



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquée

Mémoire sur:

**Analyse d'un problème de contact
avec usure et contrainte unilatérale**

Présenté par: **Derki Abdelhafidh**

Rahal Larbi

Soutenu le : 20 /06 / 2019

Devant le jury composé de :

Aissaoui Adel	MCA	Président	Univ. El Oued
Azeb Ahmed Abdelaziz	MCA	Encadreur	Univ. El Oued
Beggas Mohammed	MAA	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2018 – 2019

Dédicaces

Nous dédions ce travail à :

*Nos chers parents pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse,
leur soutien et leurs prières tout au long de nos études,*

*Nos frères et nos soeurs..... pour leurs encouragements permanents, et leur
soutien moral,*

*Nos amies et à tous nos familles.....pour leur soutien tout au long de nos
parcours universitaire.*

Remerciements

*Tout d'abord, nous tenons à remercier le bon **Dieu** le tous puissant, pour nous avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.*

*Comme nous tenons à remercier vivement, encadreur de mémoire **Dr. Azeb Ahmed AbdelAziz** pour sa patience, son encouragement et sa disponibilité ainsi le soutien très précieux tout au long de ce travail.*

*Nous remercions les membres du jury **Dr. Aissaoui Adel** et **Dr. Beggas Mohammed** pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail.*

Enfin que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail vous nos remerciements.

Table des matières

Introduction	v
Notations générales	viii
Préliminaires	1
1 Espaces fonctionnels	2
1.1 Rappels et compléments	2
1.2 Espaces de Sobolev	3
1.3 Espaces fonctionnels pour la mécanique	5
2 Eléments d'analyse non linéaire	8
2.1 Opérateurs monotones	8
2.2 Fonctions convexes	9
2.3 Compléments divers	9
3 Modélisation	11
3.1 Cadre physique et modèles mathématiques	11
3.1.1 Cadre physique	11
3.1.2 Notation	12
3.1.3 Modèles mathématiques.	13
3.2 Lois de comportement	14
3.2.1 Lois de comportement des matériaux élastiques	14
3.2.2 Lois de comportement des matériaux viscoélastiques	15
3.3 Conditions de contact	16
3.3.1 Contact bilatérale.	16
3.3.2 Contact unilatérale	16
3.3.3 Contact avec compliance normale	17

3.4 Lois de contact avec ou sans frottement	18
3.4.1 Contact sans frottement	18
3.4.2 Contact avec frottement	18
4 Problème de contact élastique avec usure et contrainte unilatérale	23
4.1 Formulation mécanique du problème	23
4.2 Formulation variationnelle	29
4.3 Existence et unicité de la solution	30
Bibliographie	37

Introduction

Processus de contact entre des corps déformables ou entre un corps déformable et une fondation abondent dans l'industrie et la vie quotidienne. Leur modélisation est plutôt complexe et conduit généralement à des problèmes de valeur limite fortement non linéaires. La référence de base dans le domaine comprend [4, 9, 10, 12, 13] et plus récemment [5, 8, 19, 21], l'analyse mathématique de divers modèles de contact est fournie, y compris les résultats d'existence et d'unicité de la solution. Les références [8]-[10] traitent également avec l'analyse numérique de divers modèles de contact, y compris l'étude de schémas totalement discrets, d'estimations d'erreur et de simulations numériques.

Les processus de contact s'accompagnent de nombreux phénomènes dont le principal est le frottement. Néanmoins, le contact est plus important que le simple frottement. En effet, lors d'un contact processus peuvent se produire des déformations élastiques ou plastiques des aspérités de surface. En outre, tout ou partie de peuvent se produire : écrasement d'huile ou d'autres liquides, rupture des pointes des aspérités et production de débris, mouvement des débris, formation ou soudure de jonctions, fluage, fracture, etc. De plus, un contact de frottement est associé à un dégagement de chaleur, à des dommages matériels, à l'usure et à l'adhérence des surfaces en contact.

Au fur et à mesure que le processus de contact évolue, les surfaces en contact évoluent également, via leur usure. Porter en glissant les systèmes sont souvent très lents mais persistants, continus et cumulatifs. Il peut y avoir une augmentation de la conformité des surfaces et de leur rugosité, ou une augmentation de la rugosité de la surface, la formation de buée sur la surface, la génération de rayures et de rainures, l'initiation de fissures et la génération de débris qui peut changer les caractéristiques du contact. Les aspérités sous fortes contraintes de contact peuvent se déformer plastiquement ou se briser. Dans le premier cas, la morphologie de la surface change et, par conséquent,

la contrainte de contact et la traction par frottement sont affectées. Ceux-ci peuvent être incorporés dans un coefficient de frottement dépendant de l'historique ou de la mémoire. Dans le second cas, lorsque les aspérités se brisent, les surfaces s'usent, des débris se forment et la structure de la surface se modifie à nouveau avec le temps. Ceci doit être pris en compte si l'on veut prédire de manière réaliste le comportement à long terme du système

L'usure implique l'évolution des surfaces en contact et ces changements affectent la processus de contact. Ainsi, en raison de son rôle crucial, il existe un grand nombre de problèmes techniques et mathématiques littérature consacrée à ce sujet. Nous reprenons ici pour citer les références ,[1]-[3],et [6]-[7] et [11],[14]-[19],et pour plus[22], [24]-[25] entre autres.

Un modèle mathématique décrivant l'équilibre d'un corps élastique en contact de frottement avec une fondation en mouvement a récemment été examiné dans [23]. Là, le contact était modélisé avec une condition de compliance normale avec des contraintes unilatérales, associée à une version glissante de la loi de Coulomb. de frottement sec. La faible solvabilité unique du modèle a été prouvée en utilisant des arguments de type elliptique. inégalités quasi-variées. Le recherche actuel représente la suite de [23]. Ici, nous complétons le modèle étudié dans [23] en prenant en compte l'usure de la fondation. Nous modélisons le processus d'usure avec une version de la loi d'Archard, comme il est de coutume dans la littérature mathématique. Cela conduit à un nouveau et intéressant modèle mathématique qui contrairement au modèle de [23], est évolutif. Fournir l'analyse variationnelle de ce nouveau modèle représente l'objectif principal de cet projet.

Ce mémoire est organisé en *quatre chapitre* que nous allons brièvement décrire afin de faciliter sa lecture.

Le premier chapitre présente les espaces fonctionnels utilisés dans l'étude de problème variationnel considéré. Nous y abordons de façon succincte quelques rappels sur les espaces C^m, L^p ainsi que sur les espaces de Sobolev et leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. Pour finir ce chapitre, nous présentons les espaces fonctionnels utilisés en Mécanique du Contact.

Le deuxieme chapitre porte sur des éléments d'analyse non linéaire. Dans un premier temps, nous commençons par quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Ensuite, nous rappelons quelques propositions sur les fonctions convexes

dont nous nous servons par la suite de ce manuscrit. Puis, nous présentons quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle dans les espaces de Hilbert ainsi que des résultats sur les inéquations variationnelles elliptiques.

Le troisième chapitre est basé essentiellement sur la modélisation. Nous commençons par préciser le cadre physique, puis nous présentons les lois de comportement de nature élastique, viscoélastique considérées dans le problème de contact. Enfin, nous écrivons les conditions de contact et les lois de frottement que nous employons dans les problèmes de contact élastique.

Dans le quatrième chapitre nous procédons à l'étude de problème de contact sous diverses conditions de contact et frottement entre un corps élastique, et un obstacle assimilé à une fondation. La nouveauté réside ici dans le fait que le processus considéré est quasi-statique et l'usure des surfaces de contact est prise en considération.

Cette chapitre divisé en 3 sections, la première section c'est la Formulation mécanique du problème, ou la formulation forte, après la deuxième section pour la formulation variationnelle

Enfin, dans la troisième section, nous établissons un résultat d'existence et d'unicité de la solution faible. La démonstration se déroule en plusieurs étapes et repose notamment sur des arguments de point fixe.

Notations générales

$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels,
$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$
c	Constante réelle strictement positive,
i.e	C'est à dire,
ssi	si et seulement si.
Ω	est un domaine de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$
$\overline{\Omega}$:	l'adhérence de Ω
Γ	la frontière de Ω , supposée souvent assez régulière,
$\Gamma_i (i = \overline{1, 3})$	une partition de la frontière Γ
$\text{mes } \Gamma_1$	la mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_1
ν	la normale extérieure unitaire à Γ
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v
σ_ν, σ_τ	les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel σ
$\dot{u}$	Les dérivées première de u par rapport au temps,
$\varepsilon(u)$	Tenseur linéarisé des déformations $\varepsilon(u)_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)$
$L^2(\Omega)$	Espace des fonctions u mesurables sur Ω telles que $\int_\Omega u ^2 dx < +\infty$
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega)}$	La norme de $L^2(\Omega)$ définie par $\ u\ _{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u ^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$
$L^\infty(\Omega)$	Espace des fonctions u mesurables sur Ω telles que, $\exists c > 0 : u < c$, p.p. , sur Ω
$H^1(\Omega)$	L'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Γ
$H =$	$[L^2(\Omega)]^d$
Q	l'espace $\{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}$
H_1	l'espace $\{\mathbf{u} = (u_i) \varepsilon(\mathbf{u}) \in Q\}$
V	l'espace $\{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1\}$

$\text{Div } \sigma$	Divergence de l'application stress, $\sigma : \text{Div } \sigma = \partial_1 \sigma + \dots + \partial_d \sigma$
$(.,.)_X$	le produit scalaire de X
$\ \cdot \ _X$	la norme de X
$ \cdot $	norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et S^d ,
$C(\mathbb{R}_+; X)$	L'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans X
$C^1(\mathbb{R}_+; X)$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $\mathbb{R}_+$ dans X
r_+	$\max\{0, r\}$
$0_N :$	le zéro de $\mathbb{R}^d$ ou S^d
Λ^p	puissance p de l'opérateur Λ .

Préliminaires

dans laquelle nous présentons les outils d'analyse fonctionnelle et des notations de la mécanique de contact, contient 04 chapitres. Dans le premier chapitre nous faisons quelques rappels d'analyse comme, par exemple, un survol des propriétés fondamentales des espaces de Banach, de Hilbert ainsi que les espaces de type Sobolev.

