N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

جامعة الشهيد حمه لخضر - الوادي
Université Echahid Hamma Lakhdar - El-Oued

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

Le rôle de mesure de non compacité dans la théorie de point fixe et application

Présenté par: **Maamra Ali**
Hanancha Abderrazzak

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Mansour Abdelouahab	Prof.	Président	Univ. El Oued
Aissaoui Adel	MCA	Rapporteur	Univ. El Oued
Beloul Said	MCA	Examinateur	Univ. El Oued

Année universitaire 2017 – 2018

Dédicaces

Je dédie ce travail

À mon père et à ma mère qui m'a toujours encouragé,

sans oublier mes chers frères et ma grande famille,

avec l'espoir que ce travail peut apporter un plus de joie

À tous ceux que j'aime et à qui m'aime

Et à l'ami décédé ***Kalbeddine***

je prie Dieu le tout puissant de l'accepteur dans son vaste paradis

À mes chères amies : ***Abderrazzak****,* ***Faycel****,* ***Amar****,* ***Noureddine,***
Azzeddine *et* ***Abdallah***

Pour leur sincère amitié et confiance

À tous mes amis de la promotion de mathématique 2018

Ali

Dédicaces

Tout d'abord je rends un grand hommage à la mémoire de mon père

et je prie Dieu le tout puissant de l'accepteur dans son vaste paradis.

Je dédie ce modeste travail:

A ma mère, qui a oeuvré pour ma réussite, par son amour,

Son soutien, et sesprécieux conseils.

A mes frères et soeurs

*A mes chères amies :****Ali, Faycel,*** *Pour leur sincère amitié et confiance,*

Mes collègues de département Mathématiques de l'université Hama Lakhdar d'el-oued

qui me soutient leur soutien moral et intellectuel tout au long

de ma démarche.

Abderrazzak

Remerciements

Avant toute chose, nous tenons à remercier **«Allah»** le tous puisant, pour nous avoir donné la force et la patience.

Nous exprimons notre profonde gratitude et nos remerciements :

À notre encadreur de mémoire **Dr. Adel Aissaoui** Maitre de Conférence à l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued, pour avoir accepté de nous encadrer, pour son enseignement, son support, ses encouragements tout au long de ce travail.

Nous tenons également à remercier messieurs les membres de jury pour l'honneur qu'ils nous on fait en acceptant de siéger à notre soutenance.

Un remerciement spécial et sincère aux **Prof. Lamine Nisse** et **Dr. Said Beloul**, de l'université Echahid Hamma Lakhder d'El Oued.

Cette page n'aurait probablement pas pu s'écrire sans l'appui moral des membres de nos familles.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux vont également au nos camarades de la promotion 2018 de Mathématiques et tous nos amis.

Finalement, Nous réservons une mention particulière à toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Table des matières

Introduction **1**

Notations générales **3**

1 Mesures de non compacité **4**

1.1 Espaces métriques 4

1.1.1 Topologie des espaces métriques 5

1.1.2 Suites dans des espaces métriques 5

1.1.3 La continuté dans les espaces métriques 6

1.2 Espaces de Banach 8

1.3 Compacité 10

1.4 Convexité 11

1.5 Mesures de non-compacité 12

1.5.1 Mesure de Kuratowski 14

1.5.2 Mesure de Hausdorff 14

1.5.3 Mesure de non compacité faible de De Blasi 15

1.5.4 Applications μ-contractions 16

2 Quelques théorèmes de point fixe **17**

2.1 Théorèmes de Schauder 17

2.2 Théorème de Darbo et ses généralisations 18

2.2.1 Quelques généralisations du théorème de Darbo 19

2.3 Théorèmes utilisant mesure de De Blasi 29

2.4 Théorème de Sadovskii 31

2.5 Théorème de Mönch 31

3 Application **33**

3.1 Solvabilité d'une équation intégrale non linéaire de type Volterra 33

3.2 Exemples 47

3.2.1 Exemples des opérateurs T 47

3.2.2 Exemples des fonctions u 50

Bibliographie **53**

Introduction générale

L'analyse est considérée comme l'une des sciences mathématiques, elle se développe dans ces dernières années par un afflux d'hypothèses et de théorèmes, en particulier dans la théorie du point fixe. Cette dernière est au coeur de l'analyse non linéaire puisqu'elle fournit les outils nécessaires pour avoir des théorèmes d'existence dans beaucoup de problèmes non linéaires différents. Il y a différentes applications dans la topologie et dans les autres sciences telles que la physique, la chimie, la biologie et l'économie ... etc.

La première apparition de la théorie du point fixe était à la fin du $19^{\text{ème}}$ siècle par le mathématicien polonais Banach intitulée, le principe de la contraction. Ce théorème est souvent mentionné comme le théorème du point fixe de Banach qui l'a énoncé en 1922 dans le cadre de la résolution des équations intégrales. Il est employé pour trouver des solutions approximatives et successives et l'existence d'une seule solution des équations notamment les équations différentielles. Ce théorème est appliqué dans l'espace métrique complet.

En 1930, Schauder a amélioré et généralisé le problème de l'existence et de l'unicité de Brower et insiste sur l'application continue sur un ensemble convexe et compact contrairement à Brower qui étudie seulement la compacité à cause de leur étude qui s'effectue sur la topologie.

Au cours des dernières années, de nombreux articles ont été consacrés à la notion de mesure de non-compacité. Les articles les plus explicatifs sur ce sujet. La notion de mesure de non-compacité a été définie de plusieurs façons. Où les mesures de non-compacité se sont également avérées très utiles en théorie des points fixes métriques, donnant des résultats d'existence ou de stabilité pour des applications non expansives et uniformément lipschitziennes basées sur certains coefficients définis en termes de telles mesures.

Dans la théorie du point fixe, un rôle important est joué par le concept de mesure de non-compacité. Ce concept a été initié par l'article fondamental de Kuratowski [15]. En 1955, G. Darbo, en utilisant le concept d'une mesure de non-compacité, a prouvé un théorème garantissant l'existence de points fixes des opérateurs condensantes [11]. Ce théorème a trouvé une abondance d'applications pour prouver l'existence des solutions pour une large classe d'équations différentielles et intégrales.

Il vaut la peine de mentionner que le théorème de Darbo étend à la fois le principe classique de la contraction de Banach et le théorème du point fixe de Schauder étendue aux opérateurs non compacts [8]. Certains auteurs ont utilisé la théorie des points fixes Darbo pour construire des applications de mesure de non-compacité.

Dans ce mémoire, nous présenterons des définitions bien connues, et la définition de la mesure de non-compacité avec quelques types, et quelques théorèmes importants du point fixe pour qui sont liés à la mesure de non-compacité dans l'espace de Banach, avec une application.

Nous avons réparti ces idées formant ce mémoire, en trois chapitres :

Le premier chapitre contient un rappel sur certaines notions utilisées tout au long de ce mémoire, comme : les espaces métriques, les espaces complets, les espaces de Banach, quelques éléments d'analyse fonctionnelle, les mesures de non-compacité et les applications condensantes.

Le deuxième chapitre est consacré à présenter le théorème de Schauder et quelques théorèmes du point fixe qui sont liés à la mesure de non-compacité dans l'espace de Banach, comme : théorème de Darbo et ses généralisations, théorèmes du point fixe utilisant mesure faible de De Blasi, théorème du point fixe de Sadovskii et théorème de Mönch.

Dans le troisième chapitre, on va appliquer le théorème de Darbo pour étudier l'existence de la solution d'une équation intégrale non linéaire de type Volterra.

Notations générales

Certaines notations seront utilisées tout au long de ce mémoire que nous lisons ci-dessous :

$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^n$	Espace vectoriel de dimension n construit sur le corps des réels.
$\lvert . \rvert$	Valeur absolue ou module.
$\overline{X}$	La fermeture de X.
$\overline{X}^{\omega}$	La fermeture pour la topologie faible de X.
$Conv\Omega$	L'enveloppe convexe et fermé de l'ensemble Ω.
$L^1(\mathbb{R}_+)$	Espace des fonctions integrables sur $\mathbb{R}_+$.
$\Vert . \Vert_1$	La norme associé d'espace $L^1(\mathbb{R}_+),$ tel que $\Vert f \Vert_1 = \int_{\mathbb{R}_+} \lvert f(x) \rvert dx.$
$diamX$	La diamètre d'ensemble X.
$BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$	L'espace des fonctions bornées et continues de $\mathbb{R}_+$vers $\mathbb{R}$.
$\Vert . \Vert$	La norme associé d'espace $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}),$ tel que $\Vert x \Vert = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \lvert x(t) \rvert.$
M_E	La famille de tous les sous-ensembles bornés non vides de E.
N_E	La sous-famille constituée de tous les ensembles relativement compacts de E.
E'	Espace dual topologique de l'espace E.
mes	La mesure de Lebesgue.

Chapitre 1

Mesures de non compacité

1.1 Espaces métriques

Définition 1.1.1. *Une distance sur un ensemble E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $x, y, z \in E$:*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, *(d est séparation).*
2. $d(x, y) = d(y, x)$, *(d est symétrie).*
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, *(inégalité triangulaire).*

Le couple (E, d) est appellé un espace métrique.

Exemple 1.1. *Soit $E =]0, +\infty[$. Pour $x, y \in E$, on définie sur E la distance*

$$d(x, y) = \Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big|.$$

En effet, on a

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = \Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big| = \Big|\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\Big| = d(y, x)$.
3. $d(x, z) = \Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\Big| \leq \Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\Big| + \Big|\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\Big| = d(x, y) + d(y, z)$.

Proposition 1.1.1 (seconde inégalité triangulaire)**.**

$$\forall\ x, y, z \in E, \quad |d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

1.1.1 Topologie des espaces métriques

Définition 1.1.2. *Dans un espace métrique (E, d), on appelle boule ouverte (resp. boule fermé) de centre $a \in E$ et de rayon $r > 0$, le sous-ensemble :*

$$B(a, r) = \{x \in E, d(a, x) < r\} \text{ (resp. } B_f(a, r) = \{x \in E, d(a, x) \leq r\}).$$

Définition 1.1.3. *Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. On dit que A est bornée si et seulement si*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \text{tel que} \quad \forall (x, y) \in A^2, \quad \text{on a} \quad d(x, y) \leq M.$$

Définition 1.1.4. *Soit A une partie non vide et bornée de E.*

On appelle diamètre de A le nombre $\delta(A)$ défini par :

$$\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x, y).$$

Remarque 1.1.

$$\delta(\emptyset) = 0.$$

Définition 1.1.5. *Soit (E, d) un espace métrique, A et B sont des parties bornées de E et $x \in E$.*

On définit la distance entre x et A par

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

On définit la distance entre A et B par

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

1.1.2 Suites dans des espaces métriques

Définition 1.1.6 (Convergence). *Soit (E, d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_n$ de E est dite convergente vers un élément x de E si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geqslant N_0 \Rightarrow d(x_n, x) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.1.7 (Suite de Cauchy). *Soit (E,d) un espace métrique. Une suite $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \quad m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Proposition 1.1.2.

1. *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*
2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Définition 1.1.8 (Espace métrique complet). *Soit (E,d) un espace métrique, on dit que (E,d) est complet si toute suite de Cauchy est convergente dans E.*

Exemple 1.2. *L'espace $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace métrique complet.*

1.1.3 La continuté dans les espaces métriques

Définition 1.1.9. *Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, et $f : E \longrightarrow F$ est une application, on dit que f est continue en $a \in E$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, d(x,a) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.2. *Une application f est continue sur E si et seulement si elle est continue en tout point a de E.*

Définition 1.1.10. *On dit que f est uniformément continue si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x, y \in E, d(x,y) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Exemple 1.3. *Soient (E,d) un espace métrique et $a \in E$. L'application $x \longmapsto d(a,x)$ est continue de E dans $[0, \infty[$.*

Théorème 1.1.1. *Soient E et F deux espaces métriques et $f : E \longrightarrow F$ et soit $b = f(a)$, on a*

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \text{si } V \text{ est un voisinage de } b \text{ alors } f^{-1}(V) \text{ est un voisinage de } a.$$

Corollaire 1.1.1 (Caractérisation d'une application continue). *Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes.*

(i) $f : E \longrightarrow F$ *est continue en tout point de* E.

(ii) Pour tout ouvert U *de* F *alors* $f^{-1}(U)$ *est un ouvert de* E.

(iii) Pour tout fermé W *de* F *alors* $f^{-1}(W)$ *est un fermé de* E.

