



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



**Université d'El-Oued**  
**Faculté des sciences et technologie**  
**Département de Génie Mécanique**

## **MEMOIRE**

**Présenté en vue de l'obtention du diplôme licence en Mécanique  
Énergétique**

**Option: Génie Mécanique Énergétique**

# **Etude de l'instabilité de Taylor-Couette**

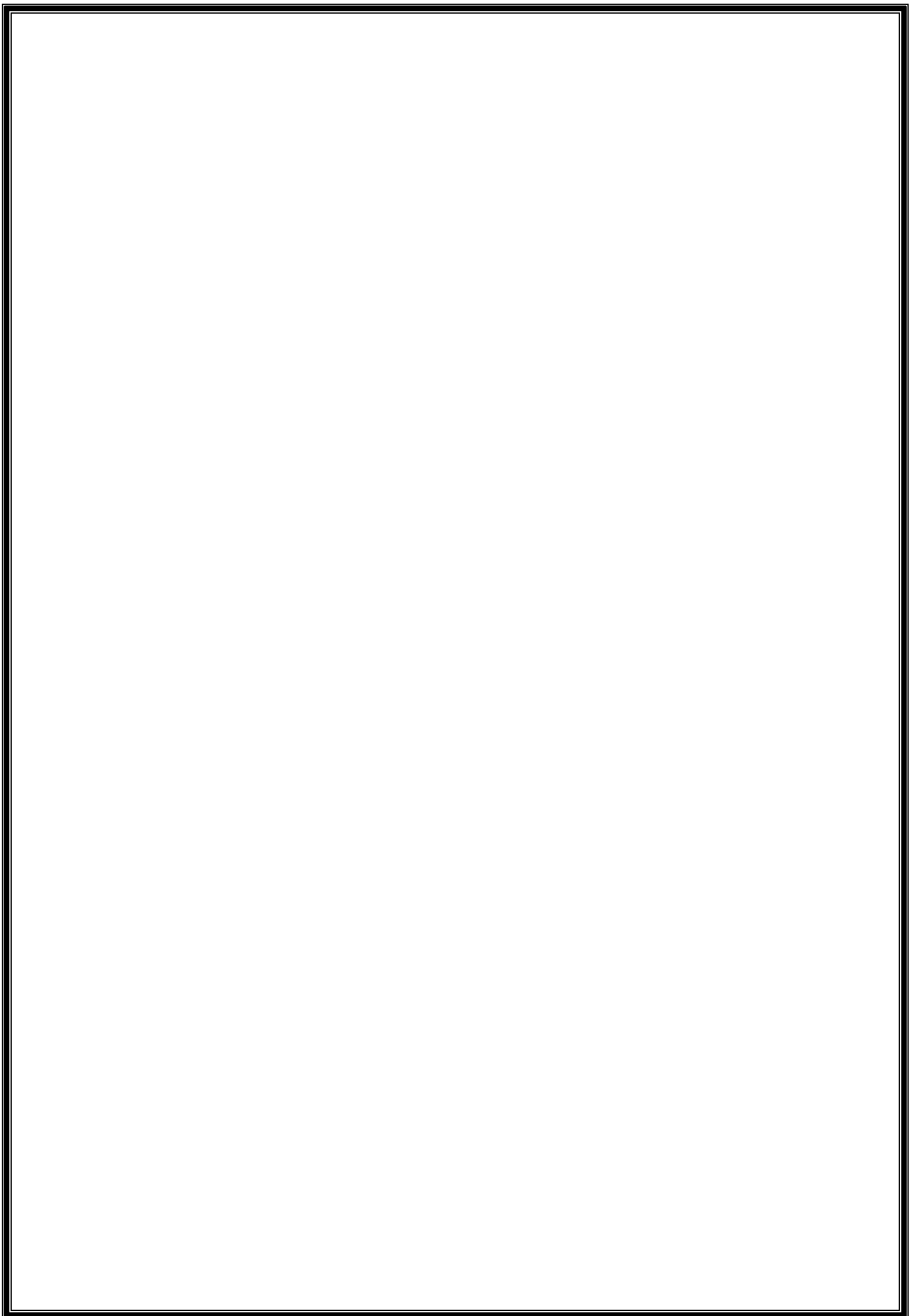
Réalisé par :

- DOU SEIF EDDINE
- BEN GHRIBI LAID
- AD DJAMEL

Encadré par :

BOUKHARI ALI

**Promotion: Juin 2014**



## Sommaire

<b>Introduction générale.....</b>	<b>1</b>
<b>I.L'instabilité de Taylor-Couette; description et modélisation .....</b>	<b>2</b>
I.1- Stabilité hydrodynamique .....	3
I.1.1- Introduction .....	3
I.1.2- Mécanisme physique de l'instabilité hydrodynamique .....	3
I.2- Ecoulement de Taylor-Couette .....	4
I.2.1- Principe de l'écoulement Taylor Couette .....	4
I.2.2- Historique de l'écoulement de Taylor-Couette .....	5
I.3- Instabilité de Taylor-Couette .....	6
I.3.1- Origine de l'instabilité .....	7
I.3.2- Différents comportements .....	7
I.3.2.1- écoulement Laminaire.....	7
I.3.2.2- Première Instabilité.....	7
I.3.2.3- Deuxième Instabilité.....	7
I.3.2.4- Instabilités suivantes et transition vers le chaos .....	7
I.4- Mécanismes de l'instabilité de l'écoulement de Taylor-Couette.....	8
I.5- Ecoulement de Taylor-Couette-Poiseuille .....	9
I.5.1- Principe de l'écoulement .....	9
I.5.2- Applications technologiques et industrielles des écoulements T.C.P.....	10
I.5.2.1- Séparation gaz-solide, gaz-liquide, liquide-liquide, solide-liquide.....	10
I.5.2.2- Récupération des métaux.....	10
I.5.2.3- Echangeur de chaleur à surface raclée .....	11
I.5.2.4- Problème de cavitation.....	11
I.5.2.5- Applications diverses.....	11

<b>PROBLEMATIQUE ET ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT.....</b>	<b>12</b>
II.1- Présentation du problème physique .....	12
II.2- Formulation mathématique du problème.....	13
II.2.1- Les équations de l'hydrodynamique.....	13
II.2.2- Equations simplifiées .....	13
II.2.3- Formulation adimensionnelle.....	14
II.2.4- Conditions initiales et conditions aux limites.....	15
II.2.4.1- Conditions initiales.....	15
II.2.4.2- Conditions aux limites.....	15
II.2.5- Outils d'analyse de l'écoulement.....	16
I.2.5.1- La fonction de courant.....	16
II.2.5.2- La vorticité.....	16
II.2.5.3- Le moment angulaire.....	17
II.3- Conclusion.....	17
<b>QUELQUES RESULTATS THEORIQUES ET LEURS DISCUSSIONS .....</b>	<b>18</b>
III.1- Régime laminaire pur.....	18
III.1.1- Evolution des profils de vitesse au cours du temps.....	18
III.1.2- Evolution axiale des Profils de vitesse.....	20
III.2- Régime laminaire instable (régime de transition) .....	24
III.3- Développement des tourbillons dans l'espace annulaire.....	28
IV.7.Courbes de stabilité .....	29
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>31</b>
Références bibliographiques .....	32
Résumé en français.....	33
Résumé en arabe.....	34

## table des figure

<b>Fig. I.1</b> : Ecoulement de Taylor Couette.....	5
<b>Fig. I.2</b> : Instabilité de Taylor-Couette.....	6
<b>Fig. I.3</b> : Vortex de Taylor(a régime T.V. F),( b régime W.V. F ) .....	9
<b>Fig. II.1</b> : Aperçu global du domaine d'étude.....	12
<b>Fig. III.1</b> : Evolution des profils de vitesse en régime laminaire, pour $Re_a = 10$ .....	19
<b>Fig. III.2</b> : Evolution des profils de vitesse en régime laminaire, pour $Re_a = 100$ .....	20
<b>Fig. III.3</b> : Evolution axiale du profil radial de la vitesse tangentielle en régime laminaire.....	23
<b>Fig. III.4</b> : Evolution axiale du profil radial de la radiale en régime laminaire .....	24
<b>Fig. III.5</b> : Influence de la vitesse de rotation sur le profil de la vitesse tangentielle en régime laminaire instable ( $N = 0.5, \Gamma = 14.3, \xi = 5.10$ ) .....	25
<b>Fig. III.6</b> : Effet de la rotation sur le profil de la vitesse axiale en régime laminaire instable, $Re_a = 10, N = 0.5, \Gamma = 14.3$ .....	26
<b>Fig. III.7</b> : Effet de la rotation sur le profil de la vitesse radiale en régime laminaire instable $Re_a = 10$ .....	28
<b>Fig. III.8</b> : Développement des tourbillons pour $Ta = 40$ .....	29
<b>Fig. III.9</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Reynolds axial et le rapport de rayons $N$ ( $\Gamma = 51$ ) .....	30

# NOMENCLATURE

$d$	Épaisseur de l'espace annulaire entre les deux cylindres ; $d = R_2 - R_1$
$d_h$	Diamètre hydraulique $d_h = 2 (R_1 - R_2)$
$Fr$	Nombre de Froude défini par $Fr = W_e^2 / g R_2$
$g$	Accélération de la pesanteur.
$l$	Longueur axiale adimensionnelle définie par $z / Re_a d$
$L$	Longueur de l'espace annulaire
$Le_t$	Longueur d'établissement de la couche limite tangentielle
$N$	Rapport des rayons $N = R_1 / R_2$
$P$	Pression
$Pa$	Pression atmosphérique
$r$	Coordonnée radiale
$R_1$	Rayon du cylindre intérieur
$R_2$	Rayon du cylindre extérieur et longueur de référence
$Re_a$	Nombre de Reynolds axial défini par $Re_a = W_e (R_2 - R_1) / \nu$
$t$	temps
$Ta$	Nombre de Taylor défini par $Ta = R_1 \Omega_1 d / \nu$
$u$	Composante radiale de la vitesse
$\vec{V}$	Vecteur Vitesse $\vec{V}(u, v, w)$
$v$	Composante tangentielle de la vitesse
$Vo$	Vitesse linéaire du cylindre intérieur $Vo = R_1 \Omega_1$
$w$	Composante axiale de la vitesse
$W_e$	Vitesse d'entrée du fluide dans l'espace annulaire
$z$	Coordonnée axiale

## Symboles Grecs

$\Lambda$	Moment angulaire
$\delta_{ij}$	Symbole de Kronecker
$\gamma$	Rapport des vitesses $R_1 \Omega_1 / w_m$
$\eta$	Rapport des vitesses angulaires $\eta = \Omega_1 / \Omega_2$
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide
$\nu$	Viscosité cinématique du fluide
$\Gamma$	Rapport de forme (Rapport d'aspect) ; $\Gamma = L / d$
$\Pi$	Perturbation de pression
$\theta$	Coordonnée azimutale
$\rho$	Masse volumique du fluide
$\Omega_1, \Omega_2$	Vitesses angulaires de rotation des cylindres intérieur et extérieur, respectivement

## Indices et Exposants

$cr$	Valeur critique
$e$	Entrée de l'espace annulaire
$+$	Grandeur adimensionnelle



## INTRODUCTION GENERALE

L'écoulement entre cylindres concentriques est un modèle dynamique d'une grande importance. Ce problème remonte à la publication historique de G.I Taylor (1923), [1]. En raison de la richesse des structures qui apparaissent dans le cas où le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur tourne à la vitesse angulaire  $\Omega_1$  (écoulement Taylor-Couette), de nombreux auteurs se sont intéressés à la description de bifurcations par des analyses de la stabilité de l'écoulement.

Lorsque un débit axial est imposé dans ce système classique, l'écoulement résultant est appelé "Taylor-Couette-Poiseuille" (T.C.P), ou bien "écoulement spiral de Poiseuille".

L'hydrodynamique de ce nouveau système a mis en évidence des propriétés différentes de celles de l'écoulement de Taylor- Couette dans certains cas.

D'après les premières études effectuées par certains chercheurs [2], ce type d'écoulements engendre quatre régimes caractéristiques:

- ❖ Le régime laminaire,
- ❖ Le régime laminaire avec tourbillons de Taylor,
- ❖ Le régime turbulent,
- ❖ Le régime turbulent avec tourbillons.

L'étude de la transition entre les quatre régimes a inspiré de nombreux travaux, en particulier la transition entre le régime laminaire et le régime laminaire avec tourbillons. Ce dernier régime, à débit axial nul, correspond à l'écoulement de Taylor- Couette, qui à partir d'une valeur critique de la vitesse de rotation du cylindre intérieur, possède des tourbillons de forme toroïdale. Cette structure tourbillonnaire est influencée par la rotation du cylindre intérieur et par les facteurs géométriques. A faibles valeurs du débit axial, les tourbillons se déplacent de manière ascendante dans l'espace annulaire sans se détruire. Un accroissement de ce débit entraîne, pour une vitesse de rotation donnée, une annihilation des tourbillons d'autant plus importante, que ce débit est plus grand.

