République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur

et de la recherche scientifique

Université Echahid Hamma Lakhdar - El-Oued -

Faculté Des Sciences Exactes

Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Fondamentales et appliquées

***Thème* :**

Analyse variationnelle d'un problème de contact viscoélastique avec frottement à dérivée fractionnaire en temps

Présenté par:

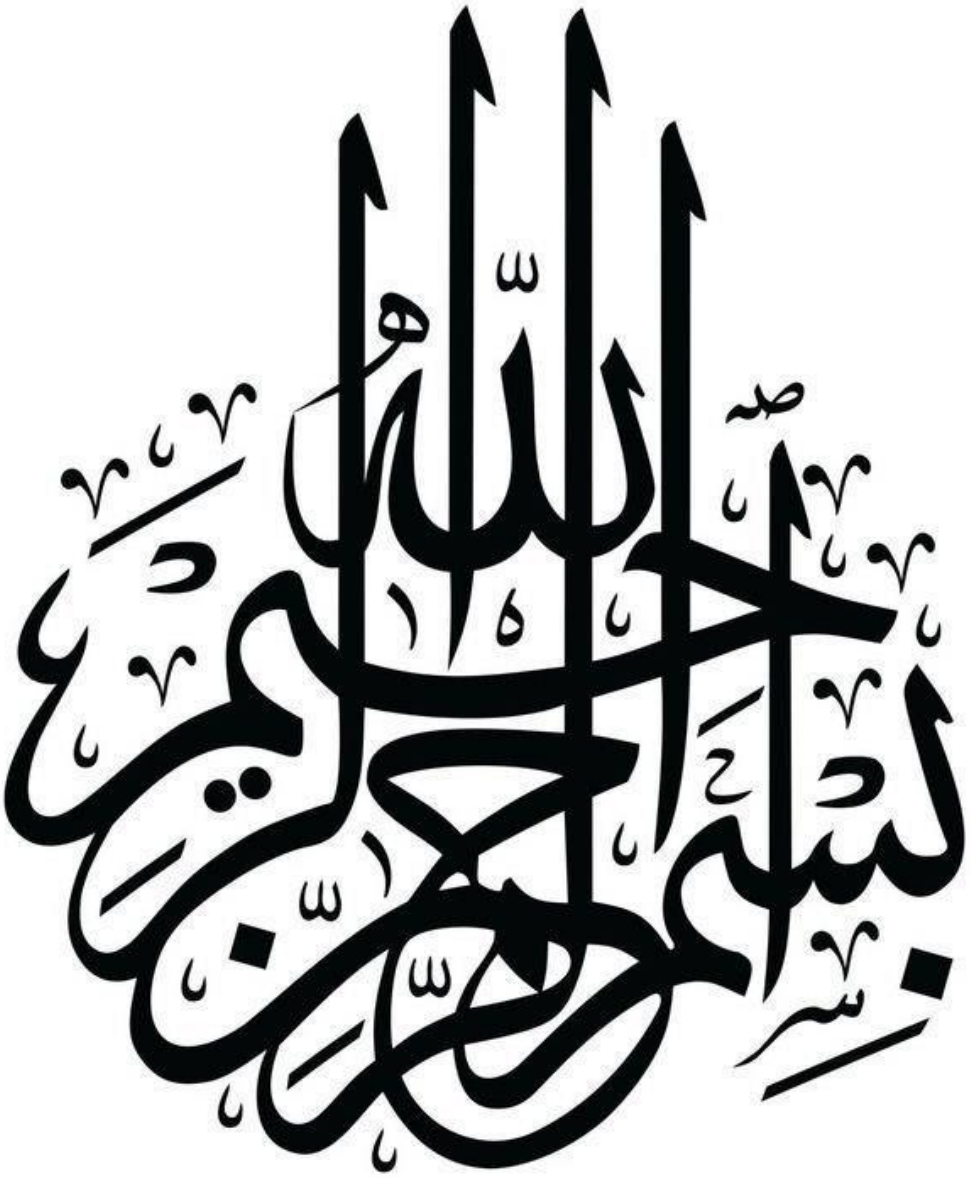
Bakini Meriem et Allag Meriem

Soutenue le: 07 /06/2026

Devant le jury composé de:

Elmehdi Zaouche	MCA	**Université Echahid Hamma Lakhdar- El Oued**	**President**
Douib Bachir	Pr	**Université Echahid Hamma Lakhdar- El Oued**	**Rapporteur**
Hadj Ammar Tidjani	MCB	**Université Echahid Hamma Lakhdar- El Oued**	**Examinateur**

Année universitaire: 2025/2026


بسم الله الرحمن الرحيم

إهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتمّ الصالحات، والذي أنار دربي ووفّقني لإتمام هذا العمل المتواضع.

أهدي ثمرة جهدي وتعب أيّامي إلى من كانوا سببًا في وصولي بعد الله...

إلى أبي العزيز،

ذلك القلب الكبير الذي علّمني أن النجاح لا يأتي إلا بالصبر والإرادة،

إلى من كان سندي في كل خطوة، ومصدر قوتي وفخري،

.أطال الله عمره وأدامه تاجًا فوق رأسي

إلى أمّي الحبيبة،

نبع الحنان والرحمة، وصاحبة الدعوات الصادقة التي كانت ترافقني في كل حين،

إلى من سهرت وتعبت وضحّت لأجل راحتي ونجاحي،

حفظها الله لي وأدام نورها في حياتي

إلى إخوتي وأختي، رفقاء الطريق وأجمل سند،

شكرًا لمحبتكم ودعمكم الذي منحني الأمل والقوة للاستمرار.

إلى صديقاتي العزيزات،

إلى كل من شاركني لحظات التعب والفرح، وكان وجودهم بلسمًا يخفّف عنّي مشقّة الطريق،

شكرًا لقلوبكم الصادقة

إلى أساتذتي الأفاضل، الذين أناروا لنا طريق العلم والمعرفة،

وكانوا خير قدوة في الاجتهاد والعطاء، لكم مني كل الاحترام والتقدير.

وإلى كل من ساهم من قريب أو بعيد في دعمي ومساندتي،

أهديكم هذا العمل المتواضع،

راجيةً من الله التوفيق والسداد في قادم الأيام.

مريم باكيني

الاهداء

.الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات. أخيراً تحقق حلم التخرج

لطالما انتظرت هذا اليوم كي ارى الفخر والسعادة في عين أمي وأبي.

وها أنا اليوم اهدي تخرجي الى نبع الحنان والقلب الناصع بالبياض من تستقبلني بابتسامة امي الغالية

والى سندي وضياء دربي من علمني الاصرار والمثابرة مصدر الامل والطموح ابي الغالي

أنتم الدعاء الذي لا يخيب، والقلب الذي كان يطمئنني دائمًا، والحب الذي منحني القوة لأكمل مهما تعبت. هذا النجاح هو ثمرة تعبكم قبلي، فشكرًا لأنكم كنتم أعظم سند في حياتي .

و أيضاً الى احباب قلبي ونور حياتي اخوتي واخواتي و زوجة أخي.

إلى صديقاتي العزيزات وأحبائي الأقرب إلى القلب، كانت صداقتكنّ لي سندًا،

وحبكنّ طوق نجاة في لحظات التعب والخذلان، والبهجة التي تبعث الروح كلما ضاق الطريق.

شكرًا لقلوبكنّ النقيّة، ولوجودكنّ الذي لا يُقدَّر بثمن.

إلى اساتذتي الافاضل،

خالص الشكر والتقدير لما وجدته من دعم وتشجيع طوال مشواري العلمي،

لقد كنتم خير رفاق في طريق الاجتهاد،

وبيئة محفّزة على العطاء والتميّز. أعتز بكل لحظة جمعتني بكم،

.وبكل نصيحة ساعدتني على النضج والتقدّم

.فلكم مني كل الامتنان، والدعاء الصادق بدوام التوفيق والنجاح

مريم علاق

شكر و عرفان

الحمد لله الذي بنعمته تتمّ الصالحات، والصلاة والسلام
على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

قال تعالى:
﴿رَبِّ أَوْزِعْنِي أَنْ أَشْكُرَ نِعْمَتَكَ الَّتِي أَنْعَمْتَ عَلَيَّ
وَعَلَىٰ وَالِدَيَّ وَأَنْ أَعْمَلَ صَالِحًا تَرْضَاهُ
وَأَدْخِلْنِي بِرَحْمَتِكَ فِي عِبَادِكَ الصَّالِحِينَ﴾
سورة النمل، الآية 19.

نشكر الله عزّ وجلّ ونحمده على نعمه التي أنعم بها علينا،
ووفّقنا إلى إنهاء هذا العمل المتواضع.
وبعد، لما كان شكر العباد من تمام شكر ربّ العباد،
فقد صدق من قال:
»من لم يشكر الناس لم يشكر الله.«

نتقدّم بخالص الشكر والتقدير لأستاذنا المشرف
الدكتور ذويب بشير على ما قدّمه لنا من نصح وتوجيه،
سائلين الله أن يجزيه عنّا خير الجزاء، مع تمنياتنا له
بمزيد من التألّق والنجاح العلمي.

نتقدّم بالشكر لأساتذة لجنة المناقشة على جهودهم في قراءة
وتقييم المذكّرة، سائلين الله أن يثيبهم بجزيل فضله وكرمه.

كما نتوجّه بالشكر لأساتذة قسم الرياضيات، وذلك لما بذلوه تجاه الطلبة.

وفي الأخير، شكرٌ لكلّ من ساهم في إنجاز هذا العمل من قريب أو بعيد
ولو بكلمة طيّبة أو ابتسامة صادقة.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'étudier un problème quasi-statique de contact viscoélastique avec frottement. Le matériau est modélisé par une loi de comportement viscoélastique fractionnaire de type Kelvin–Voigt faisant intervenir la dérivée fractionnaire de Caputo afin de prendre en compte les effets de mémoire du matériau.

Le problème est soumis à des conditions de contact unilatéral de type Signorini ainsi qu' une loi de frottement de Coulomb. Après avoir présenté le cadre physique et la modélisation mathématique du problème, nous établissons une formulation variationnelle adaptée.

L'étude théorique repose sur des outils d'analyse fonctionnelle, notamment les espaces de Sobolev, les dérivées fractionnaires et les inéquations variationnelles. Enfin, sous des hypothèses convenables portant sur les données du problème, nous démontrons un résultat d'existence de solution à l'aide de méthodes de monotonie, de compacité et d'approximation.

Mots-clés : problème quasi-statique, contact unilatéral, matériau viscoélastique, dérivée fractionnaire de Caputo, frottement de Coulomb, formulation variationnelle, existence de solution.

Abstract

The objective of this thesis is to study a quasistatic viscoelastic contact problem with friction. The material is modeled by a fractional viscoelastic constitutive law of Kelvin–Voigt type involving the Caputo fractional derivative in order to take into account the memory effects of the material.

The problem is subjected to unilateral contact conditions of Signorini type together with a Coulomb friction law. After presenting the physical framework and the mathematical modeling of the problem, we establish an appropriate variational formulation.

The theoretical study is based on tools from functional analysis, particularly Sobolev spaces, fractional derivatives, and variational inequalities. Finally, under suitable assumptions on the problem data, we prove an existence result for the solution by using monotonicity, compactness, and approximation methods.

Keywords : quasistatic problem, unilateral contact, viscoelastic material, Caputo fractional derivative, Coulomb friction, variational formulation, existence of solution.

ملخص

يهدف هذا العمل إلى دراسة مسألة شبه ساكنة للتماس اللزج المرن مع الاحتكاك. تم نمذجة المادة بواسطة قانون سلوك لزج مرن كسري من نوع كلفن–فويغت يعتمد على المشتقة الكسرية لكابوتو، وذلك من أجل أخذ تأثيرات الذاكرة الخاصة بالمادة بعين الاعتبار.

تخضع المسألة لشروط تماس أحادي الجانب من نوع سينيوريني، بالإضافة إلى قانون احتكاك من نوع كولوم. بعد عرض الإطار الفيزيائي والنمذجة الرياضية للمسألة، قمنا بإقامة صياغة تغايرية مناسبة.

تعتمد الدراسة النظرية على أدوات التحليل الدالي، لاسيما فضاءات سوبوليف، والمشتقات الكسرية، والمتراجحات التغايرية. وأخيرًا، وتحت فرضيات مناسبة تتعلق بمعطيات المسألة، قمنا بإثبات نتيجة وجود حل باستعمال طرق الرتابة، والتراص، والتقريب.

