text{ il existe } m_j > 0 \text{ tel que} \\ j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \\ \leq m_j \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in X \end{array} \right. \quad (2.27)$$

Enfin, nous supposons que

$$f \in C(0, T; X). \quad (2.28)$$

L'existence et l'unicité d'une solution du problème (2.25) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 2.5.1 *Supposons que les hypothèses (2.25)-(2.28) sont satisfaites, et $m_j < m_A$.*

(i) *Alors il existe une solution unique $u \in X$ du problème (2.25).*

(ii) *Si u_1 et u_2 sont deux solutions de (2.25) correspondant aux données $f_1, f_2 \in X$, alors il existe $c > 0$ tel que*

$$\|u_1 - u_2\|_X \leq c \|f_1 - f_2\|_X. \quad (2.29)$$

La démonstration du théorème se trouve par exemple dans [28]. Nous utiliserons ce théorème dans le troisième chapitre de ce mémoire.

Théorème 2.5.2 (Théorème de point fixe de Banach) *Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est-à-dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que*

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq c \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e. possède un point fixe unique dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 2.5.3 *Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .*

Les démonstrations du théorème 2.5.2 et du théorème 2.5.3 peuvent être trouver dans [23].

Définition 2.5.3 *Une forme bilinéaire $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que*

$$|b(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 2.5.4 Une forme bilinéaire $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$b(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 2.5.4 (Théorème du Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive.

Soit $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in H$ qui satisfait

$$b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H. \quad (2.30)$$

Théorème 2.5.5 (Cauchy-Lipschitz) Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ (b) \text{ il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(\cdot, x) \in L^p([0, T]; X), \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}([0, T]; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

On peut trouver les détails de ce théorème, par exemple, dans [4].

2.6 Triplet de Gelfand

Dans cette section nous rappelons la définition d'un Triplet de Gelfand. Pour cela on va commencer par un rappel sur le théorème de représentation de Riesz-Fréchet :

Théorème 2.6.1 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H.$$

pour une démonstration voir ([8], pages 81-82). L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

Soit maintenant H un espace de Hilbert réel tel que V dense dans H et l'injection $V \subset H$ est continue. On identifie H et H' . Soit V' le dual de V , on peut alors prolonger H dans V' grâce au procédé suivant : étant donné $f \in H$, l'application $v \in V \mapsto (f, v)_H$ est une forme linéaire continue sur H et a fortiori sur V , on la note $Tf \in V'$ de sorte que

$$\langle Tf, v \rangle_{V' \times V} = (f, v)_H, \quad \forall f \in H, \quad \forall v \in V.$$

On vérifie que $T : H \rightarrow V'$ possède les propriétés suivantes

- (1) $\|Tf\|_{V'} \leq C\|f\|_H$,
- (2) T est injective,
- (3) $T(H)$ est dense dans V' .

En général T n'est pas surjective de H sur V' . A l'aide de T on prolonge H dans V' et on a le schéma

$$V \subset H = H' \subset V', \quad (2.31)$$

où les injections canoniques sont continues et denses. Ce triplet est appelé Triplet de Gelfand, on dit que H est l'espace pivot.

Théorème 2.6.2 *Soit $V \subset H \subset V'$ satisfaisant les hypothèses décrites ci-dessus et soit $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur hémicontinu et monotone qui satisfait*

$$\text{il existe } \lambda > 0 \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}, \quad \langle Av, v \rangle_{V' \times V} \geq \lambda \|v\|_V^2 + \alpha, \quad \forall v \in V, \quad (2.32)$$

$$\exists c > 0, \quad \|Av\|_{V'} \leq c(\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in V. \quad (2.33)$$

Alors, pour tout $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$ il existe une fonction unique u qui satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad p.p. t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

On peut retrouver la démonstration de ce théorème aussi dans [29].

2.7 Lemmes de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 2.7.1 Soient $m, \eta \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $\eta \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$ une constante, et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

1. Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t \eta(s)\psi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp\left(\int_0^t \eta(s)ds\right), \quad \forall t \in [0, T].$$

2. Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \cdot \int_0^t \psi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \cdot \int_0^t m(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

pour le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 2.7.1 Soient $\eta \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tel que $\eta(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$ une constante. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t \eta(s)\psi(s)ds, \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \cdot \exp\left(\int_0^t \eta(s)ds\right), \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire (2.7.1) est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution, de la façon suivante. On suppose deux solutions, en notant par ψ la norme de la différence entre ces solutions, on essaie ensuite de majorer ψ sous la forme

$$\psi(t) \leq \int_0^t \eta(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

avec une certaine fonction $\eta \geq 0$. L'application du corollaire (2.7.1) donne immédiatement la nullité de ψ .

Lemme 2.7.2 Soient $m, \eta \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tels que $m(t) \geq 0$, $\eta(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, T]$ et $a \geq 0$. Soit également $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\psi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\psi(t)dt + \int_0^s \eta(t)\psi^2(t)dt, \quad \forall s \in [0, T],$$

alors

$$|\psi(s)| \leq (a + \int_0^s m(t)dt)e^{\int_0^s \eta(t)dt}, \quad s \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $\eta = 0$, le lemme devient.

Lemme 2.7.3 Soient $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tels que $m(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$ et $a \geq 0$, soit également $\psi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\frac{1}{2}\psi^2(s) \leq \frac{1}{2}a^2 + \int_0^s m(t)\psi(t)dt, \quad \forall s \in [0, T],$$

alors

$$\psi(s) \leq a + \int_0^s m(t)dt, \quad s \in [0, T].$$

Lemme 2.7.4 Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues que satisfont

$$f(t) \leq g(t) + c \int_a^b f(s)ds, \quad \forall t \in [a, b],$$

pour une constant $c > 0$, alors

$$f(t) \leq g(t) + c \int_a^b g(s)e^{c(t-a)}ds, \quad \forall t \in [a, b].$$

D'ailleurs, si g n'est pas décroissante alors $f(t) \leq g(t)e^{c(t-a)}$.

Problème de contact entre deux corps thermo-électro-élastiques avec frottement, adhésion et compliance normale

Dans ce chapitre nous étudions un problème de contact de frottement entre deux corps thermo-électro-élastiques avec adhésion et compliance normale. Le plan de ce chapitre est le suivant, dans la première section, nous commençons à proposer et décrire notre problème puis nous introduisons des hypothèses très utiles pour la dernière section, ensuite dans la deuxième, en utilisant la formule de Green, on propose une formulation variationnelle du problème. Enfin, dans la troisième, nous énonçons un théorème de l'existence d'une solution faible unique du problème, et nous le prouvons.

3.1 Formulation du problème

Nous nous plaçons dans le cadre physique de la Fig.1 (voir chapitre 1). Considérons deux corps thermo-électro-élastiques à mémoire longue terme, occupent deux domaines bornés Ω^1, Ω^2 de l'espace $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$. Nous avons mis ℓ pour indiquer que la quantité est liée au domaine Ω^ℓ , dans se qui suit l'indice ℓ est compris entre 1 et 2. Pour chaque domaine Ω^ℓ , ($\ell = 1, 2$), avec une surface frontière régulière Γ^ℓ , partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ , correspondant aux conditions limites mécanique, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ correspondant aux conditions limites électrique. Nous noterons par Γ_3^ℓ l'interface de contact du corps Ω^ℓ , ($\ell = 1, 2$); on a $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$, noté par Γ_3 . Alors le modèle

classique pour ce processus est le suivant.

Problème \mathcal{P} . Pour $\ell = 1, 2$, découvrir les champs des déplacements $u^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, les champs des températures $\theta^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, le champ des potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, et les champs des déplacements électriques $D^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ tels que :

$$\sigma^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \theta^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell(s)), \theta^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell)) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.2)$$

$$\dot{\theta}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \theta^\ell = \Theta^\ell(\sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell), \theta^\ell) + \rho^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.3)$$

$$\text{Div} \sigma^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.4)$$

$$\text{div} D^\ell - q_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.5)$$

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (3.6)$$

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T), \quad (3.7)$$

$$\dot{\beta} = H_{ad}(\beta, \xi_\beta, R_\nu([u_\nu]), R_\tau([u_\tau])), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.8)$$

$$\sigma_\nu^\ell = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \text{où } \sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [u_\tau] = 0, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) = -\lambda [u_\tau] \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.10)$$

$$\kappa_0^\ell \frac{\partial^\ell \theta^\ell}{\partial \nu^\ell} + \lambda_0^\ell \theta^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T), \quad (3.11)$$

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0, T), \quad (3.12)$$

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0, T), \quad (3.13)$$

$$u^\ell(0) = u_0^\ell, \quad \theta^\ell(0) = \theta_0^\ell, \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (3.14)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (3.15)$$

Les équations (3.1) - (3.2) représentent la loi de comportement thermo-électro-élastique avec une mémoire à long terme. L'équation (3.3) représente la conservation de l'énergie où Θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur générée par le travail des forces internes et ρ^ℓ est une source de chaleur volumique donnée. Les équations (3.4) et (3.5) sont les équations d'équilibre pour les champs de contrainte et de déplacement électrique, respectivement. Ensuite, les équations (3.6) et (3.7) représentent respectivement la condition aux limites de déplacement et de traction. La condition (3.8) représente les conditions normales de conformité à l'adhésion où $[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2$ représente les déplacements dans la direction normale, aussi $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$, correspond au saut des déplacements dans la direction tangentielle, voir (1.30) et (1.33). La condition (3.9) décrit le contact avec compliance normale et adhésion sur Γ_3 , où γ_ν est un coefficient d'adhérence donné, p_ν est une fonction positive donnée, et elle était déjà utilisée dans [21, 22]. La condition (3.10) est une condition de loi de frottement de Coulomb non locale couplée avec compliance normale et adhésion. La relation (3.11) représente une condition aux limite de Fourier pour la température sur Γ^ℓ . Les equations (3.12) et (3.13) représentent les conditions aux limites électrique. Enfin les fonctions u_0 , θ_0 , et β_0 dans (3.14) et (3.15) sont les initiales donnée.