L'étude de l'écoulement Taylor-Couette-Poiseuille trouve son importance dans multiples applications industrielles et technologiques. Du fait des propriétés intéressantes mises en jeu par la présence des tourbillons, ce type d'écoulement intervient dans de nombreuses machines tournantes, les développements des méthodes du génie électrochimique introduit à la récupération des métaux, la conception de type d'échangeur thermique et les séparateurs polyphasiques....

Il convient dans un premier temps de ne pas confondre les notions d'instabilité et de turbulence en mécanique des fluides : un écoulement turbulent possède des vitesses qui varient de façon totalement aléatoire dans le temps. Une instabilité apparaît lorsque des phénomènes antagonistes deviennent tellement forts qu'ils forcent la symétrie de l'écoulement à se briser, la vitesse de l'écoulement se complexifie mais garde certaines périodicités. On passe généralement d'un état laminaire à un état turbulent en y créant une succession d'instabilités qui rendent l'écoulement de plus en plus complexe, jusqu'à ce qu'il devienne chaotique.

Dans le cadre de la présente étude théorique, nous nous intéressons aux instabilités hydrodynamiques d'un écoulement ascendant d'un fluide réel, incompressible, dans un espace annulaire séparant deux cylindres coaxiaux; le cylindre intérieur tourne à la vitesse angulaire  $\Omega_1$ , et le cylindre extérieur est maintenu fixe. L'étude s'intéresse au comportement de l'écoulement du fluide lors de la transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire, et à l'influence de différents paramètres dynamiques et géométriques sur cette transition.

La présence d'un écoulement de Poiseuille, superposé à celui de Couette, provoque la réunion de deux mécanismes différents : l'instabilité du type centrifuge liée à la rotation du cylindre intérieur et l'instabilité du type Tollmien- Schlichting due à la composante axiale. De ce fait, l'étude de stabilité se trouve compliquée. Dans le cadre de cette étude, on s'intéresse seulement au premier type d'instabilité ( $Re_a \ll Re_{a\text{critique}}$ ). La plupart des études théoriques ou expérimentales sont effectuées dans le but de déterminer:

- ❖ la localisation de la frontière délimitant chaque régime.
- ❖ le lieu de naissance des tourbillons.
- ❖ l'allure et la taille des structures tourbillonnaires développées.

Cette modeste étude théorique comporte trois chapitres qui sont structurés comme suit:

Le premier chapitre est consacré à la présentation du problème considéré et son intérêt dans la pratique, avec la formulation mathématique du problème et les caractéristiques géométriques et physiques.

Quelques outils pour l'analyse de l'écoulement (fonction de courant, vorticité, moment angulaire...) font l'objet du deuxième chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à la présentation des quelques résultats concernant l'influence de différents paramètres dynamiques et géométriques sur l'apparition des instabilités, existant dans la littérature et leurs discussions.

Une conclusion générale est présentée munie de quelques perspectives proposées pour approfondir dans le sujet de ce travail.

# L'INSTABILITE DE TAYLOR-COUETTE :

## DESCRIPTION PHYSIQUE ET MODELISATION MATHEMATIQUE

### I.1- Stabilité hydrodynamique

#### I.1.1- Introduction

L'un des problèmes les plus intéressants de la physique consiste en l'examen de la stabilité du régime établi du phénomène étudié ; en tant que branche de la physique, la mécanique des fluides n'échappe pas à ce genre de problème.

En mécanique générale, la recherche des solutions stables commence par la détermination des valeurs des paramètres du système qui rendent minimum la fonction potentiel; dans le même ordre d'idée le rôle joué par les potentiels thermodynamiques des systèmes thermodynamiques est en tout point analogue.

En mécanique des fluides, le problème peut être présenté de la même manière, sachant qu'il n'existe que peu d'écoulements qui dérivent d'une fonction de forces ou du moins, la recherche de cette fonction de forces constitue-t-elle un problème qui n'est pas trop complexe. La méthode la plus générale consiste à écarter le système de sa position d'équilibre en le perturbant et étudier ensuite les effets de cette perturbation.

#### I.1.2- Mécanisme physique de l'instabilité hydrodynamique

Les forces de viscosité au sein d'un écoulement ont un effet stabilisant par le fait qu'elles tendent à amortir les perturbations. Comme de plus, on constate que l'instabilité apparaît dans l'écoulement pour des valeurs du nombre de Reynolds assez grandes, on est conduit à admettre que les caractéristiques essentielles du mécanisme de l'instabilité s'obtiendront par l'étude des fluides parfaits.

Cette idée fut en particulier celle retenue par Lord Rayleigh [1917]. Il montra que l'écoulement des fluides en « rotation » était stable ou instable suivant que le carré de la circulation augmentait ou non de façon monotone avec la distance à l'axe de rotation  $r$ . Ce résultat fut traduit par un critère dit discriminant de Rayleigh comme suit :  $\frac{d}{dr}(r^2\Omega)^2 > 0$ .

De même, procédant à une analyse analogue pour l'étude des écoulements parallèles, il montra que pour qu'un tel écoulement puisse être instable, il était nécessaire que le profil de vitesse

présentât un point d'inflexion. L'extension de ce résultat à d'autres types d'écoulements fut d'ailleurs assurée plus tard par Tollmien.

Plus tard, Von Karman [1934], a expliqué le seuil de l'instabilité par la création d'un modèle où il compense les forces centrifuges par celles de pression exercées sur une particule baignant au sein d'un écoulement donné.

Comme nous venons de le rappeler, les premières études ont donc été effectuées en négligeant les forces de viscosité que l'on considérait comme étant stabilisatrices. Mais il convient d'être prudent dans une telle interprétation, car l'application du critère de Rayleigh à l'écoulement plan de Poiseuille, permet d'assurer que ce type d'écoulement est toujours stable en l'absence de viscosité. Ceci est d'ailleurs confirmé par des calculs plus détaillés, il en résulterait que la prise en considération des forces de viscosité ne pourrait qu'accentuer la stabilité de cet écoulement.

La description du mécanisme physique de ce double effet est due à Prandtl [1922] lors des études de stabilité des couches limites. Il a montré que les forces de viscosité sont capables d'introduire une contrainte de Reynolds qu'on ne trouve pas dans l'étude du cas non visqueux ; si cette contrainte parvient à « transférer » de l'énergie de l'écoulement moyen vers la perturbation elle peut, en entretenant cette dernière, donner naissance à une instabilité.

Pour la compréhension des phénomènes d'instabilités et de transitions vers la turbulence, la mécanique des fluides s'intéresse plus particulièrement à des systèmes relativement simples, tel que, le système de Taylor-Couette, qui est l'objectif de notre étude, les sphères tournantes, les cônes tournants, disques tournants, etc.....

## **I.2- Ecoulement de Taylor-Couette**

### **I.2.1- Principe de l'écoulement Taylor Couette**

L'écoulement de Taylor-Couette est la version cylindrique de l'écoulement de Couette plan. C'est un écoulement cisailé, entre deux cylindres coaxiaux tournants, disposés verticalement, fig (I. 1). Les cylindres sont indépendants et peuvent tourner individuellement ou simultanément. D'ailleurs, les trois cas de rotation : contre-rotation ; cylindre interne fixe ; cylindre externe fixe correspondent à trois régimes d'écoulement différents, excepté à très grandes valeurs de vitesse de rotation. On présente dans cette étude théorique le dernier régime, dont l'étude remonte au début du siècle dernier, ce qui indique l'abondance de la littérature de ce régime d'écoulement, comme on le verra dans la section suivante.

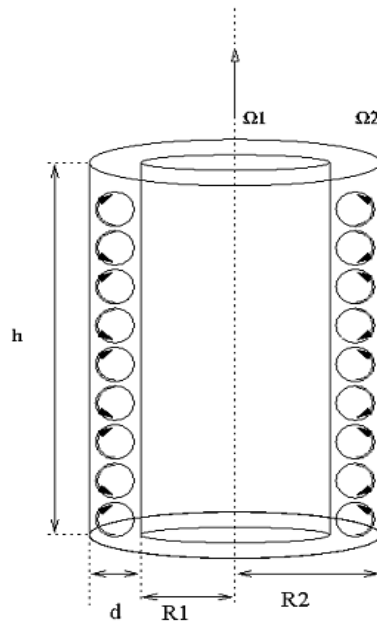


Fig. I.1 : Ecoulement de Taylor Couette

### I.2.2- Historique de l'écoulement de Taylor-Couette

Le Taylor-Couette tient une place importante dans l'histoire de la dynamique des fluides. C'est en effet le premier cas d'écoulement pour lequel l'analyse de stabilité fut confirmée par une expérience de laboratoire (Taylor 1923 [1]).

La première référence enregistrée concernant cet écoulement, remonte au 17<sup>ème</sup> siècle ; il s'agit de l'étude effectuée par Newton en 1786. Il fut le premier qui remarqua la symétrie de ce mouvement et supposa l'aspect concentrique des lignes de courant. Plutard, en 1848 Stokes a prévu la formation des tourbillons au sein d'un tel écoulement, lorsque le cylindre intérieur tourne avec une vitesse plus grande que celle du cylindre extérieur. Il a aussi proposé l'utilisation des grains pour visualiser l'écoulement et confirmer ses hypothèses.

En 1881, Margulse a prouvé que ce type d'écoulement pourrait être utilisé pour mesurer la viscosité des fluides, et autour de 1888 Mallock a construit un viscosimètre avec deux cylindres coaxiaux tournants. Il a remarqué que l'écoulement est toujours instable lorsque le cylindre intérieur tourne plus vite que le cylindre extérieur. Mais quand le cylindre intérieur est maintenu fixe, l'écoulement est stable jusqu'à une valeur critique de la vitesse de rotation du cylindre extérieur, au-delà de laquelle la turbulence se déclenche. Dans la même période, Couette a fabriqué un viscosimètre à cylindre intérieur fixe (connu aujourd'hui sous le nom de viscosimètre de Couette). Loin des parois horizontales l'écoulement est circulaire et obéit à la loi suivante :  $V_{\theta}(r) = Ar + B/r$ .

Par la mesure du couple résistant appliqué sur l'un des deux cylindres, on peut ainsi remonter à la viscosité du fluide. Couette a remarqué que, contrairement au cas de la rotation du cylindre

extérieur, le domaine de validité de sa solution est beaucoup moins étendu lorsque le cylindre intérieur tourne dans une gamme de vitesse croissante à partir du repos.

La première attention donnée à la possibilité de l'instabilité hydrodynamique dans l'écoulement de Couette a été faite par Lord Rayleigh [1917]. Il a justifié ultérieurement les remarques de Couette et Mallock pour le cas non visqueux. A partir de son critère déjà mentionné, il est arrivé à la condition de stabilité suivante :  $\Omega_2 R_2^2 > \Omega_1 R_1^2$  où  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont les vitesses angulaires de rotation,  $R_1$  et  $R_2$  sont les rayons des cylindres intérieur et extérieur respectivement.

G.I. Taylor 1923 [1] a repris cette étude pour un fluide visqueux ; il a représenté la première approche méthodologique, expérimentale et analytique de l'apparition et du des instabilités entre cylindres concentriques tournants. Expérimentalement il a mis en évidence l'existence d'un écoulement secondaire succédant à l'écoulement laminaire de base, pour une valeur particulière de la vitesse de rotation du cylindre tournant. Il a en outre résolu les équations de Navier- Stokes et de continuité pour l'écoulement de Couette ; la solution est donnée sous forme de série de Bessel-Fourier. Cette étude analytique est basée sur une théorie linéaire qui consiste à superposer à la solution du régime laminaire une perturbation infinitésimale et négliger les termes non linéaires.

La théorie linéaire développée par Taylor, a permis de prévoir l'apparition de l'instabilité et de déterminer le seuil de vitesse de rotation correspondant à cette transition. Pour des vitesses plus élevées, les termes quadratiques ne sont plus négligeables. Après ces travaux novateurs, le phénomène physique qui est désormais connu sous le nom d'**écoulement de Taylor-Couette**, n'a cessé d'attirer l'attention de nombreux chercheurs, qui par leurs travaux analytiques, numériques et expérimentaux, ont contribué à une meilleure compréhension de cette classe d'écoulements complexes.

### I.3- Instabilité de Taylor-Couette

L'**Instabilité de Taylor-Couette** est l'apparition de tourbillons dans l'écoulement d'un fluide entre deux cylindres concentriques ne tournant pas à la même vitesse angulaire (figure I.2). Un écoulement de Taylor-Couette s'obtient en insérant un fluide entre deux cylindres concentriques qui ne tournent pas à la même vitesse angulaire. La viscosité met le fluide en mouvement (comme pour l'écoulement de Couette simple) car au niveau de leurs surfaces de contact, le fluide visqueux et les cylindres doivent avoir la même vitesse.