الكلمات المفتاحية: مسألة شبه ساكنة، تماس أحادي الجانب، مادة لزجة مرنة، المشتقة الكسرية لكابوتو، احتكاك كولوم، صياغة تغايرية، وجود حل.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale **1**

Notations principales **4**

1 Préliminaires et Modélisation Mathématique **6**

1.1 Cadre physique 6

1.2 Modèle mathématique du cadre physique 8

1.3 Loi de comportement viscoélastique fractionnaire 9

1.3.1 Loi de comportement viscoélastique à mémoire courte 10

1.3.2 Loi de comportement viscoélastique à mémoire longue 11

1.3.3 Loi de comportement viscoélastique fractionnaire 11

1.4 Conditions de contact et de frottement 11

1.4.1 Contact unilatérale. 11

1.4.2 Loi de frottement de type Coulomb. 13

2 Outils Mathématiques **14**

2.1 Espaces fonctionnels 14

2.1.1 Fonctions continues et continûment différentiables 14

2.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$ 15

2.1.3 Espace de Hilbert 16

2.1.4 Espace de Sobolev 16

2.1.5 Analyse convexe et sous-différentiels 18
2.2 Espaces liés au problème à étudier 19
2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles 21
2.3.1 Espace de Lebesgue $L^p(0,T;X)$ 21
2.3.2 Espace de Sobolev $W^{k,p}(0,T;X)$ 22
2.4 Éléments d'analyse non linéaire dans un espace de Hilbert 23
2.5 Dérivées fractionnaires 26
2.5.1 Fonction Gamma 26
2.5.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville 27
2.5.3 Dérivée fractionnaire de Caputo 30
2.6 Espaces de Bochner 32
2.7 Classification des équations aux dérivées partielles 33
2.8 Principe de la méthode des différences finies 33
2.9 La méthode de Rothe 34
2.10 Méthodes de discrétisation numérique 35
2.10.1 Approximation par la méthode des différences finies 35
2.10.2 La méthode de Rothe pour les problèmes d'évolution 36
2.10.3 Application au modèle viscoélastique (Substitution de la chaleur) 36
2.11 Méthode de Galerkin pour un problème variationnel 38

3 Problème de contact viscoélastique avec frottement à dérivée fractionnaire en temps 40
3.1 Formulation mécanique du problème 40
3.2 Formulation variationnelle du problème 41
3.3 Résultat d'existence 46

Conclusion générale 56

Bibliographie 57

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les problèmes de contact entre corps déformables et fondations rigides occupent une place importante en mécanique des milieux continus, en raison de leurs nombreuses applications dans l'ingénierie, l'industrie et les sciences appliquées. On les rencontre, par exemple, dans l'étude des prothèses articulaires, des systèmes de freinage, des matériaux polymères soumis à des chargements cycliques, ou encore des joints d'étanchéité. Ces problèmes deviennent plus complexes lorsque le matériau étudié présente un comportement viscoélastique, lorsque le contact est accompagné de frottement, ou encore lorsque des phénomènes supplémentaires tels que l'usure et l'endommagement interviennent dans l'évolution du système.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude d'un problème électro-viscoélastique avec usure et endommagement. Le corps considéré occupe un domaine borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, dont la frontière est divisée en plusieurs parties correspondant respectivement aux conditions de déplacement, de traction et de contact. Le matériau est supposé viscoélastique, et sa loi de comportement est décrite par un modèle de type Kelvin–Voigt faisant intervenir une dérivée fractionnaire de Caputo. Ce choix permet de mieux prendre en compte les effets de mémoire caractéristiques des matériaux viscoélastiques.

Le problème étudié est formulé dans un cadre quasistatique, où les effets d'inertie sont négligés devant les forces appliquées. Il est soumis à des conditions aux limites classiques, ainsi qu'à des conditions de contact unilatéral de type Signorini et à une loi de frottement de type Coulomb. Ces conditions traduisent le fait que le corps ne peut

pas pénétrer la fondation rigide et que le frottement dépend de la contrainte normale exercée sur la zone de contact.

La principale difficulté de ce problème réside dans la combinaison de plusieurs éléments non triviaux :

— la dérivée fractionnaire de Caputo, qui introduit un effet de mémoire dans l'évolution du système et rend l'opérateur non local en temps ;

— les conditions de contact unilatéral de type Signorini, qui conduisent à une formulation non lisse de type inéquation variationnelle ;

— la loi de frottement de Coulomb, qui couple les composantes normale et tangentielle de la contrainte ;

L'objectif principal de ce travail est de présenter une modélisation mathématique rigoureuse du problème, d'introduire les outils fonctionnels nécessaires à son étude, puis d'établir une formulation variationnelle adaptée permettant d'obtenir un résultat d'existence de solution. Le résultat principal de ce mémoire consiste à établir l'existence d'une solution pour un problème électro-viscoélastique dont la loi de comportement fait intervenir une dérivée fractionnaire de Caputo, en utilisant une méthode d'approximation appropriée combinée à des arguments de monotonie, de pseudomonotonie et de compacité adaptés au cadre étudié.

Pour cela, nous utilisons plusieurs notions d'analyse fonctionnelle, notamment les espaces de Hilbert, les espaces de Sobolev, les espaces de fonctions à valeurs vectorielles, les dérivées fractionnaires, ainsi que des résultats liés aux inéquations variationnelles et aux méthodes d'approximation. Les références principales qui guident notre analyse sont issues des travaux de Han et Sofonea [10], Migorski et Ochal [16] et Carstensen et Gwinner [6].

Ce mémoire est organisé de la manière suivante.

Dans le premier chapitre, nous présentons le cadre physique du problème, la modélisation mécanique du corps viscoélastique, la loi de comportement fractionnaire, ainsi que les conditions de contact unilatéral et de frottement.

Le deuxième chapitre est consacré aux outils mathématiques nécessaires à l'étude du problème. Nous y rappelons les principaux espaces fonctionnels utilisés, les résultats d'analyse convexe, les notions de dérivées fractionnaires, ainsi que quelques méthodes

classiques de discrétisation et d'approximation.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous formulons le problème électro-viscoélastique, puis nous établissons sa formulation variationnelle. Sous des hypothèses convenables sur les données du problème et les opérateurs considérés, nous présentons et démontrons un résultat d'existence de solution.

NOTATIONS PRINCIPALES

Si Ω est un domaine de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, on note par

$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels,
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de Ω,
Γ	la frontière de Ω supposée régulière,
$\Gamma_i (i = D, C, N)$	une partie mesurable de la frontière Γ,
$\text{mes}\,\Gamma_D$	la mesure de Lebesgue $(d-1)$ dimensionnelle de Γ_D,
ν	la normale unitaire sortante à Γ,
v_ν, v_τ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v,
σ_ν, σ_τ	les composantes normale et tangentielle du champ tensoriel σ,
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$,
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$,
H_1	l'espace $H^1(\Omega)^d$,
$\mathcal{H}$	l'espace $L^2_s(\Omega)^{d\times d}$,
$\mathcal{H}_1$	l'espace $\{\sigma \in \mathcal{H} / \text{Div}\,\sigma \in H\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ,
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$	l'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,
$H_\Gamma^{'}$	l'espace dual de H_Γ,
$\gamma : H_1 \longrightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si H est un espace de Hilbert réel, on utilise les notations suivantes :

$(.,.)_H$	le produit scalaire de H,
$\langle .,. \rangle_{H' \times H}$	le produit de dualité entre H' et H,
$\|.\|_H$	la norme de H,

De plus, si $[0,T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$, on note par

$C(0,T;H)$	l'espace des fonctions continues sur $[0,T]$ dans H,
$C^1(0,T;H)$	l'espace des fonctions continument dérivables sur $[0,T]$ dans H,
$L^p(0,T;H)$	l'espace des fonctions mesurables sur $[0,T]$ dans H, telles que $\int_0^T \|u(t)\|_H^p dt < +\infty$ avec les modifications usuelles si $p = +\infty$.
$\|.\|_{L^p(0,T;H)}$	la norme de $L^p(0,T;H)$,
$W^{k,p}(0,T;H)$	l'espace de Sobolev de paramètres k et p,
$\|.\|_{W^{k,p}(0,T;H)}$	la norme de $W^{k,p}(0,T;H)$.

Autre notations :

$\dot{u}, \ddot{u}$	les dérivées première et seconde de u par rapport au temps,
$\mathrm{Div}\,\sigma$	divergence de σ,
${}^{RL}D_a^\alpha$	La dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville,
${}^{C}D_a^\alpha$	La dérivation fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α,
$\varepsilon(u)$	le tenseur de déformation,
$\mathbb{S}^d$	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d$,
c, C	des constantes génériques strictements positives,
Ψ_K	fonction indicatrice de K,
p.p.	presque partout.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Ce chapitre pose le cadre physique et mathématique du problème. Après avoir décrit la géométrie du domaine et les conditions aux limites, nous présentons la loi de comportement viscoélastique fractionnaire de type Kelvin–Voigt, l'équation d'équilibre quasi-statique, ainsi que les conditions de contact unilatéral de Signorini et la loi de frottement de Coulomb. L'ensemble constitue le modèle mécanique initial à étudier.

1.1 Cadre physique

Nous supposons qu'un corps viscoélastique occupe un domaine régulier Ω de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, qui sera supposé borné avec une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$. Cette frontière est divisée en trois parties ouvertes disjointes Γ_D, Γ_N et Γ_C, telles que $\text{mes}(\Gamma_D) > 0$. L'intervalle est noté $[0, T]$, où T représente une valeur positive fixe qui définit la borne supérieure de l'intervalle de temps.
Le corps est supposé encastré sur $\Gamma_D \times (0, T)$ et est soumis à une force volumique f_1 dans $\Omega \times (0, T)$. Une densité de force de traction f_N agit sur $\Gamma_N \times (0, T)$. L'écart normalisé entre Γ_C et une fondation rigide est noté par g (Figure1.1).

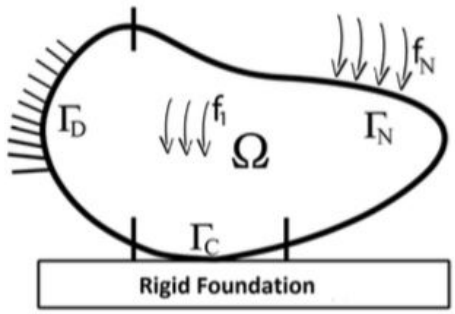


FIGURE 1.1 – Domaine dans la configuration initiale.

Dans la suite, nous utilisons $\mathbb{S}^d$ pour désigner l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$, tandis que « $\cdot$ » et $\|\cdot\|$ représenteront respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{S}^d$ et $\mathbb{R}^d$ tels que.

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad \|v\| = (v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\tau\| = (\tau, \tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d$$

Nous désignons par u_ν,u_τ les composantes normale et tangentielle d'un vecteur u à la frontière tels que

$$\begin{cases} v_\nu = v \cdot \nu, \\ v_\tau = v - v_\nu \cdot \nu. \end{cases} \tag{1.1}$$

Nous désignons par $\sigma = \sigma(x,t)$ le champ des contraintes, par $u = u(x,t)$ le champ des déplacements et par $\varepsilon(u)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega$ et $t \in [0, T]$.

Nous notons par σ_ν, σ_τ les composantes normale et tangentielle d'un champ des contraintes à la frontière telles que :

$$\begin{cases} \sigma_\nu = (\sigma\nu)\cdot\nu, \\ \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu\cdot\nu. \end{cases} \tag{1.2}$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma\nu)\cdot v = \sigma_\nu v_\nu + \sigma_\tau\cdot v_\tau,$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire dans l'établissement de formulation variationnelle de problème mécanique de contact.
La relation entre le champ des déplacements u et le champ des déformations ε dans l'hypothèse des petites transformations est donnée par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad 1 \le i,j \le d,$$

1.2 Modèle mathématique du cadre physique

Soit un corps matériel qui occupe un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2,3)$ avec une surface frontière $\partial\Omega = \Gamma$ supposée assez régulière. On étudie l'état d'équilibre du corps résultant de l'application des forces volumiques dans Ω et des forces surfaciques sur une partie de la frontière, dans un intervalle de temps $[0,T]$. Les fonctions inconnues de notre problème P sont Le champ des déplacements $u : \Omega\times[0,T] \to \mathbb{R}^d$, Le champ des contraintes $\sigma : \Omega\times[0,T] \to \mathcal{S}^d$.
Dans le cas générale, on décrit l'évolution d'un corps matériel par l'équation de mouvement de Cauchy suivante

$$\mathrm{Div}\,\sigma + f_1 = \rho\ddot{u} \quad \text{dans } \Omega\times(0,T), \tag{1.3}$$

où $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^+$ désigne la densité de masse, et Div représente l'opérateur divergence pour les tenseurs ; $\mathrm{Div}\,\sigma = (\sigma_{ij,j})$. Le processus d'évolution défini par (1.3) s'appelle processus dynamique.

Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier, par exemple, dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}$ varie très lentement par rapport au temps, le terme $\rho\ddot{u}$ peut être négligé. Dans ce cas, l'équation (1.3) devient :

$$\mathrm{Div}\,\sigma + f_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T). \tag{1.4}$$

Cette dernière équation s'appelle l'équation d'équilibre et les processus d'évolution définis par cette équation s'appellent processus quasistatiques. Dans le cadre physique décrivé ci-dessus (dans la section précédente) on a supposé que f_1 et f_N varient très lentement par rapport au temps. Par conséquent, si nous les accélérations dans le milieu sont négligeables nous nous plaçons dans le cas quasistatique et nous utilisons l'équation (1.4).

Puisque le corps est encastré sur Γ_D, le champ des déplacements s'annule :

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D \times (0,T).$$

La condition aux limites en traction est :

$$\sigma\nu = f_N \quad \text{sur } \Gamma_N \times (0,T),$$

où f_N représente la densité des forces surfacique appliquées sur Γ_N et constitue une donnée du problème.

1.3 Loi de comportement viscoélastique fractionnaire

La loi de comportement de Kelvin-Voigt est un modèle fondamental en rhéologie pour décrire le comportement des matériaux viscoélastiques. Dans sa forme classique, elle combine un ressort (comportement élastique) et un amortisseur (comportement visqueux) connectés en parallèle. L'expression de la contrainte $\sigma(t)$ en fonction de la déformation $\varepsilon(t)$ est donnée par :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)),$$

où $\mathcal{A}$ le coefficient de viscosité , $\mathcal{B}$ est le module d'élasticité, et $\dot{\varepsilon}(t)$ la dérivée temporelle classique de la déformation.

Certains matériaux, comme les polymères (gommes, caoutchouc,...), présentent un comportement viscoélastique. De tels systèmes peuvent être modélisés à l'aide de la relation suivante entre les deux tenseurs

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon({}_0^c D_t^\alpha u(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)),$$

où ${}_0^c D_t^\alpha$ désigne la dérivée fractionnaire de Caputo. Ce modèle est particulièrement adapté pour les systèmes où les effets de mémoire et de diffusion anormale sont significatifs.

Cette loi est justifiée par Bagley dans [2] (pour $\alpha = \frac{1}{2}$). Dans, l'introduction de dérivées fractionnaires le cas de polymères est motivée par l'analyse suivante : à cause de la longueur des fibres, les déformations appliquées prennent du temps à être communiquées de proche en proche (la longueur des fibres enroulées, étant bien supérieure à la distance géométrique). Elles sont progressivement amorties et induisent des effets de mémoire (l'état à l'instant t va dépendre des états antérieurs). Si la contrainte décroit comme $t^{-(1+\alpha)}$ elle pourra induire une dérivée fractionnaire d'ordre α. Cet opérateur permet ainsi de donner une description macroscopique simple (ne nécessitant que peu de paramètres) de phénomènes microscopiques complexes. Une présentation de la viscoélasticité via la dérivation fractionnaire.

1.3.1 Loi de comportement viscoélastique à mémoire courte

Une loi de comportement viscoélastique générale à mémoire courte est donnée par

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}) + \mathcal{B}\varepsilon(u)$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des fonctions constitutives non linéaires, tel que $\mathcal{A}$ représente l'opérateur de viscosité et $\mathcal{B}$ est l'opérateur d'élasticité. Pour un corps élastique, la loi se réduit à

$$\sigma = \mathcal{B}(\varepsilon(u)).$$

On rappelle qu'en viscoélasticité linéaire, le tenseur de contrainte $\sigma = (\sigma_{ij})$ est donné par

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\dot{u}) + b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(u),$$

où $\mathcal{A} = (a_{ijkl})$ est le tenseur de viscosité et $\mathcal{B} = (b_{ijkl})$ est le tenseur d'élasticité, pour $i, j, k, l = 1, \ldots, d$.

1.3.2 Loi de comportement viscoélastique à mémoire longue

Une loi de comportement viscoélastique à mémoire longue est donnée par

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon(\dot{u}(t)) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) + \int_0^t G(t-s)\varepsilon(u(s))ds$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des fonctions constitutives non linéaires.$\mathcal{A}$ représente l'opérateur de viscosité et $\mathcal{B}$ désigne l'opérateur d'élasticité. Ici G est le tenseur de relaxation d'ordre quatre qui définit le comportement du matériau avec mémoire longue.

Lorsque $G \equiv 0$ on retrouve la viscoélasticité de mémoire courte.

1.3.3 Loi de comportement viscoélastique fractionnaire

Le comportement viscoélastique du matériau est modélisé à l'aide d'une loi constitutive linéaire avec temps fractionnaire. Plus précisément, le tenseur des contraintes σ est lié au tenseur des déformations linéarisées $\varepsilon(u)$ par :

$$\sigma(t) = \mathcal{A}\varepsilon\left({}_0^c D_t^\alpha u(t)\right) + \mathcal{B}\varepsilon(u(t)) \quad \text{dans} \quad \Omega \times (0,T),$$

où ${}_0^c D_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha \in (0,1)$ au sens de Caputo. Cette relation traduit un comportement viscoélastique avec mémoire, typique des matériaux à réponse non instantanée.

1.4 Conditions de contact et de frottement

1.4.1 Contact unilatérale.

Dans ce cas nous le corps est susceptible d'entrer en contact avec une base rigide. Par conséquent, le mouvement des particules matérielles de Γ_C est restreint de la présence du solide rigide de telle sorte que, avant l'application des forces externes, la distance de

chaque point $x \in \Gamma_C$ à la base rigide dans la direction de la normale $\nu(x)$ est connue et notée par $g(x)$.

Nous supposons aussi que le contact entre le corps et la base rigide se produit si et seulement si $u_\nu = g$. Puisque la base est considérée rigide, elle ne subira pas de déformations, donc le corps Ω ne pourra pas la pénétrer ; cette propriété se traduit mathématiquement par l'inégalité

$$u_\nu \leq g \quad \text{sur } \Gamma_C. \tag{1.5}$$

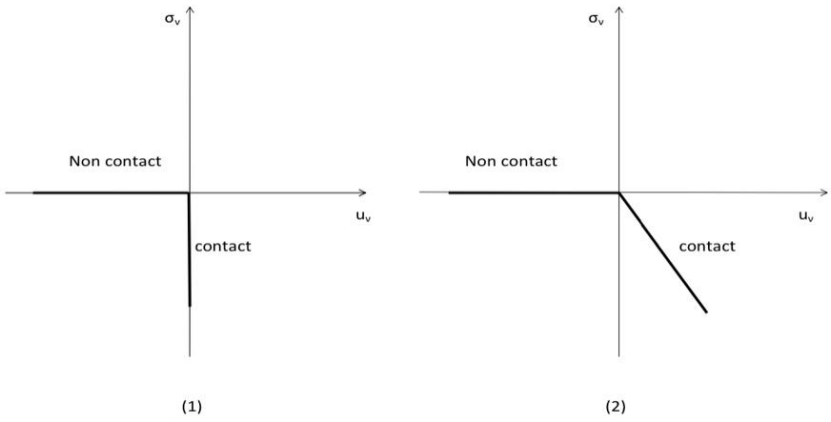


FIGURE 1.2 – Loi de Signorini (1) et loi de compliance normale (2) pour g=0.

Dans les points de Γ_C tels que $u_\nu < g$, il n'existe pas de contact entre Ω et la base rigide donc le vecteur des contraintes de Cauchy s'annule, c-à-d

$$u_\nu < g \Rightarrow \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_C.$$

Pour les points de Γ_C tels que $u_\nu = g$, le contact entre le corps Ω et la base rigide se produit ; nous supposons pour ces points que la base rigide exerce une pression inconnue suivant la direction de la normale et orientée vers Ω ; on a

$$u_\nu = g \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_c. \tag{1.6}$$

On peut résumer les conditions (1.5)–(1.6) de la manière condensée suivante :

$$u_\nu \leq g, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu(u_\nu - g) = 0.$$

1.4.2 Loi de frottement de type Coulomb.

C'est une des lois de frottement les plus répandues et elle est plus réaliste. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer sous la forme :

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|)\|\sigma_\nu\|, & \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|)\|\sigma_\nu\| \Rightarrow \boldsymbol{u}_\tau(t) = \boldsymbol{0}, & \text{on } \Gamma_C \times (0,T) \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|)\|\sigma_\nu\| \Rightarrow \exists \lambda \neq 0,\ \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = -\lambda \boldsymbol{u}_\tau(t) & \end{cases}$$

CHAPITRE 2

OUTILS MATHÉMATIQUES

Ce chapitre est consacré à la description des espaces fonctionnels utilisés dans cette ce mémoire. Nous supposons dans ce chapitre que Ω est un domaine borné et de Lipschitz de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$), c'est-à-dire que sa frontière Γ est représentable localement comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de $\mathbb{R}^{d-1}$, Ω étant situé localement d'un seul côté de Γ. Par ailleurs, nous considérons une partition de Γ en trois parties mesurables disjointes Γ_N, Γ_D et Γ_C.

2.1 Espaces fonctionnels

Dans cette section nous donnons quelques rappels sur les espaces de fonctions à valeurs réelles qui nous aident à comprendre les propriétés des espaces appropriés à la mécanique. Nous allons définir les espaces de fonctions continues, continûments différentiables, les fonctions p-intégrables et les espaces de Sobolev. Pour plus de détails sur ce sujet nous renvoyons le lecteur, par exemple, aux références [1, 4, 18].

2.1.1 Fonctions continues et continûment différentiables

L'espace des fonctions uniformément continues sur Ω est noté par $C(\overline{\Omega})$ et il est un espace de Banach pour la norme donnée par :

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega})} = \sup\{|v(x)|,\ x \in \overline{\Omega}\}.$$

Toute fonction uniformément continue est bornée et possède une unique extension continue sur $\overline{\Omega}$. Pour tout entier k, l'espace $C^k(\overline{\Omega})$ donné par

$$C^k(\overline{\Omega}) = \{v \in C(\overline{\Omega}) / D^\alpha v \in C(\overline{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leq k\},$$

où $D^\alpha v = \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d = |\alpha|$,

est l'espace des fonctions k fois continument différentiable sur $\overline{\Omega}$. Il est aussi un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

L'espace $C^\infty(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables :

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\overline{\Omega}).$$

Nous pouvons maintenant parler de l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur l'ensemble à support compact inclus dans Ω, défini par

$$C_0^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) / \exists\, K \subset \Omega \text{ compact; } \operatorname{supp}(v) \subset K\}$$

où $supp\ v = \{\overline{v \in C^\infty(\Omega) / v(x) \neq 0}\}$ est le support de la fonction v. Si $supp\ v$ est un sous ensemble propre de Ω, on dit que v est une fonction à support compact dans Ω.

2.1.2 Espaces $L^p(\Omega)$

On suppose connues la définition des applications mesurables pour la mesure de Lebesgue et la définition de $L^1(\Omega)$; l'espace des fonctions intégrables sur Ω, muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |v(x)| dx.$$

Définition 2.1.1. *L'espace des fonctions p-intégrables dans Ω peut être défini par :*

$$L^p(\Omega) = \{v \text{ mesurables sur } \Omega \text{ à valeurs dans } \mathbb{K};\ |v|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

Grâce à l'inégalité de Minkowski, $L^p(\Omega)$ est un espace normé, dont la norme noté $\|v\|_{L^p}$, est définie par :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

On appelle l'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ l'ensemble

$$L^\infty(\Omega) = \{v : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}; \exists\ C > 0, |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\},$$

muni de la norme définie par

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = inf\{C; |v(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\} = \operatorname*{supess}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

2.1.3 Espace de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(.,.)_H$ un produit scalaire sur H i.e. $(.,.)_H : H\times H \to \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\| u \|_H = (u,u)_H^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1}$$

On rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u,v)_H| \leq \| u \|_H \| v \|_H,\ \forall u,v \in H.$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (2.1). Soit $H^{'}$ l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\| \eta \|_{H'} = \sup_{v\in H-\{0\}} \frac{|\langle \eta, v\rangle_{H'\times H}|}{\| v \|_H},$$

où $\langle .,.\rangle_{H'\times H}$ représente le produit de dualité entre $H^{'}$ et H.