3.2 Formulation Variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème \mathcal{P} , nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

L'opérateur de thermo-élasticité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que, } \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, r_1, r_2 \in \mathbb{R} \\ \quad \|\mathcal{A}^\ell(x, \xi_1, r_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \xi_2, r_2)\| \leq L_{\mathcal{A}^\ell} (\|\xi_1 - \xi_2\| + \\ \quad |r_1 - r_2|), \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que, } \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d \\ (\mathcal{A}^\ell(x, \xi_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \xi_2))(\xi_1 - \xi_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell} \|\xi_1 - \xi_2\|^2, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{A}^\ell(x, \xi, r), \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \forall \xi \in \mathbb{S}^d, r \in \mathbb{R}. \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{A}^\ell(x, 0, 0) \in \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (3.16)$$

La fonction de relaxation $\mathcal{Q}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\mathcal{Q}^\ell} > 0 \text{ telle que, } \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad \|\mathcal{Q}^\ell(x, t, \xi_1, r_1) - \mathcal{Q}^\ell(x, t, \xi_2, r_2)\| \leq L_{\mathcal{Q}^\ell} (\|\xi_1 - \xi_2\| + \\ \quad |r_1 - r_2|) \quad \forall t \in (0, T) \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, \xi, r) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } t \in (0, T), \xi \in \mathbb{S}^d, r \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ l'application } t \longmapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, \xi, r) \text{ est continue dans } (0, T) \\ \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{S}^d, r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, 0, 0) \in \mathcal{H}^\ell, \forall t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (3.17)$$

La fonction d'énergie $\Theta^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\Theta^\ell} > 0 \text{ telle que, } \forall \eta_1, \eta_2, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}^d, d_1, d_2 \in \mathbb{R}. \\ \quad |\Theta^\ell(x, \eta_1, \xi_1, d_1) - \Theta^\ell(x, \eta_2, \xi_2, d_2)| \leq L_{\Theta^\ell} (\|\eta_1 - \eta_2\| + \|\xi_1 - \xi_2\| \\ \quad + |d_1 - d_2|), \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto \Theta^\ell(x, \eta, \xi, d) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } \eta, \xi \in \mathbb{S}^d \text{ et } d \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto \Theta^\ell(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega^\ell). \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e_{ijk}^\ell(x)\tau_{jk}), \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \end{cases} \quad (3.19)$$

L'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \mathcal{G}^\ell(x, E) = (b_{ij}^\ell(x)E_j), \quad b_{ij}^\ell = b_{ji}^\ell, \quad b_{ij}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell) \quad , 1 \leq i, j \leq d. \\ (b) \text{ il existe } m_{\mathcal{G}^\ell} > 0 \text{ tel que } \quad \mathcal{G}^\ell E \cdot E \geq m_{\mathcal{G}^\ell} \|E\|^2, \quad \forall E = (E_{ij}) \in \mathbb{R}^d, \\ \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{cases} \quad (3.20)$$

La fonction de taux d'adhésion avait $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\begin{cases} (a) \text{ il existe } L_{H_{ad}} > 0 \text{ telle que, } \forall \beta_1, \beta_2, \xi_1, \xi_2, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, d_1, d_2 \in \mathbb{R}^{d-1}, \\ \quad |H_{ad}(x, \beta_1, \xi_1, r_1, d_1) - H_{ad}(x, \beta_2, \xi_2, r_2, d_2)| \leq \\ \quad L_{H_{ad}}(|\beta_1 - \beta_2| + |\xi_1 - \xi_2| + |r_1 - r_2| + \|d_1 - d_2\|), \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto H_{ad}(x, \beta, \xi, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \\ \quad \text{pour tout } \beta, \xi, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{d-1}. \\ (c) \text{ l'application } (\beta, \xi, r, d) \longmapsto H_{ad}(\beta, \xi, r, d) \text{ est continue sur} \\ \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (d) H_{ad}(x, 0, \xi, r, d) = 0 \text{ pour tout } \xi, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (e) H_{ad}(x, \beta, \xi, r, d) \geq 0, \forall \beta \leq 0, \xi, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3 \text{ et} \\ \quad H_{ad}(x, \beta, \xi, r, d) \leq 0, \forall \beta \geq 1, \xi, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{d-1}, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases} \quad (3.21)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\begin{cases} (a) \text{ il existe } L_\nu > 0 \text{ tels que, } \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3 \\ (b) (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ (d) p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \end{cases} \quad (3.22)$$

Les coefficients de l'adhésion γ_ν et γ_τ satisfont aux conditions

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \gamma_\nu, \gamma_\tau \geq 0 \text{ sur } \Gamma_3. \quad (3.23)$$

Les forces volumiques f_0^ℓ , les tractions surfaciques f_2^ℓ , les charges électriques volumiques q_0^ℓ , les charges électriques surfaciques q_2^ℓ et la source de chaleur volumique ρ^ℓ ont la régularités

$$\begin{aligned} f_0^\ell &\in C(0, T; H^\ell), & f_2^\ell &\in C(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \\ q_0^\ell &\in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)), & q_2^\ell &\in C(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)), \\ \rho^\ell &\in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Le coefficient d'énergie κ_0^ℓ satisfait

$$\kappa_0^\ell > 0. \quad (3.25)$$

Alors que le coefficient de frottement μ satisfait

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(x) \geq 0, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (3.26)$$

Le champ initial d'adhésion β_0 satisfait

$$\beta_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \beta_0 \leq 1, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \quad (3.27)$$

et le champ initial de déplacement u_0^ℓ satisfait

$$u_0^\ell \in V^\ell. \quad (3.28)$$

Finalement, le champ initial température θ_0^ℓ satisfait

$$\theta_0^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \quad (3.29)$$

Le théorème de représentation de Riesz, nous permet de définir les fonctions $f = (f^1, f^2) : [0, T] \longrightarrow V$ et $q = (q^1, q^2) : [0, T] \longrightarrow W$. comme suit

$$(f(t), v)_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot v^\ell da, \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \quad (3.30)$$

$$(q(t), \zeta)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \cdot \zeta^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \cdot \zeta^\ell da, \quad \forall \zeta \in W, t \in [0, T]. \quad (3.31)$$

Les conditions (3.24) impliquent

$$f \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (3.32)$$

Nous introduisons le fonction continue suivante $a_0 : E_1 \times E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, par

$$a_0(\zeta, \xi) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \zeta^\ell \cdot \nabla \xi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \zeta^\ell \xi^\ell da. \quad (3.33)$$

On définit la fonctionnelle d'adhésion comme suite $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\beta, u, v) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu])[v_\nu] + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau])[v_\tau]) da, \quad (3.34)$$

et la fonctionnelle de compliance normale $j_{\nu c} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{\nu c}(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu])[v_\nu] da. \quad (3.35)$$

et la fonctionnelle de frottement $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{fr}(u, v) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) \|[v_\tau]\| da. \quad (3.36)$$

Les conditions (3.22) et (3.26) entraînent que les intégrales dans (3.35) et (3.36) sont bien définies.

En utilisant des formules de Green (2.8) on voit directement que si u, σ et β sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (3.4), (3.6), (3.9) et (3.10) avec (3.34), (3.35) et (3.36) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que

$$(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + (Div \sigma^\ell, v^\ell - u^\ell(t))_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da, \quad \forall v^\ell, u^\ell \in V^\ell,$$

nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell (\varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t))) dx + \int_{\Omega^\ell} Div \sigma^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) dx &= \int_{\Gamma_1^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_2^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da + \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da, \quad \forall v^\ell, u^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

à travers (3.4), (3.6) et (3.7) nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell (\varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t))) dx - \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) dx &= \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da, \quad \forall v^\ell, u^\ell \in V^\ell \end{aligned}$$

la formule de Green pour $\ell = 1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1} \sigma^1 (\varepsilon(v^1) - \varepsilon(u^1(t))) dx - \int_{\Omega^1} f_0^1 \cdot (v^1 - u^1(t)) dx &= \int_{\Gamma_2} f_2^1 \cdot (v^1 - u^1(t)) da. \\ &+ \int_{\Gamma_3^1} \sigma^1 \nu^1 \cdot (v^1 - u^1(t)) da, \quad \forall v^1, u^1 \in V^1, \end{aligned} \quad (3.37)$$

la formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} \sigma^2 (\varepsilon(v^2) - \varepsilon(u^2(t))) dx - \int_{\Omega^2} f_0^2 \cdot (v^2 - u^2(t)) dx = \int_{\Gamma_2^2} f_2^1 \cdot (v^2 - u^2(t)) da$$

$$+ \int_{\Gamma_3} \sigma^2 \nu^2 \cdot (v^2 - u^2(t)) da, \quad \forall v^2, u^2 \in V^2, \quad (3.38)$$

en additionnant (3.37) et (3.38)

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell (\varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t))) dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da, \quad \forall v^\ell, u^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \left(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t)) \right)_{\mathcal{H}^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da + \\ &\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da, \quad \forall v^\ell, u^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \left(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t)) \right)_{\mathcal{H}^\ell} &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da + \\ &\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da, \quad \forall v^\ell, u^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