Fig. I.2 : Instabilité de Taylor-Couette

### **I.3.1- Origine de l'instabilité**

Les phénomènes antagonistes qui créent les instabilités dans l'écoulement de Taylor-Couette sont :

- l'inertie du fluide en mouvement, notamment la force centrifuge créée par la rotation (qui a un effet déstabilisant, a tendance à faire croître les instabilités) ;
- la viscosité du fluide (qui a un effet stabilisant, a tendance à gommer les instabilités).

Ainsi, l'état de l'écoulement peut être prédit par l'étude du nombre de Reynolds.

### **I.3.2- Différents comportements**

#### **I.3.2.1- écoulement Laminaire**

À faible vitesse, l'écoulement entre les deux cylindres est laminaire, les lignes de courant sont des cercles concentriques. La viscosité arrive à contenir les effets déstabilisant de l'inertie.

On retrouve le principe de Curie : les effets ont au moins les symétries des causes. L'écoulement créé entre les deux cylindres est invariant par rotation autour de l'axe.

#### **I.3.2.2- Première Instabilité**

Si l'on augmente les différentes vitesses des cylindres, les effets de l'inertie deviennent trop forts et la viscosité ne peut plus empêcher la création d'une instabilité. On observe l'apparition de rouleaux dans l'écoulement qui sont des tourbillons toroïdaux.

On perd de la symétrie dans l'écoulement et le principe de Curie est violé. La vitesse radiale dans l'écoulement a un comportement périodique que l'on ne retrouve pas dans le système qui créé l'écoulement.

#### **I.3.2.3- Deuxième Instabilité**

Si l'on continue à augmenter les vitesses en jeu, une deuxième instabilité apparaît et baisse encore la symétrie de l'écoulement. Les rouleaux décrits plus hauts se mettent à osciller périodiquement.

#### **I.3.2.4- Instabilités suivantes et transition vers le chaos**

En continuant à augmenter les vitesses on fait perdre à l'écoulement toute symétrie et on obtient un écoulement turbulent. Jusqu'aux années 70, on a cru que la transition vers la turbulence passait par une séquence infinie d'instabilités successives. Harry Swinney et Jerry Gollub ont montré à travers des expériences réalisées à l'Université de Princetown en 1975 que la transition se fait en un nombre fini d'étapes.

## I.4- Mécanismes de l'instabilité de l'écoulement de Taylor-Couette

Le fluide étudié remplit l'espace annulaire séparant les deux cylindres, dont l'un est fixe et l'autre en rotation. En raison de la viscosité, le fluide tourne avec une vitesse plus élevée, près du cylindre intérieur que près du cylindre extérieur où elle tend à s'annuler. Mallock et Couette remarquèrent que l'écoulement devient instable, lorsque l'on augmente la vitesse de rotation du cylindre intérieur. En effet, la force centrifuge qui agit sur le fluide augmente avec la vitesse azimutale, et elle est maximale près du cylindre intérieur. Lorsque cette force surpasse les effets de viscosité, les couches de fluide, adjacentes à la paroi du cylindre intérieur, sont éjectées vers l'extérieur, alors que le fluide initialement près du cylindre extérieur a un mouvement rentrant pour remplir l'espace ainsi créé. Cette instabilité provoque la formation de vortex toroïdaux.

La compréhension des mécanismes de cette instabilité est due à Sir G.I. Taylor [1]. Ces vortex sont contrarotatifs dont chaque paire est logée dans une longueur d'onde de l'ondulation géométrique. Chacune des paires, formée par deux vortex contrarotatifs de même taille, est stable jusqu'à une vitesse de rotation critique du cylindre intérieur. Au delà de cette vitesse critique, le seuil des « **vortex de Taylor** » est déterminé par un paramètre sans dimension, le nombre de Taylor, qui dans le cas du cylindre extérieur au repos, et pour une faible distance annulaire  $d$  entre les cylindres, est défini par :  $Ta = 4\Omega_1^2 d^4 / \nu^2$ , où  $\Omega_1$  est la vitesse angulaire du cylindre intérieur et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. Le Taylor critique pour la première instabilité est égal à 1708 pour un espace annulaire à rapport des rayons  $N = 0.975$ . L'écoulement de Couette azimutal devient instable et il est remplacé par une structure cellulaire dans laquelle le fluide suit une trajectoire hélicoïdale autour du cylindre dans des couches de vortex (T.V.F : Taylor Vortex Flow), (fig. I.3.a). Des observations expérimentales faites par de nombreux chercheurs [6], ont montré que ces structures prennent naissance dans la région centrale de l'espace annulaire dès que le nombre de Taylor atteint la valeur critique. Si la vitesse de rotation du cylindre intérieur est maintenue constante, les vortex occupent progressivement au cours du temps toute la longueur de l'espace annulaire, à l'exclusion des extrémités. Ceci n'est en fait que le début d'un processus particulièrement complexe. En effet, en augmentant la vitesse de rotation du cylindre intérieur, une nouvelle bifurcation se produit vers les vortex modulés (W.V.F: Wavy Vortex Flow), (fig. I.3.b). Les bords des vortex de Taylor commencent à osciller et les oscillations se déplacent dans le sens azimutal. Il y a apparition d'ondes azimutales, dont le nombre d'onde azimutale est entier et la vitesse de propagation est périodique dans le temps. Plus loin, pour des vitesses de rotation plus élevées, des structures plus complexes apparaissent et l'écoulement devient turbulent avec coexistence des tourbillons de Taylor "ring Shape", puis pleinement turbulent

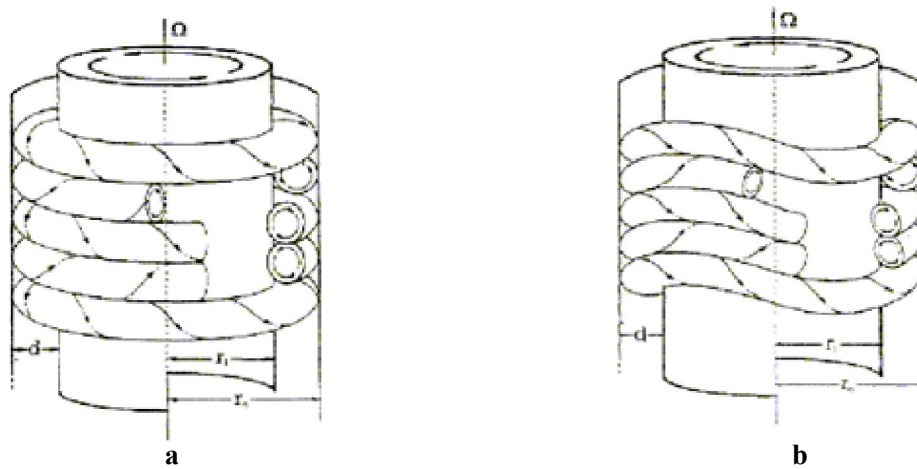


Fig. I.3: Vortex de Taylor a) régime T.V. F, b) régime W.V. F

## I.5- Écoulement de Taylor-Couette-Poiseuille

### I.5.1- Principe de l'écoulement

L'écoulement de Taylor-Couette-Poiseuille résulte de la circulation axiale forcée du fluide « Poiseuille flow » dans un espace annulaire, séparant deux cylindres coaxiaux dont le cylindre intérieur est en rotation « Couette flow ». Cet écoulement appelé aussi écoulement spirale de Poiseuille, possède deux états limites :

- l'écoulement de Poiseuille (vitesse de rotation nulle).
- l'écoulement de Couette (vitesse axiale nulle) déjà expliqué dans les sections précédentes.

Dans les deux cas le fluide est soumis à des contraintes différentes ; dans le premier cas, il s'écoule sous l'action d'une différence de pression motrice appliquée entre les extrémités de jeu, alors qu'il subit dans le deuxième cas, un cisaillement entre les deux surfaces solides en mouvement.

L'association de ces deux écoulements de base engendre généralement l'existence de quatre régimes hydrodynamiques classiques [6] :

- le régime laminaire pur
- le régime laminaire tourbillonnaire
- le régime turbulent
- le régime turbulent avec tourbillons de Taylor.

Les mécaniciens des fluides s'intéressent à préciser les transitions entre les divers régimes dénombrés ci-dessus. La complexité de l'écoulement et la multiplicité des facteurs hydrodynamiques et géométriques le régissant, expliquent la difficulté à localiser les frontières délimitant chaque régime.

### **I.5.2- Applications technologiques et industrielles des écoulements T.C.P**

L'écoulement de Taylor-Couette-Poiseuille trouve son importance dans multiples applications industrielles et technologiques. Dans ce qui suit, on citera quelques exemples.

#### **I.5.2.1- Séparation gaz-solide, gaz-liquide, liquide-liquide, solide-liquide**

Les réalisations effectuées dans différentes branches industrielles (industrie de bois, du pétrole, minière, agroalimentaire, ....), pour séparer des matériaux de densités différentes initialement présentes dans un même courant, sont basées sur des dimensionnements empiriques et cela depuis plusieurs décennies.

Ces dernières années plusieurs recherches ont été envisagées pour ce type de séparateurs. Les cyclones existants sont dotées d'une entrée tangentielle du mélange à séparer ; sous l'effet de la force centrifuge les particules solides ou les gouttes de liquides ayant une grande densité sont projetées avec force contre les parois et tombent sous l'effet de la gravité à la base du cyclone.

La technologie pour dépoussiérer de l'air très chaud a été inspirée par ce type de cyclone possédant une entrée principale munie d'ailettes de guidage et une seconde conduite tangentielle d'admission d'un courant d'air auxiliaire.

Dans l'industrie pétrolière, des hydrocyclones sont aussi utilisés et leur but est la récupération de la totalité de l'huile présente dans les solutions aqueuses.

Le système de Taylor-Couette en fonctionnement vertical est également utilisé pour un procédé de séparation liquide-solide. Le principe de cette technique est d'utiliser les tourbillons de Taylor pour emprisonner la matière solide. Dans ces systèmes, le liquide parcourt l'espace annulaire de bas en haut ; la matière solide étant à peine plus dense que le liquide. Il faut que la structure de l'écoulement ait une vitesse moyenne d'avancement du liquide plus élevée que celle du solide. L'application serait la récolte de biomasse en vue de l'extraction d'un antigène intracellulaire.

#### **I.5.2.2- Récupération des métaux**

En génie électrochimique, il existe un type de réacteur électrochimique dit de Taylor-Couette-Poiseuille [2]. La présence des tourbillons de Taylor favorisent certaines réactions électrochimiques. Ces structures permettent aux éléments fluides d'être présents alternativement sur le cylindre intérieur tournant et sur le cylindre extérieur fixe.

Pour fabriquer des films et du papier photographiques, des millions de tonnes d'argent sont utilisées. Au développement, presque la totalité de cet argent est perdue dans les bains de fixation [3]. Par conséquent, les techniques développées pour la récupération des métaux liés au génie électrochimique, ont connu un grand essor à nos jours, du fait de la limitation de la pollution liée aux rejets industriels d'une part et d'autre part par le gain financier compte tenu du prix de revient de l'argent pur. Il est à noter aussi que ces techniques sont utilisées pour la récupération de l'or en solution très diluée.

### **I.5.2.3- Echangeur de chaleur à surface raclée**

Une autre application des écoulements tourbillonnaires de type T.C.P, concerne l'analyse de transfert thermique dans les échangeurs de chaleur à surface raclée (ESR) [3]. Ces échangeurs sont très utilisés dans l'industrie agroalimentaires (margarine, crème dessert, fromage frais, etc...). Ces produits ne peuvent subir un traitement thermique dans des échangeurs classiques, tels que les échangeurs tubulaires, où le transfert de chaleur se ferai essentiellement par conduction et, si on veut respecter un programme thermique donné, les produits doivent être porté à des températures élevées, ce qui conduit à une détérioration du produit et à un encrassement de l'échangeur. Le transfert thermique dans un tel échangeur est conditionné par la structure de l'écoulement; le coefficient de transfert thermique croit en présence des tourbillons de Taylor, et davantage en présence de la structure hélicoïdale.

### **I.5.2.4- Problème de cavitation**

La présence des tourbillons dans certains cas a des effets désagréables. Le problème de cavitation dans certaines turbines hydrauliques est dû essentiellement à l'existence de tourbillons entre le rotor et le stator provoquant des instabilités hydrodynamiques [4]. Plus les tourbillons sont intenses, plus le champ de pression est perturbé, et éventuellement le déclenchement de la cavitation.

### **I.5.2.5- Applications diverses**

D'autre applications sont utilisées dans des domaines spécifiques tels que: Injection du fuel dans les cylindres des engins à essence. Refroidissement des rotors de moteurs électriques par l'admission de l'air froid. L'amélioration du mélange dans le domaine de combustion. Purification des eaux usées industrielles par la méthode « Reverse Osmosis».

