

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université Echahid Hamma Lakhdar - EL-Oued  
Faculté des Sciences Exactes  
Département d'Informatique



Domaine Mathématiques et Informatique  
Filière Informatique  
Niveau 3 licence Informatique

***SUPPORT DE COURS DÉPOSÉ EN VUE DE LA PRÉPARATION DE :  
L'HABILITATION UNIVERSITAIRE***

**Présenté par : Ismail KERTIOU**

**Module :**

# **Programmation linéaire**

**Déposé le 21/04/2022 à la commission d'experts composée de :**

| Nom et Prénom | Grade | Université |
|---------------|-------|------------|
|               |       |            |
|               |       |            |

# Programmation linéaire

## Résumé :

La recherche opérationnelle est un domaine des mathématiques qui s'intéresse à la prise de décision dans des systèmes complexes. Elle utilise des méthodes mathématiques pour trouver la solution optimale à un problème, en tenant compte des contraintes existantes. La recherche opérationnelle est née pendant la Seconde Guerre mondiale, pour résoudre des problèmes militaires. Elle s'est ensuite développée dans de nombreux domaines, notamment l'économie, la gestion, la production, les transports, etc. Une des parties les plus importantes de la recherche opérationnelle est la programmation linéaire. Elle permet de résoudre des problèmes d'optimisation où la fonction objective et les contraintes sont des expressions linéaires. Ce cours d'introduction à la programmation linéaire est destiné aux étudiants de 3ème année d'informatique. Il vise à leur donner les bases de cette discipline, afin qu'ils puissent la mettre en application dans leur domaine professionnel.

Mots clés : Contrainte, simplexe, simplexe deux phases, dualité, prise de décision.

## الملخص:

البحث العملي هو مجال في علم الرياضيات يركز على اتخاذ القرار في أنظمة معقدة، حيث يستخدم أساليب رياضية للحصول على الحل الأمثل لمشكلة ما، مع مراعاة القيود الموجودة. نشأ البحث العملي خلال الحرب العالمية الثانية لحل المشاكل العسكرية، ومن ثم تطور في العديد من المجالات مثل الاقتصاد والإدارة والإنتاج ووسائل النقل، وغيرها. إحدى الأجزاء الرئيسية للبحث العملي هي البرمجة الخطية، حيث تسمح بالحصول على الحل الأمثل عندما تكون دالة الهدف والقيود عبارة عن دوال خطية. تهدف هذه المادة العلمية إلى تعليم البرمجة الخطية لطلاب السنة الثالثة في مجال علوم الحاسوب، حيث تزودهم بأساسيات هذا المجال ليتمكنوا من تطبيقها في مجال عملهم المستقبلي.

كلمات مفتاحية: قيد، سيمبليكس، سيمبليكس بمرحلتين، ثنائية، اتخاذ القرار.

## Contents

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Introduction                                                          | 4  |
| Chapitre I: Rappel d'algèbre linéaire (matrice)                       | 5  |
| I.1 Matrices                                                          | 5  |
| I.2 Matrices particulières                                            | 5  |
| I.3 Opération sur matrices                                            | 6  |
| I.4 Matrice transposée                                                | 7  |
| I.5 Calcul du déterminant                                             | 7  |
| I.6 Règles simplificatrice des déterminants                           | 9  |
| I.7 Matrices inversibles                                              | 11 |
| <i>Série d'exercice 1</i>                                             | 12 |
| Chapitre II : Introduction et propriétés de la programmation linéaire | 13 |
| II.1 Exemple de problème de programmation linéaire                    | 13 |
| II.2 Formulation du PL                                                | 14 |
| II.3 Différentes formes d'un PL                                       | 15 |
| II.4 Résolution graphique                                             | 15 |
| Chapitre III: Méthode du simplexe                                     | 17 |
| III.1 Quelques définitions et notions                                 | 17 |
| III.2 Ecriture d'un PL par/ à une base B                              | 19 |
| III.3 Algorithme de simplexe                                          | 21 |
| III.4 Méthode des deux phases                                         | 24 |
| <i>Série d'exercice 2</i>                                             | 28 |
| Chapitre IV : Dualité                                                 | 30 |
| IV.1 Exemple                                                          | 30 |
| IV.2 Programme dual                                                   | 31 |
| IV.3 Résolution par l'utilisation du dual                             | 33 |
| IV.4 Algorithme dual du Simplexe                                      | 34 |
| <i>Série d'exercice 3</i>                                             | 36 |
| Chapitre V: Problème de transport                                     | 38 |
| V.1 Modèle mathématique du problème de transport et définitions       | 38 |
| V.2 Condition d'existence d'un plan optimale de transport             | 39 |
| V.3 Graphe et tableau de transport associé au problème                | 39 |
| V.4 Résolution d'un problème de transport                             | 41 |
| V.4.1 Calcul d'un plan basique initial de transport                   | 41 |
| V.4.2 Méthode des potentiels                                          | 44 |
| <i>Série d'exercice 4</i>                                             | 48 |
| Références                                                            | 50 |

## Introduction

Le développement technologique, soumet l'homme aux contraintes d'un système de relations économique de plus en plus complexe. On constate qu'il a de plus en plus d'éléments nouveaux qui doivent être prise en compte lors des prises de décision concernant une action donnée (organisation d'une production, un réseau de transport, ...) et que ces prises de décision deviennent l'objet de véritables recherches qui ne peuvent être menées sans l'aide d'outils mathématiques. C'est ainsi que s'est développé un domaine des mathématiques basé sur l'activité de décision, appelé **recherche opérationnelle**.

Les premiers problèmes, qui marquent le début de la recherche opérationnelle ont été posés pendant la seconde guerre mondiale. A cette époque l'homme était préoccupé par l'organisation des opérations militaires et surtout aériennes (nombre d'avions, la formulation à adapter, la fréquence des vols pour avoir un maximum d'efficacité, ...). Par la suite, les méthodes de recherche opérationnelle se sont de plus en plus appliquées aux problèmes économiques et commerciaux.

Une des parties essentielles de la recherche opérationnelle est la **programmation linéaire**, qui étudie la maximisation ou la minimisation de fonction linéaire soumise à des contraintes linéaires. La programmation linéaire permet la résolution d'un programme linéaire. Un programme linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées "contraintes" qui sont linéaires (c'est-à-dire que les variables ne sont pas élevées au carré, ne servent pas d'exposant, ne sont pas multipliées entre elles...). Et à partir de ces contraintes, on doit optimiser une fonction également linéaire appelée objectif.

Ce cours est destiné aux étudiants de 3ème année (6ème semestre, licence académique) d'informatique. Il vise à couvrir les principaux concepts des problèmes d'optimisation et de leurs théories sous-jacentes, et de pouvoir utiliser ces techniques dans la résolution des problèmes concrets.

Ce document est constitué de cinq chapitre présenté comme suit :

- Rappels sur les matrices
- Introduction Générale à la programmation linéaire.
- Méthode primale de résolution d'un programme linéaire.
- Méthode duale en programmation linéaire.
- Problème de transport.

## Chapitre I: Rappel de l'algèbre linéaire (matrice)

### I.1 Matrices :

On appelle matrice  $A$ , à éléments dans un corps  $K$ , tout tableau rectangulaire ou carré d'éléments  $a_{ij} \in K$ .

On désigne par l'indice "i" le numéro de la ligne et l'indice "j" le numéro de la colonne contenant l'élément  $a_{ij}$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

Exemple:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ est une matrice d'ordre } (2 \times 3). \quad A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \text{ est une matrice d'ordre } 3.$$

### I.2 Matrices particulières :

#### a) Matrice nulle:

Une matrice nulle est une matrice dont tous les éléments sont nuls:

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ est une matrice nulle.}$$

#### b) Matrice unité:

La matrice unité d'ordre  $n$  (noté  $I_n$ ) est une matrice carrée d'ordre  $n$ , dont les termes de la diagonale principale sont  $a_{ii}=1, i=\overline{1, n}$  et tous les autres termes  $a_{ij}=0, i \neq j$  :

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ est une matrice unité d'ordre } 3.$$

#### c) Matrice diagonale:

Une matrice diagonale est une matrice carrée  $(a_{ij})$  d'ordre  $n$  telle que  $a_{ij}=0$ , pour  $i \neq j$  et  $a_{ii} \neq 0$  pour au moins un indice  $i_0$ .

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ est une matrice diagonale d'ordre 3.}$$

**d) Matrice ligne:**

Une matrice ligne est une matrice ayant une seule ligne.

Exemple:

$$A = (1 \quad 0 \quad 3), \text{ est une matrice ligne d'ordre (1x3).}$$

**e) Matrice colonne:**

Une matrice colonne est une matrice ayant une seule colonne.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ est une matrice colonne d'ordre (2x1).}$$

### 1.3 Opération sur matrices :

**a) La somme :**

Si A et B sont deux matrices de même ordre (mxn) alors la somme A+B est égale à la matrice C, dans laquelle tout élément est la somme des éléments correspondants de A et B.

Exemple :

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \text{ alors } A + B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

**b) Le produit:**

Soient A et B deux matrices d'ordre (mxp) et (pxn) respectivement, le produit A.B est une matrice C d'ordre (mxn), dont chaque élément  $c_{ij}$  est la somme des produits des éléments de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de

A par les éléments correspondants de la  $j^{\text{ème}}$  colonne de B.  $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$ .

Ce produit n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemple :

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ alors } A.B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 16 & 7 & 27 \end{pmatrix}$$

Le produit B.A est impossible.

#### I.4 Matrice transposée :

Si dans une matrice A d'ordre (mxn) on remplace les lignes par les colonnes respectives, on obtient une matrice A' (dite transposée), d'ordre (nxm), qui vérifie les propriétés suivantes:

$$(A')' = A \quad (A+B)' = A' + B' \quad (AB)' = B'A'$$

Exemple:

$$\text{La matrice transposée de } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ est } A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

#### I.5 Calcul du déterminant :

##### a) Déterminant d'ordre 2:

Soit A une matrice carrée d'ordre 2

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Exemple:

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ alors } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 18 = 23$$

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ alors } \det(B) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$$

##### b) Déterminant d'ordre 3:

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ une matrice carrée d'ordre 3}$$

On appelle **mineur** de  $a_{ij}$ , noté  $M_{ij}$ , le déterminant obtenu en supprimant la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne. Le nombre  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  est appelé **cofacteur** de l'élément  $a_{ij}$ .

Exemple :

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ est le mineur de } a_{21} \text{ et } A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21}$$

Pour calculer le déterminant de A, on somme les produits des éléments d'une ligne ou d'une colonne (à notre choix) par leurs cofacteurs respectifs. En pratique, on développe selon la ligne ou la colonne qui contient le maximum d'éléments nuls (s'il y en a).

Les éléments  $(-1)^{i+j}$  forment la matrice suivante, dite matrice de signe :

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

En développant selon la deuxième ligne on trouve :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23} \\ &= (-1)^{2+1} a_{21} M_{21} + (-1)^{2+2} a_{22} M_{22} + (-1)^{2+3} a_{23} M_{23} \\ &= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= -a_{21} [a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}] + a_{22} [a_{11} a_{33} - a_{31} a_{13}] - a_{23} [a_{11} a_{32} - a_{31} a_{12}] \end{aligned}$$

Exemple:

$$\text{Soit la matrice carrée A d'ordre 3: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ alors}$$

Si on développe selon la première ligne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 * 3 - 3 * 0 + 2 * (-12) = -18$$

Si on développe selon la deuxième ligne (le calcul est simplifié) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 3 * (-6) + 0 = -18$$

### c) Déterminant d'ordre n:

Le tableau des signes est le suivant :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots & (-1)^{1+j} & \dots & (-1)^{1+n} \\ - & + & - & \dots & (-1)^{2+j} & \dots & (-1)^{2+n} \\ + & - & + & \dots & (-1)^{3+j} & \dots & (-1)^{3+n} \\ \vdots & & & \dots & & \dots & \vdots \\ (-1)^{i+1} & (-1)^{i+2} & (-1)^{i+3} & \dots & (-1)^{i+j} & \dots & (-1)^{i+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2} & (-1)^{n+3} & \dots & (-1)^{n+j} & \dots & + \end{pmatrix}$$

Exemple:

Soit la matrice carrée A d'ordre 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ alors, le tableau de signe est le suivant : } \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Si on développe selon la troisième ligne (contient deux zéros) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -3 \left( 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right) - 4 \left( 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = -60$$

## 1.6 Règles simplificatrice des déterminants:

- Une matrice dont au moins une ligne (respectivement colonne) est nulle a un déterminant nul.