à travers (3.30) on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t)) \right)_{\mathcal{H}^\ell} = (f(t), v - u(t))_V + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da, \quad (3.39)$$

on calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da &= \int_{\Gamma_3} \sigma^1 \nu^1 \cdot (v^1 - u^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \sigma^2 \nu^2 \cdot (v^2 - u^2(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu^1 (v_\nu^1 - u_\nu^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu^2 (v_\nu^2 - u_\nu^2(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau^1 (v_\tau^1 - u_\tau^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau^2 (v_\tau^2 - u_\tau^2(t)) da, \end{aligned}$$

par (3.9) et (3.10), nous avons

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da = \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu ([v_\nu - u_\nu(t)]) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau ([v_\tau - u_\tau(t)]) da,$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot (v^\ell - u^\ell(t)) da &= \int_{\Gamma_3} \left(-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) \right) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau([v_\tau - u_\tau(t)]) da, \end{aligned} \quad (3.40)$$

nous supposons que $\Gamma_3 = \Gamma_3^+ \cup \Gamma_3^-$, où

$$\Gamma_3^+ = \{x \in \Gamma_3 / \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu])\}$$

et

$$\Gamma_3^- = \{x \in \Gamma_3 / \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu])\},$$

d'où

$$\int_{\Gamma_3} \sigma_\tau([v_\tau - u_\tau(t)]) da = \int_{\Gamma_3^+} \sigma_\tau([v_\tau - u_\tau(t)]) da + \int_{\Gamma_3^-} \sigma_\tau([v_\tau - u_\tau(t)]) da,$$

afin de $[u_\tau]$

Nous employons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\int_{\Gamma_3^+} \left(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \right) ([u_\tau]) da \geq - \int_{\Gamma_3^+} \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau])\| \| [u_\tau] \| da,$$

en utilisant (3.10)

$$\int_{\Gamma_3^+} \left(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \right) ([u_\tau]) da \geq - \int_{\Gamma_3^+} \mu p_\nu([u_\nu]) \| [u_\tau] \| da = 0, \quad (3.41)$$

et

$$\int_{\Gamma_3^-} \left(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \right) ([u_\tau]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda [u_\tau] [u_\tau] da,$$

nous employons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^-} \left(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \right) ([u_\tau]) da &= -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \| [u_\tau] \|^2 da \\ &= - \int_{\Gamma_3^-} \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau])\| \| [u_\tau] \| da \\ &= - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \| [u_\tau] \| da, \end{aligned}$$

donc

$$\int_{\Gamma_3^-} \left(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \right) ([u_\tau]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \| [u_\tau] \| da, \quad (3.42)$$

afin de $[v_\tau]$

$$\int_{\Gamma_3^-} \left(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \right) ([v_\tau]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda [u_\tau] [v_\tau] da,$$

puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il résulte

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^-} \left(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \right) ([v_\tau]) da &\geq -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \| [u_\tau] \| \| [v_\tau] \| da \\ &\geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \| [v_\tau] \| da, \end{aligned} \quad (3.43)$$

nous employons l'égalité (3.42) et l'inégalité (3.43) pour trouver

$$\int_{\Gamma_3^-} \left(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \right) ([v_\tau - u_\tau]) da \geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) (\| [v_\tau] \| - \| [u_\tau] \|) da, \quad (3.44)$$

et de (3.41) et (3.44), il vient

$$\int_{\Gamma_3} \left(\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) \right) ([v_\tau - u_\tau]) da \geq - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\| [v_\tau] \| - \| [u_\tau] \|) da, \quad (3.45)$$

en combinant les inégalités (3.40) et (3.45), d'où

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \left(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t)) \right)_{\mathcal{H}^\ell} &\geq (f(t), v - u(t))_V + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \beta^2 R_\tau([u_\tau]) ([v_\tau - u_\tau(t)]) da - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\| [v_\tau] \| - \| [u_\tau(t)] \|) da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - u_\nu(t)]) da, \end{aligned}$$

à travers (3.34), (3.35) et (3.36) nous avons

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^2 \left(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t)) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) \\ + j_{fr}(u(t), v) - j_{fr}(u(t), u(t)) \\ + j_{vc}(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V, \quad \forall v, u \in V. \end{cases} \quad (3.46)$$

En utilisant la formule de Green (2.9) pour les inconnues électriques du problème, ainsi que les conditions (3.5), (3.12) d'après la définition (3.31) nous avons

$$(D^\ell, \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{div} D^\ell, \phi^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} D^\ell \cdot \nu^\ell \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell,$$

d'où

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} D^\ell \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell \cdot \nu^\ell \phi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell \cdot \nu^\ell \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell, \quad (3.47)$$

afin de $\ell = 1, 2$, on a d'après (3.12)

$$\int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell \cdot \nu^\ell \phi^\ell da = 0,$$

donc

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} D^\ell \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell \cdot \nu^\ell \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell, \quad (3.48)$$

on a d'après (3.5) et (3.13)

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell, \quad (3.49)$$

la formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} D^1 \cdot \nabla \phi^1 dx + \int_{\Omega^1} q_0^1 \cdot \phi^1 dx = \int_{\Gamma_b^1} q_2^1 \cdot \phi^1 da, \quad \forall \phi^1 \in H_1^1, \quad (3.50)$$

la formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} D^2 \cdot \nabla \phi^2 dx + \int_{\Omega^2} q_0^2 \cdot \phi^2 dx = \int_{\Gamma_b^2} q_2^2 \cdot \phi^2 da, \quad \forall \phi^2 \in H_1^2, \quad (3.51)$$

on additionnant (3.50) et (3.51) on a

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da, \\ \sum_{\ell=1}^2 \left(D^\ell, \nabla \phi^\ell \right)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da &= 0, \end{aligned}$$

on a d'après (3.31) on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(D^\ell, \nabla \phi^\ell \right)_{H^\ell} + (q(t), \phi)_W = 0,$$

de (3.2), on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell(t))), \nabla \phi^\ell \right)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, \quad t \in [0, T]. \quad (3.52)$$

Maintenant, pour les inconnues des températures du problème, pour tout $t \in [0, T]$ et l'équation (3.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} (\dot{\theta}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} - (\kappa_0^\ell \Delta \theta^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} &= (\Theta^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t), \theta^\ell(t)), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \\ \forall \xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \quad \ell &= 1, 2, \end{aligned} \quad (3.53)$$

on emploie la formule de Green (2.10), pour $\ell = 1, 2$ on a

$$-\kappa_0^\ell (\Delta \theta^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \theta^\ell(t) \cdot \nabla \xi^\ell dx - \kappa_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial^\ell \theta^\ell(t)}{\partial \nu^\ell} \xi^\ell dx, \quad \forall \xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell),$$

on a d'après (3.11)

$$-\kappa_0^\ell(\Delta\theta^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\theta^\ell(t) \cdot \nabla\xi^\ell dx + \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \theta^\ell(t) \xi^\ell dx, \quad \forall \xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \quad \ell = 1, 2, \quad (3.54)$$

en combinant les inégalités (3.53) et (3.54), on a

$$\begin{aligned} & (\dot{\theta}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\theta^\ell(t) \cdot \nabla\xi^\ell dx + \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \theta^\ell(t) \cdot \xi^\ell dx \\ &= (\Theta^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t)), \theta^\ell(t)), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell), \quad \ell = 1, 2, \end{aligned}$$

additionnons, pour $\ell = 1, 2$ d'où

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\theta}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla\theta^\ell(t) \cdot \nabla\xi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \theta^\ell(t) \cdot \xi^\ell dx \\ &= \sum_{\ell=1}^2 (\Theta^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t)), \theta^\ell(t)), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi = (\xi^1, \xi^2) \in E_1, \end{aligned}$$

à travers (3.33), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\theta}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\theta(t), \xi) &= \sum_{\ell=1}^2 (\Theta^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t)), \theta^\ell(t)), \xi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \\ \forall \xi &= (\xi^1, \xi^2) \in E_1. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Finalement, de (3.1), (3.2), (3.46), (3.52), (3.55), (3.8), (3.14) et (3.15), on obtient la formulation variationnelle suivante du problème thermo-électro-élastique P.

Problème PV. Découvrir les champs des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$, les champs des contraintes $\sigma : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, le champ des potentiels électriques $\varphi : [0, T] \rightarrow W$, les champs températures $\theta : [0, T] \rightarrow E_0$, le champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ et les champs des déplacements électriques, $D : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$ tel que pour tout $t \in [0, T]$.

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \theta^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell(s)), \theta^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell), \quad (3.56)$$

$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell)), \quad (3.57)$$

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell) - \varepsilon(u^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) + j_{fr}(u(t), v) \\ -j_{fr}(u(t), u(t)) + j_{vc}(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V, \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (3.58)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\theta}^\ell - \rho^\ell(t), \xi^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\theta(t), \xi) = \sum_{\ell=1}^2 \left(\Theta^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(u^\ell(t))), \theta^\ell(t), \xi^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)},$$

$$\forall \xi \in E_1 \quad (3.59)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell(t)), \nabla \phi^\ell) \right)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, \quad (3.60)$$

$$\dot{\beta}(t) = H_{ad}(\beta(t), \xi_\beta(t), R_\nu([u_\nu(t)]), R_\tau([u_\tau(t)])), \quad (3.61)$$

$$u(0) = u_0, \theta(0) = \theta_0, \beta(0) = \beta_0. \quad (3.62)$$

On a bien que le problème **PV** est formulé dans les termes, de champ des déplacements, de champ des contraintes, de champ des potentiels électriques, de champ température, d'un champ d'adhésion et de champ de déplacements électriques. L'existence de la solution unique du problème **PV** est indiquée et prouvée dans la section suivante.