Définition 1.1.11 (Application lipschitzienne). *Une application* $f : (E, d_E) \to (F, d_F)$ *est dite lipschitzienne s'il existe une constante* $k \geq 0$ *telle que*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y).$$

Théorème 1.1.2. *Toute application lipschitzienne est continue et en particulier, uniformément continue, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad \textit{tel que} \quad \forall x, y \in E, d_E(x, y) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Remarque 1.3. *Si la constante* $k < 1$ *et si* $E = F$, *on dit que* f *est une contraction.*

Définition 1.1.12 (Le point fixe). *Soient* (E, d) *un espace métrique, et* $f : E \longrightarrow E$ *une application, on dit qu'un point* $x \in E$ *est un point fixe de* f *si et seulement si* $f(x) = x$.

Définition 1.1.13 (La limite). *Soient* $(E, \|.\|)$ *et* $(F, \|.\|)$ *désignent deux espaces vectoriels normés,* A *est une partie de* E *et* $f : A \longrightarrow F$ *est une fonction.*

Soit $a \in \overline{A}$. *On dit que* f *admet une limite en* a *s'il existe* $l \in F$ *tel que,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \textit{tel que}\ \ \forall x \in B(a, \delta) \cap A, \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

Si f *admet une limite en* a, *cette limite est nécessairement unique.*

Définition 1.1.14 (Convergence faible). *Soit* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de* E *et soit* x *un élément de* E, *alors*

$$\Big(x_n \rightharpoonup x \ \ (\textit{Convergence faible}) \Big) \Leftrightarrow \Big(\exists f \in E',\ \textit{tel que}\ \ f(x_n) \to f(x)\ (\textit{Converge simple}) \Big).$$

Où $E' := \{ f : E \longrightarrow \mathbb{C},$ *telle que* f *linéaire et continue* $\}$, *cet espace est dit le dual topologique de* E.

1.2 Espaces de Banach

Définition 1.2.1. *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$, notée $\|.\|$ telle que

$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

a) $\|x\| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$.

b) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, *(inégalité triangulaire).*

c) $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|$, *(homogénéité).*

Remarque 1.4. *Un espace vectoriel normé (e.v.n.) est un couple $(E, \|.\|)$. Il s'agit d'un cas particulier d'espace métrique muni de la distance*

$$d(x, y) := \|x - y\|, \quad x, y \in E.$$

Remarque 1.5. *Tout espace vectoriel normé complet est dit espace de Banach.*

Exemple 1.4. *L'espace $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions réelles x définies, bornés et continus en $\mathbb{R}_+$, avec la norme maximale*

$$\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t)|,$$

est un espace de Banach.

En effet, soit $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, i.e.

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N_0 \in \mathbb{N}, \forall\ n, m \in \mathbb{N} \text{ tel que } n, m \geqslant N_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leqslant \varepsilon.$$

$$\|x_n - x_m\| = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x_m(t) - x_n(t)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall\ n, m \geqslant N_0. \tag{1.1}$$

Soit $t = t_0 \in \mathbb{R}_+$ fixé, alors on obtient

$$|x_n(t_0) - x_m(t_0)| \leqslant \varepsilon.$$

C'est à dire $(x_n(t_0))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, puisque $(\mathbb{R}, |.|)$ est un espace complet alors $(x_n(t_0))$ est convergente dans $\mathbb{R}$, soit vers un élément $x(t_0)$.

On peut définir la fonction x ponctuelement sur $\mathbb{R}_+$ par ; pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ il exist un seul élément $x(t)$ de $\mathbb{R}$ tel que, $x_n(t)$ convergente vers $x(t)$.

On va montrer que (x_n) est convergente vers x, puis on montre que $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

On tend n vers l'infini dans (1.1), on obtient

$$\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x_m(t) - x(t)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall\ m \geqslant N_0.$$

Par conséquent, (x_n) est convergente vers x, i.e.

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N_1 \in \mathbb{N}, \forall\ n \in \mathbb{N}\ \textit{tel que}\ n \geqslant N_1 \Rightarrow \|x_n - x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\|x_n - x\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x_n(t) - x(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

cela implique que

$$\forall\ t \in \mathbb{R}_+, \quad |x_n(t) - x(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a

$$\forall\ t \in \mathbb{R}_+, \quad \Big||x_n(t)| - |x(t)|\Big| \leqslant |x_n(t) - x(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

alors

$$\forall\ t \in \mathbb{R}_+, \quad |x(t)| \leqslant |x_n(t)| + \frac{\varepsilon}{3},$$

puisque x_n est bornée, i.e.

$$\exists\ M > 0, \forall\ t \in \mathbb{R}_+ : |x_n(t)| \leqslant M.$$

Donc

$$\forall\ t \in \mathbb{R}_+, \quad |x(t)| \leqslant M + \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'où x est bornée.

D'autre part, on a x_n continue en $t_1 \in \mathbb{R}_+$ (quelconque), i.e.

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0, \textit{tel que}\ |t - t_1| \leqslant \delta\ \forall\ t \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow |x_n(t) - x_n(t_1)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

On va etudier la continuté de x en t_1

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t_1)| &= |x(t) - x_n(t) + x_n(t) - x_n(t_1) + x_n(t_1) - x(t_1)| \\ &\leqslant |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(t_1)| + |x_n(t_1) - x(t_1)| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors, x est continue en $t_1 \in \mathbb{R}_+$ (quelconque), ce qui implique x est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par suite, la limite x est une fonction définie, bornée et continue sur $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, i.e. $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Par conséquent, l'espace $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

1.3 Compacité

Définition 1.3.1 (**Les ensembles compacts**)**.** *On dit qu'un ensemble A de E est compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite converge vers un élément de A.*

Définition 1.3.2 (Autre définition d'ensemble compact)**.** *Soit A un ensemble d'un espace normé E, A est dit compact si de tout recouvrement de A par des ouverts de A on peut extraire un sous-recouvrement fini i.e.*

$$\forall V_j, j \in J \ (ouverts); U \subset \bigcup_{j \in J} V_j, \exists V_{j(k)}, k = 1, 2, ..., n \ tel\ que \ \ U \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{j(k)}.$$

Proposition 1.3.1.

1. *Si A est compact, alors A est fermé et borné.*
2. *Si E est de dimension finie, alors A est compact si et seulement si A est fermé et borné.*

Définition 1.3.3 (**Les ensembles faiblement compacts**)**.** *On dit qu'un ensemble A de E est faiblement compact si de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite faiblement converge vers un élément de A.*

Définition 1.3.4 (**Les ensembles relativement compacts**)**.** *On dit qu'un ensemble A de E est relativement compact si et seulement si son adhérence $\overline{A}$ est compact.*

Définition 1.3.5 (**Les ensembles faiblement relativement compacts**)**.** *On dit qu'un ensemble A de E est faiblement relativement compact si et seulement si son adhérence $\overline{A}$ est faiblement compact.*

Définition 1.3.6 (L'application compacte). *Soient E et F deux espaces de Banach, Ω une partie non vide de E.*

Une application $f : \Omega \subseteq E \longrightarrow F$ est dite compacte si et seulement si elle est continue et l'image de tout ensemble borné X de Ω est un ensemble relativement compact de F, c'est-à-dire, $\overline{f(X)}$ est un compact.

1.4 Convexité

Définition 1.4.1. *Un sous-ensemble X d'un espace vectoriel normé E est dit*

i) Affine si et seulement si :

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1-\lambda)x + \lambda y \in X.$$

ii) Convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in X, \forall \lambda \in [0,1], \quad (1-\lambda)x + \lambda y \in X.$$

Autrement dit, un ensemble est affine (resp. convexe) s'il contient toute droite (resp. tout segment) passant par deux de ses points.

Exemples

Nous commençons par quelques exemples élémentaires.

i) Tout ensemble affine est convexe.

ii) Soit $\|.\|$ une norme sur l'espace vectoriel E. Pour tout $x \in E$ et $r \geq 0$, la boule centrée en x et de rayon r (ouverte ou fermée) est convexe

$$B(x, r) := \{y \in E / \|x - y\| \leq r\}.$$

iii) Pour toute forme linéaire $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, le sous-niveau

$$S = \{x \in E, \phi(x) \leq b\},$$

est un ensemble convexe appelé demi-espace.

En effet, soient $x, y \in S$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(y) \\
&\leq \lambda b + (1-\lambda)b \\
&= b,
\end{aligned}$$

alors,

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in S.$$

Définition 1.4.2 (**L'enveloppe convexe et fermé**). *Soit Ω un ensemble d'un espace vectoriel normé E. On dit que l'enveloppe convexe et fermé d'ensemble Ω est un plus petit convexe et fermé contient à Ω i.e.*

$$Conv\Omega = \bigcap \Big\{K \subset E : K \supset \Omega, K \text{ est convexe et fermé}\Big\}.$$

Définition 1.4.3 (**Les applications convexes**). *Soit f une application d'espace vectoriel normé E dans $\mathbb{R}$. On dit que l'application f est convexe sur E, si pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Exemple 1.5. *La norme $\|.\|$ définie sur l'espace de Banach E est une application convexe.*

En effet, soient $x, y \in E$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a

$$\begin{aligned}
\|\lambda x + (1-\lambda)y\| &\leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| \\
&= |\lambda|\|x\| + |(1-\lambda)|\|y\| \\
&= \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|
\end{aligned}$$

1.5 Mesures de non-compacité

Considérons E est un espace de Banach avec la norme $\|.\|$. On a noté par M_E la famille de tous des sous-ensembles bornés non vides de E et par N_E sa sous-famille constituée de tous les ensembles relativement compacts.

Définition 1.5.1. *[2, 8, 9] On dit qu'une application $\mu : M_E \to \mathbb{R}_+$ est une mesure de non-compacité dans E si elle satisfaite les propriétés suivantes pour tout $X, Y \in M_E$:*

1. *La famille* $\ker\mu = \{X \in M_E : \mu(X) = 0\}$ *est non vide et* $\ker\mu \subset N_E$.
2. $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.
3. $\mu(\overline{X}) = \mu(X)$.
4. $\mu(ConvX) = \mu(X)$.
5. $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$ *pour* $\lambda \in [0,1]$.

   C'est à dire que l'application μ *est une application convexe sur* M_E.
6. *Si* $\{X_n\}$ *est une suite décroissante d'ensembles fermées de* M_E *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$$

   alors l'ensemble d'intersection $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ *est non vide.*

La famille $\ker\mu$ d'écrit dans la propriété 1 est appellée le noyau de la mesure de non-compacité μ.

En remarquant que l'ensemble d'intersection X_∞ est un membre du noyau $\ker\mu$.

En effet, puisque

$$\mu(X_\infty) \leq \mu(X_n), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$\mu(X_\infty) = 0.$$

Cela donne $X_\infty \in \ker\mu$.

Pour plus des propriétés des mesures de non-compacité nous référons à [8].

Dans la suite, nous allons utiliser des mesures de non-compacité ayant des propriétés supplémentaires.

Une mesure est dite sous-linéaire si elle satisfaite aux deux conditions suivantes :

1. $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X), \quad \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$.

Une mesure de non-compacité sous-linéaire μ satisfaisante la condition

$$\mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\},$$

tel que $\ker\mu = N_E$ est dit régulier.[9]

1.5.1 Mesure de Kuratowski

Soit E un espace métrique et Ω un sous ensemble non vide et borné de E.

Définition 1.5.2. *[15] La mesure de non compacité de Kuratowski de l'ensemble Ω, notée $\alpha(\Omega)$ est l'inf des nombres $d > 0$, tel que Ω admet un recouvrement fini par des ensembles de diamètre inférieur à d, i.e.*

$$\alpha(\Omega) = \inf\Big\{d > 0, \Omega = \bigcup_{i=1}^{n}\Omega_i \quad \textit{tel que} \quad \delta(\Omega_i) \leq d\Big\}.$$

1.5.2 Mesure de Hausdorff

Avant de donner la définition de la mesure de non-compacité de Hausdorff, rappelons d'abord la notion de ε-réseau dans le cas où $(E, \|.\|)$ est un espace normé. Ici, on note par $B_E = B(0,1)$.

Définition 1.5.3. *Soit E un espace normé. Un ensemble $S \subset E$ est appelé un ε-réseau de Ω si*

$$\Omega \subset S + \varepsilon\overline{B}_E = \Big\{s + \varepsilon b; s \in S, b \in \overline{B}_E\Big\}.$$

Définition 1.5.4. *La mesure de non compacité de Hausdorff de l'ensemble Ω, notée $\chi(\Omega)$ est l'inf des nombres ε tels que Ω admet un ε-réseau fini dans E, i.e.*

$$\chi(\Omega) = \inf\Big\{\varepsilon > 0, \ \textit{tel que} \ \exists \ S \ \textit{fini de} \ E, \Omega \subset S + \varepsilon\overline{B}_E\Big\}.$$

Remarque 1.6. *Dans le cas où Ω est un sous-ensemble non vide et non borné, alors*

$$\alpha(\Omega) = \chi(\Omega) = \infty.$$

les deux mesures de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff sont liées entre elles par le théorème suivant :

Théorème 1.5.1. *Soient α et χ les mesures de non-compacité de Kuratowski et de Hausdorff et Ω un sous ensemble d'un espace de Banach E. Alors*

$$\chi(\Omega) \leq \alpha(\Omega) \leq 2\chi(\Omega).$$

Preuve. Voir [3] □

1.5.3 Mesure de non compacité faible de De Blasi

Dans toute cette section, E désigne un espace de Banach, M_E la famille de toutes les parties non vides bornées de E et Γ_E un sous ensemble de M_E formé de toutes les parties faiblement compactes de E. Soit $\overline{B}_r$ la boule fermée dans E de centre 0 et de rayon r.