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Sans faire de calcul, } \det(A)=0 \text{ et } \det(B)=0.$$

- Une matrice dont au moins deux lignes (respectivement deux colonnes) sont identiques a un déterminant nul.

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ Sans faire de calcul, } \det(A)=0 \text{ et } \det(B)=0.$$

- Une matrice dont au moins une ligne (respectivement une colonne) est combinaison linéaire d'autres lignes (respectivement d'autres colonnes) de la matrice a un déterminant nul.

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Sans faire de calcul,  $\det(A)=0$  (car  $L_4=L_2+L_1$ ) et  $\det(B)=0$  (car  $C_3= C_2-C_1$ ).

- Le déterminant d'une matrice ne change pas si on ajoute à une ligne (respectivement colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (respectivement d'autres colonnes). En pratique, on applique cette propriété pour faire apparaître le maximum des éléments nuls dans une ligne ou une colonne de la matrice.

Exemple:

$$\text{Soit la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ alors,}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \dots L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\dots = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{vmatrix} \dots L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\dots = 1 \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

- Si on multiplie une seule ligne (respectivement une colonne) d'une matrice par un scalaire, alors son déterminant est multiplié par ce même scalaire.

Exemple:

$$\text{Soient la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ alors, } \det(B) = 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 * 6 = 12$$

- Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa transposée :  $\det(A)=\det(A')$ .
- Le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants de ces matrices.

## I.7 Matrices inversibles :

On dit qu'une matrice  $A \in U_n(K)$  est inversible s'il existe une matrice  $B \in U_n(K)$  telle que:

$$AB = BA = I_n$$

### **Théorème:**

Soit  $A \in U_n(K)$  alors A est inversible  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$  et on a  $A^{-1} = \frac{A^*}{\det A}$

Série d'exercice 1 :**Exercice 01:**

Calculer (lorsque c'est possible) les produits des matrices suivantes :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{f) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 02:**

On dit que les matrices A et B commutent si  $AB = BA$ . Est-ce que les matrices suivantes commutent ?

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -5 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 03:**

Calculer les déterminants :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & -5 & 8 \end{vmatrix},$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}, \quad \text{e) } \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \text{ et } \text{f) } \begin{vmatrix} -2 & 101 & -56 \\ 0 & -1 & 23 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Qu'est-ce qu'on peut dire en général sur les déterminants des matrices diagonales et triangulaires ?

## Chapitre II : Introduction et propriétés de la programmation linéaire

### II.1 Exemple de problème de programmation linéaire :

Avant de donner le modèle mathématique général du problème de la programmation linéaire, nous présentons un exemple concret.

#### Exemple:

Une unité de production de parpaings fabrique quatre types de produit: Les parpaings de dimensions respectivement 10 cm (noté  $P_1$ ), 15 cm (noté  $P_2$ ), 20 cm (noté  $P_3$ ) et l'ourdi (noté  $P_4$ ).

Pour la fabrication de ces produits, on utilise quatre matières premières, le sable ( $M_1$ ), le gravier ( $M_2$ ), le ciment ( $M_3$ ) et l'eau ( $M_4$ ), disponibles en quantité respectivement de 5000, 3000 et 2000 unités.

L'eau est disponible en quantité illimitée. Le plan de production de l'unité est donné dans le tableau ci-dessous:

| Produit<br>Matières premières |       |       |       |       | Quantités de matières premières disponibles |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|---------------------------------------------|
|                               | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |                                             |
| $M_1$                         | 2     | 3     | 5     | 6     | 5000                                        |
| $M_2$                         | 1     | 2     | 3     | 3     | 3000                                        |
| $M_3$                         | 0.8   | 1     | 2     | 3     | 2000                                        |
| $M_4$                         | 1     | 1     | 2     | 2     | /                                           |

Le tableau signifie que pour fabriquer un parpaing de 10 cm, il faut 2 unités de  $M_1$ , 1 unité de  $M_2$ , 0.8 unité de  $M_3$  et 1 unité de  $M_4$  et de la même manière pour  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$ .

Les parpaings sont vendus respectivement à raison de 6,7,9 et 10 DA l'unité.

Le problème pour la direction de l'unité est de trouver le nombre maximal de produit  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$  à fabriquer pour avoir un bénéfice maximal, tout en respectant les contraintes de l'unité.

#### Résolution:

Désignons par  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  et  $x_4$  les quantités de produits  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  et  $P_4$ . Ces quantités doivent vérifier les conditions suivantes:

- Les quantités utilisées en matières premières ne doivent pas dépasser les quantités disponibles:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5000 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 3000 \dots\dots\dots(1) \\ 0.8x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 2000 \end{cases}$$

- Les quantités à produire sont toutes positives ou nulles:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \quad \text{ou} \quad x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4. \dots\dots\dots(2)$$

Comme l'eau est disponible en quantité illimitée, donc on n'a aucune contrainte sur la matière première M4.

Le chef de production de l'unité choisira le programme réalisable qui donnera le maximum de la fonction bénéfice Z.  $Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 \rightarrow \max \dots\dots\dots(3)$

La fonction bénéfice (3) appelée aussi fonction objective ou fonction but, représente le bénéfice que va réaliser l'unité.

En résumé le chef de production aura pour objectif, de trouver la solution optimale du problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{cases} Z(x_1, x_2, x_3, x_4) = 6x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 \rightarrow \max \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 \leq 5000 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 3000 \\ 0.8x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 2000 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

## II.2 Formulation du PL :

Un programme linéaire est un modèle mathématique donnée sous la forme suivante:

Maximiser  $f(x_1, \dots, x_n)$  (ou minimiser  $f(x_1, \dots, x_n)$ )  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{domaine}$ , ou

$$\text{Domaine} = \left\{ f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j R b_i, \forall i = 1, \dots, m. \text{ avec } R \in \{=, <, >, \leq, \geq\}, a_{ij} \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{De plus: } f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{où } c_j \in \mathbb{R}, \forall j = 1, \dots, n$$

### **a) Exemple:**

$$\text{Max } 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{est un PL}$$

### **b) Notations et définitions:**

- la fonction  $f(x_1, \dots, x_n)$  sera notée  $f(x) = C^t x = \sum_{j=1}^n C_j x_j = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$
- $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j R b_i$  est appelé contrainte.

3. Formulation Matrice :  $\text{Max } f(x_1, \dots, x_n) \text{ s.t. } Ax \leq b \text{ et } x \geq 0$  où

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}} \text{ et } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

**Exemple:**

$$\text{Max } 2x_1 + x_2$$

$$\text{Max } 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ecriture matricielle} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

### II.3 Différentes formes d'un PL :

**a) Forme canoniques:**

$$\text{Min } C^t \cdot x$$

$$\text{Max } C^t \cdot x$$

$$\begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots(1) \text{ où}$$

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots(2)$$

Dans ce cours on ne s'intéressera qu'aux PL, données sous la forme (2)

**b) Forme standard:**

$$\text{Max } C^t \cdot x \text{ (ou Min)}$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

**Théorème 1:** Tout PL ayant une forme canonique peut être écrit sous forme standard et inversement.

**Théorème 2:** Tout PL peut être écrit sous forme canonique.

### II.4 Résolution graphique :

Cette méthode de résolution ne concerne que des PL avec 2 variables. Son principe est basé sur une représentation graphique du Domaine, ainsi que de la fonction objective. Nous allons voir le fonctionnement de cette méthode à travers l'exemple suivant:

**Modèle** Max  $2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 \leq 7 - x_1 \\ x_2 \leq 10 - 2x_1 \\ x_2 \leq \frac{10 - x_1}{2} \end{cases}$$

Si on pose :  $D_1$ : la droite d'équation  $x_2 = 7 - x_1$

$D_2$ : la droite d'équation  $x_2 = 10 - 2x_1$

$D_3$ : la droite d'équation  $x_2 = \frac{10 - x_1}{2}$

Posons :  $2x_1 + x_2 = k$  (fonction objective)  $x_2 = -2x_1 + k$  ..... droite  $D^k$ .

On sait que  $(0,0)$  est un point du domaine donc  $K \geq 0$

Donc on va représenter  $D^k$

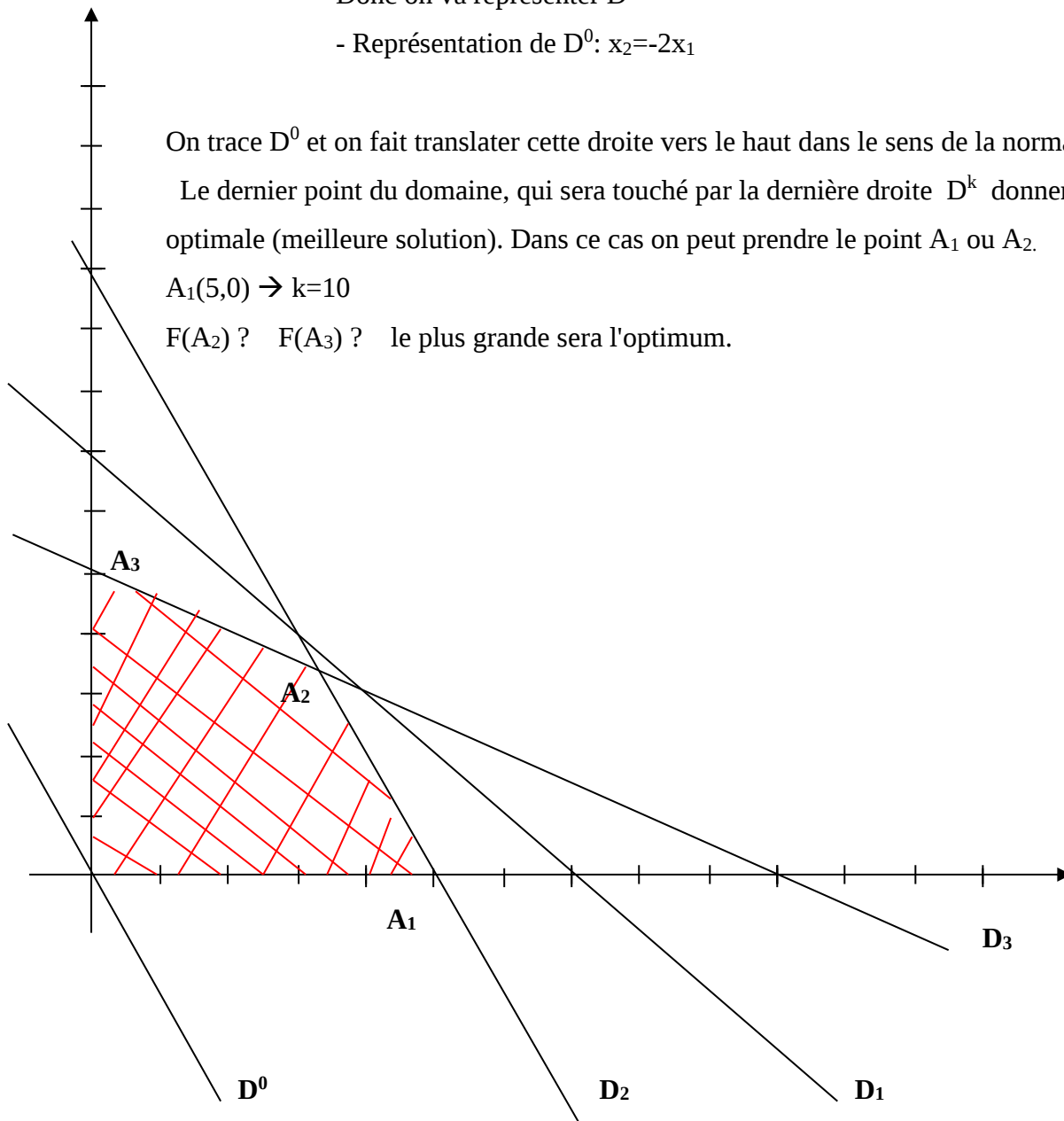
- Représentation de  $D^0$ :  $x_2 = -2x_1$

On trace  $D^0$  et on fait translater cette droite vers le haut dans le sens de la normale de  $D^0$ .

