

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



UNIVERSITÉ D'EL-OUED

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE TECHNOLOGIE

Mémoire de fin d'étude

LICENCE ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Modélisation mathématiques & simulation
numérique

Présenté par :BOUDEBIA Afaf

HANI Nadia

ZERGUI Sara

Thème

**GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME
DES ACCROISSEMENTS FINIS DANS**

$\mathbb{R}^n$

Soutenu le juin 2014

Devant le jury composé de:

Mr. GHEMAM Hamed Laid

Mr. BELOUL Said

Mr. MENECEUR Bekkar

MC (B) Univ. El -Oued Président

MA (B) Univ. El-Oued Examinateur

MA (B) Univ. El-Oued Rapporteur

Année universitaire 2013 – 2014

Remerciements

Nous exprimons toute notre gratitude et sincère dévouement à Dieu, le tout puissant qui nous a guidé dans l'accomplissement de ce travail.

Ce travail à été réalisé sous l'encadrement de professeur "MENECEUR Bekkar ", à l'université d' El-Oued, a qui nous voudrions exprimer nos profonde gratitude pour leurs disponibilités, leurs aides et leurs conseils pour réaliser ce travail, ainsi qu'à tous les professeurs de l'université d'El-oued .

Nous remercions vivement nos familles surtout mes parent pour l'aide et le soutien moral.

Nous tenons a remercier tous les étudiants de La promotion 2013/2014 de Math de l'université d'El-oued .

Mes remerciements vont également à tous ceux et celles qui ont contribué de près ou de loin, par leurs conseils, leurs suggestions et par leurs encouragements, à la réalisation de ce travail.

Notations générales

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	: la limite de fonction f , quand x vers x_0 .
$ \cdot $	: la valeur absolue .
$\max_{x \in A} \{f(x)\}$	: le maximum de fonction f sur l'ensemble A .
$\min_{x \in A} \{f(x)\}$	: le minimum de fonction f sur l'ensemble A .
$B_0(x, r)$	: boule de centre x et rayon r .
f^{-1}	: la fonction l'inverse de f .
$\sum$	: la somme.
$\ \cdot\ $	: la norme.
$\sup$	: la borne supérieur.
$\inf$	: la borne inferieur.
∇u	$= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T = \overrightarrow{gradu}$.
$\partial \Delta$	: la frontière de Δ .
U_n	: un suite numérique.
$\int_a^b f(x) dx$	: l'integrale de fonction f dans un interval $[a, b]$.
$\mathbb{R}$	: un ensemble réelle.
$\mathbb{R}^n$	: espace vectoriel que $\dim \mathbb{R}^n = n$.
U_ε	: un ouvert dans $\mathbb{R}^n$ de voisinage ε .
C^1	: classe de les fonctions dérivées et la dérivée premier est continue.
$\ln$	: logarithme niburia
Ω	: un ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	: la dérivée deuxième partielle de u par rapport a x .
$\sqrt[p]{}$	: la racine de p .
$D_j f(a)$	: la dérivée partielle de fonction f par rapport j dans a .
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$	: la dérivée partielle de fonction f par rapport a x_i dans a .
$Df(a)$	: la différentiable de fonction f dans a .
$o(h)$	: la note de landau.
$\mathcal{L}(E, F)$	: l'espace des applications linéaire continue de E dans F .
$\mathbb{K}^n$	: un sous espace vectoriel en $\mathbb{R}^n$.

Liste des Figures

Figure 1.1.1 : une fonction continue en un point.	03
Figure 1.2.1 : Interprétation graphique de la dérivée.....	07
Figure 2.1.1 : Interprétation géométrique de Rolle.....	14
Figure 2.2.1 : Interprétation graphique d'accroissements finis.....	15
Figure 2.2.2 :Interprétation géométrique d'inégalité des accroissements finis	16

Table des matières

Introduction générale	1
1 Préliminaires	2
1.1 Continuité des fonctions réelles	2
1.1.1 Une fonction continue en un point	2
1.1.2 Critère de cauchy pour les fonction continue en un point	3
1.1.3 Opérations sur les fonctions continues	3
1.1.4 Continuite à droite et continue à gauche	4
1.1.5 Fonction continue sur un intervalle ouvert (ou fermé) de $\mathbb{R}$	5
1.1.6 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle fermé	6
1.1.7 Le théorème des valeurs intremédiaires	6
1.2 Derivabilite des fonctions réelles	6
1.2.1 Définitions	6
1.2.2 Propriétés	8
1.2.3 Dériveés successives	8
1.2.4 Fonctions croissantes et dériveés	9
1.2.5 Continuité et dériveés	9
1.3 Fonctions différentiables dans $\mathbb{R}^n$	10
1.3.1 La dérivée partielle	11

2	Théorème des accroissements finis	13
2.1	Théorème de Rolle	13
2.2	Théorème des accroissements finis	14
2.3	Applications	17
2.3.1	Calcul d'erreur	17
2.3.2	Méthode d'itération	18
2.3.3	Sens de variation	20
2.3.4	Encadrement	21
2.3.5	Nature de certaines suites	22
2.3.6	Avec des suites	22
2.3.7	Point fixe	23
3	Le théorème de la moyenne	25
3.1	Théorème de la moyenne	25
3.2	Applications	27
3.2.1	Fonctions de classe C^1	27
3.2.2	Théorème de Schwarz	29
3.2.3	Dérivée de la limite d'une suite de fonctions	31
	Conclusion générale	33
	Bibliographie	34

Liste des Figures

Introduction générale

L'analyse est une branche des mathématiques comprenant l'étude des fonctions d'une plusieurs variables, et leur théorèmes analytiques, mais aussi des suites et séries, de leur limite éventuelle et plus généralement des systèmes dynamiques.

Dans les théorèmes d'analyse, il y a le théorème des accroissements finis qu'appelé aussi théorème de la moyenne de Lagrange, il est très important dans analyse mathématique surtout qu'est un principe fondamental du calcul différentiel et analyse numérique, tel que les applications de ce théorème dans $\mathbb{R}$ est utilisé dans la domaine numérique pour approche les solutions. Et le théorème de la moyenne de Lagrange est le fondement de plusieurs résultats importants.

En analyse, le théorème des accroissements finis est à fois une généralisation est un corolaire du théorème de Rolle (publié en 1691). Pour toute fonction dérivable d'une variable réelle, son taux d'accroissement entre deux valeurs est réalisable.

Dans cet mémoire, nous allons etudier ce théorème dans espace $\mathbb{R}^n$, tel que dans le premier chapitre nous avons traité des généralités sur la continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'un seul variable réel et la différentiable des fonctions réelles des plusieurs variables réelles et dans la dextième section, nous étudions le théorème des accroissements finis et l'inégalité de ce théorème et des applications dans $\mathbb{R}$. Enfin, on généralise cet théorème dans $\mathbb{R}^n$ pour obtenir Théorème de Moyenne et quelques applications, mais l'égalité dans le théorème des accroissements finis devenus l'inégalité dans $\mathbb{R}^n$, pour comprendre les applications élargissements *et* généralement.

Chapitre 1

Préliminaires

Cette chapitre est une introduction d'autres chapitres, nous allons étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions d'une seule variable, et différentiable dans $\mathbb{R}^n$.

1.1 Continuité des fonctions réelles

1.1.1 Une fonction continue en un point

Définition 1.1.1 [6] *Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite continue en un point x_0 de son domaine de définition si*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1.1.1)$$

Définition 1.1.2 *première équivalence*

Une fonction $f : E \rightarrow F$ définie au voisinage d'un point c de son domaine de définition est continue en c si et un nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que les relations $c \in E$ et $|x - c| \leq \delta$ impliquent

$$|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon \quad (1.1.2)$$

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend des nombres c et ε .