2.1.4 Espace de Sobolev

L'espace de Sobolev a permis de résoudre de bon nombre des problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur les espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega)/u_{,i} \in \mathrm{L}^2(\Omega);\ i = \overline{1,d}\}.$$

où $u_{,i}$ désigne $\frac{\partial u}{\partial x_i}$

On note par ∇u le vecteur de composante $u_{,i}$. Il est clair que $\nabla u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espaces de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + (u_{,i}, v_{,i})_{\mathrm{L}^2(\Omega)},$$

et la norme associée

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)},$$

alors on a

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega)} = \| u \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \| \nabla u \|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)^d}.$$

On a les résultats suivants :

Théorème 2.1.1. *(**de densité**).*

$$C^1(\overline{\Omega}) \textit{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 2.1.2. *(**Rellich**).*

$$H^1(\Omega) \subset \mathrm{L}^2(\Omega) \textit{ avec injection compacte.}$$

Théorème 2.1.3. *(**trace de Sobolev**).*

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Gamma)$ *telle que* $\delta u = u|_\Gamma$ *pour tout* $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Remarque 2.1.1. *L'espace* $\mathrm{L}^2(\Gamma)$ *est l'ensemble des classes de fonctions réelles sur* Γ *qui sont* L^2 *pour la mesure superficielle* $d\Gamma$. *L'application* δ *s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application* $u \mapsto u|_\Gamma$ *définir pour* $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Remarque 2.1.2. *On note que l'application de trace* $\delta : H^1(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\Gamma)$ *est un opérateur compact.*

Définition 2.1.2. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1,+\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par :*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) |\ \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u\},$$

Remarque 2.1.3. *Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α.*

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}} & \text{si} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \max\limits_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.
Pour plus des détails sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le lecteur, par exemple, à [1, 4].

2.1.5 Analyse convexe et sous-différentiels

Dans l'étude des problèmes de contact unilatéral, il est nécessaire d'introduire la notion de fonction indicatrice pour modéliser l'ensemble des déplacements admissibles. Soit K un ensemble convexe fermé représentant les contraintes physiques (par exemple $u_\nu \leq g$).

La fonction indicatrice I_K est définie par :

$$I_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases}$$

Le sous-différentiel de cette fonction, noté ∂I_K, joue un rôle fondamental dans la formulation des conditions de contact de Signorini. Pour le déplacement normal u_ν par rapport à l'obstacle g, il est défini par :

$$\partial I_K(u_\nu) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } u_\nu < g, \\ (-\infty, 0] & \text{si } u_\nu = g, \\ \emptyset & \text{si } u_\nu > g. \end{cases}$$

2.2 Espaces liés au problème à étudier

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques u et σ :

$$\begin{cases} H = \{u = (u_i)\ ;\ u_i \in \mathrm{L}^2(\Omega)\} = \mathrm{L}^2(\Omega)^d, \\ \mathcal{H} = \{\sigma = (\sigma_{ij})\ ;\ \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in \mathrm{L}^2(\Omega)\} = \mathrm{L}^2_s(\Omega)^{d\times d}, \\ H_1 = \{u = (u_i)\ ;\ \varepsilon(u) \in \mathcal{H}\} = H^1(\Omega)^d, \\ \mathcal{H}_1 = \{\sigma \in \mathcal{H}\ ;\ \mathrm{Div}\sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}. \end{cases}$$

Les espaces $H, \mathcal{H}, H_1$ et $\mathcal{H}_1$ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants :

$$\begin{cases} (u,v)_H = \displaystyle\int_\Omega u_i v_i dx \quad \forall u, v \in H, \\ (\sigma,\tau)_{\mathcal{H}} = \displaystyle\int_\Omega \sigma_{ij}\tau_{ij} dx \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}, \\ (u,v)_{H_1} = (u,v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \quad \forall u, v \in H_1, \\ (\sigma,\tau)_{\mathcal{H}_1} = (\sigma,\tau)_{\mathcal{H}} + (\mathrm{Div}\,\sigma, \mathrm{Div}\,\tau)_H \quad \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}_1, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $\varepsilon : H_1 \to \mathcal{H}$ et $\mathrm{Div} : \mathcal{H}_1 \to H$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)),\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}),\ \mathrm{Div}\,\sigma = (\sigma_{ij,j}).$$

Les normes sur les espaces $H, \mathcal{H}, H_1$ et $\mathcal{H}_1$ sont notées par $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_{\mathcal{H}}, \|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ respectivement.

Puisque la frontière Γ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace γv de v sur Γ. Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \to \mathrm{L}^2(\Gamma)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective. L'image de H_1 par cette application est notée par $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ ce sous-espace s'injecte continûment dans $L^2(\Gamma)^d$. Désignons par $H_\Gamma^{'}$ le dual de H_Γ, et $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_\Gamma^{'}\times H_\Gamma}$ le produit de dualité entre $H_\Gamma^{'}$ et H_Γ. Pour tout $\sigma \in \mathcal{H}_1$, il existe un élément $\sigma\nu \in H_\Gamma^{'}$ tel que :

$$\langle \sigma\nu, \gamma v\rangle_{H_\Gamma^{'}\times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathrm{Div}\,\sigma, v)_H \ \forall v \in H_1.$$

En outre, si σ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$\langle \sigma\nu, \gamma v\rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v da \ \forall v \in H_1.$$

Donc, pour σ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} + (\mathrm{Div}\,\sigma, v)_H = \int_\Gamma \sigma\nu \cdot v da \ \forall v \in H_1. \tag{2.3}$$

Nous introduisons au présent un sous-espace fermé de H_1, dont la définition est donnée ci-après

$$\mathrm{V} = \{v \in H_1 \ ; \ v = 0 \qquad \text{sur}\,\Gamma_D\}.$$

De plus, nous définissons l'ensemble des déplacements admissibles par

$$V_{ad} = \{v \in V ; \ v_\nu \leq g \text{ sur } \Gamma_C\}.$$

Soit $\mathrm{mes}\,\Gamma_D > 0$. Alors il existe une constante $c_K > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_D vérifie l'inégalité suivante, dite inégalité de Korn

$$\| \varepsilon(v) \|_{\mathcal{H}} \geq c_K \| v \|_{H_1} \quad \forall v \in \mathrm{V}. \tag{2.4}$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouver dans [17]

Nous considérons sur l'espace V, le produit scalaire donné par

$$(u, v)_{\mathrm{V}} = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}} \qquad \forall u, v \in \mathrm{V}.$$

Soit $\|\cdot\|_{\mathrm{V}}$ la norme associée, i.e.

$$\| v \|_{\mathrm{V}} = \| \varepsilon(v) \|_{\mathcal{H}} \qquad \forall v \in \mathrm{V}. \tag{2.5}$$

Par l'inégalité de Korn et (2.2), il vient que $\|\cdot\|_{H_1}$ et $\|\cdot\|_{\mathrm{V}}$ sont des normes équivalentes sur V et ainsi $(\mathrm{V}, \|\cdot\|_{\mathrm{V}})$ est un espace de Hilbert.

En effet, d'après (2.2)

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}.$$

Alors

$$\|v\|_{H_1} = \left(\|v\|_H^2 + \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant (2.4) et (2.5), il résulte

$$c_K \|v\|_{H_1} \leq \| v \|_{\mathrm{V}} = \|\varepsilon(v)\|_{\mathcal{H}} \leq \|v\|_{H_1}.$$

Alors $\|\cdot\|_{H_1}$ équivalent $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$.
En outre, d'après le théorème de trace de Sobolev, on trouve qu'il existe une constante $c_0 > 0$ dépendante uniquement de Ω, Γ_D et Γ_C telle que :

$$\| v \|_{\mathrm{L}^2(\Gamma_C)^d} \leq c_0 \| v \|_{\mathrm{V}} \qquad \forall v \in \mathrm{V}.$$

2.3 Espaces des fonctions à valeurs vectorielles

Ce paragraphe est destiné à rappeler les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel.

Définition 2.3.1. *Une fonction $u : [0,T] \to X$ est dite mesurable s'il existe un sous-ensemble $E \subset [0,T]$ de mesure nulle et une suite $(u_n)_{n\in N}$ de fonctions appartenant à $C_c(0,T;X)$ telle que $\|u_n(t) - u(t)\|_X \to 0$ quand $n \to +\infty$, pour tout $t \in [0;T]/E$.*

Définition 2.3.2. *Une fonction $u : [0,T] \to X$ est dite intégrable s'il existe une suite $(u_n)_{n\in N}$ de fonctions appartenant à $C_c(0,T;X)$ telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^T \|u_n(t) - u(t)\|_X dt = 0.$$

Théorème 2.3.1. *(**Bochner**). Une fonction $u : [0,T] \to X$ mesurable et intégrable si et seulement si $t \to \|u(t)\|_X : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ est intégrable. Dans ce cas*

$$\| \int_0^T u(t)dt \|_X \leq \int_0^T \|u(t)\|_X dt.$$

2.3.1 Espace de Lebesgue $L^p(0,T;X)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Lebesgue $L^p(0,T;X)$ est l'ensemble des classes de fonctions $u : [0,T] \to X$ mesurables, telles que l'application $t \to \|u(t)\|_X$ appartient à $L^p(0,T)$. On sait que $L^p(0,T;X)$ est un espace vectoriel normé avec la norme

$$\begin{cases} \|u\|_{L^p(0,X;T)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } \ 1 \leq p < \infty, \\ \|u\|_{L^\infty(0,X;T)} = \inf\{c > 0 \,/\, \|u(t)\|_X < c \quad \text{p.p. } \ t \in (0,T)\} & \text{si } \ p = \infty. \end{cases}$$

Proposition 2.3.1. *1. $L^p(0,T;X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ est un espace de Banach.*

2. *Si X est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $(.,.)_X$, alors $L^2(0,T;X)$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X dt.$$

3. *$L^r(0,T;X) \subseteq L^q(0,T;X)$, avec injection continue, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.*

4. *Si X est un espace de Hilbert, alors*

$$L^p(0,T;X)' = L^q(0,T;X), \quad \text{si } 1 < p,q < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

$$L^1(0,T;X)' = L^\infty(0,T;X),$$

où $L^p(0,T;X)'$ représente le dual de l'espace $L^p(0,T;X), 1 \leq p \leq \infty$.

Définition 2.3.3. *Soit $u, w \in L^1(0,T;X)$. La fonction w s'appelle la dérivée généralisée d'ordre n de u sur $(0,T)$ si*

$$\int_0^T \varphi^{(n)}(t)u(t)dt = (-1)^n \int_0^T \varphi(t)w(t)dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0,T)$$

$C_c^\infty(0,T)$ étant l'espace des fonctions réelles indéfiniment dérivables à support compact dans $(0,T)$. Nous écrivons $w = \dot{u}$ pour $n = 1$ et $w = u^{(n)}$ pour $n \geq 2$.

Lemme 2.3.1. *Soit $1 \leq r < \infty$. Alors les opérateurs linéaires $\mu_n : L^r(J,V) \to L^r(J,V)$ $(n \in \mathbb{N})$ sont uniformément bornés de norme 1 et $\mu_n v \to v$ dans $L^r(J,V)$ lorsque $n \to \infty$ pour tout $v \in L^r(J,V)$.*

Pour plus des détails sur ce lemme nous renvoyons le lecteur, par exemple, à [6].

2.3.2 Espace de Sobolev $W^{k,p}(0,T;X)$

Définition 2.3.4. *Soit $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{1,p}(0,T;X)$ est l'espace des fonction $u : [0,T] \to X$ telles que $u \in L^p(0,T;X)$ et $\dot{u} \in L^p(0,T;X)$. $W^{1,p}(0,T;X)$ est un espace de Banach muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;X)} = \|u\|_{L^p(0,T;X)} + \|\dot{u}\|_{L^p(0,T;X)}.$$

En particulier, $W^{1,2}(0,T;X)$ est un espace de Hilbert pour la norme précédente.

Définition 2.3.5. *Une fonction $u : [0;T] \to X$ est dite absolument continue si quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon)$ tel que pour toute suite d'intervalles (a_i, b_i) disjoints, inclus dans $[0;T]$, tels que $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ on a $\sum_i \|u(b_i) - u(a_i)\|_X \leq \varepsilon$.*

Théorème 2.3.2. *Soit $1 \leq p \leq \infty$, X un espace de Banach réflexif et soit $u \in L^p(0,T;X)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$u \in W^{1,p}(0,T;X)$.*
2. *u admet un représentant absolument continu presque partout dérivable, ayant la dérivée forte dans $L^p(0,T;X)$.*
3. *Il existe $u_0 \in X$ et $g \in L^p(0,T;X)$, telles que*

$$u(t) = u_0 + \int_0^t g(s)ds \quad \forall t \in [0,T].$$

Théorème 2.3.3. *Si la fonction u appartient à l'espace $W^{1,p}(0,T;X)$, $p \in [1,\infty]$. Nous avons alors :*

1. $\|u(t) - u(s)\|_X \leq \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$
2. *si de plus $p < \infty$, on a*

$$\|u(t) - u(s)\|_X^p \leq (t-s)^p \int_s^t \|\dot{u}(r)\|_X^p dr \quad 0 \leq s \leq t \leq T,$$

3. *si $p = \infty$, on a*

$$\|u(t) - u(s)\|_X \leq \|\dot{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} \quad 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Lemme 2.3.2. *(a) Soit $1 \leq p \leq \infty$, soit V un espace de Banach, $u_n, u \in W^{1,p}(0,T;V)$, et $u_n \to u$ faiblement dans $W^{1,p}(0,T;V)$. Alors $u_n(t) \to u(t)$ faiblement dans V pour tout $t \in [0,T]$.*

Pour plus des détails sur ce lemme nous renvoyons le lecteur, par exemple, à [16]

2.4 Éléments d'analyse non linéaire dans un espace de Hilbert

Nous commonçons ce paragraphe par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $(.,.)_H$ et la norme associée $\|\cdot\|_H$ et $H^{'}$ l'espace dual de H en notant par $\langle .,. \rangle_{H' \times H}$ pour le produit de dualité entre H et $H^{'}$.