Le dernier point du domaine, qui sera touché par la dernière droite  $D^k$  donnera la solution optimale (meilleure solution). Dans ce cas on peut prendre le point  $A_1$  ou  $A_2$ .

$A_1(5,0) \rightarrow k=10$

$F(A_2)$  ?  $F(A_3)$  ? le plus grande sera l'optimum.



## Chapitre III: Méthode du simplexe

### III.1 Quelques définitions et notions :

#### a) Notion de redondance :

Concédons un PL canonique  $\text{Max } Z = C^t \cdot x$

$$\begin{cases} A \cdot x \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Une contrainte  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$  est dite redondante au système  $\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$  s'il existe un ensemble d'indice  $L \subset \{1, 2, \dots, m\} - \{i\}$  tq: les vecteurs  $V_k = \{(a_{kj})_{1 \leq j \leq n}, b_k\}$  pour  $k \in L \cup \{i\}$  soient linéairement dépendante.

**Exemple:**

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + x_2 + x_3 & \text{Max } Z &= 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \dots (1) \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \dots (2) \\ x_3 - x_2 \leq 1 \dots (3) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_3 - x_2 \leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} & (1) = (2) + (3) \end{aligned}$$

#### b) Notion de contrainte serrée et non-serrée :

Soit un PL canonique de la forme :  $\text{Max } Z = C^t \cdot X$

$$\begin{cases} A \cdot x \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Concédons un point  $x_0 = (x_j)_{1 \leq j \leq n}$  du domaine  $\{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$  appelé **POLYEDRE**

- on dit que la  $i^{\text{ème}}$  contrainte est serrée au point  $x_0$  si  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ .
- on dit que la  $i^{\text{ème}}$  contrainte est non-serrée au point  $x_0$  si  $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j < b_i$

Dans se dernier cas, on définit la notion de **variable d'écart** associé à la contrainte  $i$ , on pose  $e_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j / e_i \geq 0$

La contrainte  $x_j \geq 0$  est appelée : **contrainte de non-négativité**.

Supposons que l'on ait un PL avec une variable  $x_n \leq 0$ . Alors on pose  $x'_k = -x_k$ , on se ramène aussi à des contraintes de non-négativité.

#### c) Notion de base:

Soit un PL canonique de la forme :  $\text{Max } Z = C^t \cdot X$

$$\begin{cases} A \cdot x \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Notion de base canonique: soit un PL canonique mis sous la forme standard

$$\text{Max } Z = C^t \cdot X$$

$$\text{Max } Z = C^t \cdot X$$

$$\text{M contrainte} \rightarrow \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \geq 0, \forall j = 1, \dots, n \end{cases} \dots (1) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + e_i = b_i, i = 1; \dots, m \\ x_j \geq 0, j = 1, \dots, n \\ e_i \geq 0, i = 1, \dots, m \end{cases} \dots (2)$$

(2) est la forme standard de (1)

La matrice ( $m^2$ ) est dite canonique (matrice associée aux variables d'écarts  $e_i, i=1, \dots, m$ )

$$I = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & \dots & e_m \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ 0 & .. & .. & & . \\ . & .. & 0 & 1 & . \\ 0 & 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \uparrow \\ \text{m ligne} \\ \downarrow \end{matrix} \end{matrix}$$

$\longleftrightarrow$  m colonne

**Exemple:**

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + e_1 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + e_2 = 5 \\ x_1, x_2 \geq 0, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

On pose  $e_1 = x_3$  et  $e_2 = x_4$ . On a alors: le PL standard

$$\text{Max } Z = \sum_{j=1}^4 c_j x_j = 2x_1 + x_2 + 0e_1 + 0e_2 \quad \text{Max } Z = \sum_{j=1}^4 c_j x_j$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5 \\ x_j \geq 0, j = 1..4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{avec } \begin{cases} \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \end{cases} \text{ et.}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrivons le système  $Ax=b$  en introduisant les matrices N et B où  $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les variables utilisées: Matrice N  $\rightarrow x_1$  et  $x_2$ , Matrice B  $\rightarrow x_3$  et  $x_4$

$$\mathbf{Ax} = [\mathbf{N}, \mathbf{B}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}_N \\ \mathbf{X}_B \end{bmatrix} \quad \text{où } \mathbf{X}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_B = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

**d) Définition d'une base:**

Soit un PL standard de la forme  $\text{Max } Z = C^t \cdot x$

$$\begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Une matrice carrée  $B(m^2)$  extraite de A est dite base si elle est inversible ( $\det(B) \neq 0$ ).

**Exemple:** Max  $Z = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 \\ x_j \geq 0, j = 1..5 \end{cases}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ est une base canonique } (\det(B)=1).$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ est une base } (\det(B)=2 \neq 0)$$

### III.2 Ecriture d'un PL par/ à une base B :

Soit un PL standard      Max  $Z = C^t \cdot x$

$$\begin{cases} A \cdot x = b \\ x \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (*)$$

Posons  $A = [B, N]$ , alors  $Ax = b \Rightarrow Bx_B + Nx_N = b$  où  $x_B, x_N$  sont resp. les variables associées à la base B et à la matrice hors-base N.

Le pb (\*) s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= C_B^t x_B + C_N^t x_N & \text{Max } Z &= C_B^t x_B + C_N^t x_N \\ \begin{cases} Bx_B + Nx_N = b \\ x_B, x_N \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow & \begin{cases} x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_B, x_N \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= C_B^t (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + C_N^t x_N = C_B^t B^{-1}b + (C_N^t - C_B^t B^{-1}N)x_N = C_B^t B^{-1}b + \Delta_N^t x_N \\ &\begin{cases} x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_B, x_N \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

#### a) Solution de base :

Soit un PL standard      Max  $Z = C^t \cdot x$     et B une base

$$\begin{cases} A \cdot x = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

On appelle solution de base  $x(x_B, x_N)$  une solution au système  $\begin{cases} A \cdot x = b \\ x \geq 0 \end{cases}$  tq  $x_B = B^{-1}b$  et  $x_N = 0$ .

**Exemple:**

Max  $Z = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \dots \dots \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{standard}} \dots \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1..4 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  associée aux variables  $(x_3, x_4)$  est une base réalisable. On lui associe la solution  $x_B = B^{-1}b = (2, 1) = (x_3, x_4)$   $x_N = 0 = (x_1, x_2)$  donc  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 2, 1)$  est une solution de base réalisable associée à la base  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , qui est associée aux variables  $x_3, x_4$  (bien entendu,  $x_B \geq 0$ )

**b) Solution de base optimale :**

Une solution de base  $x^* = (x_{B^*}, x_{N^*})$ , associée à une base réalisable  $B^*$  est dite optimale si:

$$Z^* = C^t B_{*} B_{*}^{-1} \cdot b = \text{Max } C^t x$$

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

**Théorème:** Une base  $B^*$  est optimale  $\Leftrightarrow$  les coûts réduits  $\Delta_{N^*} = C_{N^*}^t - C_{B^*}^t B^{-1} N_{*} \leq 0$

**c) Ecriture d'un PL par rapport à une base B '\*Tableau de Simplex\*':**

Etant donné un PL standard, et une base  $B$   $\text{Max } Z = C^t \cdot x$

$$\begin{cases} A \cdot x = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Alors: Le PL s'écrit sous la forme suivante:

$$\text{Max } Z = C_B^t B^{-1} b + (C_N^t - C_B^t B^{-1} N) x_N$$

$$\begin{cases} x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\ x_B, x_N \geq 0 \end{cases} \dots (*)$$

Ecrivons le PL (\*\*) dans un tableau:

| $x_B$    | $x_N$      |                   |
|----------|------------|-------------------|
| 1        |            |                   |
| ..       | $B^{-1}N$  | $B^{-1}b$         |
| ..       |            |                   |
| 1        |            |                   |
| 0 .... 0 | $\Delta_N$ | $-C_B^t B^{-1} b$ |

$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} x_B$ 
 $\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} -Z$ 

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N x_N \\ -Z &= -C_B^t B^{-1}b - \Delta_N x_N \end{aligned}$$

**Exemple:**

$$\text{Max } Z=2x_1+x_2$$

$$\text{Max } Z=2x_1+x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \leq 1 \dots \end{cases} \xrightarrow{\text{standard}} (1) \dots \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1..4 \end{cases}$$

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{associée}} x_B = (x_3, x_4), x_N = (x_1, x_2)$$

Ecrivons (1)/ à la base B

$$C_N^t = (C_1, C_2) = (2, 1) \quad C_B^t = (C_3, C_4) = (0, 0) \quad C^t = (2, 1, 0, 0)$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc on aura le tableau suivant:

| $x_3$ | $x_4$ | $x_1$ | $x_2$ |   |       |
|-------|-------|-------|-------|---|-------|
| 1     | 0     | 1     | 1     | 2 | $x_3$ |
| 0     | 1     | 1     | -1    | 1 | $x_4$ |
| 0     | 0     | 2     | 1     | 0 | -Z    |

$$B^{-1}b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B^{-1}N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \Delta_N = C_N^t - C_B^t B^{-1}N = (2, 1) - (0, 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (2, 1) - (0, 0) = (2, 1) \neq 0$$

Ou bien:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |   |       |
|-------|-------|-------|-------|---|-------|
| 1     | 1     | 1     | 0     | 2 | $x_3$ |
| 1     | -1    | 0     | 1     | 1 | $x_4$ |
| 2     | 1     | 0     | 0     | 0 | -Z    |

**Question:** la base  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , associée aux variables  $x_3$  et  $x_4$  n'est pas optimale car  $\Delta_N$  ne sont pas  $\leq 0$  (car tous les coûts réduits ne sont pas  $\leq 0$ ).

### III.3 Algorithme de simplexe :

Soit un PL standard  $\text{Max } Z = C^t \cdot x$  et  $B_0$  une base initiale, réalisable (il faut avoir une solution de

$$\begin{cases} A \cdot x = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{base réalisable associée à la base } B).$$

Le but de l'algorithme du simplexe, découvert par DANTZIG en 1947, est d'atteindre une base optimale  $B^*$  à partir de la base  $B_0$ . A chaque itération  $k$ , une base intermédiaire  $B_k$  est trouvée via

l'utilisation d'une opération de pivotage, on permettant une variable de base de  $B_{k-1}$  avec une variable hors base  $N_{k-1}$ .

### Fonctionnement:

Soit  $B$  une base courante, comment passe-t-on de  $B$  vers  $B'$ ?