En outre, nous introduisons certains espaces fonctionnels pour la mécanique dont nous avons besoin dans l'étude des problèmes de contact que nous abordons dans le reste du manuscrit. Dans le deuxième chapitre, nous présentons un bref rappel portant sur les opérateurs monotones et les propriétés des fonctions convexes. Dans le troisième chapitre nous nous intéressons à la modélisation des problèmes de contact. Nous y présentons les lois de comportement, les conditions de contact et les lois de frottement que nous utilisons dans la suite de ce manuscrit. et en fin dans le quatrième chapitre Nous étudie un Problème de contact avec usure et contrainte unilatérale.

Chapitre 1

Espaces fonctionnels

Dans ce chapitre nous introduisons les espaces fonctionnels utilisés dans ce mémoire. Partout ci-dessous Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, de frontière Γ lipschitzienne, i.e. Γ peut être considérée comme étant localement le graphe d'une fonction continue de Lipschitz. Par ailleurs, nous supposons que Γ se décompose de la manière suivante : $\Gamma = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2} \cup \overline{\Gamma_3}$ telle sorte que $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ si $i \neq j$ avec $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ mesurables et $mes\Gamma_1 > 0$. En outre, nous notons par $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ l'adhérence de Ω dans $\mathbb{R}^d$.

1.1 Rappels et compléments

Nous faisons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles et vectorielles. Nous allons aborder les espaces de fonctions continues, continûment différentiables et les espaces L^p , qui nous permettront d'introduire les espaces spécifiques à la mécanique dans la suite.

Les espaces $C(\mathbb{R}_+; X)$ et $C^1(\mathbb{R}_+; X)$

Soit X un espace de Banach. On note par $C(\mathbb{R}_+; X)$ l'espace des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans X . L'espace $C(\mathbb{R}_+; X)$ peut être organisé canoniquement comme un espace de Fréchet. Pour une partie $K \subset X$ nous utilisons la notation $C(\mathbb{R}_+; K)$ afin de désigner l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans K . Nous notons par $C^1(\mathbb{R}_+; X)$ l'espace des fonctions continûment dérivables de $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans X .

Les espaces L^p

Soit $p \in [1, +\infty[$, nous désignons par $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables et p -intégrables au sens de la mesure de Lebesgue définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

C'est un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions mesurables et essentiellement bornées définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| < \infty$$

il est également de Banach.

Soit $p \in [1, \infty]$. Alors le conjugué de p , noté q , est défini par

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 & \text{si } p \neq 1 \\ q = \infty & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Soient $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$. Alors, l'inégalité suivante, dite de Hölder, à lieu :

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

L'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Hilbert s'il est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{L^p(\Omega)} = \int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \quad \forall u, v \in L^p(\Omega)$$

De plus, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, correspondant à l'inégalité de Hölder pour $p = 2$, est vérifiée, i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

1.2 Espaces de Sobolev

Dans cette section, nous faisons quelques rappels sur les espaces de Sobolev :

Espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, \infty]$. et $(\alpha = \alpha_i), i = 1 \dots d$, Nous définissons les espaces de Sobolev par l'égalité

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha(u) \in L^p(\Omega) \quad \text{avec} \quad 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

les espaces $W^{k,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach, muni de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = +\infty \end{cases}$$

Pour $p = 2$, $W^{k,2}(\Omega)$ sera noté par $H^k(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert dont le produit scalaire est donné par

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq k} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx \quad \forall u, v \in H^k(\Omega)$$

Pour $k = 1$ l'espace $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) | \partial_i u \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, d\}$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)}$$

et la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{1/2}$$

Par ailleurs, nous avons les résultats suivants :

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega)$$

L'application γ :

L'application γ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_\Gamma$ définie pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

On note que l'application de trace $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

L'application de trace n'est pas surjective. L'image de $H^1(\Omega)$ par cette application est notée $H^{1/2}(\Gamma)$; c'est un sous-espace de $L^2(\Gamma)$ qui est de Hilbert pour la structure transportée par γ . Son dual sera noté $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Remarque 1.2.1 *En particulier, nous rappelons que les produits scalaire sur les espaces de Hilbert $L^2(\Omega)^d$ et $L^2(\Gamma)^d$ sont donnés par*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Gamma)^d} = \int_{\Gamma} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} da$$

et les normes associées seront notées $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)^d}$ et $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)^d}$, respectivement

1.3 Espaces fonctionnels pour la mécanique

L'analyse variationnelle des problèmes de mécanique nécessite l'introduction d'espaces de fonctions spécifiques. Nous introduisons dans cette section les espaces fonctionnels en mécanique associés aux opérateurs divergence et déformation.

Pour le champ de déplacement et le champ des contraintes nous utilisons les espaces suivants :

$$H = \{u = (u_i) \mid u_i \in L^2(\Omega)\} = [L^2(\Omega)]^d$$

$$Q = \{\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij}) : \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\}$$

$$H_1 = \{\mathbf{u} = (u_i) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \in Q\}$$

$$Q_1 = \{\boldsymbol{\sigma} \in Q : \text{Div } \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)^d\}$$

Les espaces Q , H_1 et Q_1 sont des espaces de Hilbert munis des produits scalaires donnés respectivement par

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{H_1} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{L^2(\Omega)^d} + (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q$$

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{Q_1} = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_Q + (\text{Div } \boldsymbol{\sigma}, \text{Div } \boldsymbol{\tau})_{L^2(\Omega)^d}$$

où $\boldsymbol{\varepsilon} : H_1 \rightarrow Q$ et $\text{Div} : Q_1 \rightarrow H$ sont les opérateurs de déformation et de divergence définis par $\forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij,j})$$

Nous désignons par $\|\cdot\|_Q, \|\cdot\|_{H_1}, \|\cdot\|_{Q_1}$ les normes associées aux espaces Q, H_1, Q_1 respectivement.

Puisque la frontière Γ est Lipschitzienne, la normale unitaire extérieur à Γ , notée $\boldsymbol{\nu}$, est définie presque partout. Pour tout champ de vecteur $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace de v sur Γ et nous notons par v_ν et v_τ les composantes normale et tangentielle de v sur la frontière données par

$$v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad v_\tau = \mathbf{v} - v_\nu \boldsymbol{\nu} \tag{1.1}$$

Nous définissons de façon similaire les composantes normale et tangentielle d'un champ tensoriel régulier $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \rightarrow \mathbb{S}^d$ par les formules

$$\sigma_\nu = (\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} - \sigma_\nu \boldsymbol{\nu}$$

Par ailleurs, nous rappelons aussi la formule de Green ci-dessous :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx + \int_{\Omega} \operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{v} da \quad \forall \mathbf{v} \in H_1 \quad (1.2)$$

Nous introduisons à présent un sous-espace fermé de H_1 , dont la définition est donnée ci-après :

$$V = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_1 \} \quad (1.3)$$

Inégalité de Korn. Si $\operatorname{mes}(\Gamma_1) > 0$, il existe une constante $c_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_Q \geq c_K \|\mathbf{v}\|_{H_1} \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

Une démonstration de cette inégalité peut être trouvée dans [26] p.79 .

Sur l'espace V nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_V = (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}))_Q \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad (1.4)$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, i.e.

$$\|\mathbf{v}\|_V = \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_Q \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (1.5)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_V$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert. En outre, il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω, Γ_1 et Γ_3 tel que

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|\mathbf{v}\|_V \quad \mathbf{v} \in V \quad (1.6)$$

Cette inégalité découle du théorème de trace de Sobolev.

Nous rappelons maintenant une conséquence de l'inégalité de Korn.

Théorème 1.1 *Sous l'hypothèse $\operatorname{mes}(\Gamma_1) > 0$ notons par $\varepsilon(V)$ l'image de l'opérateur de déformation $\varepsilon : V \rightarrow Q$, i.e.*

$$\varepsilon(V) = \{ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}); \quad \mathbf{v} \in V \} \quad (1.7)$$

Alors $\varepsilon(V)$ est un sous-espace fermé de Q .

Preuve. Soit $\{\boldsymbol{\tau}_n\}$ est une suite d'éléments de $\varepsilon(V)$ qui converge dans Q à l'élément $\boldsymbol{\tau}$, i.e.

$$\boldsymbol{\tau}_n \rightarrow \boldsymbol{\tau} \quad \text{dans } Q \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (1.8)$$

Alors il existe une suite $\{\mathbf{v}_n\} \subset V$ tel que

$$\boldsymbol{\tau}_n = \varepsilon(\mathbf{v}_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad (1.9)$$

Il résulte de (1.8) que $\{\boldsymbol{\tau}_n\}$ est une suite de Cauchy dans Q . De ce fait, il vient de (1.5) que $\{\mathbf{v}_n\}$ est une suite de Cauchy dans V . Ensuite, puisque V est un espace complet, il existe un élément $\mathbf{v} \in V$ tel que

$$\mathbf{v}_n \rightarrow \mathbf{v} \quad \text{dans } V \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (1.10)$$

Nous utilisons maintenant la convergence (1.10) afin de voir que

$$\varepsilon(\mathbf{v}_n) \rightarrow \varepsilon(\mathbf{v}) \quad \text{dans } Q \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \quad (1.11)$$

Alors, nous combinons (1.8), (1.9) et (1.11) pour déduire que $\boldsymbol{\tau} = \varepsilon(\mathbf{v})$. Il suit de là que $\boldsymbol{\tau} \in \varepsilon(V)$, ce qui conclut la démonstration.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit H un espace de Hilbert munit d'un produit scalaire $(\cdot, \cdot)$, alors

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{\frac{1}{2}}(v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in H. \quad (1.12)$$

Chapitre 2

Eléments d'analyse non linéaire

2.1 Opérateurs monotones

Nous commençons par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour ce faire, nous considérons un espace de Hilbert X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme $\|\cdot\|_X$.