# PROBLEMATIQUE ET ANALYSE DE L'ÉCOULEMENT

## II.1- Présentation du problème physique

On s'intéresse à l'étude d'un écoulement instationnaire ascendant d'un fluide réel, dans un espace annulaire, séparant deux cylindres coaxiaux ; le cylindre intérieur de rayon  $R_1$  tourne avec une vitesse uniforme,  $V_0 = R_1 \Omega_1$ , et le cylindre extérieur de rayon  $R_2$  est maintenu fixe. Le fluide de propriétés physiques constantes se trouve initialement au repos dans l'espace annulaire. A l'instant initial, un fluide de même nature est injecté suivant l'axe du cylindre au cours du temps avec une vitesse d'injection  $W_e$ , fig. (II-1). L'écoulement est supposé incompressible et isotherme.

Ce problème d'écoulement est caractérisé par deux paramètres géométriques : le rapport des rayons  $N = R_1/R_2$  et le rapport d'aspect  $\Gamma = L/d$  ( $d = R_2 - R_1$  et  $L =$  longueur de l'espace annulaire), et deux paramètres hydrodynamiques qui sont le nombre de Taylor ( $Ta$ ) et le nombre de Reynolds ( $Re_a$ ). Comme on a vu dans le chapitre précédent, ces deux paramètres adimensionnels ont plusieurs formes, dans cette étude, nous avons opté pour les expressions les plus simples qui sont les suivantes:

$$Re_a = \frac{d w_e}{\nu}$$

$$Ta = \frac{(\Omega R_1).d}{\nu}$$

Le nombre de Taylor caractérise le rapport existant entre les forces d'inertie dues à l'écoulement rotationnel du fluide (provoqué par la rotation du cylindre intérieur) et celles de viscosité. Le nombre de Reynolds axial caractérise, quant à lui, le rapport existant entre les forces d'inertie dues à l'écoulement axial et celles de viscosité du fluide.

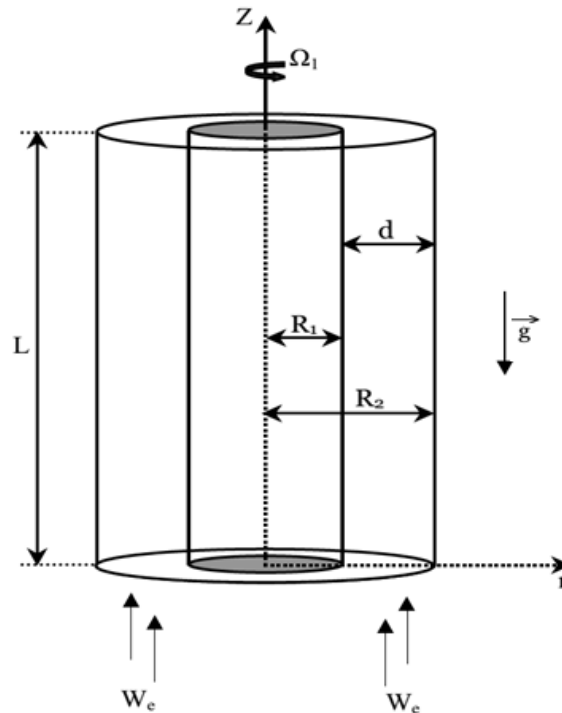


Fig II.1: Aperçu global du domaine d'étude

## II.2- Formulation mathématique du problème

Dans cette section, nous présentons la formulation mathématique de l'hydrodynamique de l'écoulement de Taylor Couette Poiseuille. Pour décrire cet écoulement, il suffit de déterminer les variables d'Euler qui sont : le vecteur vitesse  $\vec{V}$  et la pression  $P$ . Pour cela, nous résolvons les équations fondamentales de la dynamique des fluides auxquelles nous ajoutons les conditions aux limites et les conditions initiales.

### II.2.1- Les équations de l'hydrodynamique

Les équations de Navier- Stokes expriment les principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un milieu continu. Elles s'écrivent de façon générale pour une particule fluide :

$$\frac{D(\rho\vec{V})}{Dt} = \nabla \cdot \tau + \vec{f} \quad (\text{II.1})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\rho\vec{V}) = 0 \quad (\text{II.2})$$

où  $\vec{V}(u, v, w)$  est le champ de vitesse de l'écoulement,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}$  est la dérivée particulaire,  $\vec{f}$  représente les forces extérieures ( $\vec{f} = \rho\vec{g}$ )

et  $\tau$  est le tenseur des contraintes, qui modélise les interactions entre les particules fluides :

$$\tau_{ij} = P \delta_{ij} + \mu \left[ (\partial_j V_i + \partial_i V_j) + \frac{2}{3} \nabla \cdot V \delta_{ij} \right] \quad (\text{II.3})$$

où  $P$  est la pression,  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide, et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Pour un écoulement incompressible pour lequel la densité est constante, et pour une viscosité qui ne dépend que de la température, ces équations deviennent :

$$\partial_t \vec{V} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f} \quad (\text{II.4})$$

$$\vec{V} \cdot \nabla = 0 \quad (\text{II.5})$$

où  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  est la viscosité cinématique du fluide.

### II.2.2- Equations simplifiées

Dans le cas d'un écoulement cylindrique visqueux axisymétrique ( $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ), les équations du mouvement précédentes se réduisent à :

- Selon la coordonnée radiale

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[ \nabla^2 u - \frac{u}{r^2} \right] \quad (\text{II.6})$$

- Selon la coordonnée azimutale

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \mu \left[ \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right] \quad (\text{II.7})$$

- Selon la coordonnée axiale

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g + [\mu \nabla^2 w] \quad (\text{II.8})$$

$$\text{Où } \nabla^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2}$$

L'équation de continuité est :

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.9})$$

A chaque instant et en tout point du domaine étudié, nous convenons de noter la pression du fluide :

$P(r, z, t) = P_a + \Pi(r, z, t)$  où  $P_a$  est la pression atmosphérique et  $\Pi(r, z, t)$ , la perturbation de pression.

Comme la pression atmosphérique  $P_a$  du milieu extérieur, est supposée constante, la dérivation sur  $P(r, z, t)$  est équivalente à celle sur  $\Pi(r, z, t)$ .

### II.2.3- Formulation adimensionnelle

Afin de rendre les équations précédentes universelles, nous introduisons des grandeurs de référence qui conduisent à une présentation adimensionnelle des équations du problème. Nous adoptons les grandeurs caractéristiques suivantes :

- Longueur :  $R_a$  rayon du cylindre extérieur
- Vitesse :  $W_e$  vitesse d'entrée de fluide dans l'espace annulaire.

Toutes les quantités adimensionnelles, que nous caractérisons par un indice " + ", sont définies comme suit :

$$u^+ = \frac{u}{W_e}; \quad v^+ = v/W_e; \quad r^+ = r/R_2;$$

$$z^+ = z/R_2; \quad \Pi^+ = \Pi / \rho W_e^2; \quad t^+ = t W_e / R_2;$$

En substituant ces nouvelles variables dans les équations (II.6) à (II.9), où l'on supprimera l'indice « + » par souci de simplification, nous obtenons les équations adimensionnelles suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v^2}{r} - w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{(1-N)}{Re_a} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{r \partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right] \quad (\text{II.10.a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{(1-N)}{Re_a} \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{\partial v}{r \partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right] \quad (\text{II.10.b})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1}{Fr} + \frac{(1-N)}{Re_a} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial w}{r \partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.10.c})$$

avec :

$Re_a$ , le nombre de Reynolds axial déjà défini,

$Fr$ , le nombre de Froude qui mesure l'influence de la pesanteur, ou encore il exprime le rapport de l'énergie cinétique du fluide ( $w_e^2 \rho$ ) par rapport au travail susceptible d'être effectué par la pesanteur ( $\rho g R_e$ ). Ce nombre est donné par :

$$Fr = \frac{W_e^2}{\rho R_2}$$

Il représente aussi le rapport de la force d'inertie ( $w_e^2/R_2$ ) sur la force de la pesanteur ( $g$ ).  $N$  est le rapport des rayons  $N = \frac{R_1}{R_2}$  et  $1 - N = \frac{d}{R_2}$ .

## II.2.4- Conditions initiales et conditions aux limites

### II.2.4.1- Conditions initiales

On considère qu'à l'instant  $t = 0$ , le fluide contenu dans l'espace annulaire est au repos et à la pression atmosphérique. Ceci se traduit par la condition suivante :

$$t = 0 \quad \begin{cases} \Pi(r, z, 0) = 0 \\ u(r, z, 0) = v(r, z, 0) = w(r, z, 0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

### II.2.4.2- Conditions aux limites

Le domaine d'étude est défini par :

$$R_1 < r < R_2$$

$$0 < \theta < \pi$$

$$0 < z < L$$

Les conditions aux limites sont en général les conditions d'adhérence aux parois et la condition à la sortie de l'espace annulaire.

#### Conditions à l'entrée: $z = 0$

La plupart des auteurs supposent une vitesse axiale uniforme à l'entrée de l'espace annulaire et la nullité des deux autres composantes radiale et tangentielle.

$$R_1 < r < R_2 : \begin{cases} u = v = 0 \\ w = 1 \end{cases} \quad (\text{II.12})$$

#### Conditions à la sortie: $z = L$

Certains auteurs ont considéré à la sortie de l'espace annulaire une vitesse axiale calculée à partir de la conservation du débit (*le débit entrant = le débit sortant*). Et d'autres ont

considéré un champ de vitesse nulle à la sortie de l'entrefer. Par contre, Bouhadeh [4] a imposé la nullité des dérivées secondes par rapport à  $z$  des trois composantes de la vitesse :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

Dans notre cas, on a opté pour la condition considérant la nullité du gradient axial des trois composantes de la vitesse :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.13})$$

Afin de faire apparaître les tourbillons nous avons imposé à la sortie la condition suivante :

$$R_1 < r < R_2 \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

### **Conditions d'adhérence aux parois: $0 \leq z \leq L$**

$$\begin{aligned} \text{▪ Cylindre intérieur : } r = R_1 : & \quad \begin{cases} u = w = 0 \\ v = v_p = R_1 \omega / w_e \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$$\text{▪ Cylindre extérieur : } r = R_2 : \quad u = v = w = 0 \quad (\text{II.16})$$

### **II.2.5- Outils d'analyse de l'écoulement :**

Après la résolution des équations régissant l'écoulement du fluide contenu dans l'espace annulaire considéré, les inconnues  $u, v, w$  et  $p$  donnent quantitativement une vue sur le phénomène étudié mais, ils existent d'autres paramètres qui peuvent attribuer aux solutions plus de clarté et substantialité quantitativement et qualitativement, et facilitent l'analyse du phénomène étudié. Quelques paramètres dont la nature peut différer (critère adimensionnel, fonction mathématique, ...etc.), sont utilisés dans ce travail pour éclaircir la vision physique du problème.

#### **II.2.5.1- La fonction de courant :**

Nous utilisons cet intelligent dispositif seulement pour identifier les lignes de courant hydrodynamiques, et les débits d'écoulement. La fonction de courant  $\Psi$  (dite de Stokes) est définie en coordonnées cartésiennes pour un écoulement incompressible par [7] :

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad w = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (\text{II.17})$$

ici les lignes  $\Psi(r, z) = Cste$  sont les lignes de courant, et le débit entre deux lignes de courant est :

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 2\pi(\Psi_2 - \Psi_1) \quad (\text{II.18})$$

#### **II.2.5.2- La vorticité :**

Un autre outil, la vorticité qui est associée au vecteur vitesse local  $\vec{V} = (u, w)$ , est définie par:

$$\omega = \overrightarrow{Rot} \vec{V} \quad (\text{II.19})$$

mais dans notre étude on s'intéresse seulement à la composante azimutale de la vorticité, en la nommant vorticité elle-même [7]:

$$\omega = \omega_{\theta} = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{II.20})$$

### II.2.5.3- Le moment angulaire :

Le moment angulaire  $\Lambda$  est une grandeur scalaire [7]:

$$\Lambda = r \cdot v \quad (\text{II.21})$$

où  $v$  est la composante azimutale de vitesse au point  $(r, z)$ .

## II.3- Conclusion

Vue la complexité des équations différentielles obtenues, il est légitime de faire recours aux méthodes numériques (calcul approchés) pour résoudre ces équations, à l'aide d'un ou plusieurs programmes CFD tels que ANSYS FLUENT ou COMSOL et éclaircir la vision physique du problème.