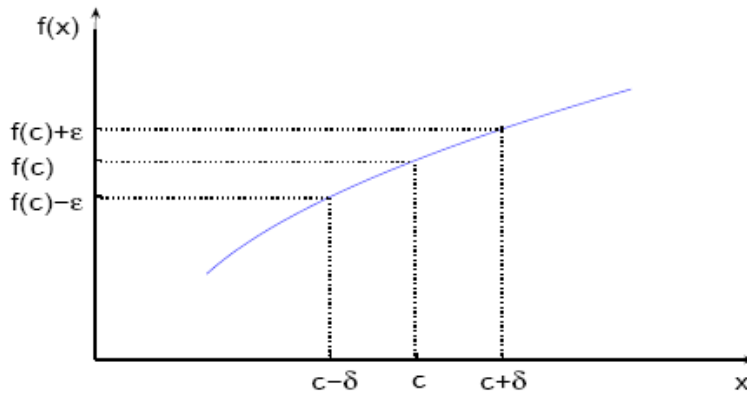


Figure 1.1.1 : une fonction continue en un point.

Définition 1.1.3 *deuxième équivalente*

Une fonction $f : E \rightarrow F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (a_n) d'éléments de E qui converge vers x_0 , la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(x_0)$.

1.1.2 Critère de cauchy pour les fonction continue en un point

Définition 1.1.4 [6] Une fonction $f : E \rightarrow F$ définie au voisinage d'un point x_0 de son domaine de définition est continue en x_0 et seulement si à tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments x_1, x_2 de $\{x \in E : |x - x_0| \leq \delta\}$. On ait:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon \quad (1.1.3)$$

D'une manière général, le nombre réel δ dépend des nombre x_0 et ε .

1.1.3 Opérations sur les fonctions continues

Définition 1.1.5 Soit f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ continues en x_0 . Des résultat obtenus sur les limites, on déduit immédiatement les propriétés suivantes:

- pour tout couple de nombres réels α et β , la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue en x_0 .
- de même, les fonctions fg , f/g et $|f|$ sont continues en x_0 .
- les deux fonctions $h_1, h_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ définis respectivement par: $h_1(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ et $h_2(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ sont également continues en x_0 . pour démontrer ce résultat, il suffit de remarquer que pour tout élément x de E :

$$\max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|) \quad (1.1.4)$$

et

$$\min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|) \quad (1.1.5)$$

- une des conséquences directes du précédent résultat est que les fonctions f^+ et f^- sont aussi continues en x .

Théorème 1.1.1 [6] *Continuité de la composée de deux fonctions continues*

Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction continue en x_0 et $g : G \rightarrow H$ une fonction continue en $f(x_0)$. supposons de plus que $f(E) \subset G$. Alors, la fonction composée $g \circ f : E \rightarrow H$ est continue en x_0 . contrairement à ce qu'on a fait au paragraphe limite de la composée de deux fonctions, il n'est pas nécessaire ici de supposer qu'il existe un nombre réel $\alpha > 0$ tel que les relations $x \neq x_0$ et $x \in B(x_0, \alpha)$ impliquent $f(x) \neq y_0$, car ici $y = f(x_0)$ et $h = g(y_0)$.

Remarque 1.1.1 Si la fonction composée $g \circ f : E \rightarrow H$ est continue en x_0 , on ne peut pas en conclure à priori que la fonction f est continue en x_0 ou que la fonction g est continue en $f(x_0)$.

1.1.4 Continuité à droite et continuité à gauche

Définition 1.1.6 Une fonction $f : E \rightarrow F$ est dite continue à droite (resp. à gauche) en un point x_0 de son domaine de définition si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0) \quad (1.1.6)$$

$$(\text{ resp. } \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0)) \quad (1.1.7)$$

Remarque 1.1.2 *Tous les résultats que nous avons obtenus sur les fonctions continues restent valables pour les fonctions continues à droite (resp. à gauche).*

1.1.5 Fonction continue sur un intervalle ouvert (ou fermé) de $\mathbb{R}$

Définition 1.1.7 [6] *Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ une fonction $f : I \rightarrow F$ est dite continue sur I , ou tout simplement qu'elle est continue si f est continue en tout point de I . on désigne par $C(I, F)$ l'ensemble des fonctions continues de I dans F .*

Remarque 1.1.3 *Soit $a < b$ deux nombres réels, une fonction $f : [a, b] \rightarrow F$ est dite continue sur $[a, b]$, ou tout simplement qu'elle est continue si f est continue en tout point de $]a, b[$, continue à droite en a , continue à gauche en b . on désigne par $C([a, b], F)$ l'ensemble des fonctions continues $[a, b]$ dans F .*

Exemple 1.1.1 *La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$. tandis que la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par $g(x) = \sqrt[2]{1-x}$ est continue sur $[0, 1]$.*

Définition 1.1.8 [6] *La continue uniforme d'une fonction*

Soit I un intervalle ouvert non vide (resp. un intervalle fermé et borné non réduit à un seul élément) de $\mathbb{R}$ une fonction $f : I \rightarrow F$ est dite uniformément continue sur I si à tout nombre réel $\varepsilon > 0$, on peut associer un nombre réel $\delta > 0$ tel que pour tout couple d'éléments x, y de I vérifiant la relation $|x - y| \leq \delta$, on ait:

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \quad (1.1.8)$$

D'une manière générale, le nombre réel δ dépend du nombre ε .

Remarque 1.1.4 *Dans la définition de la continue uniforme, le nombre réel δ ne dépend que ε . Alors que dans la définition de la continuité, (première définition équivalente il dépend aussi, en général du point considéré x_0 . une fonction $f : I \rightarrow F$ uniformément continue sur I est continue sur I (première définition équivalente). la réciproque n'est pas forcément vraie .*

1.1.6 Propriétés des fonctions continues sur un intervalle fermé

Définition 1.1.9 Soit $a \prec b$ deux nombres réelles et $f : [a, b] \rightarrow F$ une fonction continue.

Alors :

- la fonction f est uniformément continue sur $[a, b]$.
- les deux nombres réels $\max_{x \in [a, b]} f(x)$ et $\min_{x \in [a, b]} f(x)$ existent.

1.1.7 Le théorème des valeurs intremédiaires

Théorème 1.1.2 [3] Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, borné ou non, fermé ou non. Pour tout $a, b \in I$ et tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$y = f(c) \quad (1.1.9)$$

Corollaire 1.1.1 Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si $f(a)f(b) \leq 0$ alors, il existe $c \in [a, b]$ tel que: $f(c) = 0$

Toute fonction continue $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ admet un point fixe: il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$g(c) = c \quad (1.1.10)$$

1.2 Derivabilite des fonctions réelles

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I . On dit que la fonction f est dérivable en a si et seulement si le taux d'accroissement de la fonction f en a admet une limite finie ℓ en a , c'est à dire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \quad (1.2.1)$$

Dans ce cas, on appelle ℓ le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$. Lorsque la fonction f est dérivable sur un intervalle I , on note f' , la fonction dérivée qui à tout x de I associe son nombre dérivée $f'(x)$.

Remarque 1.2.1 Si la fonction f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a .

Autres écritures de la dérivée:

Remarque 1.2.2 Voici deux autres formulations de la dérivabilité de f en x_0 . f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.2.2)$$

existe et est finie.

f est dérivable en x_0 si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ (qui sera $f'(x_0)$) et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que: $\varepsilon(x) \rightarrow_{x \rightarrow x_0} 0$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \ell + (x - x_0) \varepsilon(x) \quad (1.2.3)$$

Proposition 1.2.1 Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .

Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

Théorème 1.2.1 [5] Lorsque f est dérivable en a , la courbe représentative C_f de la fonction f admet au point $A(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ dont l'équation est:

$$(T) : y = f'(a)(x - a) + f(a) \quad (1.2.4)$$

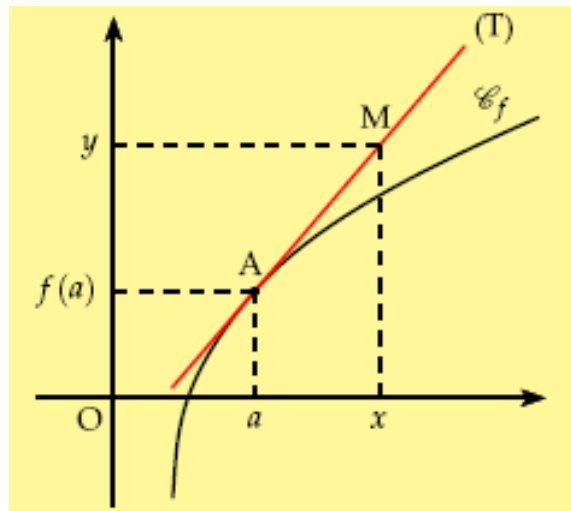


Figure 1.2.1 : Interprétation graphique de la dérivée.