Définition 2.1.1 *soit $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire. L'opérateur A est dit*

1) *continu si*

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } X \implies Au_n \rightarrow Au \text{ dans } X \quad (2.1)$$

2) *monotone si*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X \quad (2.2)$$

3) *fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que*

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2 \quad \forall u, v \in X \quad (2.3)$$

4) *de Lipschitz s'il existe $M > 0$ tel que*

$$\|Au - Av\|_X \leq M\|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X \quad (2.4)$$

Théorème du point fixe

Soient X un espace de Banach et $A : X \rightarrow X$ un opérateur satisfait (2.4) avec $0 < M < 1$. L'opérateur A admet un point fixe unique $x \in X$, c'est-à-dire $Ax = x$ et nous appelons A un opérateur contractant.

inéquation variationnelle

Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et $K \subset X$ un ensemble convexe, fermé non vide. Alors pour tout $f \in X$ il existe un unique élément u tel que

$$u \in K, (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X \forall v \in K \quad (2.5)$$

L'inéquation précédente s'appelle inéquation variationnelle de première espèce sur X .

Si on prend $K = X$ dans le théorème précédent on obtient le résultat suivant

Corollaire 2.1.1 *Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors pour tout $f \in X$ il existe un unique élément $u \in X$ tel que $Au = f$*

Le corollaire précédent représente un cas particulier du Théorème de Minty-Browder

2.2 Fonctions convexes

Soit K une partie convexe de X et soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est convexe si

$$f((1-t)u + tv) \leq (1-t)f(u) + tf(v) \quad (2.6)$$

pour tout $u, v \in K$ et $t \in]0, 1[$

2.3 Compléments divers

Tout d'abord, nous introduisons un résultat qui sera utilisé dans le Chapitre 4 de ce manuscrit relatif à l'existence et l'unicité .

Pour l'introduire, nous considérons un espace de Hilbert réel X muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et la norme associée $\|\cdot\|_X$. Nous supposons les hypothèses suivantes :

$$K \text{ est une partie, convexe, fermé, non vide de } X. \quad (2.7)$$

$$A : X \rightarrow X \text{ est un opérateur continu, Lipschitzien et fortement monotone.} \quad (2.8)$$

$$f \in X, \quad (2.9)$$

Avec ces données, nous considérons le problème suivant :

Trouver un élément u tel que

$$u \in K, \quad (Au, v - u)_X \geq (f, v - u)_X, \quad \forall v \in K \quad (2.10)$$

Nous avons maintenant le résultat suivant.

Théorème 2.1 *Soit X un espace de Hilbert et supposons que les hypothèses (2.7)-(2.9) sont vérifiées. Alors :*

L'inégalité variationnelle (2.10) admet une solution unique.

L'énoncé et la démonstration de ce théorème figurent dans [21]

D'une autre part, le deuxième résultat que nous avons besoin est un résultat de point fixe. Pour l'introduire, nous considérons un espace de Banach X et nous utilisons les notations $C(\mathbb{R}_+; X)$ et $C^1(\mathbb{R}_+; X)$ définies dans le Chapitre 1. Nous avons le résultat de point fixe suivant.

Théorème 2.2 *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ espace réel de Banach et soit $\Lambda : C(\mathbb{R}_+; X) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; X)$ un opérateur non-linéaire avec la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $c_n > 0$ tel que*

$$\|\Lambda u(t) - \Lambda v(t)\|_X \leq c_n \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_X ds \quad (2.11)$$

pour tous $u, v \in C(\mathbb{R}_+; X)$ et pour tout $t \in [0, n]$. Alors l'opérateur Λ admet un unique point fixe $\eta^ \in C(\mathbb{R}_+; X)$.*

Théorème 2.2 représente une version simplifiée du Corollaire 2.5 dans [20] Nous soulignons dans (2.11) que la notation $\Lambda\eta(t)$ représente la valeur de la fonction $\Lambda\eta$ au point t , c'est-à-dire $\Lambda\eta(t) = (\Lambda\eta)(t)$

Théorème de représentation de Riesz

Soient H un espace de Hilbert (réel ou complexe) muni de son produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $f \in H'$ une forme linéaire continue sur H alors :

$$\exists! y \in H, \quad \forall x \in H, \quad f(x) = \langle y, x \rangle \quad (2.12)$$

Chapitre 3

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique des milieux continus où nous allons introduire le cadre physique plus utilisé dans ce mémoire, la loi de comportement et les conditions aux limites de contact. Par ailleurs, nous précisons dans ce chapitre les conditions aux limites de contact avec ou sans frottement .

3.1 Cadre physique et modèles mathématiques

Dans cette section, nous fixons le cadre physique, puis nous établissons le modèle mathématique qui servira de base pour l'étude du problème de contact avec usure et contrainte unilatérale dans un corps déformable et une fondation mobile.

3.1.1 Cadre physique

Le cadre physique est comme suit. Un corps élastique occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d (d = 2, 3)$ avec une frontière Lipshitzienne Γ , divisée en trois parties mesurables Γ_1, Γ_2 , et Γ_3 telle que $\text{meas}(\Gamma_1) > 0$ et ,en plus , Γ_3 est plan. Le corps est soumis à l'action des forces volumiques de densité f_0 . Il est fixé sur Γ_1 et les tractions de surfaces de densité f_2 données sur Γ_2 . Sur Γ_3 , le corps est en contact avec frottement avec un obstacle en mouvement, s'appelle fondation constituée d'un corps rigide ouvert d'une couche molle .

Le frottement implique l'usure de la fondation que nous modélisons avec une surface variable, la fonction d'usure. Son évolution est régie par une version simplifiée de la loi d'Archard que nous décrirons ci-dessous. De plus, nous supposons que la fondation est déformable .

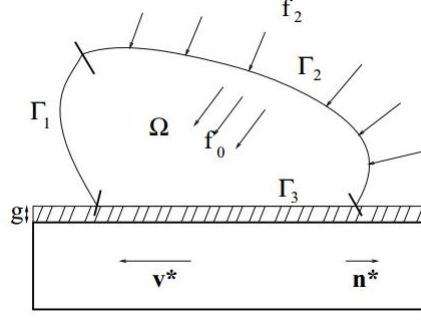


FIGURE 3.1 – cadre physique.

Nous modélisons le contact avec une condition de compliance normale avec une contrainte unilatérale, qui tenu en compte l'usure de la fondation. Nous associons cette condition à une version de la loi de frottement sec de Coulomb.

Nous adoptons le cadre de la théorie des petites déformations et supposons que le processus de contact est quasi statique et qu'il est étudié dans l'intervalle de temps $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Dans la figure ci-dessus $\mathbf{v}^*$ représente la vitesse du déplacement de la fondation, g représente l'épaisseur de la matière molle et $\mathbf{n}^*$ est un vecteur unitaire dans le plan de la fondation. Nous supposons que la fondation se déplace avec une vitesse constante $\mathbf{v}^* = v^* \mathbf{n}^*$, où $v^* < 0$ est donnée. En outre, la déformabilité de la fondation est modélisée par une possible pénétration.

3.1.2 Notation

Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ "espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) ; "." et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$. Ainsi

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v_i, \quad \|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\boldsymbol{\tau}\| = (\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau})^{\frac{1}{2}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d$$

Nous notons également par $\mathbf{u}$ le champ de déplacements et par $\boldsymbol{\sigma}$ le champ de contraintes. Dès lors, pour un vecteur $\mathbf{u}$ donné, $\mathbf{u}_\nu$ et $\mathbf{u}_\tau$ représentent respectivement les composantes normale et tangentielle de $\mathbf{u}$ sur Γ . et La dérivée temporelle de $\mathbf{u}$ sera notée $\dot{\mathbf{u}}$.

Nous passons maintenant à la description des modèles mathématiques associés au cadre physique ci-dessus.

3.1.3 Modèles mathématiques.

Afin de construire un modèle mathématique qui décrit l'évolution du corps déformable associé au cadre physique de la Figure , nous rappelons que le champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ de contraintes. $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times]0, T[\rightarrow \mathbb{S}^d$ représentent les inconnues du problème. Le mouvement du corps est décrit par l'équation de la dynamique

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[\quad (3.1)$$

où $\mathbf{f}_0 : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ représente la densité des forces volumiques sur Ω . Cette équation s'appelle équation du mouvement de Cauchy, où $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ représente la densité de masse et $\ddot{\mathbf{u}}$ représente l'accélération. Les processus d'évolution modélisés par l'équation (3.1) s'appellent **processus dynamiques**. Dans certaines situations, l'équation (3.1) peut se simplifier. Par exemple dans le cas où u varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho \ddot{\mathbf{u}}$ peut être négligé **processus quasistatiques**. Dans ce cas l'équation (3.1) devient

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} \quad \text{dans} \quad \Omega \times]0, T[\quad (3.2)$$

Les processus de déformation gouvernés par l'équation (3.2) sont de processus statiques (lorsque les variables ne dépendent pas du temps) ou de processus quasistatiques (dans le cas contraire). Dans ce premier cas l'équation (3.2) est valable dans Ω . Par la suite, on va appeler simplement (3.2) équation d'équilibre.

Afin de compléter le modèle mathématique qui décrit l'évolution d'un milieu continu donné par l'équation (3.1) ou (3.2), il faut encore préciser les conditions aux limites. Puisque le corps est encastré sur Γ_1 , le champ de déplacements u est nul, donc

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, T) \quad (3.3)$$

La condition aux limites en traction peut se mettre sous la forme

$$\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_2 \times (0, T) \quad (3.4)$$

L'équation (3.1) ou (3.2) équivaut à d relations scalaires. Par conséquent, mathématiquement cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre du corps car il y a plus d'inconnues que d'équations. L'équation (3.1) ou (3.2) exprime un processus universel valable pour tous les matériaux et de ce fait elle ne suffit pas à déterminer tous les différents comportements mécaniques des milieux continus. Par conséquent,

l'équation est donc insuffisante, à elle seule, pour décrire l'équilibre des corps matériels. Elle doit alors être complétée par d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de matériau et que l'on désigne sous le vocable général de loi de comportement. Cette loi de comportement représente une relation reliant le tenseur de contrainte σ , le tenseur de déformation ε et leur dérivées.

3.2 Lois de comportement

Dans cette section, nous considérons les lois de comportement pour les matériaux élastiques et viscoélastiques. Ces lois sont utilisées dans de nombreux ouvrages portant notamment sur l'étude mathématique des problèmes de contact.

3.2.1 Lois de comportement des matériaux élastiques

Dans ce paragraphe, nous considérons une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations infinitésimales ε sont reliés par la loi de comportement suivante

$$\sigma = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}) \quad (3.5)$$

Le tenseur des contraintes représente ici une fonction (linéaire ou non-linéaire) du tenseur des déformations linéarisé ε . Ces matériaux s'appellent matériaux élastiques et la loi de comportement (3.5) s'appelle loi de comportement élastique.