## QUELQUES RESULTATS THEORIQUES ET LEURS DISCUSSIONS

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats obtenus avec des méthodes numériques diverses et divers dispositifs CFD (FLUENT, Code Maison, etc...), ces résultats sont tirés de la littérature abondante concernant l'écoulement de Taylor-Couette ou Taylor-Couette-Poiseuille déjà exposé dans le chapitre précédent. La configuration géométrique à symétrie axiale, laisse supposer un développement symétrique de l'écoulement. Les variables utilisées sont adimensionnelles et en raison de cette symétrie, les profils sont obtenus sur la moitié du domaine. La totalité absolue des résultats présentés dans cette recherche bibliographique sont tirés du travail de N. Ait Moussa[6].

### III.1- Régime laminaire pur

Dans cette partie, nous avons représenté le champ hydrodynamique (vitesse, pression) dans un espace annulaire caractérisé par un rapport de rayons  $N = 0.5$  et un rapport de forme  $\Gamma = 14.3$ . Le nombre de Reynolds axial est compris entre 1 et 100 et le nombre de Taylor considéré prend des faibles valeurs correspondant au régime laminaire pur.

#### III.1.1- Evolution des profils de vitesse au cours du temps

Sur la figure (III.1), on voit l'évolution des profils radiaux de vitesse axiale, radiale et tangentielle pour une vitesse de rotation du cylindre interne  $v_0 = 0.2$ , et pour deux valeurs du nombre de Reynolds,  $Re_a = 10, 100$ . Le maximum de la vitesse axiale augmente au cours du temps jusqu'à atteindre une valeur maximale qui demeure constante à partir de l'instant  $t = 4$  aux différentes côtes considérées. Loin de l'entrée, même remarque peut être faite pour la vitesse radiale. En ce qui concerne la vitesse tangentielle, sa courbure diminue en aval, et garde le même profil à partir de l'instant  $t = 2$ . On constate que les effets de l'entrée affectent les profils de vitesse axiale et de vitesse radiale. En aval de l'espace annulaire, la solution semble cependant tendre ultérieurement vers un régime stationnaire à partir de l'instant  $t = 4$ .

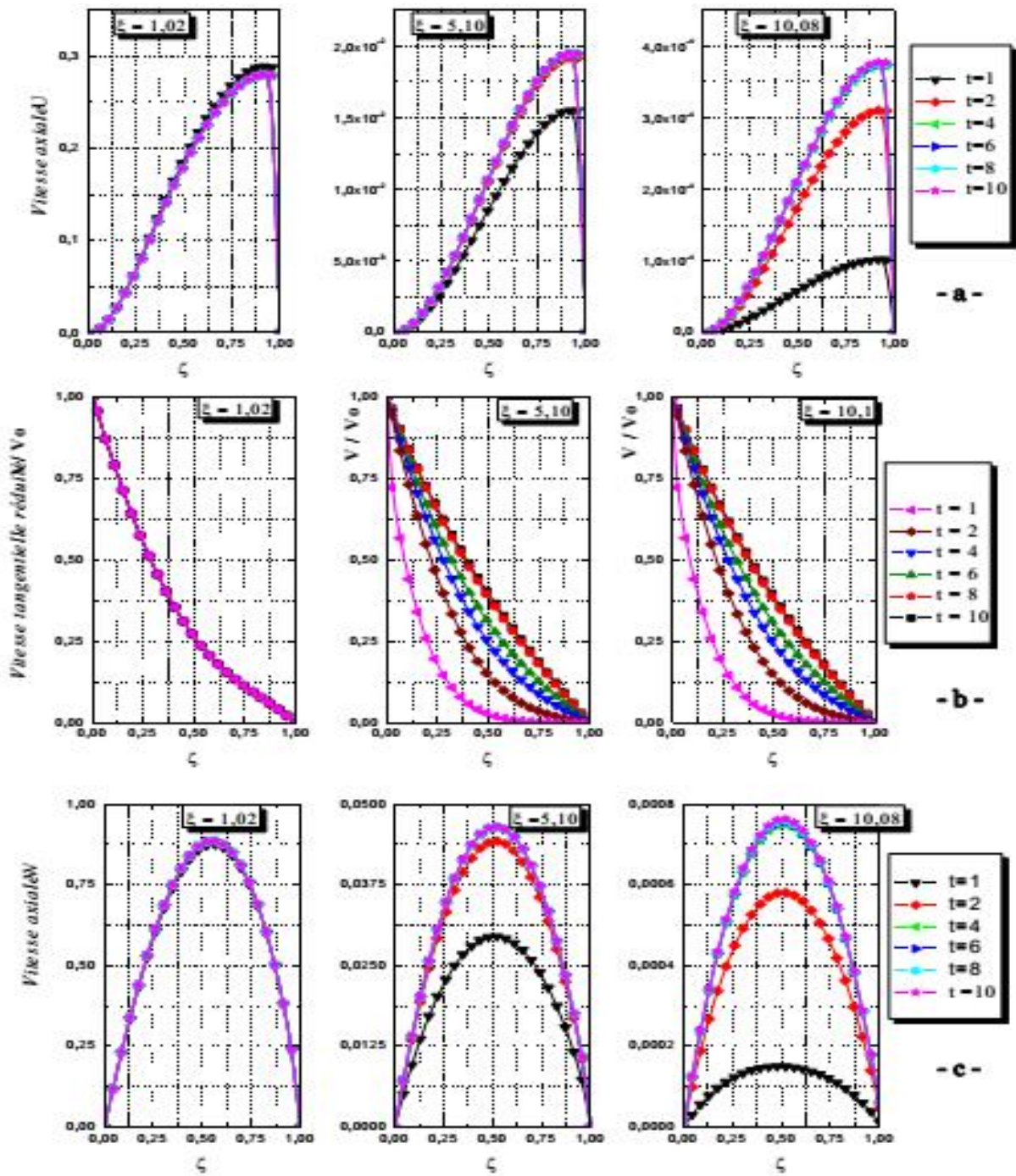


Fig. III.1 : Evolution des profils de vitesse en régime laminaire, pour  $Re_a = 10$  [6]

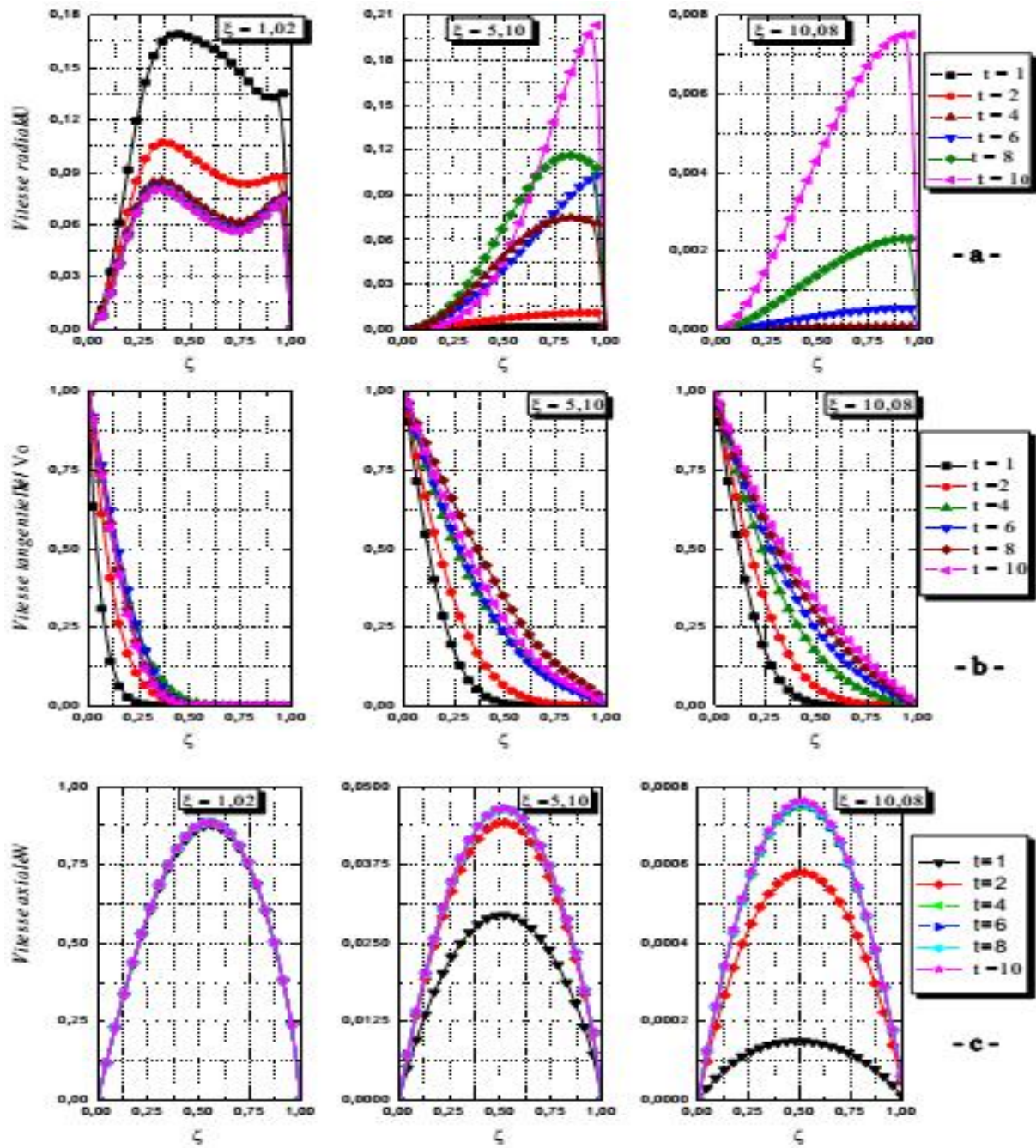


Fig. III.2 : Evolution des profils de vitesse en régime laminaire, pour  $Re_a = 100$  [6]

### III.1.2- Evolution axiale des Profils de vitesse

Les profils de vitesse axiale, tangentielle et radiale sont représenté pour un nombre de Taylor  $Ta = 2$ , à l'instant  $t = 10$  s . on considère trois valeurs du nombre de Reynolds  $Re_a = 1, 10, 100$ .

#### ❖ Profil radial de la vitesse axiale

Pour les trois valeurs de nombres de Reynolds, on remarque que le maximum de la vitesse axiale est atteint à l'entrée de l'espace annulaire et est supérieur à l'unité. En se déplaçant vers l'aval, la vitesse axiale diminue progressivement et tend vers zéro à la sortie. Pour des nombres de Reynolds relativement faibles ( $Re_a = 1, 10$ ), la vitesse axiale atteint sa valeur maximale dans les sections d'entrée, à la position axiale  $\xi = \frac{z}{d} = 0.25$  pour  $Re_a = 1$  et  $\xi = 0.51$  pour  $Re_a = 10$  et à des positions radiales inférieures à la position du milieu de l'espace annulaire ( $\zeta < \frac{1}{2}$ ), figures (III.2.a et b). Ce qui indique que le gradient pariétal de vitesse axiale est plus important sur le cylindre interne que sur la paroi extérieure. Pour des cotes croissantes, ce maximum se dirige vers le cylindre externe ( $\zeta > \frac{1}{2}$ ). Cela montre la dissymétrie du profil de la composante axiale par rapport au milieu de l'espace annulaire. Cette vitesse est proche du zéro à la cote  $\xi = 5.10$  pour les deux valeurs de nombre de Reynolds. On constate que les forces visqueuses sont dominantes dans cette gamme de Reynolds axial. On pense que la dissymétrie proviendrait de la configuration géométrique de l'écoulement et plus particulièrement du système d'arrivée du fluide dans l'espace annulaire et aussi à la rotation du cylindre intérieur.

Injecté avec un débit axial plus fort,  $Re_a = 100$ , le fluide s'accélère dans l'espace annulaire et le maximum de la composante axiale de la vitesse dépasse l'unité jusqu'à la position axiale  $\xi = 2.04$  où le profil tend asymptotiquement au profil du Poiseuille ; dans cette zone, les forces d'inertie sont dominantes. En aval de l'espace annulaire, on remarque une diminution progressive de la vitesse axiale à partir de la côte = 5.10, le maximum se déplace vers la paroi externe et tend vers zéro pour  $\xi = 10.08$ . La dissymétrie est plus marquée pour ce nombre de Reynolds que dans le cas précédent.

### ❖ Profil radial de la vitesse tangentielle

La figure (III.5) représente les profils radiaux de la vitesse tangentielle pour plusieurs positions axiales et pour différentes valeurs de nombre de Reynolds.