Dans [17, 12], De Blasi a introduit l'application suivante $\nu : M_E \longrightarrow [0, \infty[$ définie par :

$$\nu(X) = \inf \Big\{ r > 0 : \text{il existe un ensemble } \; Y \in \Gamma_E \text{ tel que } X \subseteq Y + \overline{B}_r \Big\},$$

pour tout $X \in M_E$.

Définition 1.5.5. *[20] L'application ν est appellée la mesure de non compacité faible de De Blasi.*

Quelques propriétés [20]

Soient $X_1, X_2 \in E$ alors

1. Monotonie : Si $X_1 \subseteq X_2$ alors $\nu(X_1) \leq \nu(X_2)$.
2. $\nu(X_1) = 0$ si et seulement si X_1 est relativement faiblement compact.
3. $\nu(\overline{X}_1^w) = \nu(X_1)$, où $\overline{X}_1^w$ la fermeture pour la topologie faible de X_1.
4. Semi-homogèneité : $\nu(\lambda X_1) = |\lambda|\nu(X_1)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. Invariance par enveloppe convexe :$\nu(Conv X_1) = \nu(X_1)$.
6. Semi-additivité algébrique : $\nu(X_1 + X_2) \leq \nu(X_1) + \nu(X_2)$.
7. Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante des parties non vide, bornées, et faiblement fermées de E avec $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \nu(X_n) = 0$, alors
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq 0 \text{ et } \nu(\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n) = 0,$$
c'est à dire $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ est relativement faiblement compact.

Une caractérisation de la mesure de non compacité faible de De Blasi dans les espaces L^1 a été donnée par Appell et De Pascale dans [4] sous une forme plus simple comme suit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Big\{ \sup_{x \in X} \Big\{ \sup \Big\{ \int_{\Omega_0} |x(t)| dt : \Omega_0 \subseteq \Omega, mes(\Omega_0) \leqslant \varepsilon \Big\} \Big\} \Big\},$$

pour tout $X \in M_{L^1(\Omega)}$ où mes désigne la mesure de Lebesgue.

1.5.4 Applications μ-contractions

Soient E et F deux espaces de Banach.

Définition 1.5.6. *[14, 10] Soit $f : E \longrightarrow F$ une application continue et bornée sur chaque sous ensemble borné de E.*

On dit que f est :

1. *μ-lipchitzienne avec la constante $k \geq 0$, si*

$$\mu(f(\Omega)) \leq k\mu(\Omega), \quad \forall\Omega \in M_E.$$

2. *complètement continue si elle est μ-lipchitzienne avec $k = 0$.*
3. *μ-contraction si elle est μ-lipchitzienne avec $k < 1$.*
4. *condensante si elle est μ-lipchitzienne avec $k = 1$ et*

$$\mu(f(\Omega)) < \mu(\Omega),$$

pour tout Ω borné et non relativement compact $(\mu(\Omega) > 0)$.

Remarque 1.7. *Toute application complètement continue est une application μ-contraction, ainsi toute application μ-contraction est une application condensante.*

Définition 1.5.7. *supposons que M est un sous-ensemble non vide d'un espace de Banach E et $T : M \to E$ est un opérateur continu. On dit que T satisfait la condition Darbo (avec une constante $k \geqslant 0$) par rapport à une mesure de non-compacité si, pour tout sous-ensemble borné X de M, l'inégalité suivante est vraie :*

$$\mu(TX) \leq k\mu(X).$$

Chapitre 2

Quelques théorèmes de point fixe

Ce chapitre est consacré pour présenter quelques théorèmes du point fixe qui correspendent avec la mesure de non-compacité.

D'abord, nous rappelons par les théorèmes du point fixe principaux dans l'espace de Banach. En particulier on présente dans le premier section deux théorèmes de Schauder, que nous utilisons dans les théorèmes à venir dans ce chapitre.

2.1 Théorèmes de Schauder

Théorème 2.1.1 (**Le premier théorème de Schauder**, [7, 5]). *Si Ω un sous-ensemble non vide, convexe et compact d'espace de Banach E, et $F : \Omega \to \Omega$ une application continue sur Ω. Alors F admet au moins un point fixe dans Ω.*

Preuve.

Voir [5]. $\square$

Théorème 2.1.2 (**Deuxième théorème de Schauder**, [1, 7, 5]). *Soit Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace de Banach E. Alors toute application continue et compacte $F : \Omega \to \Omega$ admet au moins un point fixe dans Ω.*

Preuve.

Voir [5]. $\square$

2.2 Théorème de Darbo et ses généralisations

Dans cette section on présente le théorème de Darbo et quelques ses généralisations qui donner l'existance du point fixe pour des applications continues sur un sous-ensembles non vides, bornés, fermés et convexes des espaces Banach.

Maintenant nous rappelons le théorème du point fixe suivant qui est une version du point fixe classique pour les applications lipschitziennes dans le contexte des mesures de non-compacité.

Théorème 2.2.1 (**Darbo**, [8]). *Soient Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace de Banach E et $T : \Omega \to \Omega$ est une fonction continue et μ est une mesure de non-compacité définie dans E. Supposons qu'il existe une constante $k \in [0, 1[$ telle que*

$$\mu(TX) \leqslant k\mu(X), \tag{2.1}$$

pour tout sous-ensemble non vide de Ω. Alors T admet un point fixe dans Ω.

Preuve. On considère une suite (Ω_n) décroissante et définie par :

$$\Omega_0 = \Omega \text{ et } \Omega_n = ConvT\Omega_{n-1}, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

S'il existe un nombre naturel n_0 tel que $\mu(\Omega_{n_0}) = 0$, alors Ω_{n_0} est rélativement compact et puisque $T\Omega_{n_0} \subseteq \Omega_{n_0}$.

Donc le théorème de Schauder 2.1.1 implique que T admet un point fixe.

D'autre part, supposons que $\mu(\Omega_n) > 0$ pour tout $n \geq 0$.

En utilisant (2.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} \mu(\Omega_{n+1}) &= \mu(ConvT\Omega_n) \\ &= \mu(T\Omega_n) \\ &\leq k\mu(\Omega_n). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Puisque $k < 1$, alors

$$\mu(\Omega_{n+1}) < \mu(\Omega_n), \quad \forall\, n \geq 0.$$

Par conséquent, $\{\mu(\Omega_n)\}$ est une suite décroissante des nombres réels positifs.

Alors, il existe $r > 0$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n) = r. \tag{2.3}$$

Donc, d'après (2.2) on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_{n+1}) \leq \lim_{n\to\infty} k\mu(\Omega_n),$$

alors

$$0 \leq r \leq kr,$$

implique que $r = 0$.

Alors,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n) = 0.$$

Maintenant, puisque

$$\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n \text{ et } T\Omega_n \subseteq \Omega_n.$$

D'après la propriété 6 de mesure de non-compacité, nous conclurons que $\Omega_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ est un sous-ensemble non vide, fermé, convexe de Ω et invariant sous l'opérateur T, et donc il appartient à $Ker\mu$.

Par conséquent, d'après le théorème de Schauder 2.1.1, T admet un point fixe dans Ω. □

2.2.1 Quelques généralisations du théorème de Darbo

Théorème 2.2.2. *[21] Soit Ω est un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'espace de Banach E. De plus, supposons que $T : \Omega \to \Omega$ est une fonction continue telle que*

$$\Psi(\mu(TX)) \leq \phi(\mu(X)), \tag{2.4}$$

pour chaque sous-ensemble non vide X de Ω, où Ψ et $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions.

Supposons que

(i) pour $u, v \in \mathbb{R}_+$ si $\Psi(u) \leq \phi(v)$, alors $u \leq v$.

(ii) pour $\{u_n\}, \{v_n\} \subset \mathbb{R}_+$ *avec* $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n = w$,

$$si\ \Psi(u_n) \leq \phi(v_n)\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ alors\ w = 0.$$

Et par conséquent, T *admet un point fixe dans* Ω.

Preuve. [21] On considère la suite (Ω_n) décroissante et définie par :

$$\Omega_0 = \Omega \text{ et } \Omega_n = ConvT\Omega_{n-1}, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

S'il existe un nombre naturel n_0 tel que $\mu(\Omega_{n_0}) = 0$, alors Ω_{n_0} est rélativement compact et puisque $T\Omega_{n_0} \subseteq \Omega_{n_0}$.

Donc le théorème de Schauder 2.1.1 implique que T admet un point fixe dans Ω.

D'autre part supposons que $\mu(\Omega_n) > 0$ pour tout $n \geq 0$.

En utilisant (2.4) nous obtenons

$$\begin{aligned} \Psi(\mu(\Omega_{n+1})) &= \Psi(\mu(ConvT\Omega_n)) \\ &= \Psi(\mu(T\Omega_n)) \\ &\leq \phi(\mu(\Omega_n)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

En raison de la condition (i) et (2.5) on déduit que $\{\mu(\Omega_n)\}$ est une suite décroissante de nombres réels positifs.

Alors, il existe $r \geq 0$ tel que $\mu(\Omega_n) \to r$ quand $n \to \infty$.

Donc, vu de (2.5) et de la condition (ii), nous obtenons $r = 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n) = 0.$$

Maintenant, puisque

$$\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n \text{ et } T\Omega_n \subseteq \Omega_n,$$

donc la propriété 6 de mesure de non-compacité implique que $\Omega_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ est non vide, fermé, convexe et invariant sous l'opérateur T, donc il appartient à $Ker\mu$.

D'où, d'après le théorème de Schauder 2.1.1, T admet un point fixe dans Ω. $\square$

Théorème 2.2.3. *[21] Soit Ω est un sous-ensemble non vide, fermé, borné et convexe d'espace de Banach E. De plus, suppose que $T : \Omega \to \Omega$ est une fonction continue telle que*

$$\Psi(\mu(TX)) \leq \varphi(\mu(X)) - \theta(\mu(X)), \tag{2.6}$$

pour chaque sous-ensemble non vide X de Ω, où Ψ, φ et $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sont trois fonctions tels que φ et θ sont bornées sur tout interval borné dans $\mathbb{R}_+$ et Ψ est continue.

De plus, supposons que

(1) $\Psi(x) \leq \varphi(y) \Rightarrow x \leq y$,

(2) pour toute suite $\{x_n\}$ dans $\mathbb{R}_+$ avec $x_n \to t > 0$,

$$\Psi(t) - \lim_{n\to\infty} \sup \varphi(x_n) + \lim_{n\to\infty} \inf \theta(x_n) > 0.$$

Alors, T admet un point fixe dans Ω.

Preuve. [21] De même que dans la preuve du théorème 2.2.2, nous construisons la suite $\{\Omega_n\}$ par

$$\Omega_0 = \Omega \text{ et } \Omega_n = ConvT\Omega_{n-1}, \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

S'il existe un nombre naturel n_0 tel que $\mu(\Omega_{n_0}) = 0$, alors Ω_{n_0} est rélativement compact.

Par conséquent, d'après le théorème de Schauder 2.1.1, nous conclusons que T admet un point fixe dans Ω.

D'autre part, supposons que $\mu(\Omega_n) > 0$ pour tout $n \geq 0$.

En appliquant (2.6) nous obtenons

$$\begin{aligned} \Psi(\mu(\Omega_{n+1})) &= \Psi(\mu(ConvT\Omega_n)) \\ &= \Psi(\mu(T\Omega_n)) \\ &\leq \varphi(\mu(\Omega_n)) - \theta(\mu(\Omega_n)). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Puisque $\theta \geq 0$, donc de (2.7) nous obtenons

$$\Psi(\mu(\Omega_{n+1})) \leq \varphi(\mu(\Omega_n)),$$

qui par condition (1) implique que

$$\mu(\Omega_{n+1}) \leq \mu(\Omega_n).$$

Par conséquent, $\{\mu(\Omega_n)\}$ est une suite décroissante des nombres réels positifs.