En général la fonction $\mathcal{F}$ dépend du point $\mathbf{x} \in \Omega$ donc nous avons

$$\sigma(\mathbf{x}) = \mathcal{F}(\mathbf{x}, \varepsilon(\mathbf{u}))$$

Si $\mathcal{F}$ ne dépend pas explicitement de $\mathbf{x}$, le milieu élastique est dit homogène. Autrement, il est dit non-homogène. Par la suite, pour simplifier l'écriture, nous utilisons $\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u})$ pour $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \varepsilon(\mathbf{u}))$

En élasticité linéaire $\mathcal{F}$ est une fonction linéaire de ε , c'est-à-dire (3.5) devient

$$\sigma = \mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}) \quad (3.6)$$

où $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl})$ est le tenseur d'élasticité d'ordre 4. Ses composantes $\mathcal{E}_{ijkl}$ s'appellent coefficients d'élasticité et sont indépendantes du tenseur des déformations. Du fait des différentes symétries matérielles inhérentes à l'homogénéité et l'isotropie du matériau, nous avons

$$\mathcal{E}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.7)$$

où les constantes λ et μ sont les coefficients de Lamé et δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Par ailleurs, en utilisant l'égalité $\sigma_{ij} = \mathcal{E}_{ijkh}\varepsilon_{kh}$ et (3.7) nous avons,

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (3.8)$$

En inversant la loi élastique linéaire (3.8), nous obtenons

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (3.9)$$

où E représente le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

3.2.2 Lois de comportement des matériaux viscoélastiques

L'investigation des propriétés mécaniques des matériaux tels que les pâtes ou les cires, a mis en évidence les insuffisances de la théorie de l'élasticité. En effet, certains phénomènes, tels que le fluage ou la relaxation ne peuvent pas être décrits par les lois de comportement élastique. C'est pourquoi les modèles viscoélastiques furent introduits.

Matériaux viscoélastique à mémoire courte.

Une loi de comportement viscoélastique générale à mémoire courte est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}) \quad (3.10)$$

où $\mathcal{A}$ est l'opérateur de viscosité et $\mathcal{B}$ est l'opérateur d'élasticité. Par ailleurs, nous notons que ces deux opérateurs dépendent aussi de la variable spatiale $\mathbf{x}$, mais pour simplicité, nous ne signalons pas explicitement cette dépendance ; par conséquent, tout ce qui suit est valable pour les matériaux non-homogènes. Nous utilisons respectivement les notations $\mathcal{A}\varepsilon(\mathbf{u})$ et $\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u})$ pour $\mathcal{A}(\mathbf{x}, \varepsilon(\mathbf{u}))$ et $\mathcal{B}(\mathbf{x}, \varepsilon(\mathbf{u}))$. En particulier, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des opérateurs linéaires, alors (3.10) nous conduit à la loi constitutive de Kelvin-Voigt

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{\mathbf{u}}) + b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u})$$

où σ_{ij} , a_{ijkl} , b_{ijkl} représentent respectivement les composantes du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, du tenseur de viscosité $\mathcal{A}$ et du tenseur d'élasticité $\mathcal{B}$.

Matériaux viscoélastique à mémoire longue.

Une loi de Comportement viscoélastique à mémoire longue est donnée par

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{R}(t-s)\varepsilon(\mathbf{u}(s))ds \quad (3.11)$$

où $\mathcal{F}$ est l'opérateur d'élasticité et $\mathcal{R}$ est l'opérateur de relaxation. Nous notons également que ces deux opérateurs dépendent aussi de la variable spatiale x . En outre, comme le montre (3.11), l'opérateur $\mathcal{R}$ est une fonction du temps. Dans le cas linéaire, les composantes du tenseur des contraintes $\sigma = (\sigma_{ij})$ qui satisfait (3.11) sont données par

$$\sigma_{ij}(t) = f_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(t)) + \int_0^t r_{ijkl}(t-s)\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(s))ds$$

où $\mathcal{F} = (f_{ijkl})$ est le tenseur d'élasticité et $\mathcal{R} = (r_{ijkl})$ est le tenseur de relaxation.

Ici, nous notons que les coefficients f_{ijkl} et r_{ijkl} dépendent de la variable spatiale x dans le corps.

3.3 Conditions de contact

3.3.1 Contact bilatérale.

Quand le contact entre le corps et la base est maintenue en tout temps on dit que c'est un contact bilatéral. C'est généralement le cas dans de nombreuses machines et entre les pièces et composants d'équipement ou de machines mobiles. Comme il n'y a pas d'écart entre le corps et la base, nous avons

$$u_\nu = 0 \quad (3.12)$$

La condition de contact bilatéral (3.12) a été utilisé dans un certain nombre de documents.

3.3.2 Contact unilatérale

Dans ce cas nous supposons que le corps est susceptible d'entrer en contact avec une base rigide. Par conséquent, le mouvement des particules matérielles de Γ_3 est restreint de la présence du solide rigide de telle sorte que, avant l'application des forces externes, la distance de chaque point $x \in \Gamma_3$ à la base rigide dans la direction de la normale $\nu(x)$ est connue et notée par $g(x)$.

Nous supposons aussi que le contact entre le corps et la base rigide se produit si et seulement si $u_\nu = g$. Puisque la base est considérée rigide, elle ne subira pas de déformations donc le corps Ω ne pourra pas le pénétrer ; cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité

$$u_\nu \leq g \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.13)$$

Dans les points de Γ_3 tels que $u_\nu < g$, il n'existe pas de contact entre Ω et la base rigide donc le vecteur des contraintes de Cauchy s'annule, i.e :

$$u_\nu < g \implies \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.14)$$

Pour les points de Γ_3 tels que $u_\nu = g$, le contact entre le corps Ω et la base rigide se produit ; nous supposons pour ces points que la base rigide exerce une pression inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers Ω , on a

$$u_\nu = g \implies \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.15)$$

On peut résumer les conditions (3.13)-(3.15) de la manière condensée suivante

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu (u_\nu - g) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.16)$$

Les conditions (3.16) s'appellent les conditions de contact unilatéral ou conditions de contact de type Signorini.

3.3.3 Contact avec compliance normale

C'est le cas où la fondation est supposée légèrement déformable et la contrainte normale σ_ν satisfait

$$-\sigma_\nu = p_\nu (u_\nu - g) \quad (3.17)$$

où u_ν le déplacement normal, g est l'interstice entre le corps et la fondation et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.

La relation (3.17) est dite condition de compliance normale et signifie que la fondation exerce une pression inconnue suivant la normale sur le corps en fonction de sa pénétration $u_\nu - g$.

Remarque 3.3.1 Dans le cas où l'interstice entre le corps et la fondation est nul on prend $g = 0$.

Pour la fonction de compliance normale p_ν on prend comme exemple la fonction suivante

$$p_\nu = c_\nu r_+ \quad (3.18)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est la fonction donnée par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha \end{cases} \quad (3.19)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. La condition de contact (3.19) dit que si la pénétration est trop profonde, c-à-d. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

3.4 Lois de contact avec ou sans frottement

Dans cette section nous allons introduire les lois de frottement qui seront utilisées par la suite dans ce manuscrit. Ces lois sont représentées par des relations entre la composante tangentielle du champ de contraintes σ_τ , la composante normale du champ de contraintes σ_ν et la vitesse tangentielle $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ ou le déplacement tangentiel $\mathbf{u}_\tau$.

3.4.1 Contact sans frottement

Dans un contact parfait, où sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact (perpendiculaire au plan tangent commun du contact). Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle. Si ce n'est pas le cas, on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une loi de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système

3.4.2 Contact avec frottement

Frottement classique de Coulomb.

Il s'agit de la loi la plus connue et la plus utilisée des lois de frottement. Cette loi a été formulée pour la première fois par Amontons en 1699. Nous présentons ici deux

versions de la loi de Coulomb qui correspondent au cas statique et d'évolution.

Le cas statique.

Dans ce cas, la loi de Coulomb se formule de la façon suivante :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq F_b \\ -\sigma_\tau = F_b \frac{\mathbf{u}_\tau}{\|\mathbf{u}_\tau\|} \quad \text{si} \quad \mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.20)$$

Dans (3.20) F_b représente le seuil de frottement (ce seuil n'est pas fixé et dépend du coefficient de frottement et de la solution du problème).

Le cas d'évolution.

Dans ce cas la loi de Coulomb se formule de la façon suivante :

$$\begin{cases} \|\sigma_\tau\| \leq F_b \\ -\sigma_\tau = F_b \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|} \quad \text{si} \quad \dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad (3.21)$$

Ici $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ représente la vitesse tangentielle.

Remarquons que dans (3.20) et (3.21) le contact peut avoir deux statuts différents.

Dans le cas où $\|\sigma_\tau\| < F_b$ on a un statut d'adhérence car, effectivement, dans ce cas on ne peut pas avoir $\mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0}$ ou $\mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0}$. En outre, dans le cas où $\|\sigma_\tau\| = F_b$ on a un statut de glissement. En effet, dans ce cas on peut avoir $\mathbf{u}_\tau \neq \mathbf{0}$ ou $\dot{\mathbf{u}}_\tau \neq \mathbf{0}$ ce qui montre que le glissement a lieu.

Contact avec une fondation mobile.

Dans le cas où la fondation se déplace avec une vitesse $\mathbf{v}^*$, la loi de frottement de Coulomb s'écrit de la manière suivante :

$$\|\sigma_\tau\| \leq F_b, \quad -\sigma_\tau = F_b \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*\|} \quad \text{si} \quad \dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^* \neq \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_3 \quad (3.22)$$

Ici F_b représente le seuil de frottement, $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ est la vitesse tangentielle et $\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*$ représente la vitesse tangentielle relative des surfaces en contact. Nous supposons dans ce manuscrit que la vitesse de la fondation $\mathbf{v}^*$ est très grande par rapport à la vitesse tangentielle $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ et, pour cette raison, nous négligeons $\dot{\mathbf{u}}_\tau$ par rapport à $\mathbf{v}^*$. Par conséquent, en utilisant les approximations $\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^* \approx -\mathbf{v}^* \neq \mathbf{0}$ et $\|\dot{\mathbf{u}}_\tau - \mathbf{v}^*\| \approx \|\mathbf{v}^*\|$, la loi de frottement (3.22) devient

$$\sigma_\tau = F_b \frac{\mathbf{v}^*}{\|\mathbf{v}^*\|} \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.23)$$

Soit maintenant $\mathbf{v}^* = v^* \mathbf{n}^*$ avec $v^* < 0$, et soit $\frac{\mathbf{v}^*}{\|\mathbf{v}^*\|} = -\mathbf{n}^*$. Alors, (3.23) devient

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau = F_b \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.24)$$

où $\mathbf{n}^*$ est un vecteur unitaire donné.