Remarque 1.2.3 *Il est important de retenir que le nombre dérivé représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe en un point.*

1.2.2 Propriétés

Théorème 1.2.2 [5]

- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I , $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.
- Si f est dérivable sur I et si λ est un réel, λf est dérivable sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I , $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)' = f'g + fg'$.
- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Si f est dérivable sur I , si g est dérivable sur J et si pour tout x de I , $f(x) \in J$, $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = g' \circ f \times f'$.

Théorème 1.2.3 [5] (*Dérivée d'une fonction réciproque*)

Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et g la fonction réciproque de f .

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et on a : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ i-e: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ et

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (1.2.5)$$

1.2.3 Dérivées successives

Proposition 1.2.2 [5] *Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f . Plus généralement on note: $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$ et*

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})' \quad (1.2.6)$$

Si la dérivée n -ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

Théorème 1.2.4 [5] (*Formule de Leibniz*)

$$(f \cdot g)^n = f^{(n)}g + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g^{(1)} + \dots + \binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)} + fg^{(n)}.$$

Autrement dit :

$$(f \cdot g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} \quad (1.2.7)$$

1.2.4 Fonctions croissantes et dérivées

Corollaire 1.2.1 [5] *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.*

- 1- $\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante.
- 2- $\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante.
- 3- $\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante.
- 4- $\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante.
- 5- $\forall x \in]a, b[, \quad f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante.

Remarque 1.2.4 *La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse. Par exemple la fonction $x \rightarrow x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.*

1.2.5 Continuité et dérivées

Théorème 1.2.5 [5] (*sans démonstration*)

- Si f est dérivable en a alors la fonction f est continue en a .
- Si f est dérivable sur un intervalle I alors, la fonction f est continue sur I .

Remarque 1.2.5 *La réciproque de ce théorème est fausse.*

1.3 Fonctions différentiables dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1.3.1 [4] On appelle norme sur un espace vectoriel une application $\|\cdot\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les conditions:

- 1- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$
- 3- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout x et tout y de E

Définition 1.3.2 Un espace vectoriel normé sera muni de la distance et de la topologie associées à la norme.

Définition 1.3.3 On appelle espace de Banach tout espace normé complet pour la distance associée à la norme.

Théorème 1.3.1 [4] Si f est une application linéaire continue de l'espace normé E dans l'espace normé F , on appelle norme de f la plus petite constante M telle que, pour tout $x \in E$ on ait $\|f(x)\| \leq M \|x\|$. On la note $\|f\|$. On a donc

$$\|f(x)\| \leq \|f\| \|x\| \quad (1.3.1)$$

pour tout $x \in E$ et toute application linéaire continue f de E dans F .

Proposition 1.3.1 [7] La norme d'une application linéaire continue f est égale à

$$\|f\| = \sup_{x \in B} \|f(x)\| \quad (1.3.2)$$

où B désigne la boule unité de E .

Théorème 1.3.2 [7] Si E , F et G sont trois espaces normés, f une application linéaire continue de E dans F et g une application linéaire continue de F dans G , l'application linéaire continue $f \circ g$ a une norme au plus égale à

$$\|f\| \cdot \|g\| \quad (1.3.3)$$

Notation 1.3.1 On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de l'espace normé E dans l'espace normé F .

Notation 1.3.2 [4] On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F . Rappelons que si une application linéaire L est continue

$$\sup_{x \in E; \|x\|_E=1} \|L(x)\|_F = \inf_{x \in E} \{A \in \mathbb{R}^+; \|L(x)\|_F \leq A \cdot \|x\|_E\} < \infty \quad (1.3.4)$$

ce qui donne une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

Définition 1.3.4 [7] Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et f une fonction de U dans F . On dit que f est différentiable en un point a de U s'il existe une application linéaire continue $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$f(x) - f(a) - T \cdot (x - a) = o(x - a) \quad (1.3.5)$$

quand x tend vers a .

Autrement dit: la différentiabilité de f en a signifie qu'il existe, pour tout $\varepsilon > 0$, un $\delta > 0$ tel que, pour $x \in U$ avec $\|x - a\| < \delta$, on ait:

$$\|f(x) - f(a) - T \cdot (x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\| \quad (1.3.6)$$

Ceci signifie encore que la fonction affine continue : $x \rightarrow f(a) + T \cdot (x - a)$ diffère de la fonction f au voisinage de a d'une fonction infiniment plus petite que la distance à a .

Définition 1.3.5 [7] On notera le plus souvent $f'(a)$ la différentielle de f au point a . Une autre notation fréquente pour la différentielle de f en a est $\nabla f(a)$. On dit La forme linéaire $df_{x_0} : h \rightarrow hf'(x_0)$ est la différentielle de f au point x_0 . Il est évident que pour les petites valeurs de h , $df_{x_0}(h)$ donne une approximation excellente de $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

1.3.1 La dérivée partielle

Définition 1.3.6 Si f admet une j -ième dérivée partielle en tout point de U , l'application $D_j : U \rightarrow F$ qui à $a \in U$ associe $D_j f(a)$ s'appelle j -ième dérivée partielle de f dans U . On la note aussi $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ou $\partial_j f$. C'est donc une application de U dans F .

Proposition 1.3.2 [1] Si f est différentiable au point a , alors f admet au point a : n dérivées partielles $D_j f(a)$ ($1 \leq j \leq n$) et de plus on a pour tout élément $(h_1, \dots, h_n)$ de $\mathbb{K}^n$:

$$df(a)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k$$

Si on note (dx_k) ($1 \leq k \leq n$) la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ la formule précédente peut s'écrire :

$$df(a) = \sum_{k=1}^n dx_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

Démonstration. [2] (e_i) désignant la base canonique de $\mathbb{K}^n$ on a pour $|h|$ suffisamment petit et $1 \leq j \leq n$ $f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) = f(a) + df(a)(he_j) + o(h)$.

Soit $f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + h, a_{j+1}, \dots, a_n) = f(a) + h \cdot df(a)(e_j) + o(h)$. Il s'ensuit que f admet une dérivée j -ième dérivée partielle en a et

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = df(a)(e_j)$$

Comme

$$df_a(h_1, \dots, h_n) = \sum_{k=1}^n h_k \cdot df(a)(e_k)$$

on obtient la formule annoncée. ■

Chapitre 2

Théorème des accroissements finis

Lors de la détermination d'une fonction, nous regardons la dérivée de cette fonction. En effet, il y a un lien entre signe de la dérivée et croissance de la fonction. Nous allons voir un théorème qui permet effectivement le lien grâce aux accroissements finis. Puis nous verrons d'autres applications de cette égalité et inégalité.