Remarque 3.2.1 *On remarque que, dans le problème **P** et dans le problème **PV**, nous n'avons pas besoin d'imposer explicitement la restriction $0 \leq \beta \leq 1$, en effet, les équations (3.61) et (3.21) garantit que $\beta(x, t) \leq \beta_0(t)$ et par conséquent l'hypothèse (3.27) montre que $\beta(x, t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. $x \in \Gamma_3$, d'autre part, si $\beta(x, t_0) = 0$ à l'instant t_0 , il résulte de (3.61) et (3.21) que $\dot{\beta}(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et donc $\beta(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ p.p. $x \in \Gamma_3$, nous concluons que $0 \leq \beta(x, t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.*

On note tout d'abord que les fonctions j_{ad} et j_{vc} sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$j_{ad}(\beta, u, -v) = -j_{ad}(\beta, u, v), \quad j_{vc}(u, -v) = -j_{vc}(u, v). \quad (3.63)$$

En utilisant (3.35), on obtient

$$|j_{vc}(u_1, v) - j_{vc}(u_2, v)| \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| |v_\nu| da,$$

et d'après (3.22)(a), (2.16) on a

$$|j_{vc}(u_1, v) - j_{vc}(u_2, v)| \leq c \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V, \quad \forall u_1, u_2, v \in V, \quad (3.64)$$

nous utilisons encore une fois (3.35), pour obtenir

$$j_{vc}(u_1, u_2 - u_1) + j_{vc}(u_2, u_1 - u_2) = - \int_{\Gamma_3} (p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])) ([u_{1\nu}] - [u_{2\nu}]) da,$$

et alors, (3.22)(b) implique

$$j_{vc}(u_1, u_2 - u_1) + j_{vc}(u_2, u_1 - u_2) \leq 0, \quad (3.65)$$

on pose $v_2 - v_1 = u_2 - u_1$

$$j_{vc}(u_1, v_2) - j_{vc}(u_1, v_1) + j_{vc}(u_2, v_1) - j_{vc}(u_2, v_2) \leq 0, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in V, \quad (3.66)$$

aussi, nous prenons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans l'inégalité (3.22)(d) et (3.65) pour obtenir

$$j_{vc}(v, v) \geq 0.$$

Ensuite, en utilisant (3.34) et les inégalités

$$|R_\nu(u_\nu)| \leq L; \quad \|R_\tau(u_\tau)\| \leq L; \quad |\beta_1| \leq 1; \quad |\beta_2| \leq 1,$$

et l'hypothèse (3.22) nous déduisons que

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| \|u_1 - u_2\| da,$$

en combinant cette inégalité avec (2.16)

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V, \quad (3.67)$$

en choisissant $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ dans (3.67), nous trouvons

$$j_{ad}(\beta, u_1, u_2, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta, u_2, u_1 - u_2) \leq 0, \quad (3.68)$$

alors que R_ν , R_τ sont des opérateurs lipschitziennes, on obtient après des manipulations semblables

$$|j_{ad}(\beta, u_1, v) - j_{ad}(\beta, u_2, v)| \leq c \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V, \quad (3.69)$$

aussi, nous prenons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (3.68), ensuite nous utilisons les égalités $R_\nu(0) = 0$, $R_\tau(0) = 0$ et (3.67) pour obtenir

$$j_{ad}(\beta, v, v) \geq 0.$$

Maintenant, nous utilisons (3.36) pour trouver

$$\begin{aligned} & j_{fr}(u_1, v_1) - j_{fr}(u_1, v_2) + j_{fr}(u_2, v_2) - j_{fr}(u_2, v_1) \\ & \leq \int_{\Gamma_3} \mu |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| |[v_{1\tau}] - [v_{2\tau}]| da, \end{aligned}$$

moyennant l'hypothèse (3.22)(a) et l'inégalité (2.16)

$$j_{fr}(u_1, v_2) - j_{fr}(u_1, v_1) + j_{fr}(u_2, v_1) - j_{fr}(u_2, v_2) \leq c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V. \quad (3.70)$$

Les inégalités (3.67), (3.63) combinées avec les égalités (3.70) vont être utilisées dans des places diverses dans le reste du chapitre. Nous énonçons maintenant notre résultat principal concernant l'unique solvabilité du problème **PV**, dont la démonstration sera détaillée dans la section suivante.

3.3 Existence et unicité de la solution

L'objectif principal dans ce paragraphe est d'obtenir le résultat suivant d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel **PV**.

Théorème 3.3.1 *supposons que les hypothèses (3.16)-(3.29) sont vérifiées. Alors, il existe $\mu_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3, p_\nu, H_{ad}$ et $\mathcal{A}^\ell, \ell = 1, 2$ tel que, si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, puis le problème **PV** admet une solution unique $\{u, \sigma, \varphi, \theta, \beta, D\}$, de plus la solution satisfait*

$$u \in C(0, T; V), \quad (3.71)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (3.72)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap L^\infty(0, T; Z), \quad (3.73)$$

$$\sigma \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (3.74)$$

$$\theta \in L^2(0, T; E_1) \cap H^1(0, T; E_0), \quad (3.75)$$

$$D \in C(0, T; \mathcal{W}). \quad (3.76)$$

La solution $\{u, \sigma, \varphi, \theta, \beta, D\}$ qui satisfait le problème **PV** est appelé solution faible du problème **P**. Nous concluons que, d'après de les hypothèses (3.16)-(3.29), le problème **PV** a une solution unique qui satisfait la régularité (3.71)-(3.76). La démonstration du théorème 3.3.1 sera réalisé en plusieurs étapes et qui est basée sur des arguments d'équation non linéaires avec des opérateurs monotones, un résultat d'existence et d'unicité classique sur des inégalités paraboliques et des arguments en point fixe. Nous considérons que c est une constante positive générique qui dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3, p_\nu, \mathcal{A}^\ell, \mathcal{G}^\ell, \mathcal{Q}^\ell, \mathcal{E}^\ell, \gamma_\nu, \gamma_\tau, \Theta^\ell, \kappa_0^\ell$ et T avec $\ell = 1, 2$, mais ne dépend pas ni de t ni du reste des données d'entrée et dont sa valeur peut changer d'un en droit à l'autre.

Dans la première étape

Soit $g \in C(0, T; E_0)$ et considérons le problème auxiliaire.

Problème PV_g . Trouver $\theta_g : [0, T] \rightarrow E_0$, tel que

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\theta}_g^\ell(t) - g^\ell(t) - \rho^\ell(t), \xi^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\theta_g^\ell(t), \xi) = 0, \quad \forall \xi \in E_0, \quad (3.77)$$

$$\theta_g(0) = \theta_0, \quad (3.78)$$

Lemme 3.3.1 *Il existe une solution unique θ_g au problème auxiliaire PV_g satisfaisant les régularités (3.75).*

Démonstration. L'inclusion de la trace de $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ dans $(E_0, \|\cdot\|_{E_0})$ est continue et dense, nous pouvons écrire Triplet de Gelfand

$$E_1 \subset E_0 \subset E_1',$$

on considère l'opérateur linéaire $A_0 : E_1 \rightarrow E_1'$ défini par :

$$\langle A_0 \zeta, \xi \rangle_{E_1' \times E_1} = a_0(\zeta, \xi), \quad \forall \zeta, \xi \in E_1, \quad (3.79)$$

nous utilisons (3.79) et la définition (3.33) on peut écrire pour tout $\zeta^\ell, \xi^\ell \in E_1^\ell$

$$|\langle A_0 \zeta, \xi \rangle_{E_1' \times E_1}| \leq \sum_{\ell=1}^2 \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} |\nabla \zeta^\ell \cdot \nabla \xi^\ell| dx + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} |\zeta^\ell \cdot \xi^\ell| da,$$

en utilisant l'inégalité de Hölder on obtient

$$|\langle A_0 \zeta, \xi \rangle_{E_1' \times E_1}| \leq \sum_{\ell=1}^2 \kappa_0^\ell \|\nabla \zeta^\ell\|_{H^\ell} \cdot \|\nabla \xi^\ell\|_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \|\zeta^\ell\|_{L^2(\Gamma^\ell)} \|\xi^\ell\|_{L^2(\Gamma^\ell)}, \quad (3.80)$$

gardant en tête théorème trace de sobolev (voir 2.2.3) l'inégalité (3.80) devient

$$\|A_0 \zeta\|_{E_1'} \leq c \|\zeta\|_{E_1}, \quad (3.81)$$

ce qui montre que $A_0 : E_1 \rightarrow E_1'$ est continu et donc hemicontinu.

D'après la définition (3.79) on vérifie

$$\langle A_0 \zeta, \zeta \rangle_{E_1' \times E_1} \geq 0,$$

i.e que $A_0 : E_1 \rightarrow E_1'$ est un opérateur monotone.