Par la suite nous supposons que le seuil de frottement F_b dépend du champ de déplacement u . Cette hypothèse est naturelle car, par exemple, dans le cas de la loi classique de frottement de Coulomb, nous avons

$$F_b = \mu |\sigma_\nu| \quad (3.25)$$

où μ représente le coefficient de frottement et σ_ν dépend de u via la loi de comportement. Pour être plus précis, dans le cas d'un comportement élastique $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u})$ on a

$$\sigma_\nu = \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u})) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}$$

et, par conséquent, (3.4.2) devient

$$F_b = \mu S(\mathbf{u}) \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.26)$$

où $S(\mathbf{u}) = |(\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u})) \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}|$. Nous considérons maintenant la situation lorsque le contact est modélisé avec la condition de compliance normale associée à la loi frottement classique de Coulomb.

Dans ce cas $-\sigma_\nu = p(u_\nu) \geq 0$ et donc, $F_b = \mu |\sigma_\nu| = \mu p(u_\nu)$.

Il en résulte que l'égalité (3.26) reste vraie, cette fois-ci avec le choix $S(\mathbf{u}) = p(u_\nu)$. Une remarque similaire peut être faite pour la loi de frottement de Coulomb, lorsque le seuil de frottement est donné par

$$F_b = \mu |R\sigma_\nu| \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.27)$$

où R est un opérateur de régularisation. Rappelons ici que l'opérateur R est utilisé dans la littérature pour des raisons mathématiques, car il augmente la régularité de la contrainte normale sur la frontière.

Nous combinons maintenant les égalités (3.24) et (3.26) afin d'obtenir la loi de frottement

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mu S(\mathbf{u}) \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (3.28)$$

Loi de frottement avec usure.

Dans la littérature, la prise en compte de ce phénomène se fait à l'aide d'une variable de surface, la fonction d'usure, ci-après notée w .

La condition de contact avec compliance normale, contrainte unilatérale et usure se formule de la façon suivante :

$$\left. \begin{aligned} u_\nu &\leq g, & \sigma_\nu + p(u_\nu - w) &\leq 0 \\ (u_\nu - g)(\sigma_\nu + p(u_\nu - w)) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \quad (3.29)$$

D'une autre part, en utilisant l'égalité (3.24) avec $F_b = \mu |\sigma_\nu|$, nous avons

$$-\sigma_\tau = \mu |\sigma_\nu| \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \quad (3.30)$$

En supposant maintenant que la contrainte normale satisfait une loi de compliance normale avec usure

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu - w) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \quad (3.31)$$

l'égalité (3.30) devient

$$-\sigma_\tau = \mu p(u_\nu - w) \mathbf{n}^* \quad \text{sur } \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \quad (3.32)$$

Nous étendons cette condition au cas où le contact est unilatéral, c'est-à-dire lorsque $u_\nu(t) = g$. Par conséquent, l'égalité (3.32) est valable aussi dans ce cas et nous utilisons sous cette forme dans le Chapitre 4 du manuscrit.

Loi d'Archard.

Pour modéliser l'usure des surfaces en contact, la fonction d'usure $w = w(x, t)$ est introduite, en mesurant la profondeur dans le sens normal du matériau retiré. Par conséquent, il mesure le changement dans la géométrie de la surface et représente la quantité cumulée de matériau enlevé, par unité de surface, au voisinage du point x jusqu'au temps t .

Puisque les quantités de matériau enlevé sont petites, approximativement, on peut les traiter comme une modification de l'espace vide.

On suppose généralement que le taux d'usure de la surface est proportionnel à la pression de contact et au taux de glissement relatif, c'est-à-dire au pouvoir de frottement dissipé. Cela conduit à la forme tarifaire de la loi d'Archard sur l'usure de la surface,

$$\dot{w} = k |\sigma_\nu| \|v\| \quad (3.33)$$

où k est le coefficient d'usure, une très petite constante positive dans la pratique. En outre, σ_v représente la contrainte normale sur la surface de contact et $\|v\|$ indique le taux de glissement relatif. La condition initiale est $w(\boldsymbol{x}, 0) = w_0(\boldsymbol{x})$ et $w_0(x) = 0$ lorsque la surface est nouvelle ou que la forme initiale est utilisée comme référence configuration.

L'usure implique l'évolution des surfaces en contact et ces changements affectent le processus de contact. Ainsi, en raison de son rôle crucial, il existe un grand nombre de problèmes techniques et mathématiques . littérature consacrée à ce sujet. Nous reprenons ici pour citer les références [2] et [21] entre autres.

Chapitre 4

Problème de contact élastique avec usure et contrainte unilatérale

Dans ce chapitre, on étudie un problème de contact avec usure et contrainte unilatérale ce qui décrit l'équilibre d'un corps élastique en contact de frottement avec une fondation en mouvement a été considéré et en prenant en compte l'usure de la fondation

Ce chapitre est divisé en 03 sections. Dans la première section, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique.,

Enfin, dans la troisième section, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible. Les techniques utilisées sont basées sur les résultats des équations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments du point fixe.

4.1 Formulation mécanique du problème

Dans cette section, nous introduisons le problème de contact, citons les hypothèses sur les données. La formulation classique du problème de contact considéré est la suivante.

Problème $\mathcal{P}$: Trouver un champ de contrainte, $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{S}^d$, un champ de déplacement $u : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$, et une fonction d'usure $w : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tels que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{F}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)) \quad \text{dans } \Omega \quad (4.1)$$

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}(t) + \mathbf{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (4.3)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2 \quad (4.4)$$

$$\left. \begin{aligned} u_\nu(t) \leq g, \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t) - w(t)) \leq 0, \\ (u_\nu(t) - g)(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t) - w(t))) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (4.5)$$

$$-\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mu p(u_\nu(t) - w(t)) \mathbf{n}^*(t) \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (4.6)$$

$$\dot{w}(t) = \alpha(t)p(u_\nu(t) - w(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (4.7)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et en plus,

$$w(t, 0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (4.8)$$

Ici et ci-dessous, pas de souci de simplicité, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance de diverses fonctions sur la variable spatiale x . De plus, les fonctions n^* et α sont données par

$$n^*(t) = -\frac{v^*(t)}{\|v^*(t)\|}, \quad \alpha(t) = k \|v^*(t)\| \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.9)$$

où k représente le coefficient d'usure.

Nous fournissons maintenant une brève explication des équations et des conditions du problème $\mathcal{P}$. Tout d'abord, l'équation (4.1) représente la loi de comportement élastique du matériau dans lequel $\mathcal{F}$ désigne un opérateur non linéaire donné. (4.2) est l'équation d'équilibre dans laquelle Div représente l'opérateur de divergence pour les fonctions à valeur tensorielle. (4.3) et (4.4) sont les conditions de déplacement et de traction respectivement. Ensuite, (4.5) est la condition de contact dans laquelle $g > 0$ et p est une fonction positive, croissante et continue de Lipschitz qui s'annule pour un argument négatif. Cette condition peut être déduite de la manière suivante. Tout d'abord, nous supposons que l'obstacle est constitué d'un matériau dur recouvert d'une couche de matériau souple d'épaisseur g . Ainsi, à chaque instant t , la contrainte normale a une décomposition additive de la forme

$$\sigma_\nu(t) = \sigma_\nu^R(t) + \sigma_\nu^S(t) \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (4.10)$$

dans lequel la fonction $\sigma_\nu^R(t)$ décrit la réaction à la pénétration du matériau rigide et $\sigma_\nu^S(t)$ décrit la réaction du matériau mou. Le matériau dur ne s'use pas et est parfaitement rigide. Par conséquent, la pénétration est limitée par la borne g et σ_ν^R satisfait à la condition de Signorini sous la forme d'une fonction de seuil de l'interstice, i.e

$$u_\nu(t) \leq g, \quad \sigma_\nu^R(t) \leq 0, \quad \sigma_\nu^R(t) (u_\nu(t) - g) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (4.11)$$

Le matériau mou est élastique et peut être s'user. Par conséquent, nous supposons que $\sigma_\nu^S(t)$ satisfait à une condition de contact de compliance normale avec usure, i.e

$$-\sigma_\nu^S(t) = p(u_\nu(t) - w(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (4.12)$$

Cette condition montre qu'à chaque instant t , la réaction de la couche mou dépend de la valeur actuelle de la pénétration, représentée par $u_\nu(t) - w(t)$. En effet, nous supposons qu'un processus d'usure de la couche mou de la fondation prend place et les débris sont immédiatement retirés du système. Ainsi, la pénétration devient $u_\nu(t) - w(t)$, au lieu de $u_\nu(t)$ comme dans le cas sans usure. La condition (4.12) décrit le fait que la géométrie de la surface de la fondation est affectée par l'usure, (voir [19] pour plus de détails). Nous combinons maintenant (4.10) et (4.12) pour voir que

$$\sigma_\nu^R(t) = \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t) - w(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.13)$$

Nous substituons ensuite l'égalité (4.13) dans (4.11) pour obtenir la condition de contact (4.5).

Nous décrivons maintenant la condition de contact de frottement (4.6).