Le profil de vitesse tangentielle se déforme continuellement suivant  $\xi$  d'une position à l'autre et varie de sa valeur maximale (paroi tournante) jusqu'à la valeur zéro sur la paroi fixe. Pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds axial ( $Re_a = 1, 10$ ), ce profil tend asymptotiquement à partir de  $\xi = 2.04$  vers le profil linéaire de Couette correspondant au régime laminaire établi. On peut constater que la longueur d'établissement de l'écoulement tangentiel pour  $Re_a = 10$  est  $Le_t \approx 2.04 d$ . Ce dernier résultat est comparatif à celui présent dans [3], qui a obtenu pour un nombre de Reynolds légèrement supérieur ( $Re_a = 10.6$ ), une longueur  $Le_t = 1.6 d$  ( $Le_t = 2 cm$ ), dans un espace annulaire caractérisé par ( $N = 0.61, \Gamma = 12.8$ ). Par contre pour une valeur de Reynolds plus élevée ( $Re_a = 100$ ), la longueur de l'espace annulaire n'est pas suffisante pour l'établissement d'un tel profil.

### ❖ Profil radial de la vitesse radiale

Les profils de vitesse radiale en fonction de la coordonnée radiale réduite pour différentes valeurs de nombre de Reynolds ( $Re_a = 1, 10, 100$ ) sont illustrés sur la figure (III.4. a, b, c). Les résultats obtenus nous ont permis de faire les constatations suivantes :

- i. A l'entrée de l'espace annulaire, le profil de la vitesse radiale qui est nul ( $u = 0, \forall \zeta$  à  $\xi = 0$ ) atteint une certaine valeur au voisinage du cylindre intérieur ( $\zeta < 0.5$ ), puis décroît et augmente pour la deuxième moitié de la largeur de l'espace annulaire ( $\zeta > \frac{1}{2}$ ) pour atteindre sa valeur maximale.
- ii. Au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'entrée, le profil garde sa forme (le maximum s'approche du cylindre externe) et s'atténue donc jusqu'à s'annuler.

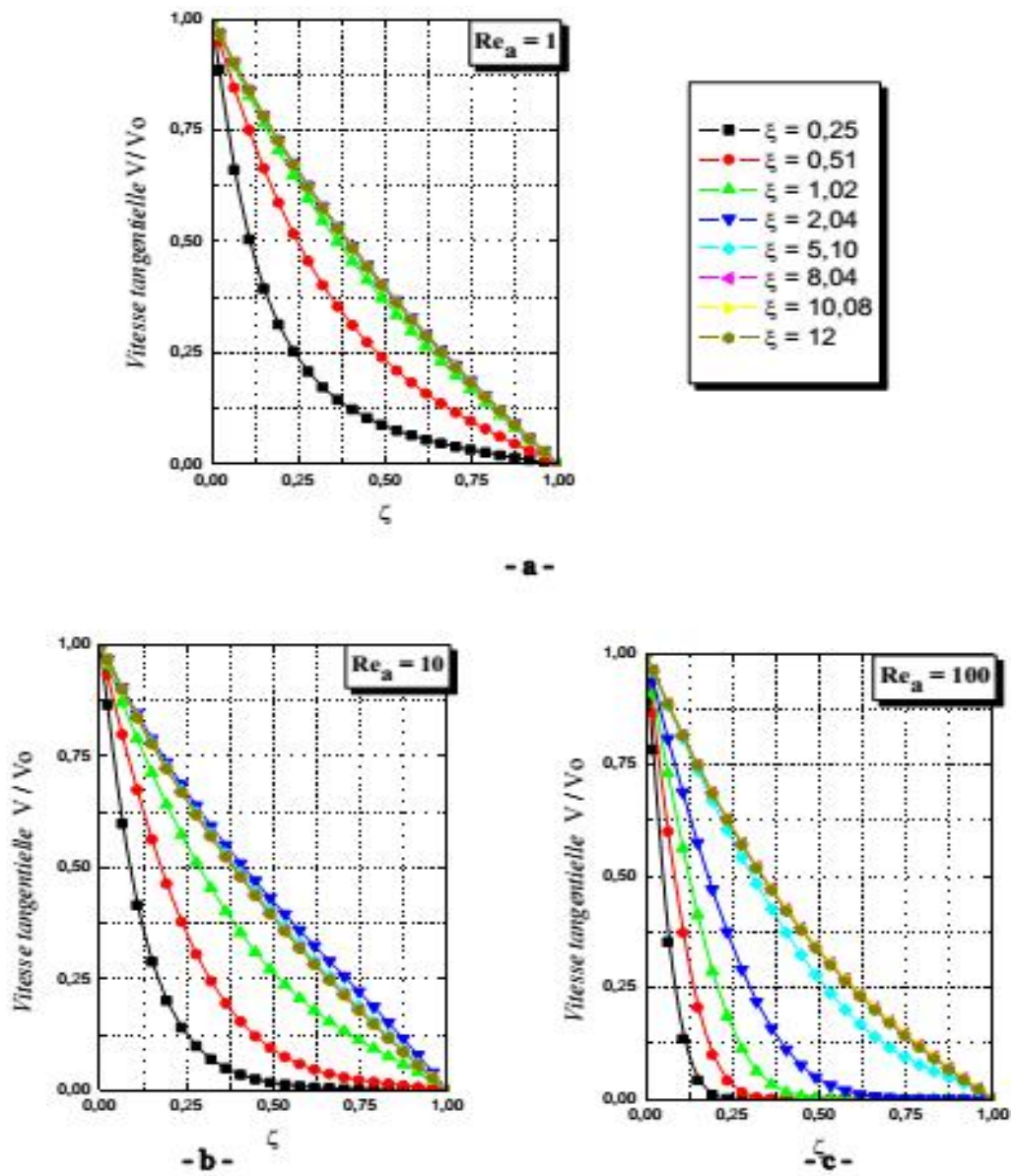


Fig. III.3 : Evolution axiale du profil radial de la vitesse tangentielle en régime laminaire [6]

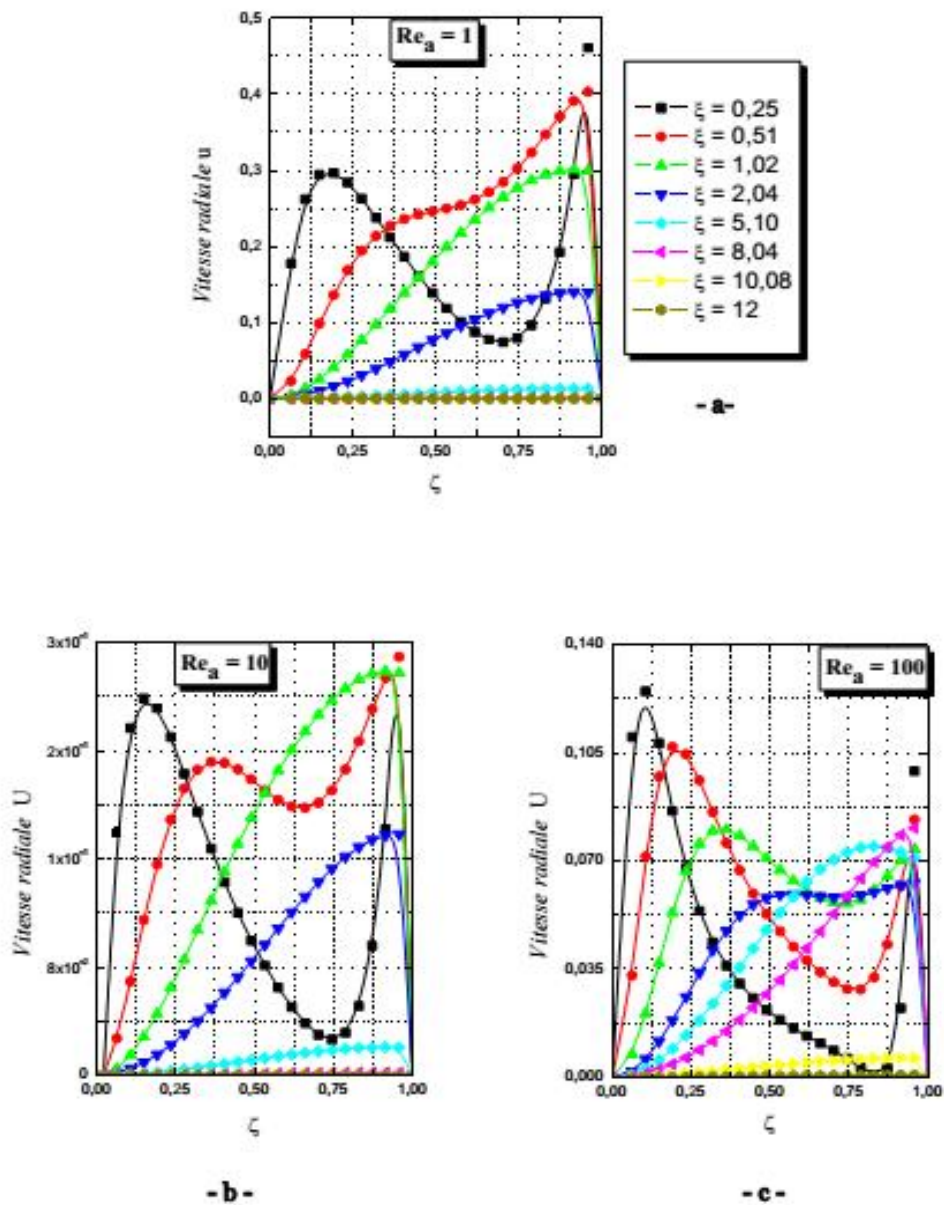


Fig. III.4 : Evolution axiale du profil radial de la radiale en régime laminaire [6]

### III.2- Régime laminaire instable (régime de transition)

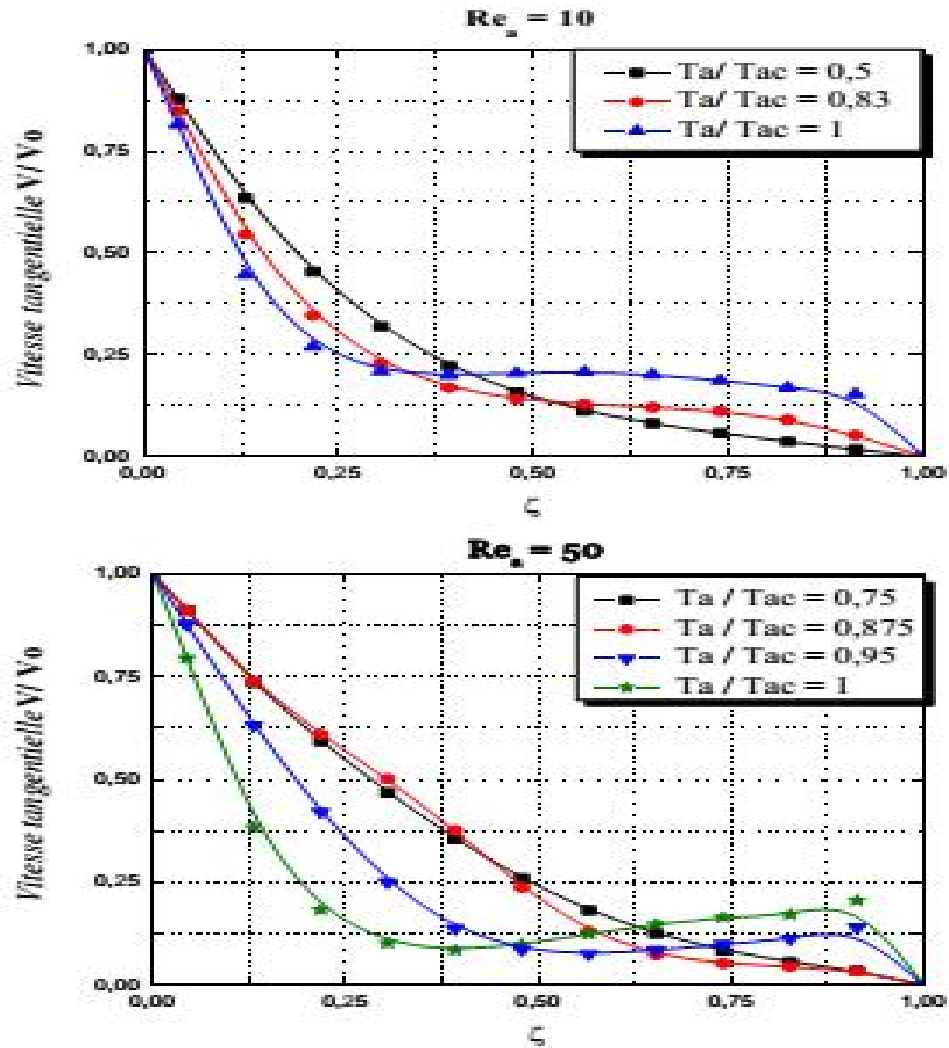
Cette partie concerne l'étude de l'écoulement de fluide lors de la transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire, pour des vitesses de rotation correspondant à des nombre de Taylor  $Ta \leq Ta_{cr}$ . Les résultats sont donnés à l'instant  $t = 10$  s.