D'autre part, on appliquant l'inégalité de Friedrichs-Poincaré, pour obtenir

$$\int_{\Omega^\ell} |\nabla \zeta^\ell|^2 dx + \frac{\lambda_0^\ell}{\kappa_0^\ell} \int_{\Gamma^\ell} |\zeta^\ell|^2 da \geq c_0 \int_{\Omega^\ell} |\zeta^\ell|^2 dx, \quad \forall \zeta^\ell \in E_1^\ell, \quad \ell = 1, 2,$$

et d'où

$$a_0(\zeta, \zeta) \geq c_1 \|\zeta\|_{E_1}^2, \quad \forall \zeta \in E_1,$$

où $c_1 = \min(\kappa_0^1 c_0^1, \kappa_0^2 c_0^2)$, a_0 est E_1 -elliptique.

Donc

$$\langle A_0 \zeta, \zeta \rangle_{E_1' \times E_1} \geq c_1 \|\zeta\|_{E_1}^2, \quad \forall \zeta \in E_1.$$

Finalement, nous remarquons toutes les conditions du théorème 2.6.2 sont vérifiées, donc nous concluons qu'il existe une unique fonction θ_g satisfait

$$\theta_g \in L^2(0, T; E_1) \cap H^1(0, T; E_0) \cap C([0, T]; E_0), \quad \dot{\theta}_g \in L^2(0, T; E_1'),$$

$$\dot{\theta}_g(t) + A_0 \theta_g(t) = \rho_g(t), \quad \text{p.p. } t \in [0, T],$$

$$\theta_g(0) = \theta_0.$$

Ceci complète la preuve du lemme 3.3.1. \square

Dans la deuxième étape

Soit $(g, \eta) \in C(0, T; E_0 \times V)$, nous utilisons le θ_g obtenu en lemme 3.3.1 et considérons le problème auxiliaire.

Problème $PV_{(g, \eta)}$ Trouver $u_{g\eta} : [0, T] \rightarrow V$, $\varphi_{g\eta} : [0, T] \rightarrow W$, $\beta_{g\eta} : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$.

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u_{g\eta}^\ell(t)), \theta_g^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u_{g\eta}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{vc}(u_{g\eta}(t), v - u_{g\eta}(t)) + j_{fr}(u_{g\eta}(t), v) - j_{fr}(u_{g\eta}(t), u_{g\eta}(t)) + (\eta(t), v - u_{g\eta}(t))_V \geq (f(t), v - u_{g\eta}(t))_V, \quad \forall v \in V, \quad (3.82)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_{g\eta}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell E^\ell(\varphi_{g\eta}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, \quad (3.83)$$

$$\dot{\beta}_{g\eta}(t) = H_{ad}(\beta_{g\eta}(t), \xi_{\beta_{g\eta}}(t), R_\nu([u_{g\eta\nu}(t)]), R_\tau([u_{g\eta\tau}(t)])), \quad (3.84)$$

$$u_{g\eta}(0) = u_0, \quad \beta_{g\eta}(0) = \beta_0. \quad (3.85)$$

Nous avons les résultats suivants

Lemme 3.3.2 1. il existe $\mu_0 > 0$ dépendant uniquement de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3, p_\nu, H_{ad}$ et \mathcal{A}^ℓ , $\ell = 1, 2$ tel que, si $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0$, le problème $PV_{(g, \eta)}$ a une solution unique $\{u_{g\eta}, \varphi_{g\eta}, \beta_{g\eta}\}$ qui satisfait la régularité (3.71)-(3.73).

2. si u_1 et u_2 sont deux solutions de (3.82) et (3.85) correspondant aux données (g_1, η_1) , $(g_2, \eta_2) \in C(0, T; E_0 \times V)$, alors il existe $c > 0$ tel que,

$$\text{pour } t \in [0, T], \quad \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c \|\eta_1(t) - \eta_2(t)\|_V. \quad (3.86)$$

Démonstration. Nous appliquons le théorème 2.5.1 où $X = V$ avec le produit intérieur $(\cdot, \cdot)_V$ et la norme associée $\|\cdot\|_V$ définies par (2.13) et (2.14).

Nous employons de théorème représentation de Riesz (voir 2.6.1) pour ceci on va définir l'opérateur $A : V \rightarrow V$ par

$$(Au, v)_V = \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \theta_g^\ell), \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \text{ pour tous } u, v \in V, \quad (3.87)$$

soient maintenant la fonctions $f_\eta : [0, T] \rightarrow V$, $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$f_\eta = f(t) - \eta(t), \quad (3.88)$$

$$j(u, v) = j_{vc}(u, v) + j_{fr}(u, v), \quad \forall u, v \in V. \quad (3.89)$$

En utilisant (3.16)

$$\begin{aligned} |(Au_1 - Au_2, v)_V| &= \sum_{\ell=1}^2 |(\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_2^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}| \\ &\leq \sum_{\ell=1}^2 \|\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_2^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \\ &\leq \sum_{\ell=1}^2 L_{\mathcal{A}^\ell} \|\varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^2 L_{\mathcal{A}^\ell} \|u_1^\ell - u_2^\ell\|_{V^\ell} \|v^\ell\|_{V^\ell} \\ &\leq L_A \sum_{\ell=1}^2 \|u_1^\ell - u_2^\ell\|_{V^\ell} \|v^\ell\|_{V^\ell} \\ &\leq L_A \left(\sum_{\ell=1}^2 \|u_1^\ell - u_2^\ell\|_{V^\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\ell=1}^2 \|v^\ell\|_{V^\ell}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq L_A \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V, \end{aligned}$$

pour $v = Au_1 - Au_2$, et d'après la définition d'une norme induite par un produit scalaire on obtient

$$\|Au_1 - Au_2\|_V \leq L_A \|u_1 - u_2\|_V,$$

où $L_A = \max(L_{\mathcal{A}^1}, L_{\mathcal{A}^2})$. Donc A est un opérateur lipschitzienne.

En appliquant (3.16)(b)

$$\begin{aligned}
(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V &= \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_2^\ell), \varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\
&= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \left(\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_2^\ell) \right) \left(\varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell) \right) dx \\
&\geq \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} m_{\mathcal{A}^\ell} \|\varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell)\|^2 dx \\
&\geq \sum_{\ell=1}^2 m_{\mathcal{A}^\ell} \|\varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \\
&= \sum_{\ell=1}^2 m_{\mathcal{A}^\ell} \|u_1^\ell - u_2^\ell\|_{V^\ell}^2,
\end{aligned}$$

alors

$$(Au_1 - Au_2, u_1 - u_2)_V \geq m_A \|u_1 - u_2\|_V^2,$$

où $m_A = \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2})$. Donc A est un opérateur fortement monotone, ensuit il est satisfait les conditions (2.26).

Nous utilisons (3.35) et (3.36) pour voir que la fonctionnelle $j(u, \cdot)$ définie par (3.89) est convexe, propre et continue sur V , donc semi-continue inférieurement ; et par conséquent elle satisfait la condition (2.27)(a). Moyennant (3.22) et (3.26) encore une fois, nous utilisons (3.66), (3.70) et (3.89) pour trouve l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&j_{vc}(u_1, v_2) + j_{fr}(u_1, v_2) - j_{vc}(u_1, v_1) - j_{fr}(u_1, v_1) + j_{vc}(u_2, v_1) + j_{fr}(u_2, v_1) \\
&\quad - j_{vc}(u_2, v_2) - j_{fr}(u_2, v_2) \leq c_0^2 L_\nu \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) &\leq m_j \|u_1 - u_2\|_V \|v_1 - v_2\|_V \\
\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in V. & \tag{3.90}
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la fonctionnelle j verifié la condition (2.27)(b) sur $X = V$, de plus en utilisant (3.32) et prenant en considération que $\eta \in C(0, T; V)$, nous concluons de (3.88) que $f_\eta \in C(0, T; V)$, et par conséquent la condition (2.28) est vérifiée, avec $m_j < m_A$ i.e. $\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \frac{m_A}{c_0^2 L_\nu} = \mu_0$. Finalement, notons que (3.28) montre que la condition $u_0 \in X$ est

satisfaite aussi.

Enfin, en utilisant (3.87)-(3.89) nous trouvons que le lemme 3.3.2 est une conséquence directe du théorème 2.5.1.

Soit maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$, notons par $u_{g\eta}(t_i) = u_i$, $\eta(t_i) = \eta_i$, $f(t_i) = f_i$, $i = 1, 2$, nous utilisons de argument basé sur (3.82) nous trouvons

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_2^\ell), \varepsilon(u_1^\ell) - \varepsilon(u_2^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{vc}(u_1, u_1 - u_2) - j_{vc}(u_2, u_1 - u_2) - [j_{fr}(u_1, u_2) - j_{fr}(u_1, u_1) + j_{fr}(u_2, u_1) - j_{fr}(u_2, u_2)] + (\eta_1 - \eta_2, u_2 - u_1)_V \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_V,$$

et, en utilisant l'hypothèse (3.16) et les inégalités (3.64), (3.70), ce qui montre que pour $g(t_i) = g_i$, on trouve

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq c(\|g_1 - g_2\|_{E_0} + \|\eta_1 - \eta_2\|_V + \|f_1 - f_2\|_V). \quad (3.91)$$

Gardant à $f \in C(0, T; V)$ et rappelez vous que $(g, \eta) \in C(0, T; E_0 \times V)$, nous déduisons de l'inégalité (3.91) que l'élément $u_{g\eta}$ satisfait la régularité (3.71).