Rappelons tout d'abord la loi classique de frottement sec du Coulomb,

$$\left. \begin{aligned} \|\sigma_\tau(t)\| &\leq \mu |\sigma_\nu(t)|, \\ -\sigma_\tau(t) &= \mu |\sigma_\nu(t)| \frac{\dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}^*(t)}{\|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}^*(t)\|} \quad \text{si } \dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}^*(t) \neq \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.14)$$

Ici, μ représente le coefficient de frottement, $\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)$ est la vitesse tangentielle et $\dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}^*(t)$ représente la vitesse tangentielle relative des surfaces en contact ou le taux de glissement relatif. Nous supposons qu'à chaque instant t la vitesse de la fondation $\mathbf{v}^*(t)$ est grande en comparaison de la vitesse tangentielle $\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)$ et, pour cette raison, nous approximations le taux de glissement relatif par $\mathbf{v}^*(t)$. Par conséquent, en utilisant les approximations $\dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}^*(t) \approx -\mathbf{v}^*(t) \neq \mathbf{0}$ $\|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}^*(t)\| \approx \|\mathbf{v}^*(t)\|$, la loi de frottement (4.14) devient

$$\sigma_\tau(t) = \mu |\sigma_\nu(t)| \frac{\mathbf{v}^*(t)}{\|\mathbf{v}^*(t)\|} \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

Donc, en utilisant la définition (4.9) du vecteur $\mathbf{n}^*(t)$, on obtient

$$-\sigma_\tau(t) = \mu |\sigma_\nu(t)| \mathbf{n}^*(t) \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (4.15)$$

Ensuite, nous notons que, dans la mesure où le contact du corps élastique est dans un état de comportement normale (i.e. $u_\nu(t) < g$), la condition (4.5) montre que

$$-\sigma_\nu(t) = p(u_\nu(t) - w(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (4.16)$$

et, par conséquent, en substituant cette égalité (4.15), nous en déduisons (4.6) vérifiée. Nous étendons cette condition au cas où le contact est unilatéral, c'est-à-dire quand $u_\nu(t) = g$. De cette manière, nous justifions pleinement la loi de frottement (4.6) qui régit l'évolution de la fonction d'usure..

Pour obtenir l'équation différentielle (4.7), nous partons de la loi d'Archard, (3.33), i.e.

$$\dot{w}(t) = k |\sigma_\nu(t)| \|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}^*(t)\| \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.17)$$

Ensuite, en utilisant à nouveau l'approximation $\|\dot{\mathbf{u}}_\tau(t) - \mathbf{v}^*(t)\| \approx \|\mathbf{v}^*(t)\|$, l'équation (4.17) conduit à

$$\dot{w}(t) = k |\sigma_\nu(t)| \|\mathbf{v}^*(t)\| \quad \text{sur } \Gamma_3$$

Nous utilisons maintenant la définition (4.9) de la fonction α pour obtenir

$$\dot{w}(t) = \alpha(t) |\sigma_\nu(t)| \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (4.18)$$

Ensuite, nous notons que, dans la mesure où le contact du corps élastique est dans le statut de compliance normale (4.16) est valide, substituant cette égalité en (4.18) on en déduit (4.7). Nous étendons cette égalité dans le cas du contact unilatéral, i.e dans le cas où $u_\nu(t) = g$. De cette manière, nous justifions pleinement l'équation différentielle (4.7) qui régit l'évolution de la fonction d'usure.

Enfin, (4.8) représente la condition initiale pour la fonction de l'usure, ce qui montre à l'instant initial, la fondation est nouvelle.

Nous notons en considérant une surface de contact arbitraire Γ_3 et une épaisseur $g = g(x)$ en fonction de la variable spatiale ne pose pas de difficultés mathématiques supplémentaires dans l'analyse du problème $\mathcal{P}$. toutefois, nous avons décidé de supposer que Γ_3 est plan et g est une constante puisque ces hypothèses se posent dans un grand nombre de processus industriels et conduisent à une géométrie simple qui aide le lecteur à mieux comprendre le phénomène d'usure.

Nous passons maintenant à la formulation varitionnelle du problème $\mathcal{P}$ et, à cette fin, nous citons les hypothèses sur les données. Tout d'abord, nous supposons que l'opérateur d'élasticité $\mathcal{F}$ et la fonction de compliance normale satisfont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{F} : \Omega \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Il existe } L_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tels que} \\ \|\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)\| \leq L_{\mathcal{F}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\| \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p } x \in \Omega. \\ \text{(c) Il existe } m_{\mathcal{F}} > 0 \text{ tels que} \\ (\mathcal{F}(x, \varepsilon_1) - \mathcal{F}(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{F}} \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p } x \in \Omega. \\ \text{(d) L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, \varepsilon) \text{ est mesurable sur } \Omega, \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d \\ \text{(e) L'application } x \mapsto \mathcal{F}(x, 0) \text{ appartient à } Q. \end{array} \right. \quad (4.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \text{(b) Il existe } L_p > 0 \text{ tels que} \\ |p(x, r_1) - p(x, r_2)| \leq L_p |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p } x \in \Gamma_3 \\ \text{(c) } (p(x, r_1) - p(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p } x \in \Gamma_3 \\ \text{(d) L'application } x \mapsto p(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}. \\ \text{(e) } p(x, r) = 0 \text{ pour tous } r \leq 0, \text{ p.p } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Les densités des forces du corps et des tractions de surface ont la régularité

$$f_0 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d), \quad f_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (4.21)$$

Enfin, le coefficient de frottement, le coefficient d'usure et la vitesse de fondation vérifient

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \text{p.p } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad (4.22)$$

$$k \in L^\infty(\Gamma_3), \quad k(\mathbf{x}) \geq 0 \text{ p.p } \mathbf{x} \in \Gamma_3, \quad (4.23)$$

$$v^* \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d) \text{ et il existe } v > 0 \text{ tel que } \|v^*(t)\| \geq v, \forall t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.24)$$

Notons que l'hypothèse (4.24) est compatible avec le cadre physique décrit ci-dessus car, à chaque instant, la vitesse de la fondation est supposée être suffisamment grande. En outre, (4.9), (4.23) et (4.24), implique que

$$\mathbf{n}^* \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d), \quad \alpha \in C(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Gamma_3)), \quad (4.25)$$

et d'ailleurs

$$\alpha(t) \geq 0 \quad \text{p.p sur } \Gamma_3, \quad \text{pour tous } t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.26)$$

Ensuite, nous introduisons l'ensemble des champs de déplacements admissibles définis par

$$U = \{\mathbf{v} \in V : v_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_3\}. \quad (4.27)$$

De plus, nous utilisons le théorème de représentation de Riesz pour définir la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$

$$(f(t), v)_V = (f_0(t), v)_{L^2(\Omega)^d} + (f_2(t), v)_{L^2(\Gamma_2)^d}, \quad (4.28)$$

pour tout $\mathbf{v} \in V$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Il résulte de l'hypothèse (4.21) que f a la régularité

$$f \in C(\mathbb{R}_+; V). \quad (4.29)$$

Nous supposons dans ce qui suit que $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, w)$ sont suffisantes pour les fonctions régulières qui satisfont (4.1)- (4.8). Soit $\mathbf{v} \in U$. et $t > 0$ est donné. Nous utilisons la formule de Green (1.2) et l'équation d'équilibre (4.2) pour obtenir

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(t)(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))dx - \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t)(\mathbf{v} - \mathbf{u}(t))dx = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t))da \quad \forall \mathbf{v} \in U$$

Ensuite, nous divisons l'intégrale de surface Γ_1, Γ_2 , et Γ_3 . Puisque $\mathbf{v} - \mathbf{u}(t) = 0$ sur Γ_1 , $\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \mathbf{f}_2(t)$ sur Γ_2 , en tenant en compte de (4.28) on déduit que

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)))_Q = (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}(t))_V + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t))da. \quad (4.30)$$

Notons que

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t)) = \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) + \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (4.31)$$

et, en utilisant la condition de contact (4.5) et la définition (4.27) de l'ensemble U , nous avons

$$\begin{aligned} \sigma_\nu(t)(v_\nu - u_\nu(t)) &= (\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t) - w(t)))(v_\nu - g) \\ &+ (\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t) - w(t))(g - u_\nu(t)) - p(u_\nu(t) - w(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \quad . \quad (4.32) \\ &\geq -p(u_\nu(t) - w(t))(v_\nu - u_\nu(t)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \end{aligned}$$

Par conséquent, en tenant compte des les l'égalité (4.31)et (4.32) et de la loi de frottement (4.6), nous obtenons que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}(t))da &\geq - \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t) - w(t))(v_\nu - u_\nu(t)) da \\ &- \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu(t) - w(t)) \mathbf{n}^*(t) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_\tau(t)) da. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Nous combinons maintenant (4.30) et (4.33) pour obtenir cette

$$\begin{aligned} & (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t) - w(t)) (v_\nu - u_\nu(t)) \, da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu(t) - w(t)) n^*(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t)) \, da \geq (f(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in U \end{aligned} \quad (4.34)$$

En outre la condition de déplacement (4.3), la première inégalité dans (4.5) et (4.27) impliquent que $u(t) \in U$.

Enfin, nous intégrons l'équation différentielle (4.7) avec la condition initiale (4.8) pour voir que

$$w(t) = \int_0^t \alpha(s) p(u_\nu(s) - w(s)) \, ds \quad (4.35)$$

Nous rassemblons maintenant la loi de comportement (4.1), les inégalité varitionelle (4.34) et l'équation intégrale (4.35) pour obtenir la formulation varitionelle suivante du problème de contact $\mathcal{P}$.

4.2 Formulation variationnelle

Problème $\mathcal{P}^V$. Trouver un champ de contrainte $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow Q$, un champ de déplacement $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ et une fonction d'usure $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que

$$\sigma(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u(t)) \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} & (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu(t) - w(t)) (v_\nu - u_\nu(t)) \, da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu(t) - w(t)) n^*(t) \cdot (v_\tau - u_\tau(t)) \, da \geq (f(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in U \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$w(t) = \int_0^t \alpha(s) p(u_\nu(s) - w(s)) \, ds \quad (4.38)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

La solvabilité unique du problème $\mathcal{P}^V$ sera démontrée dans la section suivante. Un triple (σ, u, w) qui vérifie (4.36)-(4.38) est appelé solution faible du problème $\mathcal{P}$. Nous terminons cette section avec quelques commentaires supplémentaires sur notre modèle de contact.

Supposons que (4.1)-(4.8) a une solution classique. Ensuite, puisque α et p sont des fonctions positives, il en résulte de (4.7) ce que $\dot{w}(t) \geq 0$ pour tout t , i.e l'usure est croissante, en chaque point de la surface de contact. De plus, si à un instant t_0 on a $w(t_0) = g$, alors, en utilisant l'équation (4.7) et les propriétés (4.20) de la fonction p , il

peut être facilement prouvé que $w(t_0) = g$ pour tout $t \geq t_0$. Ce comportement montre que l'usure de la fondation est limitée par la contrainte $w(t) \leq g$, ce qui correspond à l'hypothèse selon laquelle la couche rigide de la fondation ne s'use pas.