Définition 2.4.1. *L'opérateur $A : H \to H'$ est dite :*

1. *monotone si*
$$\langle Au - Av, u - v\rangle_{H'\times H} \geq 0 \quad \forall u, v \in H;$$
2. *fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que*
$$\langle Au - Av, u - v\rangle_{H'\times H} \geq m\|u - v\|_H^2 \quad \forall u, v \in H;$$
3. *de Lipschitz s'il existe $L > 0$*
$$\|Au - Av\|_{H'} \leq L\|u - v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$
4. *hemicontinu si pour toute suite numérique $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \to \lambda$ lorsque $n \to +\infty$ on a*
$$\langle A(u + \lambda_n v), w\rangle_{H'\times H} \to \langle A(u + \lambda v), w\rangle_{H'\times H} \text{ quand } n \to +\infty.$$

En utilisant la définition précédente, on a le résultat suivant :

Proposition 2.4.1. *Tout opérateur de Lipschitz est hemicontinu.*

Théorème 2.4.1. *Soit H un espace de Hilbert. Soit $A : H \to H$ un opérateur lipschitzien et fortement monotone. Alors, pour chaque $f \in H$, il existe un élément unique $u \in H$ tel que $Au = f$.*

Le **théorème** (2.4.1) montre que si $A : H \to H$ un opérateur lipschitzien et fortement monotone défini sur un espace H de Hilbert, alors A est inversible. Les propriétés de son inverse, noté A^{-1}, sont données par le résultat suivant.

Proposition 2.4.2. *Soit H un espace de Hilbert. Soit $A : H \to H$ un opérateur lipschitzien et fortement monotone. Alors, $A^{-1} : H \to H$ est un opérateur lipschitzien et fortement monotone.*

Théorème 2.4.2. *Soit $A : H \to H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, K un convexe fermé non-vide de H et $f \in H$. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de première espèce admet une solution unique.*

Définition 2.4.2. *Soit une fonction $j : H \to \overline{\mathbb{R}}$.*
1. La fonction j est dite propre si elle n'est pas identiquement à $+\infty$, c'est-à-dire s'il existe

$u \in H$ tel que $j(u) < +\infty$, et si elle ne prend jamais la valeur $-\infty$.

2. La fonction J est dite convexe si

$$j(tu + (1-t)v) \leq tj(u) + (1-t)j(v), \quad \forall u, v \in H, \ \forall t \in [0,1].$$

3. La fonction J est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en u de l'espace H, si pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de H convergeant vers u dans H, elle vérifie

$$\liminf_{n\to\infty} j(u_n) \geq j(u).$$

4. La fonction j est dite s.c.i. sur H si elle est s.c.i. pour tout point de H.

Proposition 2.4.3. *Si la fonction $j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est convexe, propre et semi-continue inférieurement alors elle faiblement semi-continue inférieurement et réciproquement.*

Théorème 2.4.3. *Soit $A : H \to H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et j une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement et $f \in H$. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce admet une solution unique.*

Soit H un espace de Hilbert doté du produit scalaire $(.,.)_H$ et la norme associé $\|.\|$. Soit maintenant un opérateur $A : H \to H, K \subset H$, $j : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre et $f \in H$. Plusieurs problèmes aux limites des équations aux dérivées partielles en mécanique des milieux continus conduisent à une problème mathématique ayant la forme suivantes : Trouver u tel que

$$u \in H \quad (Au, v-u)_H + j(v) - j(u) \geq (f, v-u)_H \quad \forall v \in H.$$

Ce problème est appelé inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce sur H.

Théorème 2.4.4. *Soit $A : H \to H$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz et j une fonction convexe, propre et semi-continue inférieurement et $f \in H$. Alors l'inéquation variationnelle elliptique de seconde espèce admet une solution unique.*

Les démonstrations de ces théorèmes de cette section peut être trouvée par exemple dans [7, 10, 13].

Sous différentiabilité.

Si X désigne un espace de Hilbert et K un sous ensemble de l'espace X. Considérons la

fonction ψ_K définie par

$$\psi_K(u) = \begin{cases} 0 & si \quad u \in K, \\ +\infty & si \quad u \notin K, \end{cases}$$

on appelle ψ_K fonction indicatrice. Nous savons que l'ensemble K est fermé, non vide et convexe si et seulement si sa fonction indicatrice ψ_K est une fonction propre, convexe et semi-continue inférieurement.

Définition 2.4.3. *Soit une fonction $j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u, noté $\partial j(u)$, est l'ensemble défini par*

$$\partial j(u) = \{u' \in X'/j(v) \geq j(u) + \langle u', v-u\rangle_{X'\times X},\ \forall v \in X\}.$$

Rappelons que le crochet $\langle .,. \rangle_{X'\times X}$ désigne le produit de dualité entre X' et X. Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous gradient de la fonction j en u. La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X. Soit K un sous-ensemble convexe non vide de l'espace X. Considérons la fonction indicatrice ψ_K de l'ensemble K, nous avons de suite que si $u \neq K$ alors $\partial\psi_K(u) = \emptyset$. Supposons alors que $u \in K$, il vient que si $u' \in \partial\psi_K(u)$ alors $\langle u', v-u\rangle_{X'\times X} \leq 0$, pour tout $v \in K$. Nous pouvons ainsi caractériser le sous-différentiel $\partial\psi_K(u)$ d'une fonction indicatrice ψ_K d'un ensemble convexe K non vide en $u \in K$ par

$$\partial\psi_K(u) = \{u' \in X'; \langle u', v-u\rangle_{X'\times X} \leq 0, \forall v \in K\}.$$

2.5 Dérivées fractionnaires

Fonctions spéciales

2.5.1 Fonction Gamma

Définition 2.5.1. *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\mathfrak{e}(z) > 0$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par :*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt.$$

Proposition 2.5.1. *Pour tout $z > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

2. $\Gamma(n+1) = n!$.
3. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi}$.

Quelques valeurs particulières de la fonction Gamma :

— $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^0 dt = 1$.

— $\Gamma(0^+) = +\infty$.

— $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2.5.2 Dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

Définition 2.5.2. ***(L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville).***
Soit X un espace de Banach et $(0,T)$ un intervalle de temps fini. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ pour une fonction $f \in L^1(0,T;X)$ est définie par :

$$ {}_0I_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \quad \forall t \in (0,T). $$

Pour compléter la définition, on pose ${}_0I_t^0 = I$, où I est l'opérateur d'identité, ce qui signifie que

$$ {}_0I_t^0 f(t) = f(t), \quad p.p.\ t \in (0,T). $$

Définition 2.5.3. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n-1 \leq \alpha < n$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α d'une fonction f est définie par :*

$$ D_a^{\alpha} f(x) := D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\, dt, \quad x > 0. $$

$$ D^n = \frac{d^n}{dx^n}. $$

En particulier :

1. Pour $\alpha = 0$, on a :
$$ D_a^0 f(x) = D I_a^1 f(x) = I f(x). $$
2. Pour $\alpha = m \in \mathbb{N}$, on a :
$$ D_a^m f(x) = D^{m+1} I_a^{m+1-m} f(x) = D^{m+1} I_a^1 f(x) = D^m f(x). $$

Ainsi, pour $\alpha \in \mathbb{N}$, la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée usuelle.

Exemple 2.5.1. *Soit $f(x) = (x-a)^{\nu}$ avec $\nu > -1$ et $\alpha \leq 0$ tel que $n-1 \leq \alpha < n$. Alors, on a :*

$$D_a^{\alpha} f(x) = D^n I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n+\nu-\alpha}.$$

Cas particulier :

— Si $(\alpha - \nu) \in \mathbb{N}$, alors on a :

$$D_a^{\alpha} f(x) = 0, \quad \text{pour } (\alpha-\nu) = 1, 2, \ldots, n.$$

— Par ailleurs, si $(\alpha - \nu) \notin \mathbb{N}$, alors :

$$D_a^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} (x-a)^{\nu-\alpha}.$$

Proposition 2.5.2. *Soit $\alpha > 0$ et $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$. Alors, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m > \alpha$, on a :*

$$D_a^{\alpha} f(x) = D^m I_a^{m-\alpha} f(x).$$

Preuve 1. *Comme $m \geq n$, on a :*

$$\begin{aligned} D^m I_a^{m-\alpha} f(x) &= D^n D^{m-n} I_a^{m-n} I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D^n I_a^{n-\alpha} f(x) \\ &= D_a^{\alpha} f(x), \end{aligned}$$

car $D^{m-n} I_a^{m-n} = I$.

Théorème 2.5.1. *Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent. Alors, pour tous $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, on a :*

$$D_a^{\alpha}\Big(c_1 f(x) + c_2 g(x)\Big) = c_1 D_a^{\alpha} f(x) + c_2 D_a^{\alpha} g(x).$$

Remarque 2.5.1. *Supposons que $f \in C(0,1) \cap L^1(0,1)$ tel que $D^{\alpha} f \in C(0,1) \cap L^1(0,1)$. Alors :*

$$I^{\alpha} D^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} C_k t^{\alpha - x}, \quad C_k \in \mathbb{R}, \quad n = \lfloor \alpha \rfloor + 1.$$

Lemme 2.5.1. *Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1[a,b]$. Alors, on a :*

$$D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(x) = f(x), \tag{2.6}$$

pour presque tout $x \in [a,b]$.

Preuve 2. *En utilisant la Définition 2.5.3, on a :*

$$\begin{aligned} D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} f(x) &= D^n I_a^{n-\alpha} I_a^{\alpha} f(x) \\ &= D^n I_a^{n} f(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Théorème 2.5.2. *Soient $\alpha, \beta > 0$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n-1 \leq \alpha < n$ et $m-1 \leq \beta < m$. Alors :*

1. *Si $\alpha > \beta > 0$, alors pour $f \in L^1[a,b]$:*

$$D_a^{\beta}\left(I_a^{\alpha} f\right)(x) = I_a^{\alpha-\beta} f(x),$$

   presque partout sur $[a,b]$.

2. *S'il existe une fonction $\varphi \in L^1[a,b]$ telle que $f = J_a^{\alpha}\varphi$, alors :*

$$I_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f(x) = f(x),$$

   pour presque tout $x \in [a,b]$.

3. Pour $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, si les dérivées fractionnaires $D_a^{\alpha} f$ et $D_a^{k+\alpha} f$ existent, alors :

$$D^k\left(D_a^{\alpha} f(x)\right) = D_a^{k+\alpha} f(x).$$

4. Si $\beta \geq \alpha > 0$ et si la dérivée fractionnaire $D_a^{\beta-\alpha} f$ existe, alors :

$$D_a^{\beta}\left(I_a^{\alpha} f\right)(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x).$$

Preuve 3. *En utilisant la Définition 2.5.3, on obtient :*

a) *Pour $\alpha > \beta > 0$, alors $n \geq m$, on a :*

$$\begin{aligned} D_a^{\beta}\left(I_a^{\alpha} f\right)(x) &= D^n I_a^{n-\beta}\left(I_a^{\alpha} f\right)(x) \\ &= D^n I_a^{n+\alpha-\beta} f(x) \\ &= D^n I_a^{n}\left(I_a^{\alpha-\beta} f\right)(x) \\ &= I_a^{\alpha-\beta} f(x), \end{aligned}$$

presque partout sur $[a,b]$.

b) *Par la relation (2.6), on obtient :*

$$\begin{aligned} I_a^{\alpha} D_a^{\alpha} f(x) &= I_a^{\alpha}\left(D_a^{\alpha} I_a^{\alpha} \varphi(x)\right) \\ &= I_a^{\alpha} \varphi(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

c) *En utilisant la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville :*

$$D_a^\alpha f(x) = D^n I_a^{n-\alpha} f(x), \quad \text{avec } n = \lceil \alpha \rceil,$$

on obtient :

$$D^k\Big(D_a^\alpha f(x)\Big) = D_a^{k+\alpha} f(x).$$

Ce qui montre que la composition d'une dérivée entière d'ordre k avec une dérivée fractionnaire d'ordre α donne une dérivée fractionnaire d'ordre $k+\alpha$.

d) On a :

$$D_a^\beta\Big(I_a^\alpha f\Big)(x) = D^m I_a^{m-\beta}\Big(I_a^\alpha f\Big)(x) = D^m I_a^{m-(\beta-\alpha)} f(x) = D_a^{\beta-\alpha} f(x),$$

existe pour $i-1 \le \beta-\alpha < i$ et $i \le m$.