2.1 Théorème de Rolle

Théorème 2.1.1 [3] *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que :*

$$f(a) = f(b) \tag{2.1.1}$$

Alors, il existe un point $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = 0 \tag{2.1.2}$$

Preuve. [3]

Supposons que la fonction f est non nulle sur $[a, b]$, sinon tous les points conviennent. Supposons qu'il existe $x \in]a, b[$ tel que $f(x) \geq 0$. Posons $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x) > 0$. Comme f est continue, la valeur M est atteinte par f en un point $c \in]a, b[$ tel que : $f(c) = M$. Comme $f(a) = f(b)$, alors $c \in]a, b[$ et f présente un maximum au point c . D'après la proposition précédente on a $f'(c) = 0$. ■

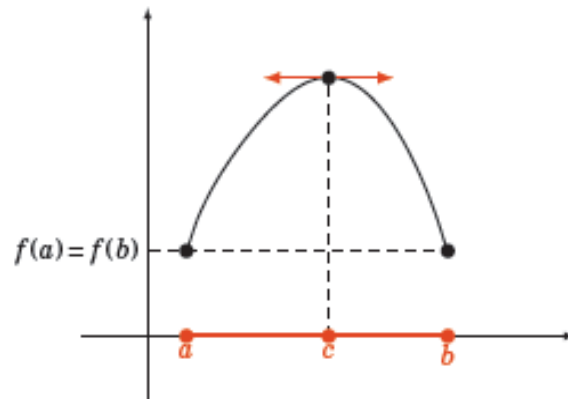


Figure 2.1.1: Interprétation géométrique de Rolle.

Interprétation géométrique :

Il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

2.2 Théorème des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis est une conséquence du théorème de Rolle. Il permet notamment de montrer l'inégalité des accroissements finis.

Théorème 2.2.1 [3] *Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable dans $]a, b[$. Alors il existe (au moins) un point $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \quad (2.2.1)$$

Preuve. [3]

La démonstration repose sur le théorème de Rolle. A partir de la fonction f , nous définissons une fonction g telle que $g(a) = g(b)$. Posons :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \quad (2.2.2)$$

Il est évident que $g(a) = g(b)$, g est continue sur $[a, b]$, et g est dérivable dans $]a, b[$.

De plus

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (2.2.3)$$

pour tout $x \in]a, b[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que:

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

donc: $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$

Le théorème est donc démontré. ■

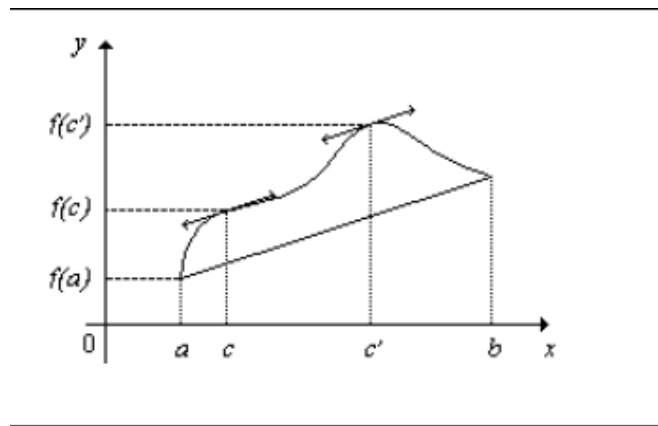


Figure 2.2.1: Interprétation graphique d'accroissements finis.

Interprétation graphique :

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, l'arc $\widehat{AB}$, courbe représentative de f sur $[a, b]$, admet en au moins un de ces points, distincts de A et B , une tangente parallèle à la droite (AB) .

Remarque 2.2.1 1. On cherche la trouver un point $M_x = (x, f(x))$ du graphe de f dont la tangente soit parallèle à la droite (AB) . Ce parallélisme est réalisé lorsque $g'(x) = 0$. La fonction g est construite pour vérifier les hypothèses du théorème de Rolle.

2. Comme le montre la figure précédente, il se peut qu'il existe plusieurs points de $]a, b[$ tels que nous ayons l'égalité de l'énoncé.

Remarque 2.2.2 [2] c n'est pas unique en général, les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont équivalents. Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont faux

si l'ensemble d'arrivée de f n'est pas $\mathbb{R}$. Par exemple l'application $t \rightarrow \exp it$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est continue et dérivable et $f(0) = f(2\pi)$ et pourtant $\exp it \neq 0$ pour tout réel t . En général on ne connaît qu'un encadrement de la dérivée de f ; en pratique on utilise souvent le corollaire suivant du théorème des accroissements finis :

Corollaire 2.2.1 [9] (*inégalité des accroissements finis*)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. S'il existe $m \in \mathbb{R}$ (resp. $M \in \mathbb{R}$) tel que: $\forall x \in]a, b[$ $f'(x) \geq m$ (resp. $f'(x) \leq M$), alors:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq m \quad (2.2.4)$$

$$(\text{resp. } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M) \quad (2.2.5)$$

Interprétation géométrique:

Notons C_f la courbe représentative de f sur $[a, b]$. Soit $x \in [a, b]$.

$$x \geq a \Rightarrow m(x - a) + f(a) \leq f(x) \leq M(x - a) + f(a),$$

$$x \leq b \Rightarrow M(x - b) + f(b) \leq f(x) \leq m(x - a) + f(b).$$

$$\text{On note } D : y = m(x - a) + f(a), D' : y = m(x - b) + f(b),$$

$$\Delta : y = M(x - a) + f(a), \Delta' : y = M(x - b) + f(b).$$

Dans ce cas, C_f est comprise dans le parallélogramme délimité par ces quatre droites.

Voir figure ci-contre :

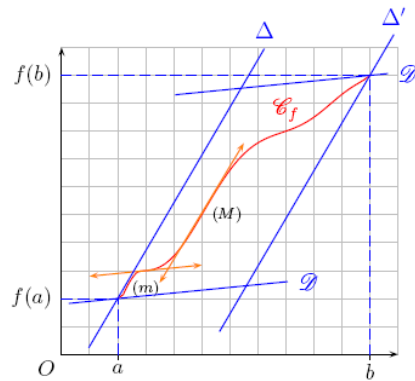


Figure 2.2.2 : Interprétation géométrique d'inégalité des accroissements finis.

Démonstration. [9] On a: $m \leq f'(x) \leq M \Rightarrow m \int_a^b 1dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b 1dx$
 $\Rightarrow m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$
 $\Rightarrow$

$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M \quad (2.2.6)$$

et le résultat est démontré. ■

Corollaire 2.2.2 [9] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. S'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq M$, alors:

$$|f(b) - f(a)| \leq M |b - a| \quad (2.2.7)$$

Démonstration. [9] C'est une conséquence directe de la proposition précédent avec $m = -M$. ■

Définition 2.2.1 Une telle fonction est alors appelée *M-lipschitzienne*.

2.3 Applications

2.3.1 Calcul d'erreur

Corollaire 2.3.1 [8] Si l'on prend $f(a)$ pour valeur approchée de $f(a+h)$ et si l'on sait déterminer un majorant M de $|f'(x)|$ pour $x \in [a, a+h]$, on obtient, par la formule des accroissements finis, un majorant de l'erreur commise

$$|f(a+h) - f(a)| \leq M |h|. \quad (2.3.1)$$

Exemple 2.3.1 On obtient un majorant de l'erreur commise en écrivant $\sqrt[3]{123} \approx 11$ en appliquant la formule des accroissements finis à $f(x) = \sqrt[3]{x}$ pour $a = 121, h = 2$:

$$\sqrt[3]{123} - \sqrt[3]{121} = \frac{2}{\sqrt[3]{121+2}} \prec \frac{1}{11} \prec 0,1$$

2.3.2 Méthode d'itération

Définition 2.3.1 [8] *Le calcul approché des racines d'une équation nécessite d'abord la séparation de ces racines, c'est-à-dire la détermination pour chacune d'elles d'un intervalle contenant cette racine et cette seule racine, puis le calcul de chacune d'elles avec une précision donnée. Nous avons déjà indiqué une méthode de résolution (approximations successives) des équations du type:*

$$f(x) = x \quad (2.3.2)$$

Rappelons que, si $f : F \rightarrow F$ est une contraction, $F \subset \mathbb{R}$ étant un ensemble fermé, alors le point fixe x (unique) de f (ou la solution de l'équation $f(x) = x$) est la limite de la suite $\{x_n\}$ définie par

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (2.3.3)$$

x_0 étant un point arbitraire.

Interprétation graphique:

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une contraction. Il est clair que le points d'intersection du graphe de f et de la droite $y = x$ a pour abscisse la racine $\tilde{x}$ de l'équation $f(x) = x$. Pour simplifier, on supposera de plus f monotone.