4.3 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous énonçons et prouvons le résultat d'existence et d'unicité suivant

Théorème 4.1 *Supposons que (4.19)-(4.24) sont satisfaits. Alors, il existe une constante μ_0 qui ne dépend que de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{F}$ et p telle que, si*

$$\|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < \mu_0 \quad (4.39)$$

alors le problème $\mathcal{P}^V$ a une solution unique. De plus, la solution a la régularité

$$\sigma \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{Q}), \quad \mathbf{u} \in C(\mathbb{R}_+; U), \quad w \in C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3)) \quad (4.40)$$

et en plus,

$$w(t) \geq 0 \quad p.p \text{ sur } \Gamma_3, \text{ pour tous } t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.41)$$

Nous concluons de ce qui précède que le problème $\mathcal{P}$ admet une solution unique faible, à condition que les hypothèses du théorème 4.1 sont satisfaites.

La démonstration du théorème 4.1 sera réalisée en plusieurs étapes. Nous supposons dans le reste de cette section que (4.19) - (4.24) vérifiées.

Dans la première étape, nous considérons une fonction d'usure donnée $w \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ et construisons le problème variationnel intermédiaire suivant.

Problème $\mathcal{P}_w^V$: Trouver un champ de déplacement $\mathbf{u}_w : \mathbb{R}_+ \rightarrow U$ tel que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_w(t)), \varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{u}_w(t)))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_{w\nu}(t) - w(t))(v_\nu - u_{w\nu}(t)) \, da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu p(u_{w\nu}(t) - w(t)) \mathbf{n}^*(t) \cdot (\mathbf{v}_\tau - \mathbf{u}_{w\tau}(t)) \, da \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_w(t))_V \end{aligned} \quad (4.42)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

Dans l'étude du problème $\mathcal{P}_w^V$, nous avons le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Lemme 4.1 *Il existe une constante μ_0 qui ne dépend que de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{F}$ et p telle que, si (4.39) est vérifiée, il existe une solution unique au problème $\mathcal{P}_w^V$ qui satisfait $\mathbf{u}_w \in C(\mathbb{R}_+; U)$.*

Preuve. Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et soit l'opérateur $A_{wt} : V \rightarrow V$ défini par

$$\begin{aligned} (A_{wt}\mathbf{u}, \mathbf{v})_V &= (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{v}))_Q + \int_{\Gamma_3} p(u_\nu - w(t)) v_\nu da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \mu p(u_\nu - w(t)) \mathbf{n}^*(t) \cdot \mathbf{v}_\tau da \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \end{aligned} \quad (4.43)$$

Pour tout $u_1, u_2 \in V$ on a

$$\begin{aligned} (A_{wt}\mathbf{u}_1 - A_{wt}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V &= (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2), \varepsilon(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2))_Q \\ &+ \int_{\Gamma_3} [p(u_{1\nu} - w(t)) - p(u_{2\nu} - w(t))] (u_{1\nu} - u_{2\nu}) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} [\mu p(u_{1\nu} - w(t)) - \mu p(u_{2\nu} - w(t))] \mathbf{n}^*(t) \cdot (\mathbf{u}_{1\tau} - \mathbf{u}_{2\tau}) da, \end{aligned} \quad (4.44)$$

après les hypothèses (4.19), (4.20), (1.1) et (4.9) on a

$$\begin{aligned} (A_{wt}\mathbf{u}_1 - A_{wt}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V &\leq L_{\mathcal{F}} \|\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \varepsilon(\mathbf{u}_2)\|_Q \cdot \|\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \varepsilon(\mathbf{u}_2)\|_Q \\ &+ L_p \int_{\Gamma_3} |u_1 - u_2| \cdot |u_1 - u_2| da \\ &+ \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_p \int_{\Gamma_3} |u_1 - u_2| \cdot |u_1 - u_2| da \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V, \end{aligned} \quad (4.45)$$

Nous utilisons (1.5), (1.6) et (4.22) on trouve que

$$\begin{aligned} (A_{wt}\mathbf{u}_1 - A_{wt}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V &\leq L_{\mathcal{F}} \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 + L_p c_0^2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \\ &+ \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} L_p c_0^2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V, \end{aligned} \quad (4.46)$$

Donc

$$\frac{(A_{wt}\mathbf{u}_1 - A_{wt}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V}{\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V} \leq (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)})) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V \quad (4.47)$$

nous obtenons

$$\|A_{wt}\mathbf{u}_1 - A_{wt}\mathbf{u}_2\|_V \leq (L_{\mathcal{F}} + c_0^2 L_p (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)})) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V. \quad (4.48)$$

Alors l'opérateur A_{wt} est continu de Lipschitz.

Ensuite, nous introduisons la constante μ_0 définie par

$$\mu_0 = \frac{m_{\mathcal{F}}}{c_0^2 L_p} \quad (4.49)$$

et visiblement ne dépend que de $\Omega, \Gamma_1, \Gamma_3, \mathcal{F}$ et p . Supposons que (4.39) est vérifiée.

Alors nous obtenons

$$c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} < m_{\mathcal{F}} \quad (4.50)$$

Nous utilisons à nouveau les hypothèses (4.19), (4.20) et les inégalités (1.6) et (4.50) pour en déduire que l'opérateur A_{wt} est fortement monotone, i.e il satisfait l'inégalité

$$(A_{wt}\mathbf{u}_1 - A_{wt}\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \geq (m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \quad (4.51)$$

pour tout $u_1, u_2 \in V$. En utilisant ces ingrédients, par le théorème 2.1, nous en déduisons qu'il existe un unique élément $u_{wt} \in U$ tel que

$$(A_{wt}\mathbf{u}_{wt}, \mathbf{v} - \mathbf{u}_{wt})_V \geq (\mathbf{f}(t), \mathbf{v} - \mathbf{u}_{wt})_V \quad \forall \mathbf{v} \in U \quad (4.52)$$

Notons $\mathbf{u}_{wt} = \mathbf{u}_w(t)$. Ensuite, il résulte de (4.52) et (4.43) que l'élément $u_w(t) \in U$ est l'élément unique qui résout l'inégalité différentielle (4.42).

Nous prouvons maintenant la continuité de la fonction $t \mapsto u_w(t) : \mathbb{R}_+ \rightarrow V$. soient, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ et notons $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_w(t_i)$, $w_i = w(t_i)$, $f_i = f(t_i)$, $\mathbf{n}_i^* = \mathbf{n}^*(t_i)$, pour $i = 1, 2$. Nous utilisons des arguments standard dans (4.42) pour constater que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_1) - \mathcal{F}\varepsilon(\mathbf{u}_2), \varepsilon(\mathbf{u}_1) - \varepsilon(\mathbf{u}_2))_Q \leq (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2, \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)_V \\ & + \int_{\Gamma_3} [p(u_{1\nu} - w_1) - p(u_{2\nu} - w_2)] [(u_{2\nu} - w_2) - (u_{1\nu} - w_1)] da \\ & + \int_{\Gamma_3} [p(u_{1\nu} - w_1) - p(u_{2\nu} - w_2)] (w_2 - w_1) da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu [p(u_{1\nu} - w_1) n_1^* - p(u_{2\nu} - w_2) n_1^*] \cdot (u_{2\tau} - u_{1\tau}) da \\ & + \int_{\Gamma_3} \mu [p(u_{2\nu} - w_2) n_1^* - p(u_{2\nu} - w_2) n_2^*] \cdot (u_{2\tau} - u_{1\tau}) da \end{aligned}$$

Par conséquent, sous les hypothèses (4.19), (4.20), (4.22) et (1.6) nous obtenons

$$\begin{aligned} & (m_{\mathcal{F}} - c_0^2 L_p \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \\ & \leq (c_0 L_p (1 + \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)}) \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|f_1 - f_2\|_V \\ & + c_0 p(g) \|\mu\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \|\mathbf{n}_1^* - \mathbf{n}_2^*\|) \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V + L_p \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant (4.50) et l'inégalité élémentaire

$$x, y, z \geq 0 \text{ and } x^2 \leq yx + z \implies x^2 \leq y^2 + 2z$$

pour obtenir que

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V^2 \\ & \leq a \left(\|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|f_1 - f_2\| + \|\mathbf{n}_1^* - \mathbf{n}_2^*\| \right)^2 + b \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)}^2, \end{aligned} \quad (4.53)$$

telle que $x = \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_V$ et $y = (\|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|f_1 - f_2\| + \|\mathbf{n}_1^* - \mathbf{n}_2^*\|)$
et $2z = \|w_1 - w_2\|_{L^2(\Gamma_3)}^2$

où a et b désignent deux constantes positives qui ne dépendent pas de t_1 et t_2 . Nous combinons l'inégalité avec (4.25), (4.29) et la régularité $w \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ montrent que $\mathbf{u}_w \in C(\mathbb{R}_+; V)$. Ainsi, nous concluons la partie existence dans le lemme 4.1.

La partie unicité découle de la solution unique de (4.52) pour chaque $t \in \mathbb{R}_+$.

Nous supposons ce qui suit (4.39), (4.49), vérifiées et nous considérons l'opérateur : $\Lambda : C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3)) \rightarrow C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ défini par

$$\Lambda w(t) = \int_0^t \alpha(s) p(u_{w\nu}(s) - w(s)) ds \quad (4.54)$$

pour tout $w \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$, où $\mathbf{u}_w$ est la solution unique du problème $\mathcal{P}_w^V$.

Nous avons le résultat de point fixe suivant, qui représente la deuxième étape de la démonstration du théorème 4.1.