Alors, il existe $r > 0$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n) = r. \tag{2.8}$$

Nous allons prouver que $\mu(\Omega_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Prendre la limite supérieure des deux côtés de (2.7) et en utilisant les propriétés des fonctions Ψ, φ et θ, on a

$$\Psi(r) \leq \limsup_{n\to\infty} \varphi(\mu(\Omega_n)) + \limsup_{n\to\infty} (-\theta(\mu(\Omega_n))). \tag{2.9}$$

Par conséquent,

$$\Psi(r) \leq \limsup_{n\to\infty} \varphi(\mu(\Omega_n)) - \liminf_{n\to\infty} \theta(\mu(\Omega_n)), \tag{2.10}$$

cela implique que

$$\Psi(r) - \limsup_{n\to\infty} \varphi(\mu(\Omega_n)) + \liminf_{n\to\infty} \theta(\mu(\Omega_n)) \leq 0. \tag{2.11}$$

Donc, de la condition (2), nous conclusons que $r = 0$.

Alors,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n) = 0.$$

Maintenant, puisque

$$\Omega_{n+1} \subseteq \Omega_n \text{ et } T\Omega_n \subseteq \Omega_n.$$

En utilisant la propriété 6 de mesure de non-compacité nous conclusons que $\Omega_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ est non vide, fermé, convexe et invariant sous l'opérateur T et appartient à $Ker\mu$.

Par conséquent, d'après le théorème de Schauder 2.1.1, T admet un point fixe dans Ω. $\square$

Théorème 2.2.4. *[2] Soient Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace de Banach E et $T : \Omega \to \Omega$ est un opérateur continu tel que*

$$\Psi(\mu(TX)) \leqslant \Psi(\mu(X)) - \varphi(\mu(X)), \tag{2.12}$$

pour tout sous-ensemble non vide X de Ω, où φ et $\Psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sont données des fonctions tels que φ est semi-continue inférieurement et Ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

De plus,

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \varphi(t) > 0 \text{ pour } t > 0.$$

Alors T admet au moins un point fixe dans Ω.

Preuve. [2] On considère la suite (Ω_n) décroissante définie par :

$$\Omega_0 = \Omega \text{ et } \Omega_n = ConvT\Omega_{n-1}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

S'il existe un nombre naturel n_0 tel que $\mu(\Omega_{n_0}) = 0$, alors Ω_{n_0} est compact.

Dans ce cas le théorème de Schauder 2.1.1 implique que T admet un point fixe dans Ω.

D'autre part, supposons que $\mu(\Omega_n) > 0$, pour $n = 1, 2, ...$

Par nos hypothèses, on obtient

$$\begin{aligned} \Psi(\mu(\Omega_{n+1})) &= \Psi(\mu(ConvT\Omega_n)) \\ &= \Psi(\mu(T\Omega_n)) \\ &\leq \Psi(\mu(\Omega_n)) - \varphi(\mu(\Omega_n)). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Puisque la suite $(\mu(\Omega_n))$ est décroissante et positive, on déduit que $\mu(\Omega_n) \to r$ quand n tend vers l'infini, où $r \geq 0$ est un nombre réel positif.

D'autre part, au vu de (2.13), nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \sup \Psi(\mu(\Omega_{n+1})) \leq \lim_{n\to\infty} \sup \Psi(\mu(\Omega_n)) - \lim_{n\to\infty} \inf \varphi(\mu(\Omega_n)).$$

Cela donne

$$\Psi(r) \leq \Psi(r) - \varphi(r).$$

Par conséquent,

$$\varphi(r) = 0 \text{ alors } r = 0.$$

D'où nous déduisons que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n) = 0.$$

Maintenant, puisque

$$\Omega_{n+1} \subset \Omega_n.$$

En utilisant la propriété 6 de mesure de non-compacité nous conclusons que $\Omega_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ est non-vide, fermé, convexe et $\Omega_\infty \subset \Omega$.

De plus, l'ensemble Ω_∞ est invariant sous l'opérateur T et $\Omega_\infty \in \ker \mu$.

Ainsi, en appliquant le théorème de Schauder 2.1.1 nous complétons la preuve. $\square$

Théorème 2.2.5 (**Darbo généralisé**, [2])**.** *Soient Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace de Banach E et $T : \Omega \to \Omega$ est un opérateur continu satisfait l'inégalité suivant*

$$\mu(TX) \leq \varphi(\mu(X)), \tag{2.14}$$

pour tout sous-ensemble non vide X de Ω, où $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante telle que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0, \quad \textit{pour tout } t \geq 0.$$

Alors T admet au moins un point fixe dans Ω.

Preuve. [2] De même que dans la démonstration de théorème précédent, nous définissons par induction la suite (Ω_n), où

$$\Omega_0 = \Omega \text{ et } \Omega_n = ConvT\Omega_{n-1}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

De la même manière qu'avant, nous pouvons supposer que $\mu(\Omega_n) > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, d'après nos hypothèses, on a

$$\begin{aligned}
\mu(\Omega_{n+1}) &= \mu(ConvT\Omega_n) \\
&= \mu(T\Omega_n) \\
&\leq \varphi(\mu(\Omega_n)) \\
&\leq \varphi^2(\mu(\Omega_{n-1})) \\
&\leq ... \leq \varphi^n(\mu(\Omega)).
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\Omega_n) = 0.$$

Puisque la suite (Ω_n) est décroissante, d'après la propriété 6 de mesure de non-compacité, on déduit que l'ensemble $\Omega_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe de l'ensemble Ω.

Par conséquent, nous obtenons que Ω_∞ est un élément du noyau $\ker \mu$.

Alors, Ω_∞ est compact.

Ensuite, en gardant à l'esprit que T de Ω_∞ vers lui-même.

D'après le théorème de Schauder 2.1.1 nous déduisons que l'opérateur T admet un point fixe x dans l'ensemble Ω_∞.

Évidemment $x \in \Omega$. Ceci complète la preuve. $\square$

Maintenant, faisons attention au corollaire suivant de théorème précédent qui appartient au théorie classique des points fixes métriques.

Corollaire 2.2.1. *[2] Soient Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace de Banach E et $T : \Omega \to \Omega$ est un opérateur continu tel que*

$$\|Tx - Ty\| \leq \varphi\Big(\|x - y\|\Big), \tag{2.15}$$

pour tout $x, y \in \Omega$, où $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante avec

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0, \quad \textit{pour tout } t > 0.$$

Alors T admet un point fixe dans Ω.

Preuve. [2] Soit $\mu : M_E \to \mathbb{R}_+$ est une quantité définie par la formule :

$$\mu(X) = diam X,$$

où

$$diam X = \sup\{\|x - y\| : x, y \in X\},$$

représente le diamètre de X.

On voit facilement que μ est une mesure de non-compacité dans un espace E (voir. [6, 8]).

Plus de remarquer que depuis la fonction φ est croissante, puis en vue de (2.15) on a

$$\begin{aligned}\sup_{x,y\in X}\|Tx-Ty\| &\leq \sup_{x,y\in X}\varphi\Big(\|x-y\|\Big)\\ &\leq \varphi\left(\sup_{x,y\in X}\|x-y\|\right).\end{aligned}$$

Cela donne

$$\mu(TX)\leq \varphi(\mu(X)).$$

Après l'application de théorème 2.2.5, la preuve se termine. $\square$

Dans ce qui suit, nous montrons que l'hypothèse en disant que

$$\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t)=0 \text{ pour } t>0,$$

peut être remplacé par d'autres exigences pratiques.

Lemme 2.2.1. *[2] Soit $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ une fonction croissante et semi-continue supérieurement. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t)=0$ *pour tout $t>0$,*

(ii) $\varphi(t)<t$ *pour tout $t>0$.*

Preuve. [2] Si (i) est satisfaite.

Supposons que la condition (ii) ne tient pas i.e.

$$\exists\ t_0\in\mathbb{R}_+^* \text{ tel que } \varphi(t_0)\geq t_0.$$

Par conséquent, puisque φ est croissante on déduit que

$$\varphi^2(t_0)=\varphi(\varphi(t_0))\geq\varphi(t_0)\geq t_0.$$

Par induction on obtient que

$$\varphi^n(t_0)\geq t_0>0,\quad \text{pour } n=1,2,....$$

Cela donne la contradiction et prouve que la condition (ii) est satisfaite.

Réciproquement, supposons que φ satisfait la condition (ii).

Si on prend un nombre réel $t > 0$ et on considére la suite $(\varphi^n(t))$.

On a

$$\varphi^2(t) = \varphi(\varphi(t)) < \varphi(t).$$

De même, par induction, nous pouvons facilement voir que la suite $(\varphi^n(t))$ est décroissante et positive. Puis, il existe la limite

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = r.$$

Si $r = 0$ on a la conclusion souhaitée.

Si $r > 0$, puis en vue de nos hypothèses, nous avons que $\varphi(r) < r$.

D'un autre côté, nous avons que $r < \varphi^n(t)$ pour tout $n = 1, 2, ...$

Au vu de la semi-continuité supérieurement de φ, cela implique que

$$\begin{aligned} r &\leq \lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi(\varphi^{n-1}(t)) \\ &\leq \varphi(r) < r. \end{aligned}$$

La contradiction obtenue complète la preuve. $\square$

Remarquez cela, les hypothèses sur la semi-continuité supérieurement de la fonction φ est exploité uniquement dans la preuve de l'implication (ii)$\Rightarrow$ (i).

De plus, dans la preuve de cette implication, nous n'utilisons pas le fait que, φ est croissante.

D'un autre côté, il est facile de voir que si φ n'est pas semi-continue supérieurement sur $\mathbb{R}_+$ et satisfaite à la condition (ii) alors φ ne doit pas satisfaite à la condition (i).

En effet, considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad t = 0 \\ \dfrac{1}{n} + \ln\left(t + \dfrac{n-1}{n}\right), & \text{si} \quad t \in \left]\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n-1}\right] \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2} + \ln\left(t + \dfrac{1}{2}\right), & \text{si} \quad t > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que φ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\varphi(t) < t$ pour $t > 0$ mais φ n'est pas semi-continue supérieurement.

D'un autre côté, nous pouvons facilement voir que φ ne satisfaite pas la condition (i).

Maintenant, nous fournissons une remarque concernant une interconnexion entre les théorèmes 2.2.4 et 2.2.5.

Remarque 2.1. *Observons que si la fonction $\Psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ apparaissante dans le théorème 2.2.4 augmente, alors le théorème 2.2.4 peut être traité comme un cas particulier de théorème 2.2.5 à condition de supposer que φ strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et Ψ est continue sur $\mathbb{R}_+$.*

Pour prouver ce fait, observons d'abord que de l'inégalité (2.12), nous déduisons que

$$\Psi(t) - \varphi(t) \geq 0, \quad \text{pour } t \geq 0.$$

Ainsi, puisque la fonction Ψ est inversible et la fonction inverse Ψ^{-1} est définie et continue sur un sous-intervalle de $\mathbb{R}_+$, nous pouvons écrire l'inégalité (2.12) de manière équivalente sous la forme :

$$\mu(TX) \leq \Psi^{-1}(\Psi(\mu(X)) - \varphi(\mu(X))) \tag{2.16}$$

pour tout $X \in M_E$.

De plus, considérons la fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par la forme :

$$\phi(t) = \Psi^{-1}(\Psi(t) - \varphi(t)).$$

Remarquer que ϕ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, l'inégalité (2.16) peut être écrite sous la forme :

$$\mu(TX) \leq \phi(\mu(X)),$$

pour $X \in M_E$, qui a la même forme que l'inégalité (2.14) de théorème 2.2.5.

Notez que vu le fait que la fonction Ψ^{-1} est croissante sur $\mathbb{R}_+$ on déduit que pour $t > 0$ l'inégalité suivante est vérifié

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \Psi^{-1}(\Psi(t) - \varphi(t)) \\ &< \Psi^{-1}(\Psi(t)) \\ &= t.\end{aligned}$$

Ainsi, en vue du Lemme 2.2.1, la fonction ϕ satisfaite à l'obligation $\lim\limits_{n\to\infty}\phi^n(t) = 0$ de Théorème 2.2.5.

Cela montre que nous pouvons appliquer le théorème 2.2.5 ce qui justifie notre affirmation ci-dessus.

2.3 Théorèmes utilisant mesure de De Blasi

Définition 2.3.1. *Une application $f : X \subseteq E \longrightarrow E$ est dite ν-contractive si elle envoie les ensembles bornés de X vers des ensembles bornés de E tel qu'il existe $\beta \in [0, 1[$ avec*

$$\nu(f(A)) \leq \beta\nu(A),$$

pour tout ensemble borné $A \subseteq X$, où ν est une mesure de non-compacité faible de De Blasi.

Définition 2.3.2. *[20] Soit $g : E \longrightarrow E$ un opérateur non linéaire. On aura besoin des deux conditions suivantes :*

($\mathcal{H}_1$) *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite faiblement convergente dans E, alors $g((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ admet une sous suite fortement convergente dans E.*

($\mathcal{H}_2$) *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite faiblement convergente dans E, alors $g((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$ admet une sous suite faiblement convergente dans E.*

Remarque 2.2.