Théorème 2.5.3. *Si $f \in L^1[a,b]$, avec $b>0$. La transformée de Riemann-Liouville de f est :*

$$\mathcal{L}\Big(D_0^\alpha f\Big)(s) = s^\alpha(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k\Big[D^{\alpha-k-1} f(t)\Big]_{t=0},$$

avec $n-1<\alpha<n$ cette transformée de Laplace est bien connue.

Preuve 4. *D'après la Définition 1.2.21, on a :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(D_a^\alpha f\Big)(s) &= \mathcal{L}\Big(D^n I_0^{n-\alpha} f\Big)(s) \\
&= s^n \mathcal{L}\Big(I_0^{n-\alpha} f\Big)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n-1}\Big[D^k (I_0^{n-\alpha} f)(t)\Big]_{t=0} \\
&= s^\alpha(\mathcal{L}f)(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-n-1}\Big[D^k (I_0^{n-\alpha} f)(t)\Big]_{t=0}.
\end{aligned}$$

2.5.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 2.5.4. ***(La dérivée Caputo de l'ordre ,*** $0<\alpha\le 1$***).***
Soit X un espace de Banach, $0<\alpha\le 1$ et $(0,T)$ un intervalle de temps fini. Pour une fonction $f \in L^2(0,T;V^*)$, la dérivée fractionnaire de Caputo de f est définie par :

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = {}_0 I_t^{1-\alpha} f'(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)\, ds, \quad \forall t \in (0,T).$$

Il est évident que si $\alpha = 1$, la dérivée de Caputo se réduit à la dérivée classique du premier ordre, c'est-à-dire que nous avons

$$ {}_0^C D_t^1 f(t) = I f'(t) = f'(t), \quad \text{p.p. } t \in (0,T). $$

De plus, nous rappelons le critère de compacité analogue au lemme d'Aubin–Lions, pour l'existence de solutions faibles aux EDP fractionnaires en temps.

Théorème 2.5.4. *Soit $T > 0$, $\alpha \in (0,1)$ et $p \in [1,\infty)$. Soient V, $L^2(0,T;V)$ et V^* des espaces de Banach tels que : $V \hookrightarrow L^2(0,T;V)$ (compactement) et $L^2(0,T;V) \hookrightarrow V^*$ (continûment).Supposons que $W \subset L^1_{loc}((0,T);V)$ vérifie :*

1. *Il existe $r_1 \in [1,\infty)$ et $c > 0$ tels que pour tout $u \in W$:*

$$ \sup_{t\in(0,T)} \left({}_0I_t^\alpha \|u\|_V^{r_1} \right) = \sup_{t\in(0,T)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \|u(s)\|_V^{r_1} \, ds \le c. $$

2. *Il existe $p_1 \in (p,\infty]$ tel que W est borné dans $L^{p_1}((0,T);L^2(0,T;Q))$.*

3. *There existe $r_2 \in [1,\infty)$ et $c_s > 0$ tels que pour tout $u \in W$, il existe une affectation de la valeur initiale u0 telle que la d ´eriv ´ee faible de Caputo satisfasse :*

$$ \left\| {}_0^C D_t^\alpha u \right\|_{L^{r_2}((0,T);V^*)} \le c_s. $$

Alors, W est relativement compact dans $L^p((0,T);L^2(0,T;V))$.

Proposition 2.5.3. *Soit X un espace de Banach et $\alpha, \beta > 0$. Les énoncés suivants sont alors valables :*

1. Pour $y \in L^1(0,T;X)$, nous avons :

$$ {}_0I_t^\alpha \, {}_0I_t^\beta y(t) = {}_0I_t^{\alpha+\beta} y(t), \quad \text{p.p. } t \in (0,T). $$

2. Pour $y \in AC(0,T;X)$ et $\alpha \in (0,1]$, nous avons :

$$ {}_0I_t^\alpha \, {}_0^C D_t^\alpha y(t) = y(t) - y(0), \quad \text{p.p. } t \in (0,T). $$

3. Pour $y \in L^1(0,T;X)$, nous avons :

$$ {}_0^C D_t^\alpha \, {}_0I_t^\alpha y(t) = y(t), \quad \text{p.p. } t \in (0,T). $$

Maintenant, nous ´etablissons le comportement global suivant de l'EDO fractionnaire.

Proposition 2.5.4. *[15] Soit $0 < \alpha < \beta < 1$. Supposons $f : [0,1) \times (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable. En d'autres termes, pour tout $A > 0$ et tout $K \subset (\alpha, \beta)$ compact, il existe une constante $L_{A,K} > 0$ telle que :*

$$\sup_{0 \le t \le A} |f(t, v_1) - f(t, v_2)| \le L_{A,K} |v_1 - v_2|, \quad \forall v_1, v_2 \in K.$$

Soit $0 < \gamma < 1$ et $v_0 \in (\alpha, \beta)$. Alors, le problème à valeur initiale :

$$D^{\gamma} v(t) = f(t, v(t)), \quad v(0) = v_0,$$

admet une solution continue unique $v(\cdot)$ sur $[0, T_b)$, où

$$T_b = \sup\{h > 0 : v \in C[0,h),\ v(t) \in (\alpha, \beta)\ \forall t \in [0,h)\}$$

est le temps maximal d'existence, avec $T_b \in (0, +\infty]$.

Si $T_b < +\infty$, alors :

$$\liminf_{t \to T_b} v(t) = \alpha, \qquad \limsup_{t \to T_b} v(t) = \beta.$$

2.6 Espaces de Bochner

Pour l'étude des problèmes d'évolution, comme c'est le cas de notre problème de contact viscoélastique, il est indispensable d'introduire les espaces de fonctions dépendant du temps à valeurs dans des espaces de Banach. Ces espaces, appelés espaces de Bochner, permettent de définir la mesurabilité et l'intégrabilité des champs de déplacement et de contrainte par rapport au temps [7].

Soit V un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_V$ et $I = [0, T]$ un intervalle de temps fini ($T > 0$). L'espace de Bochner $L^p(0, T; V)$ pour $1 \le p \le \infty$ est défini par :

$$L^p(0, T; V) = \left\{ u : [0, T] \to V \text{ mesurable}; \|u\|_{L^p(0,T;V)} < \infty \right\}$$

où la norme est donnée par :

— Pour $1 \le p < \infty$:

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt \right)^{1/p}$$

— Pour $p = \infty$:

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \text{ess sup}_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_V$$

Dans le cadre de notre étude, nous utilisons l'espace $L^2(0,T;V)$ qui est un espace de Hilbert, ce qui est essentiel pour appliquer les méthodes de discrétisation temporelle comme la méthode de Rothe [5].

2.7 Classification des équations aux dérivées partielles

Considérons la forme générale d'une EDP d'ordre 2 :

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

où A, B, C, D, E, F et G sont considérés constants pour simplifier. Le type de l'EDP dépend du signe de $B^2 - 4AC$:

— Si $B^2 - 4AC < 0$, alors l'EDP est dite **elliptique**.

— Si $B^2 - 4AC = 0$, alors l'EDP est dite **parabolique**.

— Si $B^2 - 4AC > 0$, alors l'EDP est dite **hyperbolique**.

Exemple 2.7.1. *[20]*

— *L'équation de Laplace :* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *est elliptique car* $B^2 - 4AC = -4 < 0$.

— *L'équation de diffusion :* $\dfrac{\partial u}{\partial t} - d\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ *avec* $d > 0$ *est parabolique car* $B^2 - 4AC = 0$.

— *L'équation des ondes :* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ *avec* $c > 0$ *est hyperbolique car* $B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$.

2.8 Principe de la méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles. Elle consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres [20].

Développement de Taylor

Soit $u(x,t)$ une fonction de l'espace et du temps. Le développement de Taylor de u au voisinage de x s'écrit :

$$u(x+h,t) = u(x,t) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,t) + \cdots + \frac{h^n}{n!}\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) + \mathcal{O}(h^{n+1})$$

$$u(x-h,t) = u(x,t) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x,t) + \cdots + \mathcal{O}(h^{n+1})$$

Schémas aux différences finies

En tronquant le développement au premier ordre, on obtient le schéma d'ordre 1 :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \mathcal{O}(h)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h)$$

Le schéma centré d'ordre 2 s'obtient par soustraction des deux développements :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Pour la dérivée seconde, on obtient le schéma centré d'ordre 2 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

2.9 La méthode de Rothe

La méthode de Rothe est une technique de semi-discrétisation temporelle particulièrement efficace pour résoudre les problèmes d'évolution. Contrairement aux méthodes de discrétisation totale, elle consiste à discrétiser uniquement la variable temps tout en conservant la structure variationnelle dans l'espace de Hilbert [11].

Discrétisation temporelle

Soit un pas de temps $h = T/M$ pour un entier $M \in \mathbb{N}^*$. On définit une partition de l'intervalle $[0,T]$ par les points $t_m = m \cdot h$ pour $m = 0,\ldots,M$. On remplace la dérivée temporelle y_t par le quotient de différences :

$$\delta_h y^m := \frac{y^m - y^{m-1}}{h}, \quad \text{pour } m = 1,\ldots,M$$

avec la condition initiale $y^0 = y_0$.

Fonctions d'interpolation

On définit deux types de fonctions d'interpolation [11] :

— Une interpolation affine par morceaux :

$$y_h(t) = y^m + \frac{t - mh}{h}(y^m - y^{m-1}), \quad \text{pour } t \in [(m-1)h, mh]$$

— Une interpolation constante par morceaux :

$$\hat{y}_h(t) = y^m, \quad \text{pour } t \in [(m-1)h, mh]$$

Convergence

Sous les hypothèses de Lipschitzianité et de monotonie, la suite des solutions approchées converge vers la solution forte du problème initial dans l'espace de Bochner $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ lorsque $h \to 0$.

2.10 Méthodes de discrétisation numérique

Dans ce chapitre, nous présentons les outils numériques nécessaires pour transformer notre problème de contact viscoélastique fractionnaire, défini dans le Chapitre 1, en un système d'équations résolvables numériquement.

2.10.1 Approximation par la méthode des différences finies

La méthode des différences finies (MDF) consiste à approcher les opérateurs différentiels par des rapports de différences utilisant les valeurs de la fonction sur une grille discrète.

Développement de Taylor et opérateurs de dérivation

Soit $u(t)$ une fonction de classe C^n. Pour un pas de temps $k > 0$, les schémas décentralisés sont obtenus par le développement de Taylor :

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_n \approx \frac{u_n - u_{n-1}}{k} + \mathcal{O}(k) \quad \text{(Schéma décentré arrière)}$$

Pour les dérivées spatiales dans l'espace de Sobolev V, on utilise souvent le schéma centré d'ordre 2 :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2)$$

Ces opérateurs sont fondamentaux pour discrétiser l'équation d'équilibre micanique Div $\sigma + f_0 = 0$ introduite au Chapitre 1 [20].

2.10.2 La méthode de Rothe pour les problèmes d'évolution

Pour résoudre notre inéquation variationnelle fractionnaire, nous utilisons la méthode de Rothe (semi-discrétisation temporelle). Elle permet de traiter la dépendance temporelle induite par la loi de comportement viscoélastique [11].

Discrétisation temporelle du problème de contact

Soit $k = T/N$ le pas de temps. On définit $t_n = n \cdot k$ pour $n = 0, \dots, N$. Le problème de contact évolutif est transformé en une suite de problèmes statiques. À chaque pas n, nous cherchons le champ de déplacement $u_n \in K$ satisfaisant :

$$a(u_n, v - u_n) + \langle \mathcal{B}({}^C D_k^\alpha u_n), v - u_n \rangle \geq L_n(v - u_n), \quad \forall v \in K$$

où ${}^C D_k^\alpha u_n$ représente l'approximation de la dérivée de Caputo au temps t_n.