Alors deux cas présentent:

- (1) f est croissante. Dans ce cas la suite $\{x_n\}$ est monotone, croissante si $f(x_0) \succ x_0$, décroissante si $f(x_0) \prec x_0$
- (2) f est décroissante. On obtient alors un encadrement de la racine $\tilde{x}$

$$x_0 \prec x_2 \prec x_4 \prec \tilde{x} \prec x_5 \prec x_3 \prec x_1 \quad (2.3.4)$$

Si $f(x_0) \succ x_0$. On inversera le sens des inégalités si $f(x_0) \prec x_0$.

Dans la pratique, on utilise souvent la remarque suivante:

une fonction dérivable $f : I \rightarrow I$, I étant un intervalle quelconque, est une contraction si et seulement si,

$$\sup_{x \in I} |f'(x)| < 1$$

en effet, si f est contractante, alors:

$$\forall x_1, x_2 \in I : |f(x_1) - f(x)| \leq k |x_1 - x|, \quad 0 \leq k < 1$$

d'où:

$$\forall x : |f'(x)| = \lim_{x_1 \rightarrow x} \left| \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \right| \leq k < 1 \quad (2.3.5)$$

inversement, si $\sup |f'(x)| < 1$, alors le théorème des accroissements finis implique

$$\forall x_1, x \in I : |f(x_1) - f(x)| = |f'(c)| |x_1 - x| \leq k |x_1 - x| \quad (2.3.6)$$

où $k = \sup |f'(x)|$.

Application numérique:

Calcul de racine: $\sqrt[p]{a}$. $\forall p > 1, \forall a > 0 \ (p \in \mathbb{N})$.

Cela revient à résoudre l'équation $x^p = a$, qui peut, bien entendu, s'écrire:

$$f(x) = \frac{a}{x^{p-1}} = x, \quad x > 0$$

mais on ne peut appliquer à f le théorème du point fixe puisqu'elle n'est pas contractante. En effet, $|f'(\tilde{x})| = p-1 \geq 1$ pour $p \geq 2$, $\tilde{x}$ étant la racine de $x^p = a$. écrivons alors l'équation $x^p = a$, $x > 0$, sous la forme équivalente

$$x = g(x), \quad g(x) = \frac{1}{p} \left[(p-1)x + \frac{a}{x^{p-1}} \right], \quad x > 0 \quad (2.3.7)$$

comme

$$g'(x) = \frac{p-1}{p} \left(1 - \frac{a}{x^p} \right)$$

Il est clair que g admet un minimum absolu au point $\tilde{x}$, c'est-à-dire

$$\inf_{x>0} g(x) = g(\tilde{x}) = \tilde{x} > 0$$

Donc g envoie $]0, +\infty[$ sur $[\tilde{x}, +\infty[$ et, par conséquent, envoie l'ensemble fermé $[\tilde{x}, +\infty[$ dans lui-même. De plus, la relation précédente implique immédiatement que g est une

contraction sur $[\tilde{x}, +\infty[$ car

$$\forall x \geq \tilde{x} : 0 \leq g'(x) \prec \frac{p-1}{p} \prec 1$$

Soit $x_0 \succ 0$ une valeur approchée quelconque de la racine $\tilde{x}$. Comme:

$$x_1 = g(x_0) \in [\tilde{x}, +\infty[$$

La méthode des approximations successives s'applique, donc

$$\tilde{x} = \sqrt[p]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \left[(p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}} \right] \quad (2.3.8)$$

Exemple 2.3.2 Calcul de $\sqrt[3]{19,4}$. La suite $x_{n+1} = \frac{1}{3} \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2} \right)$ converge vers $\sqrt[3]{a}$. Pour $a = 19,4$, les calculs donnent en prenant $x_0 = 2$

$$x_1 = 2,95000 \quad x_3 = 2,68718 \quad x_5 = 2,68698$$

$$x_2 = 2,70973 \quad x_4 = 2,68698$$

pour $x_0 = 100$, on obtient

$$x_1 = 66,6670 \quad x_2 = 44,4460 \quad x_3 = 29,6339 \quad x_4 = 19,7632$$

$$x_5 = 13,1920 \quad x_6 = 8,83180 \quad x_7 = 5,97076 \quad x_8 = 4,16186$$

$$x_9 = 3,14791 \quad x_{10} = 2,75117 \quad x_{11} = 2,68848 \quad x_{12} = 2,68698$$

$$x_{13} = 2,68698$$

2.3.3 Sens de variation

Théorème 2.3.1 [9] Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que $f'(x) \geq 0$ sur $]a, b[$. Alors, pour tout $x \in [a, b]$, on a:

$$f(x) \geq f(a) \quad (2.3.9)$$

Démonstration. [9] Soient $\varepsilon \succ 0$ et $U_\varepsilon = \{x \in [a, b] / f(a) \prec f(x) + \varepsilon\}$. Montrons que $U_\varepsilon = [a, b]$. Montrons que $U_\varepsilon \neq \emptyset$: Trivial, car $a \in U_\varepsilon$. Soit alors $c = \sup(U_\varepsilon) \leq b$. Montrons que $c \succ a$: f étant continue en a , il existe $\eta \succ 0$ tel que

$$a \leq x \leq a + \eta \Rightarrow f(x) \succ f(a) - \varepsilon$$

d'où $a + \eta \in U_\varepsilon$. On en déduit que $c \geq a + \eta \succ a$. Montrons que $c \in U_\varepsilon$: Par définition de la borne supérieure, $c = \lim (x_n)$ où $x_n \in U_\varepsilon$, soit $f(a) \prec f(x_n) + \varepsilon$ pour tout entier n . f étant continue en c , on a $f(x_n) \rightarrow f(c)$, d'où $f(a) \prec f(c) + \varepsilon$ c'est-à-dire $c \in U_\varepsilon$. Montrons (par l'absurde) que $c = b$: Supposons donc que $c \prec b$, d'où $c \in]a, b[$. Par hypothèse. $f'(c) \succ 0$. Or $f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$. Par continuité de f en c , il existe $\eta' \succ 0$ tel que $c \leq x \leq a + \eta'$, impliquant alors que $f(x) \geq f(c)$. Puisque $c \in U_\varepsilon$, on a finalement $f(a) \prec f(c) + \varepsilon \leq f(x) + \varepsilon$. Pour $x = c + \eta'$, on trouve $f(a) \prec f(c + \eta') + \varepsilon$, ce qui implique que $c + \eta' \in U_\varepsilon$. Ceci contredit l'égalité $c = \sup(U_\varepsilon)$, donc $c \succ b$. Or c vérifie aussi $c \leq b$ (premier point de cette démonstration), donc finalement, $c = b$. D'où $U_\varepsilon = [a, b]$, et pour tout $x \in U_\varepsilon = [a, b]$, on conclut que $f(a) \prec f(x) + \varepsilon$ donne l'inégalité recherchée:

$$f(a) \leq f(x)$$

■

2.3.4 Encadrement

Définition 2.3.2 [9] Pour tous réels a et b ,

$$|\cos b - \cos a| \leq |b - a| \quad (2.3.10)$$

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \rightarrow \cos x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\sin x$. Et comme $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f'(x)| \leq 1$, le corollaire 1 conduit à: pour tous réels a et b , $|\cos b - \cos a| \leq |b - a|$.

Exercice 2.3.1 On montre que pour tous $x, y \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi)$

$$|\tan(x) - \tan(y)| \geq |x - y|$$

Solution On a: $x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1$. Or $\arctan'(x) = \frac{1}{x^2+1}$, donc pour tous $X, Y \in \mathbb{R}$, on a $|\arctan X - \arctan Y| \leq |X - Y|$. En prenant x et y de sorte que $X = \tan(x)$ et $Y = \tan(y)$, on arrive au résultat demandé

$$|x - y| \leq |\tan(x) - \tan(y)|$$

On cherche à encadrer $\sqrt{105}$. On considère $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[100, 105]$. Alors

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{1}{22} \leq \frac{1}{2\sqrt{105}} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}$$

D'après le définition, on obtient donc

$$\frac{1}{22}(105 - 100) \leq \sqrt{105} - \sqrt{100} \leq \frac{1}{20}(105 - 100) \iff \frac{5}{22} + 10 \leq \sqrt{105} \leq \frac{5}{20} + 10$$

Soit finalement: $10,227 \leq \sqrt{105} \leq 10,25$.