On applique les deux critères suivants:

- a) **1<sup>ère</sup> critère de Dantzig:** Choix de la variable hors base qui entre: choisir la variable  $x_e$   
 $tq: \Delta_e = \text{Max}\{\Delta_N, j. \text{hors. base}\}$
- b) **2<sup>ème</sup> critère de Dantzig:** Choix de la variable  $x_s$  sortante de telle sorte que ( $x_s \in x_B$ : base)

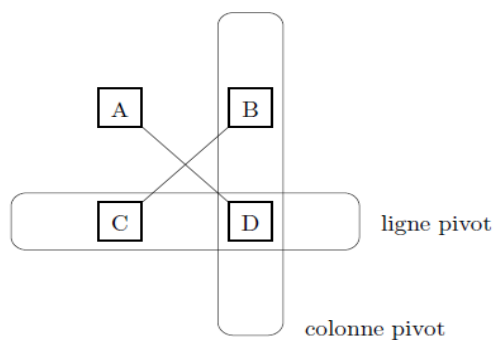
$$\frac{b'_s}{a'_{se}} = \text{Min} \left\{ \frac{b'_i}{a'_{ie}}, i.. tq.. a'_{ie} > 0 \right\}$$

La nouvelle base  $B'$  sera définie par  $x'_B = x_B - \{x_s\} + \{x_e\}$ . On reconstruit le tableau par rapport à  $B'$  et on réitère le processus jusqu'à ce que les coûts réduits soient tous négatifs ou nuls.

### **Construction du tableau de $B'$ :**

L'élément  $a'_{se}$  est appelé Pivot

- Transformation de la ligne pivot : elle est divisée par l'élément pivot:  
 $b'_s = \frac{b_s}{a'_{se}}$  et  $a'_{sj} = \frac{a_{sj}}{a'_{se}}, j = 1..n$
- Transformation de la colonne pivot : toutes les cases sauf la case pivot deviennent zéro.  
 $a_{ie} = 0, i = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, m$
- Transformation des autres cases du tableau: On applique la règle suivante :



$$A' = A - \frac{C \cdot B}{D}$$

- **Formellement:**

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ie} \cdot a_{sj}}{a'_{se}}, b'_i = b_i - \frac{a_{ie} \cdot b_s}{a'_{se}}, c'_j = c_j - \frac{c_e \cdot a_{sj}}{a'_{se}}, Z' = Z + \frac{c_e \cdot b_s}{a'_{se}}$$

**Exemple1:** (doit trouver la solution de base réalisable et admissible)

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1..4 \end{cases}$$

|                | $x_1$    | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | b |       |
|----------------|----------|-------|-------|-------|---|-------|
|                | 1        | 1     | 1     | 0     | 2 | $x_3$ |
| <b>Pivot</b> → | <b>1</b> | -1    | 0     | 1     | 1 | $x_4$ |
|                | 2        | 1     | 0     | 0     | 0 | -Z    |

$x_1$  entre en base (1<sup>ère</sup> critère )

$x_4$  sort de la base (2<sup>ème</sup> critère )

d'où  $x_B = (x_3, x_1)$  et le tableau devient:

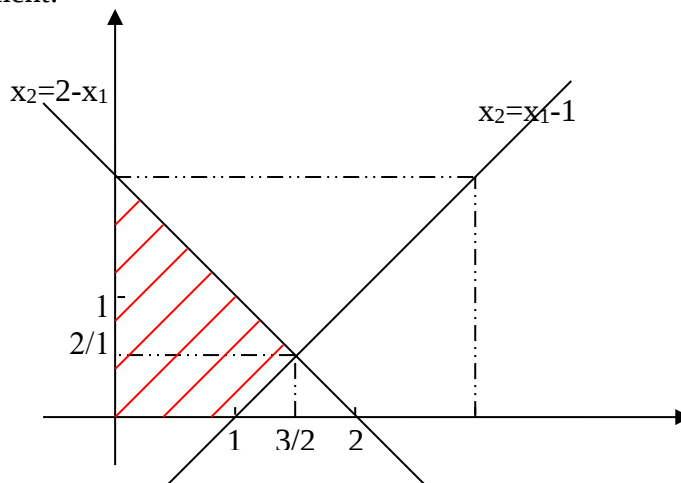
| $x_1$ | $x_2$    | $x_3$ | $x_4$ | b  |       |
|-------|----------|-------|-------|----|-------|
| 0     | <b>2</b> | 1     | -1    | 1  | $x_3$ |
| 1     | -1       | 0     | 1     | 1  | $x_1$ |
| 0     | 3        | 0     | -2    | -2 | -Z    |

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | b    |       |
|-------|-------|-------|-------|------|-------|
| 0     | 1     | 1/2   | -1/2  | 1/2  | $x_2$ |
| 1     | 0     | 1/2   | 1/2   | 3/2  | $x_1$ |
| 0     | 0     | -3/2  | -1/2  | -7/2 | -Z    |

Tous les coûts réduits sont négatifs donc on s'arrête avec  $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$  est optimal

$$Z = \frac{7}{2}$$

Graphiquement:



### III.4 Méthode des deux phases :

L'algorithme de Simplexe est une méthode itérative constituée d'une ou plusieurs itérations. L'itération de cette méthode consiste à démarrer d'une solution de base (point extrême) et de passer au point extrême voisin et ainsi de suite.

Le problème est de trouver le point extrême de départ, c'est pourquoi Dantzig a proposé la méthode des deux phases.

**Exemple:**

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 25$  lorsque cette inégalité est transformée en égalité par l'ajout d'une variable d'écart, soit  $x_4$ , devient  $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 25$  la solution immédiate quand  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  est  $x_4 = -25$

Qui est une solution inadmissible car toutes les variable  $x_j$  doivent être positives ou nulles.

**Algorithme:**

**Etape 0:** Ajouter les variables artificielles de façon à obtenir une matrice unité. Développer une nouvelle fonction économique dénotée  $W$ .  $W = -\sum X_j, j \in A$  ou  $A$  est l'ensemble des variables artificielles. Il faut transformer ensuite cette nouvelle fonction économique  $W$  sous forme canonique par rapport à l'ensemble de base artificiel existant. En d'autre termes, il faut rendre les coefficients  $c_j$  égaux à zéro dans la fonction  $W$  pour  $j \in A$ .

Enfin, il faut également rendre la fonction économique  $Z$  canonique par rapport à l'ensemble de base artificiel.

**Etape 1:** utiliser l'algorithme du simplexe pour maximiser  $W$ .

1. Si  $\text{Max } W=0$ , cela signifie que les variables artificielles sont nulles dans la solution. Par conséquent, il y a une solution de base admissible au programme linéaire. Procéder directement à l'étape 2.
2. Si  $\text{Max } W < 0$ , cela implique qu'il y a une ou plusieurs variables artificielles avec une valeur positive. Ainsi, il n'y a pas de solution admissible: **Stop**, le programme linéaire n'a pas de solution.

**Etape 2:** Employer l'algorithme du Simplexe pour maximiser  $Z$  car il existe une solution de base admissible.

**Exemple :**

Max  $Z=3x_1+x_2$

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_2 \leq 4 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

1. Commençons par écrire le problème sous forme standard en le mettant tout d'abord sous forme canonique puis en ajoutant les variables d'écart.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ -x_1 \leq -2 \\ x_2 \leq 4 \\ -x_2 \leq -2 \end{cases}$$

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + e_1 = 4 \\ -x_1 + e_2 = -2 \\ x_2 + e_3 = 4 \\ -x_2 + e_4 = -2 \end{cases}$$

2. On rend le second membre positif.

$$\text{Max } Z = 3x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + e_1 = 4 \\ x_1 - e_2 = 2 \\ x_2 + e_3 = 4 \\ x_2 - e_4 = 2 \end{cases}$$

3. On ajoute des variables artificielles ( $a_1, a_2$ ) de manière à faire apparaître une sous matrice identité et on résoud le problème auxiliaire suivant grâce à la méthode du simplexe en tableau.

$$\text{Max } W = -a_1 - a_2$$

$$\begin{cases} x_1 + e_1 = 4 \\ x_1 - e_2 + a_1 = 2 \\ x_2 + e_3 = 4 \\ x_2 - e_4 + a_2 = 2 \end{cases}$$

- La base réalisable de départ est ( $e_1; a_1; e_3; a_2$ ). Les variables hors base sont ( $x_1; x_2; e_2; e_4$ ).
- Pour démarrer le simplexe, il faut d'abord écrire  $W$  en fonction des variables hors base.

Pour ce faire, on utilise les contraintes qui donnent les relations :

$$-a_1 = x_1 - e_2 - 2$$

$$-a_2 = x_2 - e_4 - 2$$

On peut donc écrire  $W$  sous la forme suivante :

$$W = x_1 + x_2 - e_2 - e_4 - 4$$

$$\text{Soit : } W - x_1 - x_2 + e_2 + e_4 = -4$$

Les tableaux successifs du simplexe sont les suivants.

|       | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $a_1$ | $a_2$ | $b$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $e_1$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 4   |
| $a_1$ | 1     | 0     | 0     | -1    | 0     | 0     | 1     | 0     | 2   |
| $e_3$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 4   |
| $a_2$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 0     | 1     | 2   |
| $W$   | -1    | -1    | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | -4  |

|       | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $a_1$ | $a_2$ | $b$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $e_1$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | -1    | 0     | 2   |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | -1    | 0     | 0     | 1     | 0     | 2   |
| $e_3$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 4   |
| $a_2$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 0     | 1     | 2   |
| $W$   | 0     | -1    | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | -2  |

|       | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $a_1$ | $a_2$ | $b$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $e_1$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | -1    | 0     | 2   |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | -1    | 0     | 0     | 1     | 0     | 2   |
| $e_3$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | -1    | 2   |
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 0     | 1     | 2   |
| $W$   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0   |

Le test d'arrêt est satisfait et le simplexe donne  $\max W = 0$ .

4. Comme  $\max W = 0$ , le problème initial admet une base réalisable. De plus, on peut lire la base réalisable de départ pour le problème initial sur le dernier tableau du problème auxiliaire, il s'agit de la base  $(e_1; x_1; e_3; x_2)$ . Les variables hors base sont  $(e_2; e_4; a_1; a_2)$ . Les variables artificielles sont bien hors base comme on le souhaitait.

On retourne au problème initial, i.e  $\max Z = 3x_1 + x_2$  auquel on applique le simplexe à partir de la base réalisable de départ donnée par la phase 1. C'est la phase 2.

- La base réalisable de départ est  $(e_1; x_1; e_3; x_2)$ . Les variables hors base sont  $(e_2; e_4)$ . On n'a plus besoin des variables auxiliaires.
- Avant de commencer le simplexe, il faut d'abord écrire  $Z$  en fonction des variables hors base. On peut le faire à l'aide des contraintes qu'on lit sur le dernier tableau de la phase 1 :

$$x_1 = 2 + e_2$$

$$x_2 = 2 + e_4$$

$$\text{Et donc } Z = 3x_1 + x_2 = 3(2 + e_2) + (2 + e_4) = 8 + 3e_2 + e_4, \text{ soit } Z - 3e_2 - e_4 = 8.$$

Les tableaux successifs sont les suivants :

|       | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | b |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|---|
| $e_1$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 2 |
| $x_1$ | 1     | 0     | 0     | -1    | 0     | 0     | 2 |
| $e_3$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 2 |
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 2 |
| Z     | 0     | 0     | 0     | -3    | 0     | -1    | 8 |

|       | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | b  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $e_2$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 2  |
| $x_1$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 4  |
| $e_3$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 2  |
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | -1    | 2  |
| Z     | 0     | 0     | 3     | 0     | 0     | -1    | 14 |

|       | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | b  |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $e_2$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 2  |
| $x_1$ | 1     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 4  |
| $e_4$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 2  |
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 4  |
| Z     | 0     | 0     | 3     | 0     | 1     | 0     | 16 |

Le test d'arrêt est satisfait et le simplexe donne  $\max Z = 16$  pour  $x_1 = 4$  et  $x_2 = 4$ .

Série d'exercice 2 :**Exercice 01:**

Une usine produit deux modèles de machines, l'une que l'on appellera modèle A exige 2 kg de matière première et de 30 heures de fabrication et donne un bénéfice de 7 €. L'autre que l'on appellera B exige 4 kg de matière première et de 15 heures de fabrication et donne un bénéfice de 6 €. On dispose de 200 kg de matière première et de 1200 h de travail. Quelle production doit-on avoir pour obtenir un bénéfice maximal ?