Soit $G : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par

$$G(\varphi, \phi) = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall \varphi, \phi \in W. \quad (3.92)$$

On utilise (2.19) et (3.20) pour déduire que la forme G est continue et coercive sur W . En outre en utilisant (3.83) et nous appliquons le théorème de représentation de Riez (voir 2.6.1) pour définir la fonction $w_{g\eta} : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$(w_{g\eta}(t), \phi)_W = (q(t), \phi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_{g\eta}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall \phi \in W, \quad t \in [0, T].$$

Nous appliquons le théorème de Lax-Milgran (voir 2.5.4) pour en déduire qu'il existe une fonction unique $\varphi_{g\eta} \in W$ tel que

$$G(\varphi_{g\eta}(t), \phi) = (w_{g\eta}(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W. \quad (3.93)$$

De (3.93), concluons que $\varphi_{g\eta}$ est une solution de l'équation (3.83).

Pour tout $t_1, t_2 \in [0, T]$, notons par $u_{g\eta}(t_i) = u_i$, $\varphi_{g\eta}(t_i) = \varphi_i$, $q(t_i) = q_i$, $i = 1, 2$, en utilisant des arguments basés sur (3.83) nous trouvons

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_1^\ell) - \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_2^\ell), \nabla(\varphi_1^\ell - \varphi_2^\ell) \right)_{H^\ell} + G(\varphi_2 - \varphi_1, \varphi_1 - \varphi_2) = (q_2 - q_1, \varphi_1 - \varphi_2)_W,$$

ensuit, en utilisant les hypothèses (3.19) et (3.20), pour obtenir

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_W \leq c(\|u_1 - u_2\|_V + \|q_1 - q_2\|_W). \quad (3.94)$$

Comme $u_{g\eta} \in C(0, T; V)$ et $q \in C(0, T; W)$ nous déduisons de l'inégalité (3.94) que $\varphi_{g\eta} \in C(0, T; W)$.

D'autre part, nous considérons l'application $H_{g\eta} : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$

$$H_{g\eta}(t, \beta) = H_{ad}(\beta_{g\eta}(t), \xi_{g\eta}, R_\nu([u_{g\eta\nu}(t)]), R_\tau([u_{g\eta\tau}(t)])).$$

Pour $t \in [0, T]$ et $\beta_1, \beta_2 \in L^2(\Gamma_3)$. on utilise l'hypothèse (3.21) nous avons

$$\|H_{g\eta}(t, \beta_1) - H_{g\eta}(t, \beta_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)},$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \|H_{g\eta}(t, \beta)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq L_{H_{ad}}\|\beta\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ &\leq c. \end{aligned}$$

Alors l'application $H_{g\eta}$ vérifie tous les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz (voir 2.5.5), et comme $\beta_0 \in L^2(\Gamma_3)$ alors il existe une fonction unique $\beta_{g\eta} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ qui satisfait (3.84) et (3.85). Aussi, d'après les arguments utilisés dans la remarque 3.2.1 et d'après l'hypothèse (3.27) nous déduisons que $0 \leq \beta_{g\eta} \leq 1$ p.p. $t \in [0, T]$. Ceci complète la preuve du lemme 3.3.2. \square

Dans la troisième étape

On considère l'élément $\Lambda : C(0, T; V \times E_0) \rightarrow C(0, T; V \times E_0)$ défini par

$$\Lambda(\eta, g)(t) = (\Lambda_1(\eta, g)(t), \Lambda_2(\eta, g)(t)), \quad (3.95)$$

telles que

$$\begin{aligned} (\Lambda_1(\eta, g)(t), v)_V &= - \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi_{g\eta}^\ell), \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_{g\eta}(t), u_{g\eta}(t), v) \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_{g\eta}^\ell(s)), \theta_g^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.96)$$

$$\Lambda_2(\eta, g) = (\Theta^1(\sigma_{g\eta}^1, \varepsilon(u_{g\eta}^1), \theta_g^1), \Theta^2(\sigma_{g\eta}^2, \varepsilon(u_{g\eta}^2), \theta_g^2)). \quad (3.97)$$

Où l'application $\sigma_{g\eta}^\ell$ est donné par

$$\sigma_{g\eta}^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u_{g\eta}^\ell), \theta_g^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_{g\eta}^\ell(s)), \theta_g^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi_{g\eta}^\ell). \quad (3.98)$$

Lemme 3.3.3 *L'opérateur Λ admet un point fixe unique $(\eta_*, g_*) \in C(0, T; V \times E_0)$.*

Démonstration. Soient (η_1, g_1) et $(\eta_2, g_2) \in C(0, T; V \times E_0)$, et notée par $\theta_i, u_i, \varphi_i, \beta_i$ et σ_i les fonctions obtenue dans le lemme 3.3.1 et lemme 3.3.2, et la relation (3.98) pour $(\eta, g) = (\eta_i, g_i); i = 1, 2$. Soit $t \in [0, T]$.

on emploie (3.34), on obtient

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1(\eta_1(t), g_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), g_2(t))\|_V^2 &\leq \sum_{\ell=1}^2 \|(\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_1^\ell(t) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_2^\ell(t)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \int_0^t \|\mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_1^\ell(s)), \theta_1^\ell(s)) - \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_2^\ell(s)), \theta_2^\ell(s))\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 ds \\ &+ \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 \|\beta_1^2(t) R_\nu([u_{1\nu}(t)]) - \beta_2^2(t) R_\nu([u_{2\nu}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &+ \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 \|\beta_1^2(t) R_\tau([u_{1\tau}(t)]) - \beta_2^2(t) R_\tau([u_{2\tau}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2, \end{aligned}$$

en employant (3.17), (3.19), on obtient

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1(\eta_1(t), g_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), g_2(t))\|_V^2 &\leq \sum_{\ell=1}^2 L_{\mathcal{Q}^\ell} \left(\int_0^t \|u_1^\ell(s) - u_2^\ell(s)\|_{V^\ell}^2 ds \right. \\ &\int_0^t \|\theta_1^\ell(s) - \theta_2^\ell(s)\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2 + \sum_{\ell=1}^2 \|(\mathcal{E}^\ell)^*\|_{L^\infty(\Omega^\ell)} \|\nabla \varphi_1^\ell(t) - \nabla \varphi_2^\ell(t)\|_{H^\ell}^2 \\ &+ \|\gamma_\nu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 \|\beta_1^2(t) R_\nu([u_{1\nu}(t)]) - \beta_2^2(t) R_\nu([u_{2\nu}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &+ \|\gamma_\tau\|_{L^\infty(\Gamma_3)}^2 \|\beta_1^2(t) R_\tau([u_{1\tau}(t)]) - \beta_2^2(t) R_\tau([u_{2\tau}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2, \end{aligned}$$

et d'après la définition de R_ν et R_τ et (2.19) nous avons

$$\begin{aligned} &\|\Lambda_1(\eta_1(t), g_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), g_2(t))\|_V^2 \\ &\leq \max(L_{\mathcal{Q}^1}, L_{\mathcal{Q}^2}) \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|(\mathcal{E})^*\|_{L^\infty(\Omega)} \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + c' \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \end{aligned}$$

On prend $c = \max(\max(L_{\mathcal{Q}^1}, L_{\mathcal{Q}^2}), \|(\mathcal{E})^*\|_{L^\infty(\Omega)}, c')$,
ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \|\Lambda_1(\eta_1(t), g_1(t)) - \Lambda_1(\eta_2(t), g_2(t))\|_V^2 &\leq c \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right. \\ &\left. + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.99)$$

Autant, nous utilisons (3.97), (3.98) et (3.18) pour obtenir

$$\begin{aligned} &\|\Lambda_2(\eta_1(t), g_1(t)) - \Lambda_2(\eta_2(t), g_2(t))\|_{E_0}^2 \\ &\leq c \left(\int_0^t (\|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2) ds \right. \\ &\left. + \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \right), \end{aligned} \quad (3.100)$$

il déduit maintenant de (3.99), (3.100) que

$$\begin{aligned} &\|\Lambda(\eta_1(t), g_1(t)) - \Lambda(\eta_2(t), g_2(t))\|_{V \times E_0}^2 \\ &\leq c \left(\int_0^t (\|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 + \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2) ds \right. \\ &\left. + \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 \right) \end{aligned} \quad (3.101)$$

$$+ \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2. \quad (3.102)$$

D'autre part, on peut écrire le problème de Cauchy (3.84) comme le suivant

$$\beta_i(t) = \beta_0 + \int_0^t H_{ad}(\beta_i(s), \xi_{\beta_i}(s), R_\nu([u_{i\nu}(s)]), R_\tau([u_{i\tau}(s)])) ds,$$

nous employons (3.21) pour obtenir

$$\begin{aligned} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq c \left(\int_0^t (\|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right. \\ &+ \int_0^t |R_\nu([u_{1\nu}(s)]) - R_\nu([u_{2\nu}(s)])| ds \\ &\left. + \int_0^t \|R_\tau([u_{1\tau}(s)]) - R_\tau([u_{2\tau}(s)])\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right), \end{aligned}$$

en employant la définitions de R_ν , R_τ on obtient

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \left(\int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right), \quad (3.103)$$

ensuite, nous appliquons l'inégalité de Gronwall et du théorème de trace de Sobolev nous obtenons

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds. \quad (3.104)$$

Nous avons utilisé maintenant (3.83), (2.20), (3.19) et (3.20) pour trouver

$$\| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \|_W^2 \leq c \| u_1(t) - u_2(t) \|_V^2. \quad (3.105)$$

De (3.77) on découle que

$$(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2, \theta_1 - \theta_2)_{E_0} + a_0(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2) - (g_1 - g_2, \theta_1 - \theta_2)_{E_0} = 0,$$

nous assimilons cette égalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0$ et l'inégalité $a_0(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2) \geq 0$ et le théorème 2.4.2 pour trouver

$$\frac{1}{2} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 \leq \int_0^t (g_1(s) - g_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s))_{E_0} ds,$$

en utilisant l'inégalité de Young $2ab \leq a^2 + b^2$, pour trouver

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 \leq \int_0^t \|g_1(s) - g_2(s)\|_{E_0}^2 ds + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{E_0}^2 ds.$$