2.3.5 Nature de certaines suites

Proposition 2.3.1 [9] Soient $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $V_n = \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Posons:

$$f(x) = \ln(x) \quad (2.3.11)$$

de sorte que $f'(x) = \frac{1}{x}$. Alors, si

$$x \in [k, k+1], k \leq x \leq k+1 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

En sommant, on trouve alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} &\leq \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \Leftrightarrow U_n - 1 + \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) \leq U_n \\ &\Leftrightarrow \ln(n+1) \leq U_n \leq \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$

(on dit alors que (U_n) et (V_n) sont équivalentes en $+\infty$).

2.3.6 Avec des suites

Exemple 2.3.3 [9] Soit la suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = (2 + U_n)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2.3.12)$$

Il s'agit ici, d'étudier la suite grâce à l'inégalité des accroissements finis. En effet, il est possible d'étudier la suite directement sans passer par la proposition. Pour se donner une

idée du comportement de la suite, nous pouvons regarder la suite sur la calculatrice grâce à la table de valeurs par exemple. Sur l'écran ci-contre, nous voyons que la suite semble être croissante et tendre vers 2.

Répondons à la question.

Commençons par définir notre fonction :

$$g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto (x + 2)^{\frac{1}{2}}$$

g est continue et dérivable sur $[1, 3]$, donc nous pouvons utiliser la proposition 1. Nous avons : $\forall x \in [1, 3], g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}$. La dérivée seconde est bornée sur $[1, 3]$ et est majorée, en valeur absolue (remarque: la fonction dérivée soit positive, ce qui donne en plus la croissance de g) par $M = \frac{1}{2\sqrt{3}} (< 1)$. Nous obtenons donc, par la proposition,

$$\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right) (u_n - u_{n-1}) \quad (2.3.13)$$

i.e.:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^n (u_1 - u_0) = (1 + \sqrt{3}) \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)^n \quad (2.3.14)$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente vers une limite que nous noterons ℓ . La détermination de la limite se fait par l'égalité : $g(\ell) = \ell$, ce qui donne $\ell = 2$. En fait, nous avons utilisé le fait que la fonction g était contractante.

2.3.7 Point fixe

Théorème 2.3.2 [9] Soient $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et $k \in]0, 1[$. On suppose que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Si l'on a $|f'(x)| \leq k$ pour tout $x \in]a, b[$, alors l'équation

$$f(x) = x \quad (2.3.15)$$

admet une unique solution x^* dans $[a, b]$.

Démonstration. [9] Par hypothèse, $f([a, b]) \subset [a, b]$, donc $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$. Posons alors : $g(x) = f(x) - x$, de sorte que $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x^* \in]a, b[$ tel que $g(x^*) = 0$, soit $f(x^*) = x^*$.

Supposons alors que $\tilde{x}$ soit une autre solution de l'équation $f(x) = x$. Alors, (par corollaire 1)

$$|f(x^*) - f(\tilde{x})| \leq k |x^* - \tilde{x}| \Leftrightarrow (1 - k) |x^* - \tilde{x}|$$

Où $k \neq 0$, donc on a :

$$|x^* - \tilde{x}| \leq 0 \Leftrightarrow |x^* - \tilde{x}| = 0 \Leftrightarrow x^* = \tilde{x}$$

■

Corollaire 2.3.2 [9] *Si f est une fonction vérifiant les hypothèses du théorème précédent, alors la suite définie par $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers x^* et l'on a la majoration de l'erreur pour tout n :*

$$|u_n - x^*| \leq k^n |b - a| \quad (2.3.16)$$

Démonstration. [9] f étant continue sur $[a, b]$, on passe à la limite dans la relation qui définissant, de sorte que: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} u_n)$, donc $\lim U_n$ est point fixe de f , c'est -à-dire: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x^*$. De plus,

$$|u_n - x^*| = |f(u_{n-1}) - f(x^*)| \leq k |u_{n-1} - x^*|$$

par le corollaire précédent. Une récurrence immédiate montre qu'alors, pour tout entier naturel n

$$|u_n - x^*| \leq k^n |u_0 - x^*|$$

Or $a \leq u_0 \leq b$ et $-b \leq -x^* \leq -a$, donc on a :

$$a - b \leq u_n - x^* \leq b - a \Leftrightarrow |u_0 - x^*| \leq |b - a|$$

et il vient que pour tout entier n ,

$$|u_n - x^*| \leq k^n |b - a|$$

■

Chapitre 3

Le théorème de la moyenne

Comme pour les fonctions dérivable d'une variable réelle, le résultat fondamental du calcul différentiel est celui qui, à partir de la connaissance des différentielles d'une fonction en chaque point de son domaine, permet d'estimer l'accroissement de cette fonction, entre deux points fixés à l'avance. On se ramène pour cela au cas des fonctions d'une variable, en considérant la restriction de la fonction au segment qui joint les deux.

3.1 Théorème de la moyenne

Théorème 3.1.1 [7] *Soient E et F deux espaces de Banach, U un ouvert convexe de E et f une fonction différentiable sur U . Si on a $\|f'(x)\| \leq M$, pour tout x de U , on a pour tout a et tout b de U*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M\|b - a\| \quad (3.1.1)$$

Lemme 3.1.1 [2] *Soient a et b des réels ($a < b$), $f : [a, b] \rightarrow F$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, deux applications continues dérivables sur $]a, b[$ telles que:*

$$\forall t \in]a, b[, \|f'(t)\| \leq g'(t)$$

Alors on a:

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) \quad (3.1.2)$$

Démonstration. [2] fixons $\varepsilon \succ 0$ dans $\mathbb{R}$. Soit Φ l'application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe

$$\|f(t) - f(a)\| - g(t) + g(a) - \varepsilon(t - a)$$

Soit E l'ensemble des t appartenant à $[a, b]$ tels que $\Phi(t) \leq \varepsilon$. E est non vide car $a \in E$. Posons $c = \sup E$ et montrons que $c = b$. On aura le résultat voulu en remplaçant t par b dans l'inégalité $\Phi(t) \leq \varepsilon$ puis en faisant tendre ε vers 0. On a $c \succ a$ (en effet Φ étant continue sur $[a, b]$ et $\Phi(a) = 0$ on a $\Phi(t) \leq \varepsilon$ pour $a \leq t \leq a + \alpha$, $\alpha \succ 0$). On a $c \in E$ (en effet E est un fermé de $[a, b]$ comme image réciproque du fermé $]-\infty, \varepsilon]$ de $\mathbb{R}$ par Φ continue). Supposons que $c \neq b$. On a alors $c \in]a, b[$. Comme f et g sont dérivables en c il existe $t \in]c, b]$ tels que:

$$\left\| \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \right\| \leq \|f'(c)\| + \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$g'(c) \leq \frac{g(t) - g(c)}{t - c} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Compte tenu de l'hypothèse $\|f'(t)\| \leq g'(t)$ ces deux inégalités impliquent:

$$\|f(t) - f(c)\| \leq g(t) - g(c) + \varepsilon(t - c)$$

D'autre part, comme $c \in E$, on a:

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon$$

Ces deux dernière inégalités donnent, compte tenu de l'inégalité triangulaire :

$$\|f(t) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon$$

On en déduit que $t \in E$, ce qui est absurde car $c = \sup E$ et $t \succ c$, ce qui achève la démonstration du lemme. ■

Preuve. [8] (Théorème de la moyenne):

puisque U est supposé convexe, on a pour a et b dans U et pour $t \in [0, 1]$, $a + t(b - a) \in U$. il en résulte que la fonction $\psi : [0, 1] \rightarrow F$ définie par

$$\psi(t) : f(a + t(b - a))$$

composée de f et de la fonction affine $t \rightarrow a + t(b - a)$ est continue sur $[0, 1]$ et différentiable en tout point de $]0, 1[$. Sa différentielle en t est l'application linéaire de $\mathbb{R}$ dans F .