**Exercice 02:**

Trouver graphiquement les solutions des PLs suivants :

|                                                                                                                          |                                                                                                                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{Max } z = 2x_1 + 3x_2$<br>$-x_1 - x_2 \leq -1$<br>$x_1 + 4x_2 \leq 2$<br>$6x_1 + x_2 \leq 2$<br>$x_1, x_2 \geq 0$ | $\text{Max } z = -x_1 + 6x_2$<br>$-x_1 + x_2 \leq 3$<br>$x_1 + x_2 \leq 7$<br>$x_2 \leq 4$<br>$x_1, x_2 \geq 0$ |
| $\text{Max } z(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2$<br>$x_1 + x_2 \leq 1$<br>$-3x_1 + x_2 \leq -3$<br>$x_1, x_2 \geq 0$               |                                                                                                                 |

**Exercice 03:**

Une société fabrique trois produits A,B,C. La chaîne de montage comprend deux ateliers I et II. Les capacités (en kWh/jour) des ateliers sont les suivantes : atelier I, 720 et atelier II, 480. Les caractéristiques de la production sont résumées dans le tableau ci-dessous. Quel est le programme de production journalier optimal ?

| Produit                                | A   | B   | C  |
|----------------------------------------|-----|-----|----|
| Bénéfice (centaines d'euros par tonne) | 108 | 100 | 84 |
| Consommation Atelier I (kWh/t)         | 27  | 10  | 6  |
| Consommation Atelier II (kWh/t)        | 3   | 10  | 14 |

**Exercice 04:**

Résoudre les problèmes suivants par l'algorithme du simplexe .

|                                                                                                                                        |                                                                                                                               |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{Max } Z=5x_1+4x_2$<br>$x_1+x_2 \leq 20$<br>$2x_1+x_2 \leq 35$<br>$-3x_1+x_2 \leq 12$<br>$x_1, x_2 \geq 0$                       | $\text{Max } Z=2x_1-4x_2$<br>$x_1+5x_2 \leq 80$<br>$4x_1+2x_2 \geq 20$<br>$x_1+x_2=10$<br>$x_1, x_2 \geq 0$                   |
| $\text{Max } Z=20x_1+16x_2+12x_3$<br>$x_1 \leq 400$<br>$2x_1+x_2+x_3 \leq 1000$<br>$2x_1+2x_2+x_3 \leq 1600$<br>$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ | $\text{Max } Z=20x_1+16x_2+12x_3$<br>$x_1+x_2 \leq 10$<br>$x_1+3x_2+x_3 \geq 9$<br>$x_2+x_3 \geq 4$<br>$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ |

**Exercice 05:**

Résoudre avec la méthode du simplexe en deux phases :

|                                                                                                               |                                                                                                                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{Max } Z=3x_1+x_2$<br>$x_1-x_2 \leq -1$<br>$-x_1-x_2 \leq -3$<br>$2x_1+x_2 \geq 4$<br>$x_1, x_2 \geq 0$ | $\text{Max } Z=x_1-x_2+x_3$<br>$2x_1-x_2+2x_3 \leq 10$<br>$2x_1-3x_2+x_3 \geq 9$<br>$-x_1+x_2-2x_3 \geq 4$<br>$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Exercice 06:**

Un fabricant de raquettes de tennis fait un bénéfice de 8 \$ sur chaque raquette ordinaire et de 15\$ sur chaque grande raquette. Pour satisfaire à la demande des vendeurs, la production journalière de raquettes ordinaires devrait se situer entre 30 et 80, et la production journalière de grandes raquettes entre 10 et 30. Pour maintenir une bonne qualité, le nombre total de raquettes produites ne devrait pas dépasser 80 par jour.

Combien de raquettes de chaque type faudrait-il fabriquer quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximum ?

## Chapitre IV : Dualité

Les problèmes de la programmation linéaire existent toujours sous formes de paires. Ainsi, est associé à chaque problème de maximisation, un problème de minimisation et inversement. Il est possible de dériver d'un programme linéaire existant son programme dual selon des relations bien définies. Le programme original est appelé programme primal et le programme obtenu le programme dual.

### IV.1 Exemple :

Bouzid a un chat "Klibo" qu'il veut nourrir au moindre coût. Le chat "Klibo" a besoin d'un minimum de 3 unités de protéines et de 2 de vitamines par jour. Sur le marché local il existe deux catégories de pâtés.

- le pâté de régime qui coûte 15 dinars la boîte contient une unité de protéines et une de vitamines.
- le pâté de luxe fournit deux unités de protéines et cinq de vitamines au prix de 50 dinars.

Le PLP correspondante est:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 15x_1 + 50x_2 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ x_1 + 5x_2 &\geq 2 \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Où  $x_1$  et  $x_2$  représentent respectivement le nombre de boîtes de pâté de régime et de pâté de luxe. La solution optimale à ce programme linéaire (qui peut être obtenue par la méthode graphique) est, une fois les variables d'écart  $x_3$  et  $x_4$  incluses respectivement dans la première et la seconde contrainte est la suivante:  $Z=45$ ,  $x_1=3$ ,  $x_4=1$ ,  $x_2=x_3=0$ .

Désignons par  $y_1$  et  $y_2$  les prix respectifs d'une unité de protéines et de vitamines. Supposons que le fabricant de pâtés pour chats connaisse les besoins minimaux en protéines et vitamines de "Klibo" et les prix du marché des deux types de nourriture. Le problème du fabricant est de déterminer les prix  $y_1$  et  $y_2$  de façons à maximiser sa recette compte tenu des coûts des deux pâtés.

Le PLD qui en est dérivé est formulé de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \text{Max } V &= 3y_1 + 2y_2 \\ y_1 + y_2 &\leq 15 \\ 2y_1 + 5y_2 &\leq 50 \\ y_1 &\geq 0, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Connaissant les besoins minimaux du chat "Klibo" en éléments nutritifs, le fabricant va essayer de déterminer les prix  $y_i$  de façons à maximiser sa recette.

Etant donné que le pâté de régime contient une unité de protéines et une unité de vitamines le prix total de ce type de nourriture ( $y_1+y_2$ ) ne doit pas dépasser 15 dinars (le même pour la seconde contrainte).

Enfin, les prix  $y_i$  doivent être non négatifs. La solution optimale à ce PL est:  $V=45$ ,  $y_1=15$ ,  $y_4=20$  et  $y_2=y_3=0$ .

Le programme PLP est désigné programme linéaire primal et PLD le programme linéaire dual. En fait, il s'agit du même problème vu sous deux angles différents celui de l'acheteur et celui de vendeur. Dans la section suivante, les relations qui existent entre les PLP et PLD sont abordées de façon détaillée.

## IV.2 Programme dual:

Tout programme linéaire admet un programme dual. Pour cela, il suffit de suivre les règles suivantes:

| Primal                      | Dual                    |
|-----------------------------|-------------------------|
| Fonction objective: Max     | Fonction objective: Min |
| m contrainte $i$ , $i=1..m$ | m variable $y_i$        |
| n variables $j$ , $j=1..n$  | n contrainte $j$        |
| Contrainte $i \geq 0$       | Variable $y_i \leq 0$   |
| Contrainte $i \leq 0$       | Variable $y_i \geq 0$   |
| Contrainte $i =$            | Variable $y_i$ qcq      |
| Variable $x_j \geq 0$       | Contrainte $j \geq 0$   |
| Variable $x_j \leq 0$       | Contrainte $j \leq 0$   |
| Variable $y_i$ qcq          | Contrainte $j =$        |

Plus que:

- Les constantes des contraintes du PLP figurent dans la fonction économique du PLD comme coefficients.
- Les coefficients de la fonction économique du PLP deviennent les constantes des contraintes du PLD.
- La matrice transposée des coefficients techniques du PLP devient la matrice des coefficients techniques du PLD.

### Exemple:

1- Refaire l'exemple du cours.

2- Primal

$$MaxZ = 2x_1 + x_2 - x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 8 \\ 2x_1 - x_3 \geq 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 20 \\ x_3 \leq -2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \in \mathbb{R}, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

Dual

$$\begin{aligned} \text{Min} W &= 8y_1 + 5y_2 + 20y_3 - 2y_4 \\ &\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2 \\ y_1 + 2y_3 = 1 \\ -y_2 + y_3 + y_4 \leq -1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Remarque:** il est parfois nécessaire de résoudre le PL à l'aide de son dual, ceci pour 2 raisons principales:

- En présence d'un nombre important de contraintes dans le primal.
- Existence de variables négatives dans le primal.

Il y a un lien étroit entre le primal et dual, l'illustration de ce fait s'observe à travers les théorèmes suivants.

**Théorème 1:**

Considérons P  $\text{Max} Z = c^t x$

$$\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{D} \quad \text{Min} W = b^t y$$

$$\begin{cases} A^t y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Alors: on a

- Si  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  sont 2 solutions réalisables resp du primal et du dual, alors  $\bar{Z} = c^t \bar{x} \leq \bar{W} = b^t \bar{y}$
- Si  $x^*$  et  $y^*$  sont 2 solutions optimales, alors  $c^t x^* = b^t y^*$

**Théorème de dualité:**

- Si P et D ont des solutions réalisables, alors chacun d'eux possède une solution optimale, de plus  $Z^* = W^*$ .
- Si l'un d'eux n'est pas borné, alors l'autre n'a pas de solution.

**Théorème des écarts complémentaires:**

Une condition nécessaire et suffisante pour que les solutions réalisables  $x^*$  et  $y^*$  du primal et dual soient optimales et que les conditions suivantes soient vérifiées:

$$\begin{cases} y_i^* [(Ax^*)_i - b_i] = 0, i = 1..m \\ [c_j - (y^* A)_j] x_j^* = 0, j = 1..n \end{cases}$$

**Exemple:**

Soient un PLP et son dual

$$\text{PLP } \text{Min} Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 5 \\ x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

PLD

$$\text{Max} W = 3y_1 + 5y_2 + 6y_3$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1 - y_2 + 4y_3 \leq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$x^* = \left(\frac{26}{9}, \frac{7}{9}\right), y^* = \left(0, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}\right) -$$

Montrer que  $x^*$  et  $y^*$  sont optimales?

Le théorème des écarts donne:

$$\begin{cases} y_1^*(2x_1^* + x_2^* - 3) = 0 \\ y_2^*(2x_1^* - x_2^* - 5) = 0 \\ y_3^*(x_1^* + 4x_2^* - 6) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1^*(-(2y_1^* + 2y_2^* + y_3^*) + 2) = 0 \\ x_2^*(-(y_1^* + y_2^* - 4y_3^*) + 3) = 0 \end{cases}$$

### IV.3 Résolution par l'utilisation du dual :

**Exemple:** Résoudre le PL suivant:  $\text{Min } Z = 15x_1 + 50x_2$

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Nous résolvons leur dual par simplexe :  $\text{Max } V = 3y_1 + 2y_2$

$$y_1 + y_2 \leq 15$$

$$2y_1 + 5y_2 \leq 50$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$e_1$  et  $e_2$  les variables d'écarts:  $\text{Max } V = 3y_1 + 2y_2$

$$y_1 + y_2 + e_1 = 15$$

$$2y_1 + 5y_2 + e_2 = 50$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$$

$(y_1, y_2, e_1, e_2) = (0, 0, 15, 50)$  est une solution de base réalisable qui correspond à la base  $B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Donc nous pouvons appliquer Simplexe.

|                | y <sub>1</sub> | y <sub>2</sub> | e <sub>1</sub> | e <sub>2</sub> | b  |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----|
| e <sub>1</sub> | 1              | 1              | 1              | 0              | 15 |
| e <sub>2</sub> | 2              | 5              | 0              | 1              | 50 |
| -V             | 3              | 2              | 0              | 0              | 0  |

|                | y <sub>1</sub> | y <sub>2</sub> | e <sub>1</sub> | e <sub>2</sub> | b   |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|
| y <sub>1</sub> | 1              | 1              | 1              | 0              | 15  |
| e <sub>2</sub> | 0              | 3              | -2             | 1              | 20  |
| -V             | 0              | -1             | -3             | 0              | -45 |

La solution optimale qui donne  $V^* = 45$  est  $(y_1, y_2, e_1, e_2) = (15, 0, 0, 20)$  et  $V^* = 45$ . En regardant la dernière ligne du tableau, on trouve les valeurs correspondant à la solution optimale du problème primal qui donne  $Z^* = 45$  est  $(x_1, x_2, e_1, e_2) = (3, 0, 0, 1)$ .