1. *Les opérateurs satisfaisants $(\mathcal{H}_1)$ ou $(\mathcal{H}_2)$ ne sont pas nécessairement faiblement continus.*
2. *Une application g satisfaite $(\mathcal{H}_2)$ si et seulement si elle envoie les ensembles relativement faiblement compacts vers des ensembles relativement faiblement compacts.*

Théorème 2.3.1. *Soient Ω un sous ensemble non vide, borné, fermé et convexe de E et $T : \Omega \to \Omega$ une application continue satisfaisante $(\mathcal{H}_1)$. Si $T(\Omega)$ est relativement faiblement compact, alors il existe $x \in \Omega$ tel que $T(x) = x$.*

Preuve. Voir [17]. $\square$

Notons que l'ensemble Ω dans le théorème précédent n'est pas nécessairement borné. Dans le cas où Ω est supposé être borné, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 2.3.2. *[20] Soient Ω un sous ensemble non vide, borné, fermé et convexe de E et $T : \Omega \longrightarrow \Omega$ une application continue satisfaisante $(\mathcal{H}_1)$. Si T est ν-contractive, alors il existe $x \in \Omega$ tel que $T(x) = x$.*

Preuve. [20] On considère la suite (Ω_n) comme

$$\Omega_1 = \Omega \text{ et } \Omega_{n+1} = Conv(T(\Omega_n)), \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Il est clair que la suite $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est formée des parties non vides, fermées, convexes et décroissantes de Ω.

Comme T est ν-contractive, alors, pour un certain $\beta \in [0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} \nu(\Omega_2) &= \nu(Conv(T(\Omega_1)) \\ &= \nu(T(\Omega_1)) \\ &\leq \beta\nu(\Omega_1). \end{aligned}$$

Par induction, on obtient

$$\nu(\Omega_{n+1}) \leq \beta^n \nu(\Omega),$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} (\Omega_n) = 0.$$

En utilisant la propriété **7** de ν, on conclut que $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ est un sous-ensemble non vide, fermé, convexe et faiblement compact de Ω.

De plus, il est facile d'observer que $T\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n\Big) \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$.

Par conséquent, $T\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n\Big)$ est relativement faiblement compact.

Enfin, l'utilisation de théorème 2.3.1 conclut la preuve. □

2.4 Théorème de Sadovskii

Théorème 2.4.1 (**Sadovskii**[10])**.** *Soit A un sous ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'un espace de Banach X et soit $T : A \to A$ une application continue. Si T est condensante, alors T admet au moins un point fixe.*

Preuve. [10, 20] □

2.5 Théorème de Mönch

Nous présentons le théorème du point fixe de Mönch, qui a été particulièrement utile pour établir l'existence des solutions aux problèmes des limites non linéaires dans les espaces de Banach [14].

Théorème 2.5.1 (**Mönch 1980**, [1, 18, 22])**.** *Soit Ω un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe d'espace de Banach E telle que $0 \in \Omega$, et soit $T : \Omega \to \Omega$ une application continue. Si l'implication*

$$V = ConvT(V) \quad ou \quad V = T(V) \cup \{0\} \Rightarrow \alpha(V) = 0 \tag{2.17}$$

est vérifie pour tout sous-ensemble V de Ω, où α est une mesure de Kuratowski, alors T admet un point fixe dans Ω.

Preuve. [22] On définit une suite $\{y_n\}$ par :

$$y_0 = 0, \text{ et } y_{n+1} = T(y_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soit

$$Y = \{y_n; n = 0, 1, 2, ...\}.$$

Ainsi

$$Y = T(Y) \cup \{0\},$$

d'après (2.17) on déduit que

$$\alpha(Y) = 0,$$

donc Y est relativement compact dans Ω.

Soit Z l'ensemble de tous les points limites de $\{y_n\}$. Il est clair que $Z = T(Z)$.

On pose

$$R(X) = ConvT(X),$$

pour tout $X \subset \Omega$, et soit

$$D = \{X \subseteq \Omega \text{ tel que } \ Z \subset X \text{ et } \ R(X) \subset X\}.$$

Ainsi, Il est clair que $\Omega \in D$.

On pose

$$V = \bigcap_{X \in D} X. \text{ Ainsi } Z \subset V,$$

V est un non vide et

$$Z = T(Z) \subset R(Z) \subset R(V),$$

puisque

$$R(V) \subset R(X) \subset X, \quad \forall X \subset D,$$

donc

$$R(V) \subset \bigcap_{X \in D} X = V,$$

donc $V \in D$. De plus,

$$R(R(V)) \subset R(V),$$

alors $R(V) \in D$.

Par conséquent, $V = R(V)$ (car ; V est plus petit ensemble de D) i.e.

$$V = ConvT(V).$$

De (2.17), implique que $\overline{V}$ est un sous-ensemble compact de Ω.

D'aprés le théorème de Schauder 2.1.1 sur l'application $T|_{\overline{V}}$, on conclut que T admet un point fixe dans $\overline{V} \subset \Omega$. $\square$

Chapitre 3

Application

Ce chapitre est consacré à appliquer le théorème du point fixe de Darbo que nous avons étudié dans le deuxième chapitre à l'étude d'existence des solutions pour des équations intégrales dans l'espace de Banach, plus précisément :
on va appliquer le théorème du point fixe de Darbo pour prouver l'existence de la solution d'une équation intégrale non linéaire de type Volterra suivante

$$x(t) = (Tx)(t) \int_0^t u(t, s, x(s))ds,$$

dans l'espace des applications continues et bornées de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$.

3.1 Solvabilité d'une équation intégrale non linéaire de type Volterra

Supposons que x est une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}_+$. Puis par $\omega(x, \varepsilon)$ nous désignons le module de continuité de la fonction x, c'est-à-dire

$$\omega(x, \varepsilon) = \sup \left\{ |x(t) - x(s)| : t, s \in \mathbb{R}_+, |t - s| \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Si $p(t, s) = p : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, alors la formule

$$\omega(p, \varepsilon) = \sup \left\{ |p(t, s) - p(u, v)| : t, s, u, v \in \mathbb{R}_+, |t - u| \leqslant \varepsilon, |s - v| \leqslant \varepsilon \right\}.$$

On définit le module de continuité de la fonction $p(t,s)$ en ce qui concerne les deux variables t et s. On peut aussi utiliser le module de la continuité de $p(t,s)$ en ce qui concerne une variable. Par exemple,

$$\omega(p(t,.),\varepsilon) = \sup\left\{|p(t,s)-p(t,v)| : s,v \in \mathbb{R}_+, |s-v| \leqslant \varepsilon\right\},$$

où t est un nombre fixe dans $\mathbb{R}_+$. Des définitions similaires peuvent être formulés pour les fonctions de plusieurs variables.

Notre espace ambiant sera désigné par $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ et consiste les fonctions réelles x définies, bornées et continues sur $\mathbb{R}_+$, avec la norme maximale $\|x\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+}|x(t)|$.

Nous avons montré dans l'exemple 1.4 que l'espace $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ est un espace de Banach avec la norme maximale $\|.\|$.

Il est prouvé dans [8] que pour un sous-ensemble non vide et borné $X \subset BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ la valeur donnée par

$$\mu(X) = \omega_0(X) + \limsup_{t\to\infty} diam X(t), \tag{3.1}$$

où

$$\omega_0(X) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\sup[\omega(x,\varepsilon) : x \in X]\right\}$$

et

$$diam X(t) = \sup\left\{|x(t)-y(t)| : x,y \in X\right\},$$

est une mesure de non-compacité dans $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Dans ce qui suit μ dénote les mesures de non-compacité donnes par (3.1).

Nous étudierons la solvabilité de l'équation intégrale de type Volterra suivante :

$$x(t) = (Tx)(t)\int_0^t u(t,s,x(s))ds, \tag{3.2}$$

où $t \in \mathbb{R}_+$ et T est un opérateur de l'espace $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ dans lui-même.

Dans nos études, on suppose que les fonctions associées dans l'équation (3.2) satisfont aux hypothèses suivantes :

1. L'opérateur $T : BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) \to BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ est continu et satisfait à la condition de Darbo pour la mesure de non-compacité μ avec une constante k.

2. Il existe des constantes non négatives c et d telles que

$$|(Tx)(t)| \leq c + d|x(t)|,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

3. La fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et existe des fonctions continues $a, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telles que :

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = 0,$$
$$b \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ et bornée},$$
$$|u(t,s,x)| \leq a(t)b(s), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et } t, s \in \mathbb{R}_+.$$

4. Il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, avec $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$, tel que $t_1, t_2, s \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}$ on a l'inégalité suivante :

$$|u(t_2,s,x) - u(t_1,s,x)| \leq |t_2 - t_1|\varphi(s). \tag{3.3}$$

5. $k\|a\|\|b\|_1 < 1$ et $\alpha\|a\|\|b\|_1 < 1$, où $\alpha = \max\{c, d\}$ et $\|a\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+}\{a(t)\}$.

Par conséquence de l'hypothèse (3) nous obtenons les remarques suivantes :

Remarque 3.1. *Observons que l'hypothèse (3) implique que la fonction a est bornée, et par $\|a\|$, tel que $\|a\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)|$, comme dans l'hypothèse (5), où on néglige la preuve de l'existence de $\|a\|$.*

Remarque 3.2. *D'autre part, par l'hypothèse (3), on a*

$$\Big|\int_0^t u(t,s,x(s))ds\Big| \leq \int_0^t |u(t,s,x(s))|ds \leq a(t)\int_0^t b(s)ds,$$

de plus, puisque $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$ et $b \in L^1(\mathbb{R}_+)$ on obtient

$$\lim_{t\to\infty} a(t)\int_0^t b(s)ds \leq \lim_{t\to\infty} a(t)\|b\|_1 = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} a(t)\int_0^t b(s)ds = 0.$$

Nous pouvons le lemme suivant qui sera nécessaire plus loin.

Lemme 3.1.1. *Suppose que* $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *et* $\varepsilon > 0$. *Alors*

$$\omega(x, \varepsilon) = \sup_{L>0} \omega^L(x, \varepsilon),$$

où $\omega^L(x, \varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)| : t, s \in [0, L], |t - s| \leqslant \varepsilon\}$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\omega^L(x, \varepsilon) &= \sup\{|x(t) - x(s)| : t, s \in [0, L], |t - s| \leqslant \varepsilon\} \\ &\leq \sup\{|x(t) - x(s)| : t, s \in \mathbb{R}_+, |t - s| \leqslant \varepsilon\} \\ &= \omega(x, \varepsilon),\end{aligned}$$

alors

$$\sup_{L>0} \omega^L(x, \varepsilon) \leq \omega(x, \varepsilon).$$

D'autre part suppose par absurde que

$$\omega(x, \varepsilon) > \sup_{L>0} \omega^L(x, \varepsilon),$$

i.e.

$$\sup\{|x(t) - x(s)| : t, s \in \mathbb{R}_+, |t - s| \leqslant \varepsilon\} > \sup_{L>0} \omega^L(x, \varepsilon).$$

Cela signifie qu'il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ avec $|t_1 - t_2| \leqslant \varepsilon$ et

$$\sup_{L>0} \omega^L(x, \varepsilon) < |x(t_1) - x(t_2)|.$$

On prend $L_0 = \max\{t_1, t_2\}$ et on a

$$\sup_{L>0} \omega^L(x, \varepsilon) < |x(t_1) - x(t_2)| \leqslant \sup\{|x(t) - x(s)| : t, s \in [0, L_0], |t - s| \leqslant \varepsilon\} = \omega^{L_0}(x, \varepsilon),$$

donc ceci est une contradiction. Ainsi, la preuve est complète. $\square$

Théorème 3.1.1. *Sous les hypothèses (1)-(5), l'équation intégrale (3.2) admet au moins une solution* $x = x(t)$ *dans l'espace* $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Preuve. Considérons deux opérateurs A et B définis sur l'espace $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ par les formules suivantes :

$$(Ax)(t) = (Tx)(t) \int_0^t u(t, s, x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$$(Bx)(t) = \int_0^t u(t, s, x(s))ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

On va prouver que Bx est continue, puis on déduit que Ax est continue.

Ensuite, on prouve $\varepsilon > 0$ et prend $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

Supposons que $t_0 \neq 0$. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $|t - t_0| < \delta$ où

$$\delta < \min\left\{\frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_1 + M}, \frac{t_0}{2}\right\},$$

avec

$$M = \sup\left\{|u(t, s, x)| : t, s \in \left[\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}\right], x \in [-\|x\|, \|x\|]\right\}, \tag{3.4}$$

qui existe en vertu de la continuité de la fonction u. Sans perte de généralité on peut supposer que $t_0 < t$.