Lemme 4.2 *L'opérateur Λ a un point fixe unique $w^* \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$.*

Preuve. Soient $w_1, w_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$. Pour simplifier, on désigne par $u_i, i = 1, 2$ les solutions des problèmes $P_{w_i}^V$, i.e. $u_i = u_{w_i}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, n]$. Tenant en compte de (4.54), (4.9) et (4.20) on en déduit

$$\begin{aligned} & \|\Lambda w_1(t) - \Lambda w_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \\ & \leq v_n^* \left(c_0 \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds + \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

où

$$v_n^* = L_p \|k\|_{L^\infty(\Gamma_3)} \max_{r \in [0, n]} \|v^*(r)\|$$

Par ailleurs, en utilisant des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (4.53), on obtient

$$\|\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)\|_V \leq \sqrt{a+b} \|w_1(t) - w_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \quad (4.56)$$

Nous combinons maintenant les inégalités (4.55) et (4.56) pour en déduire que

$$\|\Lambda w_1(t) - \Lambda w_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq v_n^* \left(c_0 \sqrt{a+b} + 1 \right) \int_0^t \|w_1(s) - w_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \quad (4.57)$$

Le lemme 4.2 est maintenant une conséquence directe du théorème 2.2

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour fournir la preuve de notre principale existence et de notre résultat unique.

Preuve de Theorme 4.1 :

Existence. Soit $w^* \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ le point unique de l'opérateur Λ et soit u^*, σ^* défini par

$$u^*(t) = u_{w^*}(t) \quad (4.58)$$

$$\sigma^*(t) = \mathcal{F}\varepsilon(u^*(t)) \quad (4.59)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On rappelle que $w^* = \Lambda w^*$ et en utilisant les égalité (4.54) et (4.58) on en déduit que

$$w^*(t) = \int_0^t \alpha(s) p(u_{w^*}^*(s) - w^*(s)) ds \quad (4.60)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Nous montrons que le triple (σ^*, u^*, w^*) vérifie (4.36) - (4.38). Tout d'abord, nous notons que (4.36) est une conséquence directe de (4.59). Ensuite, nous écrivons l'inégalité (4.42) pour $w = w^*$ et utilisons la notation (4.58), (4.59) pour voir que (4.37) vérifiée. Puis, (4.38) découle de (4.60). Nous concluons ci-dessus que le triple (σ^*, u^*, w^*) représente une solution du problème $\mathcal{P}^V$. La régularité exprimée en (4.40) est une conséquence directe du lemme 4.1 combiné avec l'hypothèse (4.19) et la formule (4.60). Enfin, la condition (4.41) découle de (4.60), puisque α et p sont des fonctions positives, car elle résulte de (4.26) et (4.20) (a)

Unicité. L'unicité de la solution découle de la résolution unique du problème $\mathcal{P}_w^V$, donnée dans le lemme 4.1, associée à l'unicité du point fixe de l'opérateur défini par (4.54).

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons traité un problème de contact entre un corps déformable et une fondation rigide avec diverses lois de contact (compliance normale, contrainte unilatérale..)et de frottement.

Nous avons considéré successivement le cas des matériaux élastiques, et nous avons pris en considération l'usure des surfaces en contact, ce qui a rendu le modèle mathématique plus intéressant car il conduit à un problème d'évolution non linéaire.

Pour commencer, nous avons proposé une formulation variationnelle de modèles de contact en terme de déplacement et parfois en terme de contrainte, Puis, nous avons obtenu des résultats d'existence et d'unicité de la solution faible ,nous avons utilisé des arguments de monotonie, de convexité et de régularisation et de point fixe.

Perspectives

Le problème $\mathcal{P}$ admet une solution unique faible, à condition que les hypothèses du théorème 4.1 . En outre, notons que la condition (4.39) représente une condition de petitesse sur le coefficient de frottement qui est souvent nécessaire dans l'étude de problem de contact statique ou quasi statique avec frottement sur des matériaux élastiques.

La question de savoir si cette condition décrit une caractéristique intrinsèque du processus de contact par frottement ou si elle représente une limite de nos outils mathématiques c'est une question ouverte qui, de toute évidence, doit être examinée à l'avenir.

Bibliographie

- [1] Andrews KT, Klarbring A, Shillor M, et al. *A dynamic contact problem with friction and wear*. Int. J. Eng. Sci. 1997;35 :1291–1309.
- [2] Bartosz K. *Hemivariational inequalities approach to the dynamic viscoelastic sliding contact problem with wear*. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 2006;65 :546–566.
- [3] Chudzikiewicz A, Myslinski A. *Thermoelastic wheel-rail contact problem with elastic graded-materials*. Wear. 2011;271 :417–425.
- [4] Duvaut G, Lions J-L. *Inequalities in mechanics and physics*. Berlin : Springer-Verlag; 1976.
- [5] Eck C, Jarusek J, Krbec M. *Unilateral contact problems : variational methods and existence theorems*. Vol. 270, Pure and applied mathematics. New York (NY) : Chapman/CRC Press; 2005.
- [6] Gu RJ, Kuttler KL, Shillor M. *Frictional wear of a thermoelastic beam*. J. Math. Anal. Appl. 2000;242 :212–236.
- [7] Gu RJ, Shillor M. *Thermal and wear analysis of an elastic beam in sliding contact*. Int. J. Solids Struct. 2001;38 :2323–2333.
- [8] Han W, Sofonea M. *Quasistatic contact problems in viscoelasticity and viscoplasticity*. Vol. 30, Studies in advanced mathematics. Providence (RI) : American Mathematical Society; Somerville (MA) : International Press; 2002.
- [9] Hlaváček I, Haslinger J, Necas J, et al. *Solution of variational inequalities in mechanics*. New York (NY) : SpringerVerlag; 1988.
- [10] Kikuchi N, Oden JT. *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*. Philadelphia (PA) : SIAM; 1988.
- [11] Kuttler KL, Shillor M. *Dynamic contact with normal compliance wear and discontinuous friction coefficient*. SIAM J. Math. Anal. 2002;34 :1–27.

-
- [12] Panagiotopoulos PD. *Hemivariational inequalities, applications in mechanics and engineering*. Berlin : SpringerVerlag ; 1993.
 - [13] Panagiotopoulos PD. *Inequality problems in mechanics and applications*. Boston : Birkhauser ; 1985.
 - [14] Rochdi M, Shillor M, Sofonea M. *Quasistatic viscoelastic contact with normal compliance and friction*. *J. Elast.*1998 ;51 :105–126.
 - [15] Rodriguez-Arós A, Viaño JM, Sofonea M. *Asymptotic analysis of a quasistatic frictional contact problem with wear*. *J. Math. Anal. Appl* 2013 ;401 :641–653.
 - [16] Rojek J, Telega JJ. *Numerical simulation of bone-implant systems using a more realistic model of the contact interfaces with adhesion*. *J. Theor. Appl. Mech.* 1999 ;37 :659–686.
 - [17] Rojek J, Telega JJ, Stupkiewicz S. *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics.II : Numerical implementation and application to implanted knee joints*. *J. Theor. Appl. Mech.* 2001 ;39 :679–706.
 - [18] Shillor M, Sofonea M. *A quasistatic viscoelastic contact problem with friction*. *Int. J. Eng. Sci.* 2000 ;38 :1517–1533.
 - [19] Shillor M, Sofonea M, Telega JJ. *Models and analysis of quasistatic contact*. Vol. 655, Lecture notes in physics.Berlin : Springer ; 2004.
 - [20] Sofonea M, Avramescu C , Matei A. *A fixed point result with applications in the study of viscoplastic frictionless contact problems*. *Commun. Tcommun. Pure Appl. Anal.* 2008 ; 7 : 645–658 .
 - [21] Sofonea M, Matei A. *Mathematical models in contact mechanics*. Vol. 398, London mathematical society lecture note series. Cambridge : Cambridge University Press ; 2012.
 - [22] Sofonea M, Pătrulescu F . *Penalization of history-dependent variational inequalities*. *Eur. J. Appl. Math.* 2014 ; 25 : 155–176 .
 - [23] Sofonea M, Souleiman Y. *Analysis of a sliding frictional contact problem with unilateral constraint*. *Math. Mech.Solids*. Forthcoming.
 - [24] Strömberg N, Johansson L, Klarbring A. *Derivation and analysis of a generalized standard model for contact,friction and wear*. *Int. J. Solids Structures*. 1996 ;33 :1817–1836.

- [25] Zmitrowicz A. *Variational descriptions of wearing out solids and wear particles in contact mechanics*. J. Theor. Appl. Mech. 2001 ;39 :791–808.
- [26] Z.Necas & I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies, An Introduction*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1981.

Résumé

L'objet de cette mémoire est l'étude de problème en mécanique de Contact pour un loi constitutive élastique . Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité d'une solution faible pour les problèmes étudiés. La thèse est structurée en deux parties. La première partie est consacrée à quelques outils mathématiques nécessaires ,les espaces fonctionnels utilisés dans l'étude de problème et des éléments d'analyse non linéaire et la modélisation(le cadre physique, loi frottement...). La deuxième partie est destinée à l'étude de problème de contact élastique avec usure et contrainte unilatérale.

Mots-Clés

Matériau élastique , frottement de Coulomb , compliance normale , contrainte unilatérale , usure , solution faible, point fixe, inéquation variationnelle d'évolution,

Abstract :

The purpose of this work is the study of problems in Contact Mechanics for elastic constitutive law. The results obtained concern the existence and uniqueness of weak solutions for the studied problems. The thesis is structured into two parts. The first part is dedicated to some necessary mathematical tools, the functional spaces used in the study of problem and elements of nonlinear analysis and modeling (The physical setting, law friction ...). The second part is intended for the study of elastic contact problem with wear and unilateral constraint.

Key-words :

Elastic material , Coulomb's friction , normal compliance, unilateral constraint , wear , weak solution , fixed point , evolutionary variational inequality

ملخص

هدف هذه الأطروحة هو دراسة مسألة في ميكانيك التماس لقانون المطاطي. النتائج المحصل عليها تخص وجود ووحدانية الحل الضعيف للمسألة المدروسة. الأطروحة مكونة من جزئين, الجزء الأول مخصص لبعض الأدوات الرياضية الضرورية, فضاءات فونكسيونال المستعملة في دراسة المسألة وكذا عناصر التحليل غير الخطية والتمذجة (الإطار الفيزيائي, قانون الاحتكاك...). الجزء الثاني موجه لدراسة مسألة التماس المطاطي مع التآكل وقيود أحادية الجانب .

كلمات مفتاحية

مادة مرنة , إحتكاك كولومب , استجابة عادية , قيود أحادية الجانب , تآكل , الحل الضعيف , النقطة الصامدة , متباعدة تطور تغيرية