Cette inégalité combinée à l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 \leq c \int_0^t \|g_1(s) - g_2(s)\|_{E_0}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.106)$$

On substitue (3.86), (3.104)-(3.106) en (3.101) pour trouver

$$\|\Lambda(\eta_1, g_1, h_1) - \Lambda(\eta_2, g_2, h_2)\|_{V \times E_0 \times E_0}^2 \leq c \int_0^t \|(\eta_1, g_1, h_1)(s) - (\eta_2, g_2, h_2)(s)\|_{V \times E_0 \times E_0}^2 ds.$$

De plus, on a

$$\|\Lambda^2(\eta_1, g_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, g_2)(t)\|_{V \times E_0}^2 \leq c \int_0^t c \int_0^s \|(\eta_1, g_1)(r) - (\eta_2, g_2)(r)\|_{V \times E_0}^2 dr ds,$$

$$\|\Lambda^2(\eta_1, g_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, g_2)(t)\|_{V \times E_0}^2 \leq c^2 \int_0^t \int_0^s \|(\eta_1, g_1)(r) - (\eta_2, g_2)(r)\|_{V \times E_0}^2 dr ds,$$

$$\|\Lambda^3(\eta_1, g_1)(t) - \Lambda^3(\eta_2, g_2)(t)\|_{V \times E_0}^2 \leq c^3 \int_0^t \int_0^s \int_0^r \|(\eta_1, g_1)(l) - (\eta_2, g_2)(l)\|_{V \times E_0}^2 dl dr ds,$$

⋮

$$\begin{aligned} \|\Lambda^m(\eta_1, g_1)(t) - \Lambda^m(\eta_2, g_2)(t)\|_{C(0,T;V \times E_0)}^2 &\leq c^m \underbrace{\int_0^t \int_0^s \cdots \int_0^h}_{m \text{ fois}} \|(\eta_1, g_1)(l) \\ &\quad - (\eta_2, g_2)(l)\|_{C(0,T;V \times E_0)}^2 dl \cdots dr ds, \end{aligned}$$

on sait que $\int_0^r dl = r$,

et que $\int_0^s \int_0^r dl dr = \int_0^s r dr = \frac{s^2}{2}$,

et que $\int_0^t \int_0^s \int_0^r dl dr ds = \int_0^t \frac{s^2}{2} = \frac{t^3}{6}$,

$\int_0^t \int_0^s \cdots \int_0^r dl \cdots dr ds = \frac{t^m}{m!}$.

Alors

$$\|\Lambda^m(\eta_1, g_1) - \Lambda^m(\eta_2, g_2)\|_{C(0,T;V \times E_0)}^2 \leq \frac{c^m T^m}{m!} \|(\eta_1, g_1) - (\eta_2, g_2)\|_{C(0,T;V \times E_0)}^2.$$

D'après l'équivalence de Stirling $m! \sim \sqrt{2\pi m} m^m e^{-m}$, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{c^m T^m}{m!} = 0$. Aussi, pour m suffisamment grand, Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $C(0, T; V \times E_0 \times E_0)$ et donc Λ a un point fixe unique.

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du théorème 3.3.1.

Démonstration du théorème 3.3.1. Soit $(\eta_*, g_*) \in C(0, T; V \times E_0)$, le point fixe de Λ , pour simplifier l'écriture, on suppose que

$$(a) u_* = u_{g_* \eta_*}, \quad (b) \varphi_* = \varphi_{g_* \eta_*}, \quad (c) \beta_* = \beta_{g_* \eta_*}, \quad (d) \theta_* = \theta_{g_*}, \quad (3.107)$$

$$\sigma_*^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u_*^\ell), \theta_*^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_*^\ell(s)), \theta_*^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi_*^\ell), \quad (3.108)$$

$$D_*^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi_*^\ell)). \quad (3.109)$$

On a

$$\Lambda_1(\eta_*, g_*) = \eta_*, \quad \Lambda_2(\eta_*, g_*) = g_*,$$

Il suit pour $\ell = 1, 2$,

$$\begin{aligned} (\eta_*(t), v)_V &= - \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell) \right)_{H^\ell} + j_{ad}(\beta_*(t), u_*(t), v) \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_*^\ell(s)), \theta_*^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$g_*^\ell(t) = \Theta^\ell(\sigma_*^\ell(t), \varepsilon(u_*^\ell(t)), \theta_*^\ell(t)), \quad (3.111)$$

Existence. Nous indiquons $\{u_*, \sigma_*, \varphi_*, \theta_*, \beta_*, D_*\}$ satisfait le problème **PV** et les régularités (3.71)-(3.76).

En effet, nous écrivons (3.82) pour $(\eta, g) = (\eta_*, g_*)$ et utilisons (3.107) pour trouver

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_*^\ell), \theta_*^\ell, \alpha_*^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u_*^\ell(t)) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{\nu c}(u_*(t), v - u_*(t)) + j_{fr}(u_*(t), v) \\ & - j_{fr}(u_*(t), u_*(t)) + (\eta_*(t), v - u_*(t))_V \geq (f(t), v - u_*(t))_V, \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Remplacer (3.110) en (3.112) pour obtenir

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u_*^\ell), \theta_*^\ell, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u_*^\ell(t))) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_*^\ell(s)), \theta_*^\ell(s),) ds, \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u_*^\ell(t)) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j_{ad}(\beta_*(t), u_*(t), v - u_*(t)) + j_{\nu c}(u_*(t), v - u_*(t)) + j_{fr}(u_*(t), v) \\ & - j_{fr}(u_*(t), u_*(t)) - \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(u_*^\ell(t)) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\ & \geq (f(t), v - u_*(t))_V, \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Et nous considérons (3.77) avec $g^\ell = g_*^\ell$ et en utilisant (3.107)(d) pour trouver

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\theta}_*^\ell(t), \xi^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\theta_*^\ell(t), \xi) = \sum_{\ell=1}^2 \left(g_*^\ell(t) + \rho^\ell(t), \xi^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} \\ & \text{pour tout } \xi \in E_0, \text{ p.p. } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Aussi nous écrivons (3.83) pour $(\eta, g) = (\eta_*, g_*)$ et en employant (3.107)(a) et (3.107)(b) de voir que

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{G}^\ell E^\ell(\varphi_*^\ell(t)), \nabla \phi^\ell \right)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell(t)), \nabla \phi^\ell \right)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \\ & \text{pour tout } \phi \in W, \text{ p.p. } t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Maintenant, nous considérons (3.84) et nous utilisons (3.107)(a) et (3.107)(c) pour obtenir que

$$\dot{\beta}_*(t) = H_{ad}(\beta_*(t), \xi_{\beta_*}(t), R_\nu([u_{*\nu}(t)]), R_\tau([u_{*\tau}(t)])), \text{ p.p. } t \in [0, T]. \quad (3.116)$$

Les relations (3.112)-(3.116) nous permettent de conclure maintenant que $\{u_*, \varphi_*, \theta_*, \beta_*\}$ satisfait (3.58)-(3.61), ensuite la régularité (3.71)-(3.73), (3.75) découlent du lemme 3.3.2 et du lemme 3.3.3 .

Soit maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$ de (2.14), (2.19), (3.16), (3.17), (3.19) et (3.108), nous concluons qu'il existe une constante positive $c > 0$ vérifiant

$$\|\sigma_*(t_1) - \sigma_*(t_2)\|_{\mathcal{H}} \leq c(\|u_*(t_1) - u_*(t_2)\|_V + \|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)\|_W + \|\theta_*(t_1) - \theta_*(t_2)\|_{E_0}).$$

La régularité de u_* , φ_* , θ_* et donnée par (3.71), (3.72), (3.75) respectivement, implique

$$\sigma_* \in C(0, T; \mathcal{H}). \quad (3.117)$$

Pour $\ell = 1, 2$ on a d'après (3.4)

$$\text{Div } \sigma_*^\ell(t) = -f_0^\ell(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.118)$$

alors d'après (3.24) il résulte que $\text{Div } \sigma_*^\ell(t) \in H^\ell$ ce qui donne la régularité (3.74).

Soit maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$ de (2.19), (3.19), (3.20) et (3.109), nous concluons qu'il existe une constante positive $c > 0$ vérifiant

$$\|D_*(t_1) - D_*(t_2)\|_{\mathcal{W}} \leq c (\|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)\|_{\mathcal{W}} + \|u_*(t_1) - u_*(t_2)\|_V).$$

La régularité de u_* et φ_* et donnée par (3.71) et (3.72) implique

$$D_* \in C(0, T; \mathcal{W}). \quad (3.119)$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (3.5)

$$\text{div } D_*^\ell = q_0^\ell(t), \quad t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2, \quad (3.120)$$

alors d'après (3.24) il résulte que $\text{div } D_*^\ell(t) \in E_0^\ell$ ce qui donne la régularité (3.76).

Enfin, nous concluons que la solution $\{u_*, \sigma_*, \varphi_*, \theta_*, \beta_*, D_*\}$ du problème PV ayant la régularité (3.71)-(3.76), ce qui achève la partie l'existence du théorème 3.3.1.