$\lambda \rightarrow f'(a + t(b - a)) \cdot (\lambda(b - a))$, ce qui signifie que la dérivée de ψ en

$$t\psi'(t) = f'(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$$

on a

$$\|\psi'(t)\| \leq \|f'(a + t(b - a))\| \|b - a\| \leq M \|b - a\|$$

et il résulte alors du théorème que

$$\|f(b) - f(a)\| = \|\psi(1) - \psi(0)\| \leq (1 - 0) M \|b - a\| = M \|b - a\|$$

qui est le résultat cherché. ■

Remarque 3.1.1 *Il résulte de la démonstration que l'inégalité $\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$ est valable dès que le segment $[a, b]$ est tout entier contenu dans le domaine de f et que la différentielle est majorée en norme par M sur ce segment.*

Corollaire 3.1.1 *Soit E et F deux espaces vectoriels normés et f une application différentiable dans un ouvert Ω dans E , à valeurs dans F . Alors f est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée f' bornée sur E .*

3.2 Applications

3.2.1 Fonctions de classe C^1

Définition 3.2.1 [1] *Soit f une fonction définie d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans un espace vectoriel F . On a vu que si f était différentiable en $a \in U$, alors f admet des dérivées partielles en a . Le théorème suivant donne une condition suffisante sur les dérivées partielles de f pour que f soit différentiable en a :*

Théorème 3.2.1 [2] *Avec les notations précédentes si les n dérivées partielles de f existent sur U et si elles sont continues en a , alors f est différentiable en a .*

Démonstration. [2] Prenons pour norme de $\mathbb{R}^n$: $\|h\| = \sup_k |h_k|$ ($h = (h_1, \dots, h_n)$). U étant un ouvert il existe $\alpha > 0$ tel que U contienne la boule de centre a et de rayon α . Pour $|h_k| < \alpha$ ($1 \leq k \leq n$) on écrit:

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \sum_{k=2}^n f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1 + h_1, \dots, a_{k-1} + h_{k-1}, a_k, \dots, a_n) \\ &\quad + f(a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) \end{aligned}$$

D'où:

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(h_k) - \varphi_k(0) \quad (3.2.1)$$

en posant:

$$\varphi_k(t) = f(a_1 + h_1, \dots, a_k + t, a_{k+1}, \dots, a_n) - t \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \quad (3.2.2)$$

L'inégalité des accroissements finis appliqué à la fonction φ_k sur l'intervalle $[0, h_k]$ donne :

$$|\varphi_k(h_k) - \varphi_k(0)| \leq M_k |h_k| \quad (3.2.3)$$

où:

$$M_k = \sup_{t \in [0, h_k]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1 + h_1, \dots, a_k + t, \dots, a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right\|$$

On a donc d'après (3.4.1):

$$\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \right\| \leq \|h\| \sum_{k=1}^n M_k \quad (3.2.4)$$

Les dérivées partielles de f étant continues au point a on a : $\lim_{h \rightarrow 0} M_k = 0$, d'où :

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = o(h) \quad (3.2.5)$$

ce qui achève la démonstration . ■

Le théorème suivant caractérise les fonctions de classe C^1 dans un ouvert :

Théorème 3.2.2 [2] *Pour qu'une application f d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans F soit de classe C^1 dans U , il faut et suffit que f admette n dérivées partielles continues dans U .*

Démonstration. [2] Si f est de classe C^1 sur U . f admet n dérivées partielles sur U . D'autre part pour tout a de U on a

$$df(a)(e_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

donc l'application $a \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ est continue sur U comme composée des applications continues:

$$U \rightarrow \mathcal{L}(E, F) \rightarrow F$$

$$a \rightarrow df(a) \rightarrow df(a)(e_i)$$

Réciproquement supposons que les applications $a \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ soient continues dans U pour $1 \leq k \leq n$. D'après le théorème précédent f est différentiable dans U et pour tout a de U on a:

$$df(a) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k$$

donc df est continue en a . ■

3.2.2 Théorème de Schwarz

Définition 3.2.2 [2] Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$ admet une dérivée partielle par rapport à x_j dans U , on a la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ de U dans F . Si cette fonction admet des dérivées partielles par rapport à x_j ou à x_k ($k \neq j$) au point $a \in U$ on la note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(a)$ (où $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)$) et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a)$. On définit de même $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a)$. On a alors le:

Théorème 3.2.3 [2] Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans F admettent des dérivées partielles premières et secondes continues dans U . Alors pour $j \neq k$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \quad (3.2.6)$$

Démonstration. [2] Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$. En considérant la fonction de deux variables $(x_1, x_2) \rightarrow f(a_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, a_n)$. On peut se ramener au cas $n = 2$, et par translation au cas où $a = (0, 0)$. Considérons

$$\Delta_1(x, y) = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) - f(0, 0) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$$

On va montrer que cette quantité de $\left[xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right]$ est négligeable devant xy . Par symétrie on montre de même que:

$$\Delta_2(x, y) = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) - f(0, 0) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$$

est négligeable aussi devant xy . On aura donc $xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = o(xy)$ ce qui permettra de conclure que: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. Soit donc $\varepsilon \succ 0$. La continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en $(0, 0)$ donne l'existence de $\alpha \succ 0$ tel que, pour $|x| \leq \alpha$ et $|y| \leq \alpha$ on ait :

$$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right\| \leq \varepsilon \quad (3.2.7)$$

pour y fixé avec $|y| \leq \varepsilon$, considérons la fonction

$$\varphi : x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$$

dont la dérivée est $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. L'inégalité des accroissements finis appliqué à φ donne, compte tenu de (3.5.2) : $\|\varphi(x) - \varphi(0)\| \leq \varepsilon |x|$, soit pour $|x| \leq \alpha$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y) \right\| \leq \varepsilon |x| \quad (3.2.8)$$

De même pour x fixé avec $|x| \leq \varepsilon$, considérons la fonction

$$\psi : y \rightarrow f(x, y) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$$

dont la dérivée $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y)$. L'inégalité des accroissements finis appliqué à ψ donne, compte tenu de (3.5.3): $\|\psi(y) - \psi(0)\| \leq \varepsilon \|x\|$, soit pour $|y| \leq \alpha$:

$$\left\| f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) - f(0, 0) \right\| \leq \varepsilon |xy| \quad (3.2.9)$$

On montrerait de même que

$$\left\| f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) - f(0, 0) \right\| \leq \varepsilon |xy|$$

Grâce à (3.5.4) on en déduit :

$$\left\| xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right\| \leq \varepsilon |xy|$$

ce qui achève la démonstration. ■

3.2.3 Dérivée de la limite d'une suite de fonctions

Théorème 3.2.4 [2] Soit (f_n) une suite de fonctions différentiables de Ω , ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans E , espace de Banach. On suppose: (i) $f_n \rightarrow f$ simplement dans Ω ; (ii) $f_n \rightarrow g$ uniformément dans Ω . Alors : f est différentiable dans Ω ; pour tout x de Ω :

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n'(x) = g(x)$$

(f_n) converge vers f uniformément sur tout compact de Ω . De plus, si Ω est connexe on peut remplacer (i) par : $\exists x_0 \in \Omega$ tel que $(f_n'(x_0))$ converge.