Interpolation de Rothe et Convergence

On définit la fonction de Rothe $\bar{u}_N(t)$ comme une fonction constante par morceaux :

$$\bar{u}_N(t) = u_n, \quad \forall t \in (t_{n-1}, t_n]$$

Sous les conditions de Lipschitzianité des opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ (définies à la section 2.3), la suite $(\bar{u}_N)$ converge vers la solution unique u dans l'espace de Bochner $L^2(0, T; V)$ [11, 20].

2.10.3 Application au modèle viscoélastique (Substitution de la chaleur)

Contrairement au cas parabolique classique de la chaleur, notre modèle intègre une mémoire fractionnaire. La discrétisation de la loi de Kelvin-Voigt fractionnaire $\sigma = \mathcal{A}\varepsilon(u) +$

$\mathcal{B}^C D_t^\alpha \varepsilon(u)$ nécessite l'utilisation des schémas de quadrature pour l'intégrale singulière de Caputo.

Exemple 2.10.1 (Discrétisation de l'opérateur fractionnaire). *Pour $0 < \alpha < 1$, la dérivée de Caputo est approchée par le schéma L1 :*

$$ {}^C D_t^\alpha u(t_n) \approx \frac{k^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{n-1} a_j (u_{n-j} - u_{n-j-1}) $$

où les coefficients a_j sont définis par :

$$ a_j = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 $$

Cette discrétisation permet de coupler la méthode de Rothe avec les propriétés de convexité du domaine K pour garantir l'existence de la solution approchée.

Théorème 2.10.1. *Supposons que Φ est hémicontinue et satisfait la condition (LSC) ; supposons en outre que ϕ est soit uniformément monotone au sens de (3.5), soit uniformément monotone par rapport à la semi-norme $[\cdot]$ au sens de (3.6), (3.7). Supposons que $f_{n,\nu} \to f$ dans $L^1(J,H) \cap L^{p'}(J,X^*)$ $(n,\nu \to \infty)$ et que $K_\nu \to K$ $(\nu \to \infty)$, où $K = g + C$, $K_\nu = g_\nu + C_\nu$ $(\nu \in \mathbb{N})$; $g_\nu \to g$ dans X ; C, C_ν sont des cônes convexes fermés dans X, respectivement dans X_ν $(\nu \in \mathbb{N})$.*

***A)** Alors la suite $\{\bar{q}_{n,\nu}\}_{n,\nu\in\mathbb{N}}$ possède des points limites par rapport à la convergence faible dans $L^p(J,X)$ et à la convergence faible* dans $L^\infty(J,H)$. Tout tel point limite appartient à $L^p(J,K)$ et satisfait (2.4), l'inégalité variationnelle de (P2).*

***B)** Supposons en outre que la fonction Φ est continue par rapport à sa deuxième variable sur $L^p(J,X)$ et admet un potentiel convexe continu $\mathcal{F} : X \to \mathbb{R}_+$. Supposons également que $u_{0,\nu} \to u_0$ $(\nu \to \infty)$ dans X et $f_{n,\nu} \to f$ dans $L^2(J,H)$ $(n,\nu \to \infty)$. Alors la suite $\{\bar{q}_{n,\nu}\}_{n,\nu\in\mathbb{N}}$ converge vers la solution unique u de (P1) fortement dans $C[J,H]$, et la suite $\{\bar{q}_{n,\nu}\}_{n,\nu\in\mathbb{N}}$ converge vers u fortement dans $L^2(J,H)$. De plus, on a : $\bar{q}_{n,\nu} \to u$ dans $L^p(J,X)$ et $\partial_t \bar{q}_{n,\nu} \to \partial_t u$ dans $L^2(J,H)$.*

***C)** Si de plus ϕ est uniformément monotone au sens de (3.5), alors $\bar{q}_{n,\nu}$ converge fortement vers u lorsque $n,\nu \to \infty$ dans $L^p(J,X)$ également.[6]*

2.11 Méthode de Galerkin pour un problème variationnel

Soit V un espace de Hilbert séparable. D'après le lemme de densité, il existe une famille libre dénombrable $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de V telle que les combinaisons linéaires des v_i sont denses dans V. On définit les sous-espaces de dimension finie $V_m = \text{vect}\{v_0, v_1, \ldots, v_m\}$ qui forment une suite croissante [14].

Formulation du problème de Galerkin

Soit $b(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive (V-elliptique) :

$$|b(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V, \quad \forall u, v \in V,$$

$$b(u,u) \geq m\|u\|_V^2, \quad \forall u \in V.$$

Pour $f \in V'$, le problème continu consiste à trouver $u \in V$ tel que

$$b(u,v) = f(v), \quad \forall v \in V.$$

Le problème de Galerkin consiste à trouver $u_k \in V_k$ (sous-espace de dimension finie de V) tel que

$$b(u_k, v_k) = f(v_k), \quad \forall v_k \in V_k.$$

Lemme de Céa

Soit u la solution du problème continu et u_k la solution du problème de Galerkin. Alors l'erreur d'approximation satisfait l'estimation suivante :

$$\|u - u_k\|_V \leq \frac{M}{m} \inf_{v_k \in V_k} \|u - v_k\|_V,$$

où M est la constante de continuité et m la constante de coercivité [19].

Ce lemme montre que l'erreur est contrôlée par la meilleure approximation de u dans V_k, à un facteur $\frac{M}{m}$ près.

Projection orthogonale

Soit V_n un sous-espace de dimension finie de V. Le projecteur orthogonal Π_{V_n} sur V_n est défini par

$$\Pi_{V_n}(u) = \arg\min_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_V.$$

Dans le cas où V est muni du produit scalaire $a(\cdot,\cdot)$ associé à une EDP coercive, la solution du problème de Galerkin $u_n \in V_n$ satisfaisant

$$a(u_n, v_n) = b(v_n), \quad \forall v_n \in V_n,$$

est précisément la projection orthogonale de la solution exacte u sur V_n [**?**].

CHAPITRE 3

PROBLÈME DE CONTACT VISCOÉLASTIQUE AVEC FROTTEMENT À DÉRIVÉE FRACTIONNAIRE EN TEMPS

Ce chapitre est consacré à l'analyse du problème couplant les effets mécaniques. Nous établissons la formulation variationnelle adaptée à l'aide de la formule de Green et des conditions de contact. Sous des hypothèses convenables sur les données, nous démontrons un résultat d'existence de solution en utilisant des arguments de monotonie, de pseudomonotonie, de compacité et la méthode de Rothe.

3.1 Formulation mécanique du problème

Le problème peut se formuler de la manière suivante :

Problème P. Trouver un champ de déplacements $u : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, et qu' un champ de contraintes $\sigma : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{S}^d$, tels que

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}({}_0^C D_t^{\alpha}\boldsymbol{u}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \qquad \text{dans } \Omega\times(0,T) \tag{3.1}$$

$$\operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{f}_1(t) = \mathbf{0}, \qquad \text{dans } \Omega\times(0,T) \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{0}, \qquad \text{sur } \Gamma_D\times(0,T) \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_N(t), \qquad \text{sur } \Gamma_N\times(0,T) \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \qquad \text{dans } \Omega \tag{3.5}$$

$$\sigma_\nu(t) \le 0,\ u_\nu(t) \le g,\ \sigma_\nu(t)(u_\nu(t) - g) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma_C\times(0,T) \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \le \mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|)\|\sigma_\nu\|, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|)\|\sigma_\nu\| \Rightarrow \boldsymbol{u}_\tau(t) = \mathbf{0}, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|)\|\sigma_\nu\| \Rightarrow \exists\lambda \ne 0,\ \boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = -\lambda\boldsymbol{u}_\tau(t) \end{cases} \qquad \text{sur } \Gamma_C\times(0,T) \tag{3.7}$$

L'équation (3.1) correspond à la loi constitutive viscoélastique de Kelvin-Voigt à dérivée fractionnaire en temps de type Caputo. Ici, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{ijkl})$ et $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{ijkl})$ désignent respectivement le tenseur de viscosité et le tenseur d'élasticité, qui sont tous deux des tenseurs d'ordre quatre. L'équation (3.2) représente la condition d'équilibre des contraintes. Les relations (3.3) et (3.4) décrivent les conditions aux limites mécaniques. De plus, la condition initiale est donnée par l'équation (3.5). La relation (3.6) modélise le contact avec frottement sur Γ_C avec les conditions de Signorini. En outre, l'équation (3.7) représente la loi de frottement de Coulomb, où μ désigne le coefficient de frottement.

3.2 Formulation variationnelle du problème

Pour obtenir la formulation variationnelle du problème P, on introduit le sous-espace fermé V de $H^1(\Omega)^d$ défini par(**??**). Nous énonçons des hypothèses sur les données. Pour cela, nous supposons que :

$(HP1)$

(1) Le tenseur de viscosité $\mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ et le tenseur d'élasticité $\mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d$ présentent la propriété standard de symétrie :

$$\mathcal{A}_{ijkl} = \mathcal{A}_{jikl} = \mathcal{A}_{lkij} \in L^\infty(\Omega), \quad \mathcal{B}_{ijkl} = \mathcal{B}_{jikl} = \mathcal{B}_{lkij} \in L^\infty(\Omega).$$

(2) Les formes a,b satisfont la propriété d'ellipticité :

$$a(u,u) \geq m_a \|u\|_V^2, \quad b(u,u) \geq m_b \|u\|_V^2,$$

où $\mathrm{m}_a, m_b > 0 pour tout u \in V$.

(3) Les opérateurs a,b respectent la propriété conventionnelle de bornitude :

$$|a(u,v)| \leq M_a \|u\|_V \|v\|_V, \quad |b(u,v)| \leq M_b \|u\|_V \|v\|_V,$$

où $\mathrm{M}_a, M_b > 0, pour tous u, v \in V$.

$(HP2)$

(1) Les forces et les tractions satisfont les conditions suivantes :

$$f_1 \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad f_N \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)^d).$$

(2) La fonction écart et la condition initiale vérifient les conditions suivantes :

$$g > 0, \quad g \in L^\infty(\Gamma_C), \quad u_0 \in V_{ad}.$$

$(HP3)$

Le coefficient de frottement $\mu : \Gamma_C \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfait :

(1) Il existe $L_\mu > 0$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$:

$$|\mu(.,x_1) - \mu(.,x_2)| \leq L_\mu |x_1 - x_2| \quad \text{p.p. sur } \Gamma_C.$$

(2) L'application $z \mapsto \mu(z,x)$ est mesurable sur Γ_C, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

(3) L'application $z \mapsto \mu(z,x)$ est bornée par μ^* p.p. sur Γ_C, où

$$\mu^* = \sup_{t \in [0,T]} \|\mu(t)\|_{L^\infty(\Gamma_C)}.$$

(*HP*4)

L'application j satisfait :

(1) j est mesurable sur Γ_C.

(2) j est localement lipschitzienne sur Γ_C.

(3) Pour tout $u \in V$, l'application $v \mapsto j(u,v)$
est convexe, propre et semi-continue inférieurement.