Ensuite, comme nos hypothèses, nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}
|(Bx)(t) - (Bx)(t_0)| &= \Big|\int_0^t u(t, s, x(s))ds - \int_0^{t_0} u(t_0, s, x(s))ds\Big| \\
&\leq \Big|\int_0^t u(t, s, x(s))ds - \int_0^t u(t_0, s, x(s))ds\Big| \\
&+ \Big|\int_0^t u(t_0, s, x(s))ds - \int_0^{t_0} u(t_0, s, x(s))ds\Big| \\
&\leq \int_0^t |u(t, s, x(s)) - u(t_0, s, x(s))|ds + \int_{t_0}^t |u(t_0, s, x(s))|ds
\end{aligned}$$

d'après (3.3) et (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
|(Bx)(t) - (Bx)(t_0)| &\leq (t - t_0)\int_0^t \varphi(s)ds + M\int_{t_0}^t ds \\
&\leq (t - t_0)\|\varphi\|_1 + M(t - t_0) \\
&< (\|\varphi\|_1 + M)\delta.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Dans ce cas $t_0 = 0$, soit $\varepsilon > 0$ et $t \in \mathbb{R}_+$ avec $t < \delta$ où $\delta = \dfrac{\varepsilon}{\|a\|\|b\|}$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
|(Bx)(t)| &= \Big|\int_0^t u(t, s, x)ds\Big| \\
&\leq \int_0^t |u(t, s, x)|ds.
\end{aligned}$$

Puisque b est continue et bornée alors, la norme maximal $\|.\|$ est définie en b.

D'où, d'après nos hypothèses on obtient

$$\begin{aligned}
|(Bx)(t)| &\leq \int_0^t a(t)b(s)ds \\
&\leq \sup_{s\in\mathbb{R}_+} \int_0^t |a(t)b(s)|ds = \|b\||a(t)|t \\
&< \|b\||a(t)|\delta \\
&\leq \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |a(t)|\|b\|\delta = \|a\|\|b\|\delta = \varepsilon,
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons prouvé que Bx est une fonction continue pour $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, et donc Ax est continue pour $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Dans ce qui suit, nous prouvons que pour $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ alors Ax est une fonction bornée.

En réalité, si $t \in \mathbb{R}_+$ d'après notre hypothèses et la remarque 3.1, on obtient

$$|(Ax)(t)| = |(Tx)(t)|\Big|\int_0^t u(t,s,x(s))ds\Big|,$$

d'après l'hypothèse (2) dans le théorème (3.1.1) on a

$$|(Tx)(t)| \leq c + d|x(t)|,$$

donc

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)| = c + d\|x\|.$$

Par la suite et d'après l'hypothèse (3) dans le théorème (3.1.1), on obtient

$$\begin{aligned}
|(Ax)(t)| &\leq (c + d\|x\|)\int_0^t |u(t,s,x(s))|ds \\
&\leq (c + d\|x\|)a(t)\int_0^t b(s)ds \\
&\leq (c + d\|x\|)\|a\|\|b\|_1.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Par conséquent,

$$\|Ax\| \leq (c + d\|x\|)\|a\|\|b\|_1.$$

Ainsi l'opérateur A transforme l'espace $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ en lui-même.

Ensuite, notons que pour montrer que l'opérateur A est continu sur l'espace $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ il suffit de prouver (au vu de l'hypothèse (1)) la continuité de B sur $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Pour faire ça, fixons $\varepsilon > 0$ et prenons $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

D'après l'hypothèse (3) (voir la remarque(3.2)), nous pouvons obtenir

$$\lim_{t\to\infty} a(t) \int_0^t b(s)ds = 0,$$

et par conséquent, pour chaque $\varepsilon > 0$ on peut exister $\tau > 0$ tel que si $t > \tau$ alors

$$a(t) \int_0^t b(s)ds < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.7}$$

D'autre part, d'après la continuité uniforme de la fonction u sur l'ensemble $[0, \tau] \times [0, \tau] \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ on peut exister $\delta_1 > 0$ tel que

$$|u(t, s, x) - u(t', s', x')| < \frac{\varepsilon}{\tau}, \tag{3.8}$$

pour

$$\begin{aligned} &|t - t'| \leqslant \delta_1, \quad t, t' \in [0, \tau], \\ &|s - s'| \leqslant \delta_1, \quad s, s' \in [0, \tau], \\ &|x - x'| \leqslant \delta_1, \quad x, x' \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \end{aligned}$$

Supposons que $\delta = \delta_1$ et soit y est un élément de $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tel que $\|x - y\| \leqslant \delta$. Donc, si fixons $t \in \mathbb{R}_+$ on obtient

$$\begin{aligned} |(Bx)(t) - (By)(t)| &= \Big| \int_0^t u(t, s, x(s))ds - \int_0^t u(t, s, y(s))ds \Big| \\ &\leq \int_0^t |u(t, s, x(s)) - u(t, s, y(s))|ds. \end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons considérer deux cas :

1. Si $t > \tau$, d'après (3.7) et la remarque(3.2), on obtient

$$\begin{aligned} |(Bx)(t) - (By)(t)| &\leq \int_0^t |u(t, s, x(s)) - u(t, s, y(s))|ds \\ &\leq \int_0^t |u(t, s, x(s))|ds + \int_0^t |u(t, s, y(s))|ds \\ &\leq 2a(t) \int_0^t b(s)ds < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

2. Si $t \leqslant \tau$, puis comme $\|x-y\| \leqslant \delta$ et on utilise (3.8), on trouve

$$\begin{aligned}|(Bx)(t)-(By)(t)| &\leq \int_0^t |u(t,s,x(s))-u(t,s,y(s))|ds \\ &< \frac{\varepsilon}{\tau}\int_0^t ds = \frac{\varepsilon}{\tau}t < \varepsilon.\end{aligned}$$

Alors, $|(Bx)(t)-(By)(t)| < \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. D'où

$$\|Bx-By\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |(Bx)(t)-(By)(t)| < \varepsilon.$$

Par conséquence, B est un opérateur continu sur $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

Par suite, il est prouvé que l'opérateur A est continu sur l'espace $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

Ensuite, fixons $x \in BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Puis, comme le fait précédemment dans (3.6), on obtient

$$|(Ax)(t)| \leqslant (c+d\|x\|)\|a\|\|b\|_1 \leqslant \alpha(1+\|x\|)\|a\|\|b\|_1,$$

où $\alpha = \max\{c,d\}$. Cela implique

$$\|Ax\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |(Ax)(t)| \leqslant \alpha(1+\|x\|)\|a\|\|b\|_1.$$

Grâce à l'hypothèse 5, on déduit que A transformer la boule $B(0,r_0)$ vers lui-même où

$$r_0 = \frac{\alpha\|a\|\|b\|_1}{1-\alpha\|a\|\|b\|_1}.$$

En effet, soit $x \in B(0,r_0)$ i.e. $\|x\| \leqslant r_0$, on a

$$\begin{aligned}\|Ax\| &\leqslant \alpha(1+\|x\|)\|a\|\|b\|_1 \\ &\leqslant \alpha(1+r_0)\|a\|\|b\|_1 \\ &= \alpha\Big(1+\frac{\alpha\|a\|\|b\|_1}{1-\alpha\|a\|\|b\|_1}\Big)\|a\|\|b\|_1 \\ &= \alpha\Big(\frac{1-\alpha\|a\|\|b\|_1+\alpha\|a\|\|b\|_1}{1-\alpha\|a\|\|b\|_1}\Big)\|a\|\|b\|_1 \\ &= \frac{\alpha\|a\|\|b\|_1}{1-\alpha\|a\|\|b\|_1} = r_0,\end{aligned}$$

donc $Ax \in B(0,r_0)$.

Il est clair que la boule $B(0,r_0)$ est un sous-ensemble non vide, borné, fermé et convexe de l'espace $BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.

Dans ce qui suit, on montre que l'opérateur A satisfait à la condition de Darbo par rapport à la mesure de non-compacité μ dans $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

D'abord, nous etudions le terme lié à ω_0.

Prenons un sous-ensemble X non vide de la boule $B(0, r_0)$ et $x \in X$. Ensuite, pour un constant $L > 0, \varepsilon > 0$ et $t_1, t_2 \in [0, L]$ tel que $t_1 < t_2$ et $t_2 - t_1 < \varepsilon$ on obtient

$$\begin{aligned}
|(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| &= \left|(Tx)(t_2) \int_0^{t_2} u(t_2, s, x(s))ds - (Tx)(t_1) \int_0^{t_1} u(t_1, s, x(s))ds\right| \\
&\leq \left|(Tx)(t_2) \int_0^{t_2} u(t_2, s, x(s))ds - (Tx)(t_1) \int_0^{t_2} u(t_2, s, x(s))ds\right| \\
&+ \left|(Tx)(t_1) \int_0^{t_2} u(t_2, s, x(s))ds - (Tx)(t_1) \int_0^{t_1} u(t_1, s, x(s))ds\right| \\
&\leq |(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| \int_0^{t_2} |u(t_2, s, x(s))|ds \\
&+ |(Tx)(t_1)| \left| \int_0^{t_2} u(t_2, s, x(s))ds - \int_0^{t_1} u(t_1, s, x(s))ds \right|,
\end{aligned}$$

on a

$$|(Tx)(t_2) - (Tx)(t_1)| \leq \sup\{|Tx(t) - Tx(s)| : t, s \in [0, L], |t - s| \leqslant \varepsilon\} = \omega^L(Tx, \varepsilon),$$

alors

$$\begin{aligned}
|(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| \leq \omega^L(Tx, \varepsilon) a(t_2) \int_0^{t_2} b(s)ds& \\
+ (c + d\|x\|) \Big[\int_0^{t_1} |u(t_2, s, x(s)) - u(t_1, s, x(s))|ds& \\
+ \int_{t_1}^{t_2} |u(t_2, s, x(s))|ds \Big],&
\end{aligned}$$

d'après les hypothèses (3) et (4), d'où

$$\begin{aligned}
|(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| &\leq \omega^L(Tx, \varepsilon)\|a\|\|b\|_1 + \alpha(1 + r_0) \Big[(t_2 - t_1) \int_0^{t_1} \varphi(s)ds \\
&+ \|a\|\|b\|(t_2 - t_1) \Big] \\
&\leq \omega^L(Tx, \varepsilon)\|a\|\|b\|_1 + \alpha(1 + r_0)(t_2 - t_1)(\|\varphi\|_1 + \|a\|\|b\|) \\
&\leq \omega^L(Tx, \varepsilon)\|a\|\|b\|_1 + \alpha(1 + r_0)\varepsilon(\|\varphi\|_1 + \|a\|\|b\|).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a obtenu l'estimation suivante

$$|(Ax)(t_2) - (Ax)(t_1)| \leq \omega^L(Tx, \varepsilon)\|a\|\|b\|_1 + \alpha(1 + r_0)\varepsilon(\|\varphi\|_1 + \|a\|\|b\|),$$

alors

$$\sup_{t,s\in[0,L]} \{|(Ax)(t)-(Ax)(s)| : |t-s| \leqslant \varepsilon\} \leq \omega^L(Tx,\varepsilon)\|a\|\|b\|_1 + \alpha(1+r_0)\varepsilon(\|\varphi\|_1 + \|a\|\|b\|),$$

donc

$$\omega^L(Ax,\varepsilon) \leq \omega^L(Tx,\varepsilon)\|a\|\|b\|_1 + \alpha(1+r_0)\varepsilon(\|\varphi\|_1 + \|a\|\|b\|).$$

En appliquant le supérieur par rapport à L, on obtient

$$\sup_L \omega^L(Ax,\varepsilon) \leq \|a\|\|b\|_1 \sup_L \omega^L(Tx,\varepsilon) + \alpha(1+r_0)\varepsilon(\|\varphi\|_1 + \|a\|\|b\|).$$

D'après lemme(3.1.1)

$$\omega(Ax,\varepsilon) \leq \|a\|\|b\|_1\ \omega(Tx,\varepsilon) + \alpha(1+r_0)\varepsilon(\|\varphi\|_1 + \|a\|\|b\|).$$

Par conséquent,

$$\sup_{x\in X} \omega(Ax,\varepsilon) \leq \|a\|\|b\|_1 \sup_{x\in X} \omega(Tx,\varepsilon) + \alpha(1+r_0)\varepsilon(\|\varphi\|_1 + \|a\|\|b\|).$$

Ainsi, appliquer la limite quand $\varepsilon \to 0$ on peut obtenir

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in X}\ \omega(Ax,\varepsilon) \leq \|a\|\|b\|_1\ \lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in X}\ \omega(Tx,\varepsilon)$$

et puisque ω_0 est définie, on a

$$\omega_0(AX) \leq \|a\|\|b\|_1\ \omega_0(TX).$$

Depuis la définition de la mesure μ et de l'hypothèse (1), on peut obtenir

$$\omega_0(AX) \leq \|a\|\|b\|_1\ \omega_0(TX) \leq \|a\|\|b\|_1\mu(TX) \leq \|a\|\|b\|_1 k\mu(X). \tag{3.9}$$

Maintenant, nous etudions le terme lié au diamètre qui apparaît dans l'expression de la mesure de non-compacité μ.