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Λ défini par (3.96), (3.97) et de la solvabilité unique des problèmes PV_g et $PV_{(g\eta)}$. Effectivement, soit $\{u_*, \sigma_*, \varphi_*, \theta_*, \beta_*, D_*\}$ est une solution du problème **PV** obtenu ci-dessus et soit $\{u, \sigma, \varphi, \theta, \beta, D\}$ une autre solution du problème qui satisfait (3.71)-(3.76). On note $\eta \in C(0, T; V)$, $g \in C(0, T; E_0)$ les opérateurs

$$(\eta, v)_V = - \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi_{g\eta}^\ell), \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\beta_{g\eta}(t), u_{g\eta}(t), v) \quad (3.121)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_{g\eta}^\ell(s)), \theta_g^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall v \in V. \quad (3.122)$$

$$g = (\Theta^1(\sigma_{g\eta}^1, \varepsilon(u_{g\eta}^1), \theta_g^1), \Theta^2(\sigma_{g\eta}^2, \varepsilon(u_{g\eta}^2), \theta_g^2)). \quad (3.123)$$

Maintenant (3.77) et (3.78) impliquent que θ est une solution du problème \mathbf{PV}_g du lemme 3.3.1 il s'ensuit que ce problème a une solution unique

$$\theta_g \in L^2(0, T; E_1) \cap H^1(0, T; E_0),$$

et si nous concluons que

$$\theta_g = \theta. \quad (3.124)$$

Ensuite, (3.82)-(3.85) impliquent que $\{u, \varphi, \beta\}$ est une solution du problème $\mathbf{PV}_{(g, \eta)}$ du lemme 3.3.2 il s'ensuit que ce problème a une solution unique

$$u_{g\eta} \in C(0, T; V), \quad \varphi_{g\eta} \in C(0, T; W) \quad \text{et} \quad \beta_{g\eta} \in W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap L^\infty(0, T; Z),$$

et si nous concluons que

$$u_{g\eta} = u, \quad \varphi_{g\eta} = \varphi, \quad \beta_{g\eta} = \beta. \quad (3.125)$$

Il résulte de (3.95) et (3.121)-(3.125) et la définition de Λ on obtient $\Lambda(g, \eta) = (g, \eta)$ donc (g, η) est un point fixe de l'opérateur Λ , d'après le lemme 3.3.3 il s'ensuit que

$$g_* = g, \quad \eta_* = \eta. \quad (3.126)$$

La partie d'unicité du théorème 3.3.1 est une conséquence de (3.124)-(3.126) avec l'équation

$$\begin{aligned} \sigma^\ell &= \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \theta^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell(s), \theta^\ell(s))) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\varphi^\ell), \\ D^\ell &= \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\varphi^\ell)). \end{aligned}$$

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons étudié un problème quasi-statique de contact à mémoire longue entre deux corps électro-thérmo-élastiques avec frottement, adhésion et compliance normale.

Nous avons présenté une formulation des équations et des inéquations variationnelles de ce problème à étudier, pour ceci en utilisant la formule de Green.

Enfin on a confirmé l'existence et l'unicité de la solution faible du problème, en utilisant quelques théorèmes des inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution, théorème du Lax-Milgram, théorème de Cauchy-Lipshitz, puis les techniques de point fixe de Banach et les inégalités du lemme de Gronwall.

Bibliographie

- [1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York, 1975.
- [2] A. Aissoui, Analyse variationnelle de quelques problèmes aux limites de contact avec adhésion et endommagement, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2014).
- [3] R. Arhab, contribution à l'étude du contact piézoélectriques avec adhésion, Thèse doctorat Université de Perpignan (2008).
- [4] A. Azeb Ahmed, Etude théorique de quelques problèmes dynamiques en contact avec endommagement, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2015).
- [5] R.C. Batra and J.S. Yang, *Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity*, J. of Elasticity, 38 (1995), 209-218.
- [6] P. Bisenga, F. Lebon and F. Maceri, *The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support in : Contact Mechanics*, (J.A.C. Martins and M.D.P. Monteiro Marques, eds.) Solid Mech. Appl, vol.103, Kluwer Academic, Dordrecht (2002), 47–354.
- [7] S. Boutechbak, A dynamic problem of frictionless contact for elastic-thermoviscoplastic materials with damage, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **86** (2013), pp. 173–197.
- [8] H. Brézis, Analyse fonctionnelle, Théorie et Application, Masson 1987.
- [9] N. Chougui, Analyse Mathématique de Quelques problèmes de contact en électro-élasticité et en électro-viscoélasticité, Thèse doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2015).
- [10] H.L. Dai and X. Wang, Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures, *Inter. J. Sol. Struct.*, **42**, (2005), pp. 1151–1171.
- [11] B. Douib and T. Hadj Ammar, Frictional contact problem between thermoelastic piezoelectric bodies with damage, adhesion and normal compliance, *Palestine Journal of Mathematics*. Vol. 9(1)(2020) , 493–510.

-
- [12] G. Duvaut and J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, 1976.
- [13] M. Fremond and B. Nedjar, Damage in concrete : the unilateral phenomenon, *Nuclear Eng. Design* 156, 323–335 (1995).
- [14] M. Fremond and B. Nedjar, Damage, gradient of damage and principle of virtual work, *Int. J. Solids Structures* 33, 1083–1103 (1996).
- [15] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*. C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 295 (1982), 913–916.
- [16] M. Fremond, K.L. Kuttler, and M. Shillor, Existence and uniqueness of solutions for a one-dimensional damage model, *J. Math. Anal. Appl.* 229, 271–294 (1999).
- [17] M. Fremond, K.L. Kuttler, B. Nedjar, and M. Shillor, Onedimensional models of damage, *Adv. Math. Sci. Appl.* 8, 541–570 (1998).
- [18] T. Hadj ammar and B, Benabderrahmane, *Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies*, *Stud. Univ. Babe, s-Bolyai Math.* 57 (2012), No. 3, 427-444.
- [19] T. Hadj Ammar, Etude variationnelle et Numérique de Quelques problèmes de contact entre Deux corps déformables, Thèse doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2015).
- [20] T. Hadj Ammar, S. Drabla and B. Benederrahmane, Analysis and approximation of frictionless contact problems between two piezoelectric bodies with adhesion, *Georgian Math. J.*, **44** (2014), pp. 1–15.
- [21] W. Han and M. Sofonea, Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **38** (2000), pp. 556–579.
- [22] W. Han, M. Sofonea and K. Kazmi, Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-visco-plastic materials, *Compu. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **196** (2007), pp. 3915–3926.
- [23] W. Han, M. Sofonea, Quasistatic contact problems in viscoelasticity and viscoplas- ticity, *Studies in Advanced Mathematics*, vol. 30, American Mathematical Society, Providence, RI - Intl. Press, Sommerville, MA, (2002).
- [24] Z. Lerguet, Analyse de Quelques problèmes de contact avec frottement et adhésion, Thèse doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2008).
- [25] J. Necas, *Les méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris (1967).
-

- [26] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, Analysis of a quasistatic viscoelastic problem with friction and damage, *Adv. Math. Sci. Appl.* 10, 173–189 (2002).
- [27] M. Sofonea, R. Arhab et R. Tarraf, Analysis of Electro-elastic Frictionless Contact Problems with Adhesion, *Journal of Applied Mathematics*, Art. ID. 64217, 25 pages, 2006.
- [28] M. Sofonea, A. Matei, Variational inequalities with applications, A study of antiplane frictional contact problems, Springer, New York, (2009).
- [29] M. Sofonea, W, M.Shillor, Analysis and Approximation of contact problems with adhesion or Damage, pure and Applied Mathematics, vol. 275 chapman Hall/CRC press, New York, 2006.
- [30] W. Voigt, *Lehrbuch der Kristall-Physik*, Teubner, Leipzig, 1910.

Résumé

Notre travail présente une contribution à l'analyse de la question du contact entre deux corps en tenant compte la piézoélectrique des deux corps, nous étudions un processus quasi-statique pour deux corps thermoélastiques avec frottement, adhésion et compliance normal et mémoire à long terme. Notre étude de ce phénomène de contact comprend les stations suivantes : modélisation mathématique puis analyse du changement qui s'intéresse à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution faible du problème.

Mots clés : thermoélastique, piézoélectrique, frottement, adhésion, quasi-statique, compliance normale, formulation variationnelle, solution faible, point fixe.

Abstract

Our work presents a contribution to the analysis the question of contact between two objects taking into the account. In piezoelectric of tow bodies, we study a quasi-static process for two thermoelastic bodies with friction and adhesion normal compliance and long memory term. Our study of this contact phenomenon includes the following stations, mathematical modeling then analysis of the chang of interest the study of the chang of interest the study of the existence and uniqueness of the weak solution to the problem.

Key words : thermoelastic, piezoelectric, friction, adhesion, quasi-static, normal compliance, variational formulation, weak solution, fixed point.

ملخص

يقدم عملنا مساهمة في تحليل مسألة التلامس بين جسمين مع الاخذ بالحسبان كهروضغطية الجسمين، ندرس عملية شبه ساكنة، لجسمين مرنين حراريين مع احتكاك، التصاق، امثال طبيعي وذاكرة طويلة المدى. تشمل دراستنا لظاهرة التلامس هذه المحطات التالية : النمذجة الرياضية ثم التحليل التغيري الذي يهتم بدراسة وجود وحدانية الحل الضعيف للمسألة .

كلمات مفتاحية : مرن، حراري، كهروضغطية، احتكاك، التصاق، شبه ساكنة، امثال طبيعي، صيغة تغيرية، حل ضعيف، نقطة ثابتة.