#### ❖ Profils de vitesse tangentielle

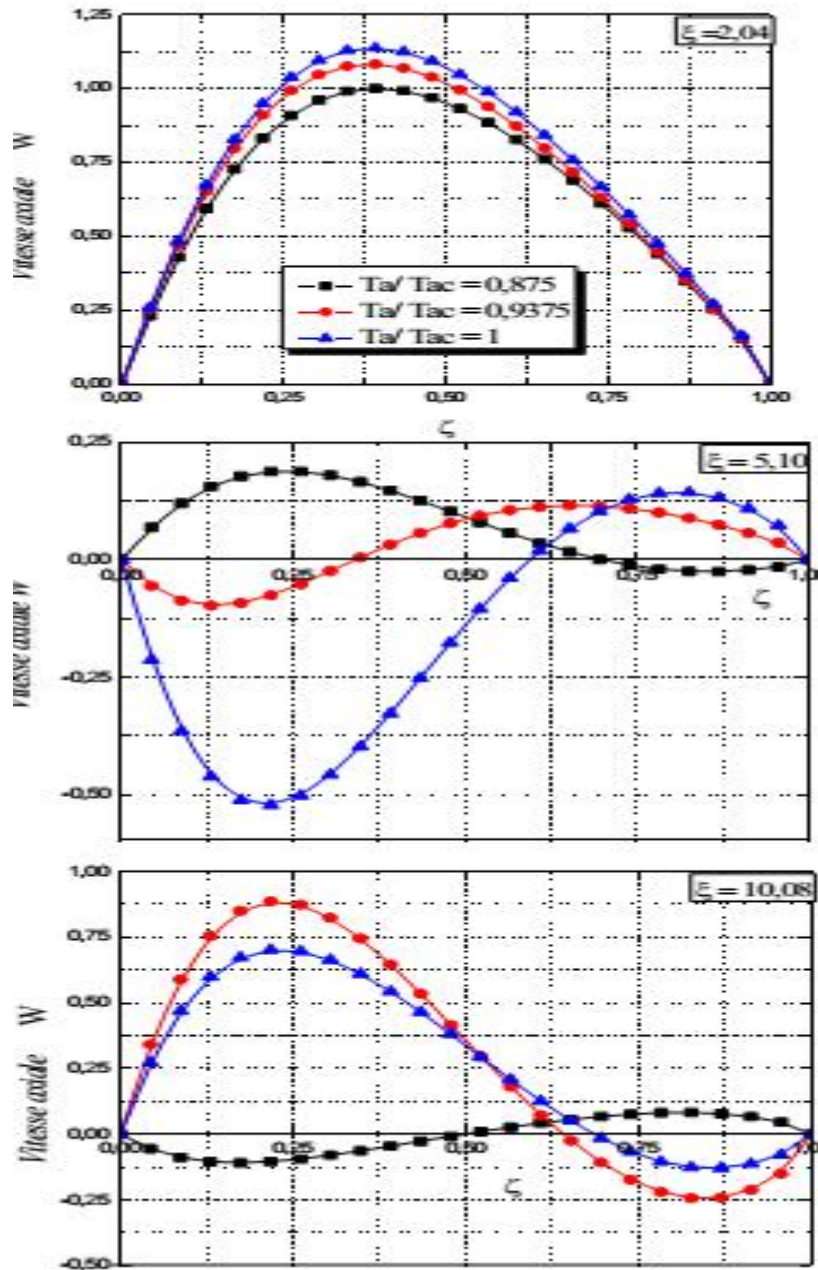
Comparativement au cas laminaire, la courbe des variations de la vitesse tangentielle en fonction de la coordonnée radiale, est caractérisée essentiellement par l'existence d'un point d'inflexion, traduisant le mélangeage du fluide par les tourbillons (fig.III.5). Cette

inflexion est d'autant plus marquée que le débit est faible (fig.III.6a) et la vitesse de rotation est élevée.

En effet, pour un débit axial fixé, une augmentation du nombre de Taylor accroît l'énergie des tourbillons, ce qui induit un meilleur mélangeage. Ces profils sont en accord avec ceux présentés dans [8].



**Fig. III.5 :** Influence de la vitesse de rotation sur le profil de la vitesse tangentielle en régime laminaire instable ( $N = 0.5, \Gamma = 14.3, \xi = 5.10$ ) [6]



**Fig. III.6** : Effet de la rotation sur le profil de la vitesse axiale en régime laminaire instable,  $Re_a = 10$ ,  $N = 0.5$ ,  $\Gamma = 14.3$  [6]

#### ❖ Profil de vitesse axiale

Au voisinage de l'entrée de l'espace annulaire ( $\xi = 2.04$ ), le maximum de la vitesse axiale augmente avec le nombre de Taylor et se déplace vers le cylindre tournant, provoquant ainsi une diminution du gradient de vitesse axiale au niveau du cylindre intérieur. C. Nouar [3] a obtenu le même résultat pour un écoulement axial établi. En se dirigeant vers l'aval de l'espace annulaire, le profil de la vitesse axiale est fortement déformé sous l'effet de la rotation du cylindre intérieur. La composante axiale de la vitesse possède deux extremums (fig.III.5), un positif et l'autre négatif, leurs valeur et sens dépendent de la position axiale et du nombre de Taylor. Cela traduit l'existence d'un écoulement entrant et un écoulement

sortant par rapport à l'entrée. Cette propriété a été identiquement remarquée par [5] dans le cas d'un espace annulaire étroit. En outre, on remarque que, à la sortie de l'espace annulaire, la composante axiale prend des valeurs non négligeables par rapport à l'unité comparativement au cas laminaire (pour  $\xi = 10.08$  et  $a = 2$ ,  $w_{Max} \approx 10^{-3}$ ).

#### ❖ Profil de vitesse radiale

En ce qui concerne l'effet de la rotation du cylindre tournant sur le profil de la vitesse radiale, en régime instable, la déformation est remarquable, (fig. III.7). A l'entrée de l'espace annulaire, le maximum de la vitesse radiale diminue en augmentant le nombre de Taylor. En raison du mélangeage créé par les cellules de Taylor, la vitesse radiale a des valeurs du même ordre que la composante axiale, contrairement au cas laminaire où la composante radiale peut être négligeables (de l'ordre  $\approx 10^{-4}$ ).

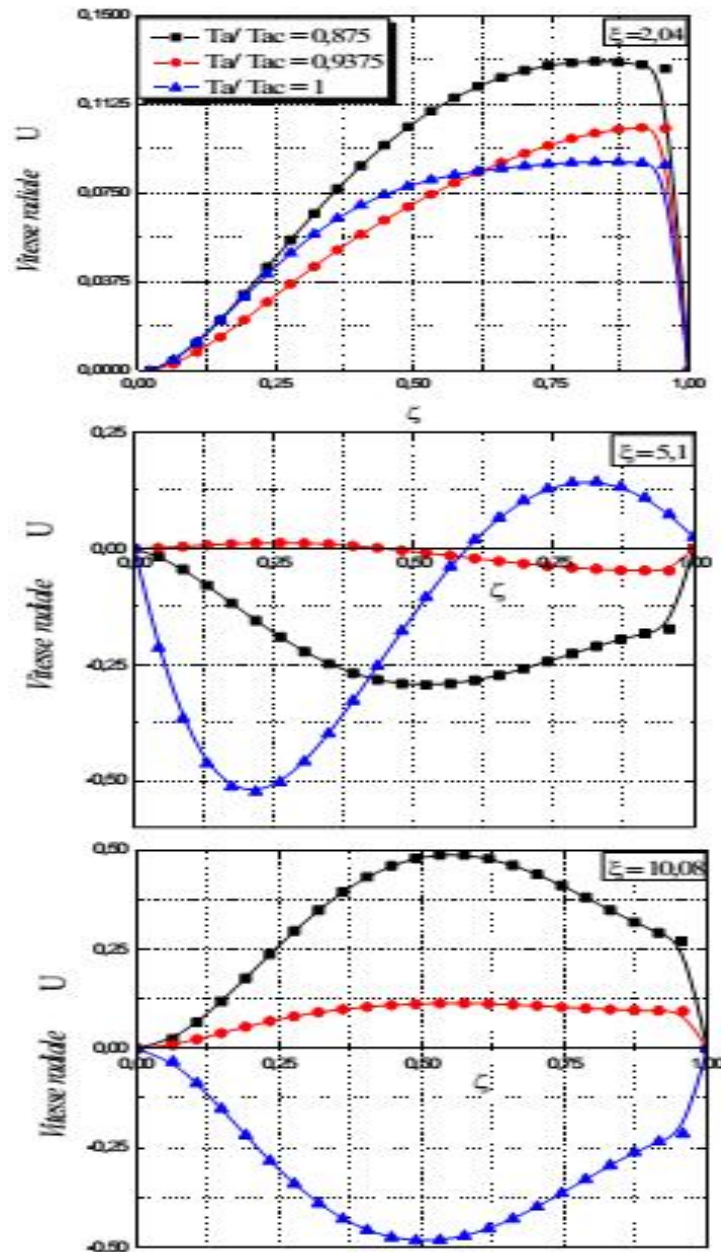


Fig. III.7 : Effet de la rotation sur le profil de la vitesse radiale en régime laminaire instable,  $Re_a = 10$ . [6]

### III.3- Développement des tourbillons dans l'espace annulaire

Sur la figure (III.8), on a représenté les lignes de courant pour différents nombres de Reynolds axial  $Re_a$ . Si on fixe la vitesse de rotation du cylindre intérieur, et on fait varier le nombre de Reynolds axial, le développement des structures tourbillonnaires se trouve annihilé par le débit axial. L'influence stabilisatrice progressive de l'écoulement axial a été bien remarquée pour des valeurs du nombre de Taylor,  $Ta = 40$ , lorsque le nombre de Reynolds prend différentes valeurs,  $Re_a = 20, 50, 100$ . Il est à noter que le comportement de l'écoulement est à rapprocher de celui sans débit pour les faibles valeurs de Reynolds ( $Re_a < 20$ ).