#### IV.4 Algorithme dual du Simplexe:

- Déterminer une solution du primal telle que  $c_j - z_j = c_j - C_B \cdot B^{-1} \cdot a_j \geq 0$  pour tout  $j \in J$  (une solution duale réalisable).
- Tester  $x_B = B^{-1} \cdot D$ 
  - Si  $x_B \geq 0$  alors  $x = (B^{-1} \cdot d, 0)$  est une solution optimale. Terminer.
  - Si au moins une composante  $x_i < 0$  (il existe au moins un indice  $i \in I$ ), soit  $I_1 \subset I$ ,  $I_1$  l'ensemble des indices tel que  $x_i < 0$ ,  $i \in I$ , passer au 3.
- Tester  $a'_{ij}$ ,  $i \in I_1$  et pour tout  $j \in J$ .
  - $a'_{ij} \geq 0$ , pour  $i \in I_1$  et pour tout  $j \in J$ . Le problème primal n'a pas de solutions.
  - $a'_{ij} < 0$ , pour au moins un  $j \in J$  et pour tout  $i \in I_1$ , passer au 4.
- $x_s = \min \{x_i, x_i < 0\}$ , critère de sortie et déterminer  $\frac{z_e - c_e}{a_{se}} = \min \left\{ \frac{z_j - c_j}{a_{sj}}, a'_{sj} < 0, j \in J \right\}$  le critère d'entrée. Passer au 5.  $(a'_{se}) = B^{-1} \cdot N$ .
- La nouvelle base  $B'$  sera définie par  $x'_B = x_B - \{x_s\} + \{x_e\}$ . On reconstruit le tableau par rapport à  $B'$  aller à 2.

**Exemple:** Résoudre le PL suivant:  $\text{Min } Z = 15x_1 + 50x_2$

$$x_1 + 2x_2 \geq 3$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Forme standard:  $e_1$  et  $e_2$  les variables d'écarts:

$$\text{Min } Z = 15x_1 + 50x_2$$

$$-x_1 - 2x_2 + e_1 = -3$$

$$-x_1 - 5x_2 + e_2 = -2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

D'où  $x=(0,0,-3,-2)$  et  $Z=0$ . Calculons  $c_j - z_j$  pour tout  $j \in \{1,2\}$

$$C_B=(c_3,c_4)=(0,0), B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, c_j - z_j = c_j - c_B \cdot B^{-1} \cdot a_j \geq 0$$

Pour  $j=1$ ,  $c_1 - z_1 = c_1 - c_B \cdot B^{-1} \cdot a_1 = 15 - (0,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 15 > 0$

Pour  $j=2$ ,  $c_2 - z_2 = c_2 - c_B \cdot B^{-1} \cdot a_2 = 50 - (0,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = 50 > 0$

D'où  $x=(0,0,-3,-2)$  est une solution duale réalisable

Dans ce cas de résolution, on choisit la ligne pivot puis la colonne.

|             | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $b$ |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $e_1$       | -1    | -2    | 1     | 0     | -3  |
| $e_2$       | -1    | -5    | 0     | 1     | -2  |
| $Z_j - C_j$ | -15   | -50   | 0     | 0     | 0   |



|             | $x_1$ | $x_2$ | $e_1$ | $e_2$ | $b$ |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $x_1$       | 1     | 2     | -1    | 0     | 3   |
| $e_2$       | 0     | -3    | -1    | 1     | 1   |
| $Z_j - C_j$ | 0     | -20   | -15   | 0     | 45  |

$x_B \geq 0$  alors  $Z=45$ ,  $x = (3,0)$  est une solution optimale. Terminer.

## Série d'exercice 3 :

**Exercice 01:**

Ecrire le dual de chacun des problèmes suivants:

|                                                                                                                                                        |                                                                                                                                                                              |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $Z = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \text{Max}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$ | $Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3 \rightarrow \text{Min}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_3 \leq 8 \\ x_j \geq 0, j = \overline{2,3} \end{cases}$ |
| $Z = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \text{Min}$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2} \end{cases}$             | $Z = 2x_1 - x_2 + x_3 \rightarrow \text{Max}$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$                    |

**Exercice 02:**

Etant donné le problème de programmation linéaire suivant:

$$Z = x_1 + x_2 \rightarrow \text{Max}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2} \end{cases}$$

Vérifier que  $x^0 = (1,2)$  et  $y^0 = (3,4)$  sont des solutions optimales du problème primal et dual respectivement.

**Exercice 03:**

Résoudre les PLs suivants à l'aide de dual:

|                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\text{Min} Z = 1000x_1 + 800x_2 + 400x_3 + 700x_4$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 20 \\ x_1 + x_2 + x_4 \geq 30 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2,3,4} \end{cases}$ | $\text{Min} Z = 4x_1 + 6x_2 + 18x_3$ $\begin{cases} x_1 + 3x_3 \geq 3 \\ x_2 + 2x_3 \geq 5 \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,2,3} \end{cases}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Exercice 04:**

Vous voulez apporter à votre grand-mère un bouquet de 9 marguerites, 6 tulipes et 12 roses. Mais vous vous y prenez trop tard, tous les fleuristes sont fermés et il ne reste plus qu'un marchand de fleurs dans le métro qui propose deux types de bouquets et qui ne vend pas les fleurs à l'unité. Le bouquet 1 qui est composé de 3 marguerites, 1 tulipe et 1 rose, coûte 1 euro ; le bouquet 2 qui est composé de 1 marguerite, 1 tulipe et 4 roses coûte 2 euros.

1. Écrire le programme linéaire correspondant à la minimisation du coût d'achat des bouquets qui vous permettront de composer le bouquet de votre grand-mère. On notera  $x_1$  et  $x_2$  les nombres de bouquets de type 1 et 2 que vous allez acheter.
2. Donner le dual de ce programme linéaire.
3. Résoudre le programme dual.
4. Dédurre la solution du primale.

**Exercice 05:**

Résoudre les PLs suivants à l'aide de dual:

|                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2x_1 + x_3 \\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &\geq 5 \\ x_1 - x_2 + 4x_4 &\geq 8 \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1,2,3} \end{cases} \end{aligned}$ | $\begin{aligned} \text{Min } Z &= 4x_1 + 6x_2 + 18x_3 \\ \begin{cases} x_1 + 3x_3 &\geq 3 \\ x_2 + 2x_3 &\geq 5 \\ x_j &\geq 0, j = \overline{1,2,3} \end{cases} \end{aligned}$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## Chapitre V: Problème de transport

Le problème de transport est un problème particulier de la programmation linéaire. Le plus connu de ces problèmes est le problème du transport de marchandises des usines (unités de production) aux dépôts (magasins).

### V.1 Modèle mathématique du problème de transport et définitions :

Etant donné  $m$  usines  $A_i, i = \overline{1..m}$  et  $n$  dépôts  $B_j, j = \overline{1..n}$

Chaque usine produit une quantité  $a_i, i = \overline{1..m}$ , qui doit être acheminée vers le dépôt  $B_j, j = \overline{1..n}$ , dont la capacité est  $b_j, j = \overline{1..n}$ .

Le problème consiste à transporter les quantités produites vers les dépôts, avec un coût de transport minimum.

Soit  $x_{ij}, i = \overline{1..m}, j = \overline{1..n}$  la quantité de produit à transporter de  $A_i$  vers  $B_j$ , et  $c_{ij}$  le coût de transport d'une unité du produit à transporter de  $A_i$  vers  $B_j$ .

Si une quantité  $x_{ij}$  est acheminée de  $A_i$  vers  $B_j$ , le coût de transport de cette quantité est égal à  $x_{ij}c_{ij}$ . De là le coût global de transport est égale à:  $Z = Z(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}$  où  $x = (x_{ij}, i = \overline{1..m}, j = \overline{1..n})$

De plus les quantités à transporter doivent satisfaire les contraintes suivantes:

- Toute la marchandise produite doit être acheminée:  $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1..m}$
- Toutes les demandes doivent être satisfaites:  $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1..n}$
- Toutes les quantités transportées  $x_{ij}$  doivent être positives ou nulles:  $x_{ij} \geq 0, i = \overline{1..m}, j = \overline{1..n}$

$$\begin{cases} Z = Z(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1..m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1..n} \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1..m}, j = \overline{1..n} \end{cases}$$

L'ensemble  $x = \{x_{ij}, i = \overline{1..m}, j = \overline{1..n}\}$  est dit plan de transport du problème s'il satisfait les contraintes. Il est dit plan optimal de transport si de plus il réalise le minimum de la fonction objective.

## V.2 Condition d'existence d'un plan optimale de transport:

On suppose que les quantités  $a_i$  et  $b_j$  sont toutes positives ou nulles. De plus, pour que le problème de transport soit réalisable, il faut que les quantités produites soient supérieures ou égales aux quantités demandées, c'est-à-dire:  $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$ .

Dans le cas où on aurait la condition précédente, on crée un dépôt fictif (supplémentaire), où on transporte la quantité produite restante pour avoir l'égalité:  $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = K$ .

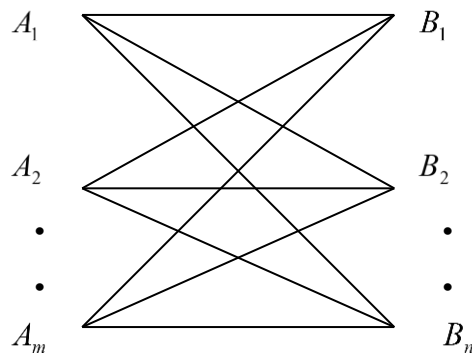
Cette condition appelée **condition de balance**, c'est-à-dire l'offre est égale à la demande.

### Théorème:

Le problème de transport possède un plan optimal si et seulement si la condition de balance est vérifiée.

## V.3 Graphe et tableau de transport associé au problème :

Le graphe associé au problème de transport est un graphe simple biparti. L'ensemble  $U$  des arcs de ce graphe est de la forme:  $U = \{(i, j), i \in I, j \in J\}, I = \{1, 2, \dots, m\}, J = \{1, 2, \dots, n\}$ .



On associe ainsi au problème un tableau de transport à  $m$  lignes et à  $n$  colonnes, défini de la manière suivante:

Chaque ligne  $i (i \in I)$  correspond au point de production  $A_i$  et Chaque colonne  $j (j \in J)$  au point de distribution  $B_j$ .

La case  $(i, j)$  du tableau correspond au chemin qui relie  $A_i$  et  $B_j$ .

Chaque case  $(i, j)$  contient les quantités associées à l'arc  $(i, j)$ :

- Le coût unitaire  $c_{ij}$  de transport de  $A_i$  et  $B_j$ , indiqué en haut et à droite de la case.
- La valeur de la variable  $x_{ij}$  écrite en bas et à gauche de la case.

En outre, le tableau est bordé à droite par une colonne indiquant les disponibilités  $a_i$  et par une ligne située en bas et indiquant les demandes  $b_j$ .