Prenons un sous-ensemble non vide X de la boule $B(0,r_0)$, $x,y \in X$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Alors on obtient

$$\begin{aligned}
|(Ax)(t)-(Ay)(t)| &= \left|(Tx)(t)\int_0^t u(t,s,x(s))ds - (Ty)(t)\int_0^t u(t,s,y(s))ds\right|, \\
&\leq \left|(Tx)(t)\int_0^t u(t,s,x(s))ds - (Ty)(t)\int_0^t u(t,s,x(s))ds\right| \\
&+ \left|(Ty)(t)\int_0^t u(t,s,x(s))ds - (Ty)(t)\int_0^t u(t,s,y(s))ds\right|,
\end{aligned}$$

cela implique que

$$\begin{aligned}
|(Ax)(t)-(Ay)(t)| &\leq |(Tx)(t)-(Ty)(t)| \int_0^t |u(t,s,x(s))|ds \\
&+ |(Ty)(t)| \int_0^t |u(t,s,x(s))-u(t,s,y(s))|ds \\
&\leq |(Tx)(t)-(Ty)(t)|a(t) \int_0^t b(s)ds + \alpha(1+\|y\|)2a(t) \int_0^t b(s)ds \\
&\leq \Big[|(Tx)(t)-(Ty)(t)| + 2\alpha(1+r_0)\Big] a(t) \int_0^t b(s)ds.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a l'estimation suivante

$$|(Ax)(t)-(Ay)(t)| \leq \Big[|(Tx)(t)-(Ty)(t)| + 2\alpha(1+r_0)\Big] a(t) \int_0^t b(s)ds.$$

En appliquant suprêmum en x et y on obtient

$$\sup_{x,y\in X} |(Ax)(t)-(Ay)(t)| \leq \Big[\sup_{x,y\in X} |(Tx)(t)-(Ty)(t)| + 2\alpha(1+r_0)\Big] a(t) \int_0^t b(s)ds.$$

Par conséquent,

$$diam(AX)(t) \leq [diam(TX)(t) + 2\alpha(1+r_0)]a(t) \int_0^t b(s)ds.$$

Appliquer la limite supérieure lorsque $t \to \infty$ on obtient

$$0 \leq \limsup_{t\to\infty} diam(AX)(t) \leq \limsup_{t\to\infty} [diam(TX)(t) + 2\alpha(1+r_0)]a(t) \int_0^t b(s)ds,$$

et d'après la remarque 3.2, on a

$$\lim_{t\to\infty} a(t) \int_0^t b(s)ds = 0,$$

alors,

$$\limsup_{t\to\infty} diam(AX)(t) = 0.$$

Enfin, on obtient

$$\mu(AX) = \omega_0(AX) \leq k\|a\|\|b\|_1 \mu(X),$$

et par l'hypothèse (5) nous avons que A est une contraction par rapport à la mesure de non-compacité μ (satisfait condition Darbo avec constant $k\|a\|\|b\|_1 < 1$).

Par conséquent, d'après le théorème de Darbo l'équation (3.2) admet au moins une solution dans $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. $\square$

Dans ce qui suit, nous donnons quelques exemples qui prouvent dans un certain sens la signification des hypothèses du théorème 3.1.1.

Exemple 3.1. *Supposons que T est un opérateur défini sur $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ par*

$$(Tx)(t) = 1.$$

Évidemment, T est un opérateur continu sur $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $t, s \in \mathbb{R}_+$ avec $|t - s| \leqslant \varepsilon$, et soient $x, y \in X$ où X est un sous-ensemble non vide et borné de $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, on a

$$|(Tx)(t) - (Tx)(s)| = 1 - 1 = 0,$$

alors $\omega(Tx, \varepsilon) = 0$, par suite $\omega_0(TX) = 0$.

Ainsi $diam TX(t) = 0$ car ;

$$\sup\{|(Tx)(t) - (Ty)(t)| : x, y \in X\} = \sup\{|1 - 1| : x, y \in X\} = 0.$$

Donc

$$\mu(TX) = 0.$$

D'autre part, on a $|(Tx)(t)| = 1 \leqslant 1 + 0|x(t)|$.

Par conséquent, T satisfait aux hypothèses (1) et (2) du théorème 3.1.1 avec $k = 0, c = 1$ et $d = 0$.

D'autre part, la fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t, s, x) = te^{-s}.$$

Il est clair que u est une fonction continue. De plus, $|u(t, s, x)| = te^{-s}$ et, par conséquent, si on pose $a(t) = t$ et $b(s) = e^{-s}$ la fonction a ne satisfaite pas l'hypothèse (3) du théorème 3.1.1. En ce qui concerne la supposition (4) du théorème 3.1.1, on a

$$|u(t_2, s, x) - u(t_1, s, x)| = |t_2 e^{-s} - t_1 e^{-s}| = |t_2 - t_1| e^{-s},$$

et on peut prendre φ la fonction $\varphi(s) = e^{-s}$.

$$\int_{\mathbb{R}_+} \varphi(s) ds = \int_0^{+\infty} e^{-s} ds = 1,$$

alors $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$ *et* $\|\varphi\|_1 = 1$.

Ainsi, notre équation s'écrit dans la forme

$$x(t) = t \int_0^t e^{-s} ds,$$

et $x \notin BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *car ;* $\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} t \int_0^t e^{-s} ds = \infty.$

Exemple 3.2. *Nous considérons l'opérateur* T *défini sur* $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ *par*

$$(Tx)(t) = x(t) + 1.$$

Évidemment, T *est un opérateur continu sur* $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Soit $\varepsilon > 0$ *et* $t, s \in \mathbb{R}_+$ *avec* $|t - s| \leqslant \varepsilon$, *et soient* $x, y \in X$ *où* X *est un sous-ensemble non vide et borné de* $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

On a

$$|(Tx)(t) - (Tx)(s)| = |x(t) + 1 - x(s) - 1| = |x(t) - x(s)|,$$

et

$$|(Tx)(t) - (Ty)(t)| = |x(t) + 1 - y(t) - 1| = |x(t) - y(t)|.$$

Alors

$$\omega_0(TX) = \omega_0(X),$$

et

$$\limsup_{t\to\infty} \ diam TX(t) = \limsup_{t\to\infty} \ diam X(t),$$

pour tout sous-ensemble non vide borné X *de* $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Par conséquent, $\mu(TX) = \mu(X)$ *et* T *satisfait l'hypothèse (1) du théorème 3.1.1 avec* $k = 1$.

De plus, comme $|(Tx)(t)| \leq 1 + |x(t)|$ *pour chaque* $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, T *vérifie l'hypothèse (2) du théorème 3.1.1 avec* $c = 1$ *et* $d = 1$.

D'autre part, nous considérons la fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$u(t, s, x) = \frac{1}{t+1} \frac{1}{s^2+1}.$$

Il est clair que u est une fonction continue et $|u(t,s,x)| = \dfrac{1}{t+1}\dfrac{1}{s^2+1}$. Si on pose $a(t) = \dfrac{1}{t+1}$ et $b(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ alors les fonctions a et b sont continues et $\|a\| = \|b\| = 1$.

Ainsi,

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = 0,$$

et

$$\int_0^\infty b(s)ds = \int_0^\infty \frac{1}{s^2+1}ds = \frac{\pi}{2},$$

on déduit que $b \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Par conséquent, u satisfait l'hypothèse (3) du théorème 3.1.1.

Ce qui concerne l'hypothèse (4), on a

$$\begin{aligned}
|u(t_2,s,x) - u(t_1,s,x)| &= \Big|\frac{1}{t_2+1}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{t_1+1}\frac{1}{s^2+1}\Big| \\
&= \frac{1}{s^2+1}\Big|\frac{1}{t_2+1} - \frac{1}{t_1+1}\Big| = \frac{1}{s^2+1}\Big|\frac{t_1-t_2}{(t_2+1)(t_1+1)}\Big| \\
&\leq \frac{1}{s^2+1}|t_1-t_2|,
\end{aligned}$$

on peut prendre φ la fonction $\varphi(s) = b(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$. Ainsi, l'hypothèse (4) du théorème 3.1.1 est satisfaite.

Finalement, $k\|a\|\|b\|_1 = \dfrac{\pi}{2} > 1$ et, par conséquent, l'hypothèse (5) n'est pas satisfaite.

Dans ce cas, notre équation s'écrit a la forme :

$$x(t) = (x(t)+1)\int_0^t \frac{1}{t+1}\frac{1}{s^2+1}ds$$

ou équivalent,

$$(t+1)x(t) = (x(t)+1)\arctan(t). \tag{3.10}$$

Clairement, $x(t) \equiv 0$ n'est pas la solution de cette équation. De plus, si on suppose que $x(t) \in BC(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, puis appliquer la limite quand $t \to \infty$ dans l'équation (3.10), on obtient que le premier membre va à l'infini tandis que le second membre reste borné. Ceci est contradictoire et, par conséquent, l'équation ci-dessus mentionnée n'a pas de solution.

3.2 Exemples

L'opérateur T et la fonction u sont les éléments principaux de notre équation intégrale. Cette section est consacrée à donner des exemples concrets des opérateurs T et des fonctions u répondant aux hypothèses du théorème 3.1.1.

3.2.1 Exemples des opérateurs T

Dans les exemples 3.1 et 3.2 l'opérateur T satisfaisant aux hypothèses (1) et (2) du théorème 3.1.1. Dans la suite, nous allons présenter d'autres exemples.

D'abord, nous introduisons le lemme et la remarque suivantes.

Lemme 3.2.1. *Supposons que x et y sont élément de $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Alors*

$$\omega(xy, \varepsilon) \leq \|x\|\omega(y, \varepsilon) + \|y\|\omega(x, \varepsilon).$$

Preuve. Soit $t, t' \in \mathbb{R}_+$ avec $|t - t'| \leq \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} |x(t)y(t) - x(t')y(t')| &\leq |x(t)y(t) - x(t)y(t')| + |x(t)y(t') - x(t')y(t')| \\ &\leq |x(t)||y(t) - y(t')| + |y(t')||x(t) - x(t')| \\ &\leq \|x\|\omega(y, \varepsilon) + \|y\|\omega(x, \varepsilon). \end{aligned}$$

□

Remarque 3.3. *On remarque que si $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et il est uniformément continu sur $\mathbb{R}_+$, alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \omega(x, \varepsilon) = 0.$$

Exemple 3.3. *On prend l'opérateur T défini par :*

$$\begin{array}{ccc} T : BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) & \longrightarrow & BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \\ y & \longmapsto & xy, \end{array}$$

où $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et est uniformement continue sur $\mathbb{R}_+$.

Évidemment, T est un opérateur continu.

Soit X est un sous ensemble borné de $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, puis par le lemme 3.2.1 et la remarque 3.3, on a

$$\omega(xy, \varepsilon) \leq \|x\|\omega(y, \varepsilon) + \|y\|\omega(x, \varepsilon),$$

alors

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{y \in X} \omega(xy, \varepsilon) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{y \in X} \|x\|\omega(y, \varepsilon) + \lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{y \in X} \|y\|\omega(x, \varepsilon).$$

D'où

$$\omega_0(TX) \leq \|x\|\omega_0(X).$$

D'autre part, soit $y_1, y_2 \in X$ et $t \in \mathbb{R}_+$, alors

$$\begin{aligned} |(Ty_2)(t) - (Ty_1)(t)| &= |x(t)y_2(t) - x(t)y_1(t)| \\ &= |x(t)||y_2(t) - y_1(t)| \\ &\leq \|x\||y_2(t) - y_1(t)|. \end{aligned}$$

donc

$$\sup_{y_1, y_2 \in X} |(Ty_2)(t) - (Ty_1)(t)| \leq \|x\| \sup_{y_1, y_2 \in X} |y_2(t) - y_1(t)|,$$

et on obtient

$$diam TX(t) \leq \|x\| diam X(t).$$

Par conséquent,

$$\mu(TX) \leq \|x\|\mu(X)$$

et T satisfait à la condition de Darbo avec constante $\|x\|$. Par conséquent, T satisfait l'hypothèse (1) du théorème 3.1.1.

D'autre part,

$$|(Ty)(t)| = |x(t)y(t)| \leq \|x\||y(t)|,$$

et cela signifie que T satisfait l'hypothèse (2) du théorème 3.1.1 avec $c = 0$ et $d = \|x\|$.