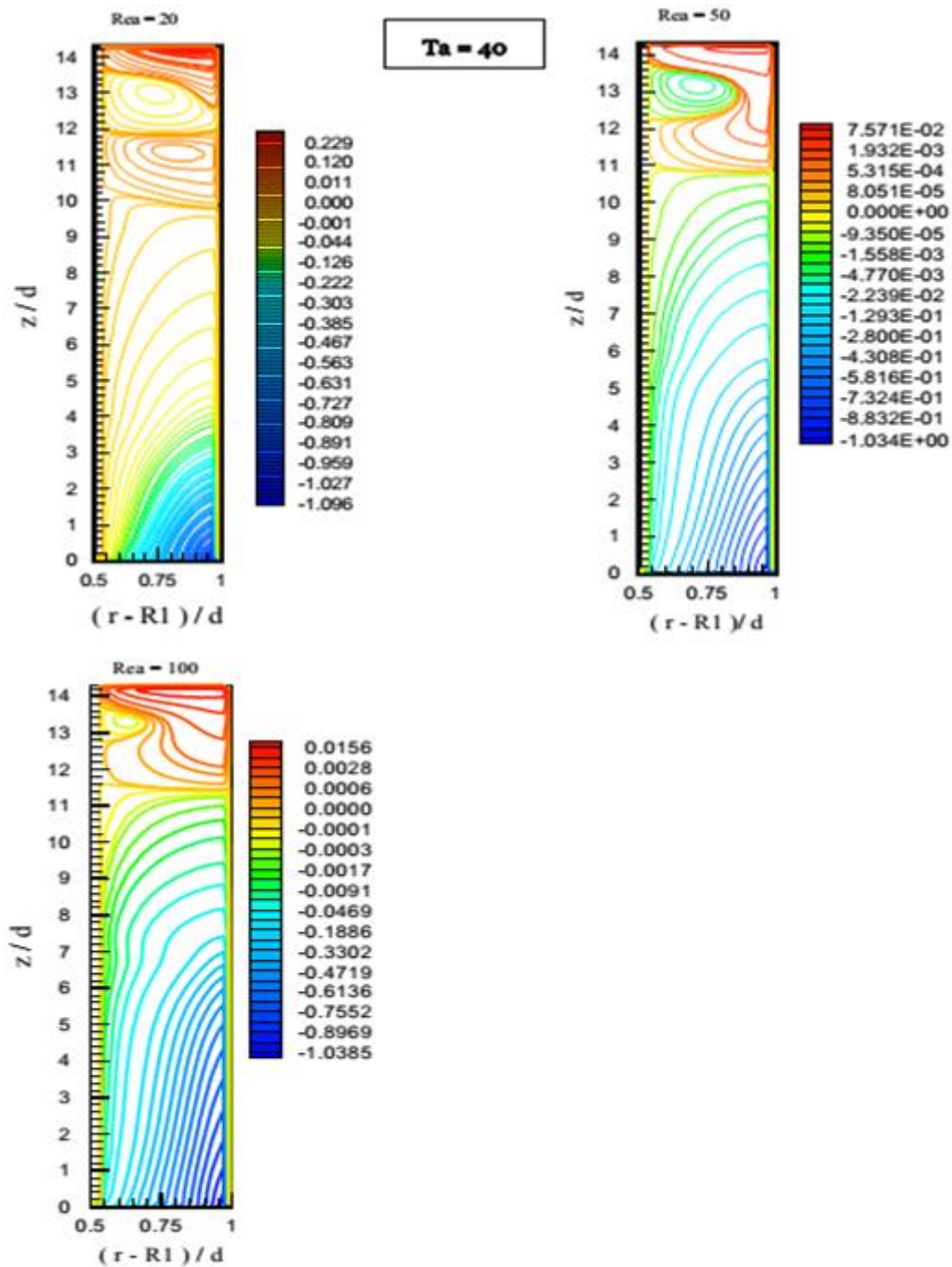
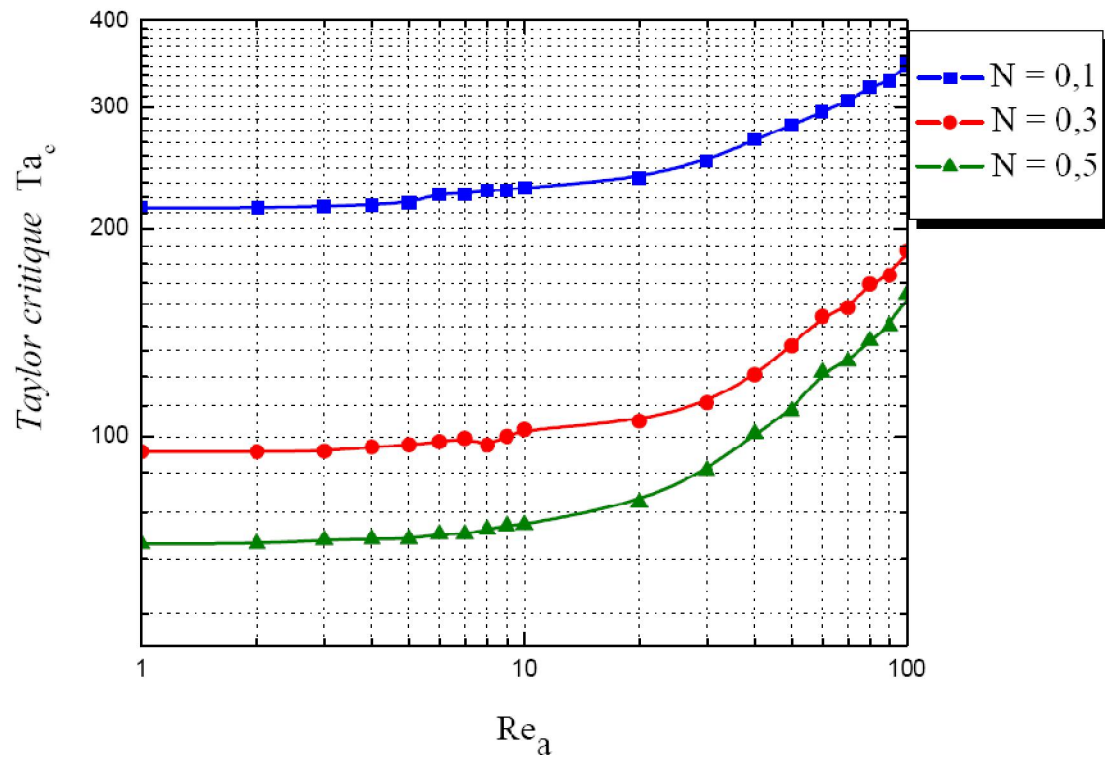


Fig. III.8 : Développement des tourbillons pour  $Ta = 40$  [6]

On constate que le point d'apparition des tourbillons se déplace en aval avec l'écoulement axial. Cette propriété a été étudiée par [4 et 8]. Ils ont donné la courbe de variation du nombre de Taylor critique en fonction de la coordonnée axiale  $z$ , pour différentes valeurs du nombre de Reynolds axial.

#### IV.7. Courbes de stabilité

La courbe de stabilité est la frontière délimitant, dans le plan  $(Re_a, Ta_{cr})$  la région correspondant à un écoulement laminaire avec tourbillons et celle où ces structures ne sont pas observables. Le nombre de Taylor critique correspond au remplissage total de l'espace annulaire par les tourbillons.



**Fig. III.9** : Variation du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Reynolds axial et le rapport de rayons  $N$  ( $\Gamma = 51$ ) [6].

## CONCLUSION GENERALE

Ce travail concerne l'étude des instabilités hydrodynamiques dans le cas d'un écoulement de Taylor-Couette à débit axial imposé. Une étude bibliographique a permis de regrouper les résultats concernant les conditions d'apparition d'instabilités au sein de l'écoulement. La résolution numérique a été faite par plusieurs méthodes numériques présentées dans la littérature pour résoudre les équations gouvernantes en variables primitives. L'influence des différents paramètres de l'écoulement ainsi que ceux relatifs à la configuration géométrique sur le comportement du fluide a été étudiée par plusieurs chercheurs, et le comportement hydrodynamique étudié à travers le champ de vitesse et le champ de pression, pour des faibles valeurs du nombre de Taylor, correspondant au régime laminaire pur. Le seuil de transition du régime laminaire au régime laminaire tourbillonnaire caractérisé par le nombre de Taylor critique, est déterminé pour des nombres de Reynolds axial  $Re_a \leq 100$ , et pour trois distances annulaires correspondant à des rapports de rayons  $N = 0.1, 0.3, 0.5$ .

Dans le cas des faibles valeurs du nombre de Reynolds axial,  $Re_a < 10$ , l'écoulement axial affecte légèrement la stabilité de l'écoulement tourbillonnaire de Couette. Au delà de cette valeur, le nombre de Taylor critique croît davantage. Les études présentes dans la littérature montrent que l'apparition de l'instabilité est favorisée pour les espaces annulaires plus longs. Les résultats montrent que les tourbillons apparaissent à l'aval de l'espace annulaire et que leur croissance se fait radialement. Sous l'effet de la rotation du cylindre intérieur les structures tourbillonnaires occupent toute la longueur de l'espace annulaire.

Bien que l'étude n'est pas portée sur le régime turbulent, cette recherche théorique a permis de déterminer les conditions d'apparition et de développement des vortex au sein de l'écoulement. Il serait intéressant d'envisager par la suite l'étude du régime turbulent. Ainsi que l'analyse de transfert thermique qui intervient fréquemment dans les échangeurs de chaleur. On peut également étendre cette étude aux fluides non newtoniens, qui font l'objet de multiples applications industrielles (industrie agroalimentaire, fluide de forage...)

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] G. I. Taylor, stability of viscous liquid contained between two rotating concentric cylinders. *phil. Trans. Soc. A223*, pp. 289-343, 1923.
- [2] J. Legrand, Mise en œuvre des écoulements de Taylor-Couette-Poiseuille et de ruissellement plan dans des réacteurs électrochimiques de conception nouvelle. Thèse de doctorat d'état, Université de Rennes, 1983.
- [3] C. Nouar, Convection thermique pour un fluide rhéofluidifiant cas de l'écoulement de Couette-Poiseuille. Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle .I.N.P.L, Nancy, 1986.
- [4] A. Bouhadef, Contribution à l'étude de l'écoulement entre deux cylindres fixe et tournant en présence d'un débit axial. Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle .C.E.A.T, Université de Poitiers, 1982.
- [5] J-Y. Hwang et K-S. Yang, Numerical study of Taylor-Couette flow with an axial flow. *Computers & Fluids* 33, pp. 97-118, 2004.
- [6] N. A. Moussa, Etude numérique des instabilités Taylor Couette dans un écoulement ascendant autour d'un cylindre en rotation. Thèse de Magister, Université des sciences et de la technologie HOUARI BOUMEDIENNE, 2004.
- [7] A. Boukhari, Étude de l'instabilité hydrodynamique des écoulements tournants. Université MENTOURI-CONSTANTINE, 2006.
- [8] E. Dumont, Caractérisation des écoulements et des frottements pariétaux dans un échangeur de chaleur à surface raclée. Thèse de doctorat d'état, ENITIAA de Nantes, 1999.
- [9] A. Spohn, Ecoulement et éclatement tourbillonnaires engendrés par un disque tournant dans une enceinte cylindrique. Thèse de Doctorat, Université de Grenoble I, 1991.
- [10] J. H. Lienhard IV et J. H. Lienhard V, *A Heat Transfer Textbook*. 3rd Ed. Cambridge MA, Phlogiston Press, 2005.
- [11] S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. McGraw-Hill, 1980.
- [12] H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*. 6<sup>th</sup> ed. McGraw-Hill, 1968.
- [13] Y. A. Çengel et J. M. Cimbala, *Fluid Mechanics : Fundamentals and Applications*. 1<sup>st</sup> ed. McGraw-Hill Companies, Inc., 2006.

## Résumé:

L'écoulement entre cylindres concentriques est un modèle dynamique d'une grande importance. Ce problème remonte à la publication historique de Taylor. En raison de la richesse des structures qui apparaissent dans le cas où le cylindre extérieur est fixe et le cylindre intérieur tourne à la vitesse angulaire donnée (écoulement de Taylor-Couette-Poiseuille), de nombreux travaux sont intéressés à la description et l'analyse de la stabilité de l'écoulement. Lorsque un débit axial est imposé dans ce système classique, l'écoulement résultant est de " Taylor-Couette-Poiseuille " ou bien "écoulement spiral de Poiseuille " qui est étudié dans ce travail.

Les résultats montrent que dans le cas des faibles valeurs du nombre de Reynolds axial,  $Re_a < 10$ , l'écoulement axial affecte légèrement la stabilité de l'écoulement tourbillonnaire de Couette. Au delà de cette valeur, le nombre de Taylor critique croit davantage. Aussi les résultats montrent que les tourbillons apparaissent à l'aval de l'espace annulaire et que leurs croissance se fait radialement. Sous l'effet de la rotation du cylindre intérieur les structures tourbillonnaires occupent toute la longueur de l'espace annulaire.

**Mots Clés:** Instabilité, Ecoulement de Taylor-Couette, cylindre, turbulent.

## ملخص :

السيان داخل اسطوانتين مشتركتين في المركز هو نموذج فعال و ذو أهمية معتبرة . هذا المشكل يتأثر بعلاقة تايلور التاريخية . بسبب تركيبة الهيكل حيث الاسطوانة الخارجية مثبتة و الاسطوانة الداخلية تدور بسرعة زاوية معطاة (سيان تايلور كوات لبوا زاي) , الأرقام المأخوذة تهتم بوصف وتحليل حالة استقرار السريان عندما يكون هناك تدفق محوري في حالة هذا النظام الكلاسيكي . السريان الناتج عن "سيان تايلور كوات" أو " السريان الحلزوني لبوا زاي" هو المدروس في هذا العمل .

النتائج المتحصل عليها في حالة قيم ضعيفة للعدد  $Re_a < 10$  فان التدفق المحوري يتأثر بعدم استقرار السريان المضطرب ل كوات

**كلمات مفتاحيه:** عدم استقرار , سريان تايلور كوات , اسطوانة , مضطرب .

## table des figure

<b>Fig. I.1</b> : Ecoulement de Taylor Couette.....	5
<b>Fig. I.2</b> : Instabilité de Taylor-Couette.....	6
<b>Fig. I.3</b> : Vortex de Taylor(a régime T.V. F),( b régime W.V. F ) .....	9
<b>Fig. II.1</b> : Aperçu global du domaine d'étude.....	12
<b>Fig. III.1</b> : Evolution des profils de vitesse en régime laminaire, pour $Re_a = 10$ .....	19
<b>Fig. III.2</b> : Evolution des profils de vitesse en régime laminaire, pour $Re_a = 100$ .....	20
<b>Fig. III.3</b> : Evolution axiale du profil radial de la vitesse tangentielle en régime laminaire.....	23
<b>Fig. III.4</b> : Evolution axiale du profil radial de la radiale en régime laminaire .....	24
<b>Fig. III.5</b> : Influence de la vitesse de rotation sur le profil de la vitesse tangentielle en régime laminaire instable ( $N = 0.5, \Gamma = 14.3, \xi = 5.10$ ) .....	25
<b>Fig. III.6</b> : Effet de la rotation sur le profil de la vitesse axiale en régime laminaire instable, $Re_a = 10, N = 0.5, \Gamma = 14.3$ .....	26
<b>Fig. III.7</b> : Effet de la rotation sur le profil de la vitesse radiale en régime laminaire instable $Re_a = 10$ .....	28
<b>Fig. III.8</b> : Développement des tourbillons pour $Ta = 40$ .....	29
<b>Fig. III.9</b> : Variation du nombre de Taylor critique en fonction du nombre de Reynolds axial et le rapport de rayons $N$ ( $\Gamma = 51$ ) .....	30