Le tableau de transport présente alors la forme suivante:

|       | $B_1$                | $B_2$                | $B_3$                | ... | $B_n$                | $a_i$                                      |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|-----|----------------------|--------------------------------------------|
| $A_1$ | $c_{11}$<br>$x_{11}$ | $c_{12}$<br>$x_{12}$ | $c_{13}$<br>$x_{13}$ | ... | $c_{1n}$<br>$x_{1n}$ | $a_1$                                      |
| $A_2$ | $c_{21}$<br>$x_{21}$ | $c_{22}$<br>$x_{22}$ | $c_{23}$<br>$x_{23}$ | ... | $c_{2n}$<br>$x_{2n}$ | $a_2$                                      |
| .     | .                    | .                    | .                    |     | .                    | .                                          |
| .     | .                    | .                    | .                    |     | .                    | .                                          |
| .     | .                    | .                    | .                    |     | .                    | .                                          |
| $A_m$ | $c_{m1}$<br>$x_{m1}$ | $c_{m2}$<br>$x_{m2}$ | $c_{m3}$<br>$x_{m3}$ | ... | $c_{mn}$<br>$x_{mn}$ | $a_m$                                      |
| $b_j$ | $b_1$                | $b_2$                | $b_3$                | ... | $b_n$                | $\sum_{i=1}^m a_i$<br>$= \sum_{j=1}^n b_j$ |

### Exemple1:

Le sonatrach possède trois points de production, Hassi Messaoud ( $A_1$ ), Ain Salah ( $A_2$ ) et Illizi ( $A_3$ ), avec des capacités de production 100 milles, 150 milles et 200 milles barils/jour respectivement. Et deux points de distribution, Skikda ( $B_1$ ) et Arzew ( $B_2$ ), avec des demandes de 250 milles et 200 milles barils/jour respectivement.

Les coûts unitaires de transport des points de production aux points de distribution sont donnés par le tableau suivant:

|                             | $B_1$ | $B_2$ | Offres $a_i$ (en milliers) |
|-----------------------------|-------|-------|----------------------------|
| $A_1$                       | 90 DA | 75 DA | 100                        |
| $A_2$                       | 80 DA | 70 DA | 150                        |
| $A_3$                       | 60 DA | 95 DA | 200                        |
| Demande $b_j$ (en milliers) | 250   | 200   | 450                        |

Le problème consiste à déterminer le nombre d'unité que la société doit transporter des différents points de production aux différents points de distribution, de telle façon que le coût global de transport soit minimal.

En définissant les variables  $x_{ij}$  de la manière suivante:

$x_{ij}$  = Quantité à transporter du point de production  $i$  vers le point de distribution  $j$ . le problème peut être écrit sous la forme d'un problème de programmation linéaire suivant:

$$\begin{cases} Z = 90x_{11} + 75x_{12} + 80x_{21} + 70x_{22} + 60x_{31} + 95x_{32} \rightarrow \min \\ x_{11} + x_{12} = 100 \\ x_{21} + x_{22} = 150 \\ x_{31} + x_{32} = 200 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 250 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 200 \\ x_{ij} \geq 0, i = 1,2,3; j = 1,2 \end{cases}$$

Le tableau de transport correspondant à ce problème est le suivant:

|       | $B_1$          | $B_2$          | $a_i$ |
|-------|----------------|----------------|-------|
| $A_1$ | 90<br>$x_{11}$ | 75<br>$x_{12}$ | 100   |
| $A_2$ | 80<br>$x_{21}$ | 70<br>$x_{22}$ | 150   |
| $A_3$ | 60<br>$x_{31}$ | 95<br>$x_{32}$ | 200   |
| $b_j$ | 250            | 200            | 450   |

## V.4 Résolution d'un problème de transport:

### V.4.1 Calcul d'un plan basique initial de transport:

Il existe plusieurs méthodes d'obtention d'un plan basique initial. Les deux méthodes les plus utilisées sont les suivantes:

#### V.4.1.1 Méthodes du coin nord-ouest de l'angle :

On choisit la case (1,1), située au coin nord-ouest du tableau de transport, et on lui affecte la quantité  $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$ .

Deux cas peuvent alors se présenter:

- a) Si  $x_{11} = a_1$ , alors la quantité de  $A_1$  est entièrement transporté et ceci sature la première ligne du tableau. Dans le tableau réduit, on remplacera  $b_1$  par  $(b_1 - x_{11})$  et on répétera la même procédure que précédemment.
- b) Si  $x_{11} = b_1$ , alors la demande du point de distribution  $B_1$  est entièrement satisfaite par  $A_1$  et ceci sature la première colonne du tableau. Dans le tableau réduit, on remplacera  $a_1$  par  $(a_1 - x_{11})$  et on fera la même procédure.

De cette manière, après  $(m+n-1)$  opérations, on trouve  $(m+n-1)$  quantités positives  $x_{ij}$  affectées à  $(m+n-1)$  cases, et les cases restantes auront des quantités nulles  $x_{ij} = 0$ , on obtiendra ainsi un plan basique de transport.

### Exemple1:

Dans le tableau suivant, trouver un plan basique initial par la méthode du coin nord-ouest.

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 1     | 4     | 2     | 3     | 20    |
| $A_2$ | 5     | 1     | 3     | 4     | 21    |
| $A_3$ | 2     | 5     | 1     | 2     | 35    |
| $b_j$ | 12    | 23    | 28    | 13    | 76    |

En appliquant la méthode du coin nord-ouest, on trouve

$$x_{11} = \min\{20, 12\} = 12 ; x_{12} = \min\{20 - 12, 23\} = 8$$

$$x_{22} = \min\{21, 23 - 8\} = 15 ; x_{23} = \min\{21 - 15, 28\} = 6$$

$$x_{33} = \min\{35, 28 - 6\} = 22 ; x_{34} = \min\{35 - 22, 13\} = 13$$

Les composantes basiques du plan  $x$  sont représentées en gras dans le tableau de transport ci-dessous et  $x_{ij} = 0$  pour les cases restantes:

|       | $B_1$            | $B_2$            | $B_3$            | $B_4$            | $a_i$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------|
| $A_1$ | 1<br><b>(12)</b> | 4<br><b>(8)</b>  | 2                | 3                | 20    |
| $A_2$ | 5                | 1<br><b>(15)</b> | 3<br><b>(6)</b>  | 4                | 21    |
| $A_3$ | 2                | 5                | 1<br><b>(22)</b> | 2<br><b>(13)</b> | 35    |
| $b_j$ | 12               | 23               | 28               | 13               | 76    |

#### V.4.1.2 Méthode de l'élément minimal :

Cette méthode donne en général un plan basique initial plus proche du plan *basique optimal* que celui obtenu par la méthode du coin nord-ouest.

Le principe consiste à choisir au début une case  $(i_1, j_1)$  qui correspond à l'élément  $c_{i_1 j_1}$  tel que :

$c_{i_1 j_1} = \min\{c_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ , puis on posera  $x_{i_1 j_1} = \min\{a_{i_1}, b_{j_1}\}$  dans la case  $(i_1, j_1)$ .

Si  $x_{i_1 j_1} = a_{i_1}$ , on exclut la ligne  $i_1$  et on remplace  $b_{j_1}$  par  $(b_{j_1} - x_{i_1 j_1})$ .

Dans le cas où  $x_{i_1 j_1} = b_{j_1}$ , on exclut la colonne  $j_1$  et on remplace  $a_{i_1}$  par  $(a_{i_1} - x_{i_1 j_1})$ . Ensuite on refait la même procédure avec le tableau réduit.

Ce processus sera répété  $(m+n-1)$  fois et permettra de trouver les  $(m+n-1)$  variables basiques du plan initial recherché.

#### Exemple2:

Refaire l'exemple précédant par la méthode de l'élément minimal.

On a :

$$c_{11} = \min_{i,j} c_{ij} = 1, x_{11} = \min\{20, 12\} = 12;$$

$$c_{22} = \min_{j \neq 1} c_{ij} = 1, x_{22} = \min\{21, 23\} = 21;$$

$$c_{33} = \min_{j \neq 1, i \neq 2} c_{ij} = 1, x_{33} = \min\{35, 28\} = 28;$$

$$c_{34} = \min_{j \neq 1, 3, i \neq 2} c_{ij} = 2, x_{34} = \min\{35 - 28, 13\} = 7;$$

$$c_{14} = \min_{j \neq 1, 3, i \neq 2, 3} c_{ij} = 3, x_{14} = \min\{20 - 12, 13 - 7\} = 6;$$

$$c_{12} = \min_{j \neq 1, 3, 4, i \neq 2, 3} c_{ij} = 4, x_{12} = \min\{20 - 18, 23 - 21\} = 2;$$

Les composants basiques du plan basique initial obtenu sont représentées dans le tableau de transport suivant et  $x_{ij} = 0$  pour les cases restantes :

|       | $B_1$     | $B_2$     | $B_3$     | $B_4$    | $a_i$ |
|-------|-----------|-----------|-----------|----------|-------|
| $A_1$ | 1<br>(12) | 4<br>(2)  | 2         | 3<br>(6) | 20    |
| $A_2$ | 5         | 1<br>(21) | 3         | 4        | 21    |
| $A_3$ | 2         | 5         | 1<br>(28) | 2<br>(7) | 35    |
| $b_j$ | 12        | 23        | 28        | 13       | 76    |

Soient  $x$  et  $x'$  les plans basiques obtenus respectivement par la méthode du coin nord-ouest et par celle de l'élément minimal, alors on aura:

$$Z(x) = (1 \times 12) + (4 \times 8) + (1 \times 15) + (3 \times 6) + (1 \times 21) + (2 \times 13) = 125,$$

$$Z(x') = (1 \times 12) + (4 \times 2) + (3 \times 6) + (1 \times 21) + (1 \times 28) + (2 \times 7) = 101,$$

On remarque bien que  $Z(x') < Z(x)$

#### V.4.2 Méthode des potentiels :

##### **Critère d'optimalité**

Le principe de la méthode des potentiels est issu de la théorie de la dualité. Pour cela, introduisons le problème dual de transport suivant:

$$\begin{cases} W(y) = \sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \max \\ u_i + v_j \leq c_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \\ \text{où } y = (u, v), u = (u_i, i = \overline{1, m}), v = (v_j, j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

##### **Théorème 1:**

Soient  $x^0$  et  $y^0 = (u^0, v^0)$  deux solutions optimales respectivement du problème et de son dual, alors les relations suivantes sont vérifiées:

$$\begin{cases} u_i^0 + v_j^0 = c_{ij}, \text{ si } x_{ij}^0 > 0, \\ u_i^0 + v_j^0 \leq c_{ij}, \text{ si } x_{ij}^0 = 0, \\ 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

En s'inspirant de la métrique du simplexe, on construit les valeurs suivantes:

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Ici par construction, on a:

$$u_i + v_j - c_{ij} = 0, (i, j) \in U_B$$

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, (i, j) \in U_H$$

Les  $u_i (1 \leq i \leq m)$  et  $v_j (1 \leq j \leq m)$  sont appelés *potentiels* et les nombres  $\Delta_{ij}$  sont appelés *estimations* des variables  $x_{ij}$ . Les  $U_B$  sont appelés cases de base et les  $U_H$  cases hors base.

##### **Théorème 1: (critère d'optimalité)**

Les inégalités:  $\Delta_{ij} \leq 0, (i, j) \in U_H$  sont suffisantes pour l'optimalité du plan basique de transport.

##### **Remarque:**

Les potentiels  $u_i$  et  $v_j$  sont de nombre  $(m+n)$  et doivent vérifier le système  $(u_i + v_j - c_{ij} = 0, (i, j) \in U_B)$  qui constitué de  $(m+n-1)$  équations.

Donc pour sa résolution, il faut choisir une valeur arbitraire par exemple  $u_1 = 0$ , et les autres potentiels sont alors déterminés d'une manière unique par les équations  $(u_i + v_j - c_{ij} = 0, (i, j) \in U_B)$ . Connaissant ainsi les potentiels  $u_i$  et  $v_j$ , on calcule les estimations  $\Delta_{ij}$  des variables non basiques.