Remarque 3.4. *Exemples des fonctions x qui permettent de définir l'opérateur T sur $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, suivant la description donnée dans l'exemple 3.3, peut être donné par des fonctions x avec une limite dans l'infini et appartiennent à $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.*

Exemple 3.4. *Maintenant supposons que $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est une fonction avec une dérivée bornée, $|g'| \leq k$.*

On peut considérer l'opérateur suivant défini par $T : BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \longrightarrow BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, où pour tout $x \in BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ on a, $(Tx)(t) = g(|x(t)|)$.

Évidemment, T est bien défini et est un opérateur continu.

Dans la suite, nous prouvons que T vérifie la condition de Darbo par rapport à la mesure de non-compacité μ.

Soit $\varepsilon > 0$ et $t, t' \in \mathbb{R}_+$ avec $|t - t'| \leq \varepsilon$. Ensuite, en utilisant le théorème de la valeur moyenne, on peut obtenir une valeur ξ appartenant à l'intervalle déterminé par t et t' tel que

$$\begin{aligned}|(Tx)(t) - (Tx)(t')| &= |g(|x(t)|) - g(|x(t')|)| \\ &\leq |g'(\xi)| \Big| |x(t)| - |x(t')| \Big| \\ &\leq k|x(t) - x(t')|.\end{aligned}$$

Par conséquent, pour X un sous ensemble borné de $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ on a que

$$\omega_0(TX) \leq k\omega_0(X).$$

De même manière, si on prend $x_1, x_2 \in X$ et $t \in \mathbb{R}_+$ on obtient

$$\begin{aligned}|(Tx_1)(t) - (Tx_2)(t)| &= |g(|x_1(t)|) - g(|x_2(t)|)| \\ &\leq |g'(\xi)| \Big| |x_1(t)| - |x_2(t)| \Big| \\ &\leq k|x_1(t) - x_2(t)|.\end{aligned}$$

Par suite,

$$diam TX(t) \leq k \ diam X(t),$$

cela nous permet d'inférer que

$$\mu(TX) \leq k\mu(X).$$

Ainsi, T vérifie la condition Darbo avec la constante k.

D'autre part, notre opérateur T satisfait l'hypothèse (2) du théorème 3.1.1.

En effet, en utilisant le théorème de la valeur moyenne, nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}|(Tx)(t)| = |g(|x(t)|)| &\leq |g(|x(t)|) - g(0)| + |g(0)| \\ &\leq |g'(\xi)||x(t)| + |g(0)| \\ &\leq k|x(t)| + |g(0)|,\end{aligned}$$

où $\xi \in (0, t)$.

Remarque 3.5. *Exemples des fonctions* $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec une dérivée bornée sont données par*

$$g(x) = \cos^n(x), \quad g(x) = \sin^n(x), \quad g(x) = \cos(nx), \quad g(x) = \sin(nx), \quad g(x) = \frac{1}{x+1}.$$

3.2.2 Exemples des fonctions u

Dans cette section, nous présentons quelques exemples des fonctions u qui vérifient les hypothèses supposées dans le théorème 3.1.1.

Exemple 3.5. *Si l'on considère la fonction* u *définie par :*

$$u(t, s, x) = \Big(\frac{1}{t+1}\Big)\Big(\frac{1}{(s+1)^r}\Big)$$

avec $r > 1$, *il est clair que* u *est une fonction continue et*

$$|u(t, s, x)| = \Big(\frac{1}{t+1}\Big)\Big(\frac{1}{(s+1)^r}\Big).$$

Si on prend $a(t) = \dfrac{1}{t+1}$, *et* $b(s) = \dfrac{1}{(s+1)^r}$ *alors les fonctions* a *et* b *sont continues et* $\|a\| = \|b\| = 1$, *étant*

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = 0.$$

Ainsi,

$$\int_0^\infty b(s)ds = \int_0^\infty \frac{1}{(s+1)^r}ds = \frac{1}{r-1},$$

on déduit que $b \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Par conséquent, u *satisfait l'hypothèse (3) du théorème 3.1.1.*

Pour l'hypothèse (4), on a

$$\begin{aligned}
|u(t_2,s,x)-u(t_1,s,x)| &= \Big|\frac{1}{t_2+1}\frac{1}{(s+1)^r}-\frac{1}{t_1+1}\frac{1}{(s+1)^r}\Big| \\
&= \frac{1}{(s+1)^r}\Big|\frac{1}{t_2+1}-\frac{1}{t_1+1}\Big| \\
&= \frac{1}{(s+1)^r}\Big|\frac{t_1-t_2}{(t_2+1)(t_1+1)}\Big| \\
&\leq \frac{1}{(s+1)^r}|t_1-t_2|
\end{aligned}$$

on peut prendre φ la fonction $\varphi(s)=b(s)=\dfrac{1}{(s+1)^r}$. Donc, l'hypothèse (4) du théorème 3.1.1 est satisfaite.

Exemple 3.6. *Considérons la fonction u définie par :*

$$u(t,s,x)=\frac{1}{(t+p+f(x))}\frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}$$

avec $p,q,r\geqslant 1$ et $f,h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ sont fonctions continues. Clairement, u est une fonction continue. De plus, on a

$$|u(t,s,x)|=\Big|\frac{1}{(t+p+f(x))}\frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}\Big|\leq\frac{1}{t+1}\frac{1}{(s^2+1)^r}$$

on peut choisir $a(t)=\dfrac{1}{t+1}$ et $b(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)^r}$ et, au vu du résultat obtenu dans l'exemple 3.2, on déduit que la fonction u vérifie l'hypothèse (3) du théorème 3.1.1.

Pour l'hypothèse (4), on a

$$\begin{aligned}
|u(t_2,s,x)-u(t_1,s,x)| &= \Big|\frac{1}{(t_2+p+f(x))}\frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}-\frac{1}{(t_1+p+f(x))}\frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}\Big| \\
&= \frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}\Big|\frac{1}{(t_2+p+f(x))}-\frac{1}{(t_1+p+f(x))}\Big| \\
&= \frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}\Big|\frac{t_1-t_2}{(t_2+p+f(x))(t_1+p+f(x))}\Big| \\
&\leq \frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}|t_1-t_2|
\end{aligned}$$

on prend φ la fonction $\varphi(s)=b(s)=\dfrac{1}{(s^2+q+h(x))^r}$ qui appartient à $L^1(\mathbb{R}_+)$.

En effet,

$$\int_0^\infty\frac{1}{(s^2+q+h(x))^r}ds\leq\int_0^\infty\frac{1}{(s^2+1)^r}ds\leq\int_0^\infty\frac{1}{s^2+1}ds=\frac{\pi}{2}.$$

Donc, l'hypothèse (4) du théorème 3.1.1 est satisfaite.

Conclusion générale

La théorie du point fixe joue un rôle important dans l'analyse non linéaire et ce rôle réside dans la preuve de l'existence des solutions des différents types des équations.

Dans ce memoire, nous nous sommes concentrés sur le rôle de mesure de non compacité dans la théorie du point fixe pour prouver l'existence des points fixes dans les applications continues sur les ensembles non vides, bornés, fermés et convexes des espaces Banach.

En premier lieu, nous avons rappelé quelques définitions de base, puis nous avons présenté certaines propriétés importantes concernant notre travail.

Au deuxième point, nous avons présenté quelques théorèmes du point fixe qui liés à la mesure de non compacité dans l'espace de Banach en mettant l'accent sur la plus importante et est théorème de Darbo.

A la fin, nous avons appliqué le théorème de Darbo pour etudier l'existence de la solution d'une équation intégrale non linéaire de type Volterra dans l'espace des fontions réelles définies, bornés et continues sur $\mathbb{R}_+$.

Bibliographie

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan, and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001, vol. 141.

[2] A. Aghajani, J. Banaś and N. Sabzali, *Some generalizations of Darbo fixed point theorem and applications*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 20 (2013), no.2, pp. 345-358.

[3] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina and B. N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing operators*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1992.

[4] J. Appel, E. De Pascale, *Su alcuni parametri connesi con la misura di non compatezza di Hausdorff in spazi funzioni misarubili*, Boll. Unione. Mat. Ital. (6) 313 (1984) 497-515.

[5] J. M. Ayerbe Toledano ,T. Dominguez Benavides, G. Lopez Acedo, *Measures of noncompactness in metric fixed point theory*, Operator theory advances and applications, Basel. Boston. Berlin, Birkhauser, 1997, Vol. 99.

[6] J. Banaś, *On measures of noncompactness in Banach spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 1980, 21, 131-143.

[7] J. Banaś, *Measures of noncompactness in the study of solutions of nonlinear differential and integral equations*, Cent. Eur. J. Math., 2012, 10(6), 2003-2011.

[8] J. Banaś, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach spaces*, Lect. Notes Pure Appl. Math., Dekker, New York, 1980, vol. 60.

[9] J. Banaś, J. Rocha and K.B. Sadarangani, *Solvability of a nonlinear integral equation of Volterra type*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2003, 157, pp. 31-48.

[10] B.Bojareski, *Dissertationes Mathematicae*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe-Polish Scientific Publishers, Warszawa 1988.

[11] G. Darbo, *Punti uniti dans transformazioni un condomino non compatto*, Rend. Univ Padova, 1955, vol.24, pp.84-92.

[12] F.S. De Blasi, *On a property of the unit sphere in Banach spaces*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie. 21 (1977) 259-262.

[13] K. Goebel, W.A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[14] D. Guo, V. Lakshmikantham and X. Liu, *Nonlinear integral equations in abstract spaces*, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 1996.

[15] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fund, Math, 1930, vol.15, pp.301-309.

[16] V. Lakshmikantham, S. Leela, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon Press, New York, 1981.

[17] K. Latrach, M. A. Taoudi, A. Zeghal, *Some fixed point theorems of the Schauder and the Krasnosel'skii type and application to nonlinear transport equations*, J. Differential. equations., 2006, vol. 221, 256-271.

[18] H. Mönch, *Boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations of second order in Banach spaces*, Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications, 1980, vol. 4, no. 5, pp. 985-999.

[19] D. O'Regan and R. Precup, *Fixed point theorems for set-valued maps and existence principles for integral inclusions*, J. Math. Anal. Appl., 2000, vol. 245, pp. 594-612.

[20] N. Redjel, *Quelques résultats de points fixes et applications*, Mémoire de doctorat, Univ. Mentouri constantine 1, 2016.

[21] A. Samadi, M. B. Ghaemi, *An Extension of Darbo's Theorem and Its Application*, Abstract and Applied Analysis, 2014, vol. 2014, pp. 1-11.

[22] S. Szufla, *On the application of measure of noncompactness to existence theorems,* Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1986, vol. 75, pp. 1-14.

ملخص

هدف هذه المذكرة هو دراسة أهمية قياس عدم التراص ودوره في نظرية النقطة الثابتة في الفضاءات الباناخية، تتكون المذكرة من ثلاثة فصول، تطرقنا في الفصل الأول إلى بعض المفاهيم الرياضية اللازمة في هذه المذكرة، أما في الفصل الثاني قدمنا بعض نظريات النقطة الثابتة المتعلقة بقياس عدم التراص، و في الفصل الثالث و الأخير طبقنا نظرية داربو لدراسة وجود حل معادلة تكاملية غير خطية من نوع فولتيرا.

الكلمات المفتاحية : النقطة الثابتة، قياس عدم التراص، نظرية داربو، نظرية مونش، معادلة فولتيرا، الوجود.

Abstract

The purpose of this memoiry is to study the importance of measure of noncompactness and its role in the theory of fixed points in Banach spaces. This study is divided into three chapters. We discussed in the first chapter some mathematical concepts used in this memory. In the second chapter we have presented some fixed point theorems related to measure of noncompactness. In the third and last chapter, we applied Darbo's theorem to study the existence of the solution of a nonlinear integral equation of Volterra type.

Keywords: Fixed point, measure of noncompactness, Darbo’s theorem, Mönch’s theorem, Volterra’s equation, existence.

Résumé

Le but de cette mémoire est d'étudier l'importance de mesure de non-compacité et son rôle dans la théorie des points fixes dans les espaces Banach. Cette étude se compose en trois chapitres. Nous avons discuté dans le premier chapitre certains concepts mathématiques utilisées dans cette mémoire. Dans le deuxième chapitre nous avons présenté quelques théorèmes du point fixe qui liés à mesure de non-compacité. Dans le troisième et dernier chapitre, nous avons appliqué la théorie de Darbo pour étudier l'existence de la solution d'une équation intégrale non linéaire de type Volterra.

Mots-clés: Point fixe, mesure de non-compacité, théorème de Darbo, théorème de Mönch, équation de Volterra, l'existence.