Démonstration. [2] Supposons Ω connexe et l'existence de $x_0 \in \Omega$ tel que $(f_n'(x_0))$ converge. Montrons que la suite (f_n) converge simplement dans Ω : soit C l'ensemble des points de Ω où (f_n) converge. Il s'agit de prouver que $C = \Omega$ et pour cela on montre que C est à la fois ouvert et fermé dans Ω . D'abord $C \neq \emptyset$ car $x_0 \in C$. Montrons que C est ouvert : soit $a \in C$. Ω étant ouvert il existe une boule ouverte B_a incluse dans Ω . Pour p et q entiers naturels et x dans B_a le théorème des accroissements finis appliqué $f_p(x) - f_q(x)$ donne:

$$\begin{aligned} \|f_p(x) - f_p(a) - f_q(x) + f_q(a)\| &\leq \|x - a\| \sup_{y \in B_a} \|f_p'(y) - f_q'(y)\| \\ &\leq r \sup_{y \in B_a} \|f_p'(y) - f_q'(y)\| \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

où r est le rayon de B_a . Cela prouve, avec (ii), que la suite $(f_n(x) - f_n(a))$ est de Cauchy, donc $(f_n(x))$ est convergente. Par conséquent C est un ouvert de Ω . D'autre part, si $x \in \Omega - C$, $(f_n(x))$ diverge. Il existe une boule ouverte B_x de centre x dans laquelle (f_n) diverge (sinon, en effet, toute boule de centre x contient au moins un point où $(f_n(x))$ converge; soit $B(x, r)$ une boule de centre x de rayon r incluse dans Ω ; la boule $B(x, r/3)$ contient un point x' où $(f_n(x'))$ converge; mais le raisonnement précédent montrer alors que f_n converge dans toute boule de centre x' incluse dans Ω et donc en x car $x \in B(x', 2r/3) \subset B(x, r) \subset \Omega$. C est donc un fermé de Ω et donc $C = \Omega$. (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω :

(1) montre que $(f_n(x) - f_n(a))$ converge sur toute boule incluse dans Ω . Un compact de Ω étant inclus dans une réunion finie de boules ouvertes de Ω , (f_n) converge uniformément

sur tout compact de Ω . En particulier f est continue dans Ω . f est différentiable sur Ω et $f' = g$: soit $a \in \Omega$. Il s'agit de montrer que :

$$\|f(x) - f(a) - g(a)(x - a)\| = o(\|x - a\|) \quad (3.2.11)$$

Ecrivons :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(a) - g(a)(x - a)\| &\leq \|f(x) - f(a) - (f_n(x) - f_n(a))\| \\ &\quad + \|f_n(x) - f_n(a) - f'_n(a)(x - a)\| \\ &\quad + \|f'_n(a)(x - a) - g(a)(x - a)\| \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Soit B_a une boule ouverte de centre a incluse dans Ω . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que : $\forall q$ et $p \geq N$: $\sup_{y \in B_a} \|f'_p(y) - f'_q(y)\| \leq \varepsilon$ d'après (ii). D'après (3.6.1) il vient, pour $\forall q$ et $p \geq N$:

$$\|f_p(x) - f_p(a) - f_q(x) + f_q(a)\| \leq \varepsilon \|x - a\| \quad (3.2.13)$$

et en faisant tendre q vers $+\infty$:

$$\|f_p(x) - f_p(a) - f(x) + f(a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|$$

soit

$$\|f(x) - f(a) - (f_p(x) - f_p(a))\| \leq \varepsilon \|x - a\|$$

D'autre part, pour tous entiers q et $p \geq N$ et pour tout x de Ω :

$$\|(f'_p(a) - f'_q(a))(x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|$$

et en faisant tendre q vers $+\infty$:

$$\|(f'_p(a) - g(a))(x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\|$$

Le premier et le dernier terme du second membre de (3.6.2) sont donc majorés par ε . Fixons maintenant $n \geq N$ dans (3.6.2). f_n étant différentiable en a il existe $\delta > 0$ tel que pour $\|x - a\| < \delta$:

$$\|f_n(x) - f_n(a) - f'_n(a)(x - a)\| \leq \varepsilon \|x - a\| \quad (3.2.14)$$

Finalement, pour $\|x - a\| < \delta$: (3.6.2) $\leq 3\varepsilon$. Donc f est différentiable en a et

$$f'(a) = g(a)$$

Dans le cas général on raisonne dans chaque composante connexe de Ω . ■

Conclusion générale

Le théorème des accroissements finis est un théorème très important dans l'analyse, qu'il est la généralisation du théorème de Rolle.

Nous avons étudié dans ce mémoire la généralisation du théorème des accroissements finis tel de manière nous traitons dans le premier chapitre des généralités sur la continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'un seul variable réel et la différentiable des fonctions réelles de plusieurs variables, et dans le deuxième chapitre, nous étudions le théorème des accroissements finis et les applications. Enfin, on généralise cet théorème dans $\mathbb{R}^n$ pour obtenir Théorème de Moyenne et quelques applications.

Nous espérons convenable en communiqué quoique la teneur de l'idée pour rester la lecteur et la recherche comme un chemin efficace pour gagner beaucoup les connaissances, nous allons certitude exactement que nos amis les étudiants et les professeurs en avec nous qui disons le but de ce mémoire, n'est pas le sujet exactement, mais l'importance et la valeur partout, il est nommé que cela est amie la science et l'effort à lui, puis la sincérité dans là.

Maintenant, le succès de Dieu nous cueillions quelques fruits pour rester quelconque l'autre pour nos provisions de route et l'espérance dans demain meilleur et réussite.

Bibliographie

- [1] **Abdul Rahman Jadaan, Abou Bakr Khaled Saad Allah**; Calcule différentiell; Office des publications universitaires, Algérie, 1990.
- [2] **Christian Squarcini** ; Calcul différentiel , 2005.
- [3] **Dr HITTA Amara** ;Cours Algèbre et Analyse 1;Université 8 Mai 1945-Guelma, 2008/2009.
- [4] **ELKHATTABI NOHA** ; Cours Calcul différentiel ; Université Mohammed V Rabat-Agdal, 2010/2011.
- [5] **Erwan LE YAOUANC** ; Fonctions réelles d'une variable réel Dérivabilité, 2007.
- [6] **Jacque Douchet Bruno Zwahlen** ;Calcul différentiel et integral;Presses polytechniques et Universitaires romandes , 2006.
- [7] **Jean SAINT RAYMOND** ; Topologie et Calcul Différentiel Math 360 ; Université Pierre et Marie Curie Licence de Mathématiques ; Version mise à jour le 28 Novembre 2005.
- [8] **KADA ALLAB** ; Éléments D'analyse ; Office des Publications Universitaires, Réimpression 2002.
- [9] **Martial LENZEN** ; LECON N° 65: Ingalité des accroissements finis, 2010.

Résumé

Nous avons étudié dans cet mémoire la généralisation du théorème des accroissements finis de telle manière nous traitons dans le premier chapitre des généralités sur la continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une seule variable réelle et la différentiabilité des fonctions réelles de plusieurs variables, et dans la deuxième section, nous étudions le théorème des accroissements finis et leurs applications. Enfin, on généralise cet théorème dans $\mathbb{R}^n$ obtenir Théorème de Moyenne et quelques applications.

Mots-clés: la continuité – la dérivée – la différentiable – la dérivée partielle.

Abstract

We study in this work about the generalization theorem accretions extremity, we discussed in the first chapter to generalize about the continuity and derivational the real functions of one real variable and differentiability of real functions of several variables, and in the second section, we study theorem accretions extremity, and applications. Finally, we generalize this theorem in $\mathbb{R}^n$ to be converted into The Mean Value Theorem and some applications.

Key-words: the continuity – the derivation – the differentiation - the derivation partial.

المخلص

لقد درسنا في هذه المذكرة موضوع تعميم نظرية التزايديات المنتهية، حيث تطرقنا في الفصل الأول إلى عموميات حول الاستمرارية و الاشتقاقية لمتغير حقيقي واحد وقابلية المفاضلة لتوابع كثيرات المتغيرات، أما في القسم الثاني فدرسنا نظرية التزايديات المنتهية وتطبيقاتها، و أخيراً عممنا النظرية في $\mathbb{R}^n$ لتتوصل على نظرية المتوسط بالإضافة إلى بعض تطبيقاتها .

كلمات مفتاحية: الاستمرارية- الاشتقاق- التفاضل- الاشتقاق الجزئي.