### Méthode des potentiels:

Soit  $x$  un plan basique de transport de départ, auquel correspond  $U_B$ . Si le critère d'optimalité n'est pas vérifié, alors on cherche une case  $(i_0, j_0) \in U_H = \Delta_{i_0 j_0} = \max \Delta_{ij}, (i, j) \in U_H$ .

A l'aide de la case  $(i_0, j_0)$  et des cases de  $U_B$ , on construit un cycle qui est d'ailleurs unique. Puis on affecte des signes successivement (+) et (-) aux sommets de ce cycle, en commençant par le sommet  $(i_0, j_0)$  affecté du signe (+) et en se mouvant dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire.

Parmi les sommets du cycle affectés du signe (-), on choisit celui où la variable  $x_{ij}$  est minimale et on pose:  $\theta^0 = \min x_{ij} = x_{i_1 j_1}$ .

Pour les sommets affectés du signe (+), on ajoute aux variables  $x_{ij}$  la quantité  $\theta^0$  et on soustrait la même quantité des variables  $x_{ij}$ , correspondantes aux sommets affectés de signe (-). Toutes les autres  $x_{ij}$  resteront inchangées.

On obtient ainsi un nouveau plan basique de transport  $\bar{x}$ , avec un nouveau ensemble basique  $\overline{U_B} = \{U_B \setminus (i_1, j_1)\} \cup (i_0, j_0)$ .

Cette itération sera répétée jusqu'à ce que le critère d'optimalité soit vérifié.

### Exemple3:

Résoudre par la méthode des potentiels le problème de transport, présenté dans l'exemple précédent:

- On commençant par le plan basique  $x$  trouvé dans l'exemple 1.
- On commençant par le plan basique  $x'$  trouvé dans l'exemple 2.

Dressons le tableau de transport avec les variables basiques  $x$  trouvée dans l'exemple1 en utilisant la méthode du coint nord-ouest:

|       | $B_1$     | $B_2$     | $B_3$     | $B_4$     | $a_i$ |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------|
| $A_1$ | 1<br>(12) | 4<br>(8)  | 2         | 3         | 20    |
| $A_2$ | 5         | 1<br>(15) | 3<br>(6)  | 4         | 21    |
| $A_3$ | 2         | 5         | 1<br>(22) | 2<br>(13) | 35    |
| $b_j$ | 12        | 23        | 28        | 13        | 76    |

On posant  $u_1=0$ , on calcule les autres potentiels par la formule ( $u_i + v_j - c_{ij} = 0, (i, j) \in U_B$ ). On placera les  $u_i$  sur une colonne à droite des  $a_i$  et les  $v_j$  sur une ligne au-dessous des  $b_j$ . En suite en utilisant la formule ( $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, (i, j) \in U_H$ ), on trouve les estimations  $\Delta_{ij}$  qu'on va placer en bas et à droite des cases non basiques. Le nouveau tableau obtenu possède alors la forme suivante:

|       | $B_1$     | $B_2$       | $B_3$      | $B_4$     | $a_i$ | $u_i$ |
|-------|-----------|-------------|------------|-----------|-------|-------|
| $A_1$ | 1<br>(12) | - 4<br>(8)  | 2<br>4     | 3<br>4    | 20    | 0     |
| $A_2$ | 5<br>-7   | + 1<br>(15) | - 3<br>(6) | 4<br>0    | 21    | -3    |
| $A_3$ | 2<br>-6   | 5<br>-6     | 1<br>(22)  | 2<br>(13) | 35    | -6    |
| $b_j$ | 12        | 23          | 28         | 13        | 76    |       |
| $v_j$ | 1         | 4           | 6          | 7         |       |       |

Le plan basique initiale n'est pas optimale, car  $\Delta_{i_0j_0} = \max \Delta_{ij} = \Delta_{13} = 4 > 0$

A l'aide de la case (1,3), on construit le cycle (1,3)  $\rightarrow$  (2,3)  $\rightarrow$  (2,2)  $\rightarrow$  (1,2), on aura alors:

$$\theta^0 = x_{i_1j_1} = \min\{8,6\} = 6$$

Pour le nouveau plan basique  $\bar{x}$ , on obtient:

$$\bar{x}_{13} = x_{13} + \theta^0 = 0 + 6 = 6; \bar{x}_{22} = x_{22} + \theta^0 = 15 + 6 = 21; \bar{x}_{12} = x_{12} - \theta^0 = 8 - 6 = 2$$

$$\bar{x}_{23} = x_{23} - \theta^0 = 6 - 6 = 0$$

Les autres  $\bar{x}_{ij}$  resteront inchangées. On commencera donc une nouvelle itération avec le tableau suivant:

|       | $B_1$     | $B_2$     | $B_3$     | $B_4$     | $a_i$ | $u_i$ |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------|-------|
| $A_1$ | 1<br>(12) | 4<br>(2)  | 2<br>(6)  | 3<br>0    | 20    | 0     |
| $A_2$ | 5<br>-7   | 1<br>(21) | 3<br>-4   | 4<br>-4   | 21    | -3    |
| $A_3$ | 2<br>-2   | 5<br>-2   | 1<br>(22) | 2<br>(13) | 35    | -1    |
| $b_j$ | 12        | 23        | 28        | 13        | 76    |       |
| $v_j$ | 1         | 4         | 2         | 3         |       |       |

Le critère d'optimalité est vérifié dans ce tableau, donc  $x^0 = \{x_{ij}^0, 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4\}$  avec:

$$x_{11}^0 = 12, x_{12}^0 = 2, x_{13}^0 = 6, x_{14}^0 = 0, x_{21}^0 = 0, x_{22}^0 = 21, x_{23}^0 = 0, x_{24}^0 = 0, x_{31}^0 = 0, x_{32}^0 = 0,$$

$x_{33}^0 = 22, x_{34}^0 = 13$ , est optimale  $Z^0 = \min Z(x) = Z(x^0) = 101$

Dressons le tableau de transport avec les variables basiques  $x'$  trouvée dans l'exemple2 en utilisant la méthode de l'élément minimal:

|       | $B_1$     | $B_2$     | $B_3$     | $B_4$    | $a_i$ |
|-------|-----------|-----------|-----------|----------|-------|
| $A_1$ | 1<br>(12) | 4<br>(2)  | 2         | 3<br>(6) | 20    |
| $A_2$ | 5         | 1<br>(21) | 3         | 4        | 21    |
| $A_3$ | 2         | 5         | 1<br>(28) | 2<br>(7) | 35    |
| $b_j$ | 12        | 23        | 28        | 13       | 76    |

On posant  $u_1=0$ , on calcule les autres potentiels par la formule  $(u_i + v_j - c_{ij} = 0, (i, j) \in U_B)$ .

$$v_1 = c_{11} - u_1 = 1 - 0 = 1, v_2 = c_{12} - u_1 = 4 - 0 = 4, v_4 = c_{14} - u_1 = 3 - 0 = 3$$

$$u_2 = c_{22} - v_2 = 1 - 4 = -3, u_3 = c_{34} - v_4 = 2 - 3 = -1, v_3 = c_{33} - u_3 = 1 - (-1) = 2$$

Calculons les estimations  $\Delta_{ij}$ :

$$\Delta_{ij} = 0, (i, j) \in U_B, \Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}, (i, j) \in U_H$$

$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 2 - 2 = 0, \Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -3 + 1 - 5 = -7$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -3 + 2 - 3 = -4, \Delta_{24} = u_2 + v_4 - c_{24} = -3 + 3 - 4 = -4$$

$$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -1 + 1 - 2 = -2, \Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -1 + 4 - 5 = -2$$

Le nouveau tableau obtenu possède alors la forme suivante:

|       | $B_1$     | $B_2$     | $B_3$     | $B_4$    | $a_i$ | $u_i$ |
|-------|-----------|-----------|-----------|----------|-------|-------|
| $A_1$ | 1<br>(12) | 4<br>(2)  | 2         | 3<br>(6) | 20    | 0     |
| $A_2$ | 5         | 1<br>(21) | 3         | 4        | 21    | -3    |
| $A_3$ | 2         | 5         | 1<br>(28) | 2<br>(7) | 35    | -1    |
| $b_j$ | 12        | 23        | 28        | 13       | 76    |       |
| $v_j$ | 1         | 4         | 2         | 3        |       |       |

Le critère d'optimalité  $(\Delta_{ij} \leq 0, (i, j) \in U_H)$  est vérifié, donc le plan de transport basique  $x'$  optimal, avec  $Z(x') = 101$

## Série d'exercice 4

**Exercice 01:**

Soit le problème de transport formulé dans le tableau suivant:

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 4     | 2     | 3     | 20    |
| $A_2$ | 5     | 3     | 1     | 30    |
| $A_3$ | 1     | 4     | 2     | 50    |
| $b_j$ | 40    | 25    | 35    | 100   |

1. Déterminer un plan de transport basique en utilisant la méthode du coin nord-ouest.
2. Même question en utilisant la méthode de l'élément minimal. Que peut-on conclure ?

**Exercice 02 :**

Une certaine marchandise est disponible dans deux points de production  $A_1$  et  $A_2$  en quantités 2000 et 5000 unités respectivement. Elle doit être acheminée vers trois points de vente  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$  dont les demandes sont de 1500, 2500 et 3000 unités respectivement.

Les coûts de transport unitaire en DA sont donnés dans le tableau suivant :

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 20    | 10    | 40    |
| $A_2$ | 30    | 20    | 40    |

1. Ce problème admet-il un plan de transport optimal
2. Trouver un plan de transport optimal.

**Exercice 03 :**

Soit le problème de transport formulé dans le tableau suivant :

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 2     | 1     | 3     | 27    |
| $A_2$ | 1     | 4     | 5     | 13    |
| $A_3$ | 4     | 3     | 1     | 20    |
| $b_j$ | 15    | 20    | 10    |       |

1. Trouver un plan basique initial par la méthode du coin nord-ouest.
2. Trouver un plan de transport optimal.

**Exercice 04:**

Soit le problème de transport suivant:

|       | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 3     | 2     | 4     | 20    |
| $A_2$ | 1     | 4     | 3     | 30    |
| $A_3$ | 4     | 2     | 5     | 35    |
| $b_j$ | 20    | 45    | 20    | 85    |

1. Déterminer un plan basique initial à l'aide de la méthode de l'élément minimal.
2. A partir du plan basique trouvé ci-dessous déterminer un plan basique optimal.

## Références

Ce cours est principalement préparé à partir des références suivantes :

- Siskos, J. (1985). Analyses de régression et programmation linéaire. *Revue de statistique appliquée*, 33(1), 41-55.
- DJALAL, A. (2021). *Quelques applications de l'algorithme "simplex", pour résolution d'un problème d'optimisation* (Doctoral dissertation, Faculté des Mathématiques et de l'Informatique Département des Mathématiques-Option: Analyse Mathématiques et numérique).
- Maurras, J. F. (2002). *Programmation linéaire, complexité: séparation et optimisation* (Vol. 38). Springer Science & Business Media.
- Fouilhoux, P. (2015). *Optimisation combinatoire: Programmation linéaire et algorithmes*. Université Pierre et Marie Curie.
- Genin, P., Thomas, A., & Lamouri, S. (2001). Utilisation de la programmation linéaire dans l'optimisation du Plan Industriel et Commercial-Apports et limites. In *MOSIM'01: conférence francophone de modélisation et simulation*.
- Tareb, F., & Merzouk, D. (2015). *Résolution d'un problème de programmation linéaire Flou via l'optimisation multiobjectif* (Doctoral dissertation, UMMTO).
- Roupin, F. (2006). *Algorithmes Combinatoires et Relaxations par Programmation Linéaire et Semidéfinie. Application à la Résolution de Problèmes Quadratiques et d'Optimisation dans les Graphes* (Doctoral dissertation, Université Paris-Nord-Paris XIII).