(4) Il existe $c_j > 0$ tel que $\|\partial j(u,v)\|_{V^*} \leq c_j\Big(1 + \|v\|_V\Big)$, pour tout $u \in V$

On suppose aussi que les forces de corps et les tractions de surface satisfont

$$f_1 \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \qquad f_N \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_N)^d) \tag{3.8}$$

Ensuite, nous définissons les applications $f : [0,T] \to V$, $j : V \times V \to \mathbb{R}$ par

$$(f(t),v)_V = \int_\Omega f_1(t)v\,dx + \int_{\Gamma_N} f_N(t)v\,da, \tag{3.9}$$

Comme σ dépend de u par la loi constitutive (3.1), la composante normale σ_ν est également fonction de u.

$$j(u,v) = \int_{\Gamma_C} \mu(\|u_\tau\|)\|\sigma_\nu(u)\|\|v_\tau\|\,da, \tag{3.10}$$

Pour tout $u, v \in V$. On remarque que la condition (3.8) implique

$$f \in L^2(0,T;V^*). \tag{3.11}$$

Pour tout $u, v \in V$, nous définissons les formes bilinéaires suivantes :

$$a(u,v) = (\mathcal{A}\,\varepsilon(u),\varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \qquad b(u,v) = (\mathcal{B}\,\varepsilon(u),\varepsilon(v))_{\mathcal{H}}. \tag{3.12}$$

Pour la formule variationnelle dépendante des deux variables mécanique u et σ, la formule de Green (2.3) permet de donner, pour $u \in V$

$$(\sigma,\varepsilon(v-u))_{\mathcal{H}} + (\mathrm{Div}\,\sigma, v-u)_H = \int_\Gamma \sigma\nu\cdot(v-u)da \;\; \forall v \in V,$$

ou encore d'après (3.2)

$$(\sigma,\varepsilon(v-u))_{\mathcal{H}} - (f_1, v-u)_H = \int_\Gamma \sigma\nu\cdot(v-u)\,da \quad \forall v \in V.$$

Mais on a

$$\int_\Gamma \sigma\nu\cdot(v-u)da=\int_{\Gamma_D}\sigma\nu\cdot(v-u)da+\int_{\Gamma_N}\sigma\nu\cdot(v-u)da+\int_{\Gamma_C}\sigma\nu\cdot(v-u)da.$$

En utilisant (3.3) et (3.4), il devient

$$\int_\Gamma \sigma\nu\cdot(v-u)da=\int_{\Gamma_N} f_N\cdot(v-u)da+\int_{\Gamma_C}\sigma\nu\cdot(v-u)da.$$

La formule (**??**) donne

$$\int_{\Gamma_C}\boldsymbol{\sigma\nu}\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,da=\int_{\Gamma_C}[\sigma_\nu(v_\nu-u_\nu)+\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau)]\,da.$$

La loi de constitutive (3.1) donne :

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,da=\int_\Omega\Big[\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}({}_0^C D_t^\alpha\boldsymbol{u})+\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})\Big].\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,da.$$

On a d'après (3.12) :

$$a(\boldsymbol{w},\boldsymbol{z})=(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{z}))_{\mathcal{H}}=\int_\Omega\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}).\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{z})\,da,$$

$$b(\boldsymbol{w},\boldsymbol{z})=(\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}),\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{z}))_{\mathcal{H}}=\int_\Omega\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}).\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{z})\,da,$$

on obtient :

$$\int_\Omega\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,dx=a({}_0^C D_t^\alpha\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}).$$

En utilisant (3.9), il vient

$$(f,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_V=\int_\Omega\boldsymbol{f}_1\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,da+\int_{\Gamma_N}\boldsymbol{f}_N\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})\,da\quad\forall\boldsymbol{v}\in V.$$

Ainsi, la formulation variationnelle

$$a({}_0^C D_t^\alpha\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+b(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})=(f,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})_V+\int_{\Gamma_C}[\sigma_\nu\cdot(v_\nu-u_\nu)+\boldsymbol{\sigma}_\tau\cdot(\boldsymbol{v}_\tau-\boldsymbol{u}_\tau)]\,da.\tag{3.13}$$

D'après la condition de contact de Signorini (3.6), on peut montrer que pour tout $v\in V$ avec $v_\nu\le g$, on a :

$$\sigma_\nu\cdot(v_\nu-u_\nu)\ge 0,\quad \sigma_\nu\in\partial I_{(-\infty,0]}(u_\nu-g)$$

En effet :

— Si $u_\nu < g$, alors $\sigma_\nu = 0$, donc $\sigma_\nu \cdot (v_\nu - u_\nu) = 0$.

— Si $u_\nu = g$, alors $\sigma_\nu \leq 0$ et $v_\nu - u_\nu = v_\nu - g \leq 0$, donc leur produit est positif ou nul.

Ainsi, on obtient :

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_\nu \cdot (v_\nu - u_\nu)\, d\Gamma \geq 0 \tag{3.14}$$

On a :

$$\sigma_\tau \cdot v_\tau \geq -\|\sigma_\tau\|\|v_\tau\|$$

D'après (3.7)

$$\sigma_\tau \cdot v_\tau \geq -\mu \|\sigma_\nu\| \|v_\tau\|$$

On va démontrer que

$$-\sigma_\tau \cdot u_\tau = \mu\|\sigma_\nu\| \|u_\tau\|$$

Si

$$\|\sigma_\tau\| < \mu\|\sigma_\nu\| \Rightarrow u_\tau = 0$$

Si

$$\|\sigma_\tau\| = \mu\|\sigma_\nu\| \Rightarrow \exists \lambda > 0, \quad \sigma_\tau = -\lambda u_\tau$$

$$\begin{aligned} \mu\|\sigma_\nu\| \|u_\tau\| &= \|\sigma_\tau\| \|u_\tau\| \\ &= -\left(-\|\sigma_\tau\| \|u_\tau\|\right) \\ &= -\sigma_\tau \cdot u_\tau \end{aligned} \tag{3.15}$$

et

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau) = \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot \boldsymbol{u}_\tau \geq -\mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|)\|\sigma_\nu\|\|\boldsymbol{v}_\tau\| + \mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|)\|\sigma_\nu\|\|\boldsymbol{u}_\tau\|.$$

$$\int_{\Gamma_C} \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau) da \geq \int_{\Gamma_C} \mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|)\|\sigma_\nu\|(\|\boldsymbol{u}_\tau\| - \|\boldsymbol{v}_\tau\|) da. \tag{3.16}$$

En additionnant (3.14) et (3.16), on obtient

$$\int_{\Gamma_C} [\sigma_\nu \cdot (v_\nu - u_\nu) + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau)]\, da \geq \int_{\Gamma_C} \mu(\|\boldsymbol{u}_\tau\|)\|\sigma_\nu(u)\|(\|\boldsymbol{u}_\tau\| - \|\boldsymbol{v}_\tau\|) da.$$

D'après (3.10)

$$\int_{\Gamma_C} [\sigma_\nu \cdot (v_\nu - u_\nu) + \boldsymbol{\sigma}_\tau \cdot (\boldsymbol{v}_\tau - \boldsymbol{u}_\tau)]\, da \geq j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

Et d'après (3.13)

$$a({}_0^C D_t^\alpha \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) \geq (f, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})_V + j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) - j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}).$$

Enfin, on obtient la formulation variationnelle du problème P

$$a({}_0^C D_t^\alpha \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + b(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) - j(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq (f, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})_V.$$

Problème variationnel (PV) : Trouver un champ de déplacements $u : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}^d$ et un champ de contraintes $\sigma : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{S}^d$ tels que pour tout $v \in V$:

$$\sigma = \mathcal{A}\varepsilon({}_0^C D_t^\alpha u) + \mathcal{B}\varepsilon(u), \tag{3.17}$$

$$a({}_0^C D_t^\alpha u, v - u) + b(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u), \tag{3.18}$$

$$u(0) = u_0. \tag{3.19}$$

3.3 Résultat d'existence

Dans cette section, nous présentons et démontrons un résultat d'existence.

Théorème 3.3.1. *Sous les hypothèses (HP1)–(HP4) ainsi que (3.10)–(3.12), le **problème (PV)** admet au moins une solution telle que :*

$$(u, \sigma) \in W^{1,2}(0, T; V) \times L^2(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{S}^d)).$$

La démonstration du **théorème 3.3.1** repose sur l'application d'arguments faisant intervenir un opérateur non linéaire, la dérivée de Caputo, ainsi que la méthode de Rothe. Étant donné que $y(t) = {}_0^C D_t^\alpha u(t)$ et $u(t) = {}_0 I_t^\alpha y(t) + u_0$, l'inégalité (3.18) et l'hypothèse $(HP4)$ peut être reformulée comme suit :

On rappelle la formulation variationnelle du problème :

$$a({}_0^C D_t^\alpha u, v - u) + b(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq (f, v - u), \quad \forall v \in V.$$

En substituant dans l'inégalité variationnelle $u(t)$ et $y(t)$, on obtient :

$$a(y(t), v-u(t)) + b(u_0 + {}_0I_t^\alpha y(t), v-u(t)) + j(u(t), v) - j(u(t), u(t)) \geq (f(t), v-u(t)).$$

Par définition du sous-différentiel de j Définition 2.4.3, on a :

$$\partial j(u(t)) = \{\xi \in V^* \mid j(u(t), v) - j(u(t), u(t)) \geq \langle \xi, v-u(t)\rangle,\ \forall v \in V\}.$$

Ainsi :

$$f(t) - a(y(t)) - b(u_0 + {}_0I_t^\alpha y(t)) \in \partial j(u_0 + {}_0I_t^\alpha y(t)).$$

Par le théorème de représentation de Riesz, nous définissons les opérateurs
$a, b : V \to V^*$ par

$$\langle a(u), v\rangle = a(u,v), \qquad \langle b(u), v\rangle = b(u,v), \quad \forall u, v \in V.$$

En réorganisant les termes, on obtient finalement

$$a\Big(y(t)\Big) + b\Big({}_0I_t^\alpha y(t) + u_0\Big) + \partial j\Big({}_0I_t^\alpha y(t) + u_0\Big) \ni f(t). \tag{3.20}$$

Soit maintenant $N \in \mathbb{N}$ un entier fixé, et posons $\Delta t = \delta = \frac{T}{N}$.
Nous considérons ensuite l'approximation suivante de l'opérateur d'intégrale fractionnaire ${}_0I_{t_n}^\alpha y(t)$:

$$\begin{aligned}
{}_0\tilde{I}_{t_n}^\alpha y(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t_n - s)^{\alpha-1} y(t_j)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^{n} y(t_j) \cdot \frac{\delta^\alpha}{\alpha} [(n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha] \\
&= \frac{\delta^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \sum_{j=1}^{n} y(t_j) [(n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha] \\
&= \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{j=1}^{n} y(t_j) [(n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

où $t_k = k\,\delta$. De plus, nous définissons la fonctionnelle f_δ^i comme suit :

$$f_\delta^i = \frac{1}{\delta} \int_{t_{i_1}}^{t_i} f(s)\, ds,$$

pour i = 1, . . ., N.

En appliquant la méthode de Rothe à l'équation (3.20), nous obtenons le problème fractionnaire de Rothe suivant :
On subdivise l'intervalle $[0,T]$ en N sous-intervalles de longueur $\delta = T/N$, avec $t_k = k\delta$, $k = 0,1,\ldots,N$.

Approximation de l'intégrale fractionnaire.

$$ {}_0\tilde{I}^{\alpha}_{t_n} y(t_n) = \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{i=1}^{n} y(t_i)\Big[(n-i+1)^{\alpha} - (n-i)^{\alpha}\Big]. $$

Soient y^k_δ une approximation de $y(t_k)$ et u^k_δ une approximation de $u(t_k)$. La relation $u(t_k) = u_0 + {}_0 I^{\alpha}_{t_k} y(t_k)$ devient :

$$ u^k_\delta = u_0 + \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{i=1}^{k} y^i_\delta\Big[(k-i+1)^{\alpha} - (k-i)^{\alpha}\Big]. \tag{3.22} $$

Avec f^k_δ définie précédemment, on obtient le problème de Rothe fractionnaire (PRF) :

$$ a(y^k_\delta) + b(u^k_\delta) + \partial j(u^k_\delta) \ni f^k_\delta, \tag{3.23} $$

k = 1,...,N.

Lemme 3.3.1. *Il existe une constante positive $\bar{\delta}$ telle que, si $\delta \in (0,\bar{\delta})$, alors le* ***problème (PRF)*** *admet au moins une solution.*

Preuve 5. *Supposons que $\{y^k_\delta\}_{k=0}^{n-1}$ soient donnés, et cherchons $y^n_\delta \in V$ satisfaisant (3.22)–(3.23). Pour cela, nous introduisons les opérateurs multivoques suivants : $\Pi : V \to V$,*
$\Pi_0 : V \to V^*$ *: définis par*

$$ \Pi(y) := \Pi_0 + \partial j(y), $$

et

$$ \Pi_0(y) := a(y) + b\left(\frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} [(n-i+1)^{\alpha} - (n-i)^{\alpha}] \frac{\delta^{\alpha}}{y} + u_0 \right). $$

Nous montrons maintenant que Π est un opérateur surjectif.

Dans un premier temps, nous établissons la coercivité de l'opérateur Π.
À cet effet, soit $c_t > 0$ une constante définie par :

$$ c_t = \frac{\delta^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} \|y^i_\delta\| [(n-i+1)^{\alpha} - (n-i)^{\alpha}]. \tag{3.24} $$

En utilisant les hypothèses (HP4) et l'équation (3.24), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\partial j\left(\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{i=1}^{n-1}y_\delta^i\Big[(n-i+1)^\alpha-(n-i)^\alpha\Big]+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}+u_0\right)\right|_{V^*}\\
&\leq c_j\left(\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sum_{i=1}^{n-1}\|y_\delta^i\|_V\Big[(n-i+1)^\alpha-(n-i)^\alpha\Big]+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\|y\|_V+1+\|u_0\|_V\right)\\
&\leq c_J\left(1+c_t+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\|y\|_V\right).
\end{aligned}\tag{3.25}$$

En se basant sur l'hypothèse (HP1) et l'équation (3.12), nous obtenons que : On rappelle que :

$$\begin{aligned}
\Pi(y)=a(y)+b\left(u_0+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n-1}y_\delta^i\left[(n-i+1)^\alpha-(n-i)^\alpha\right]+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}y\right)\\
+\partial j\left(u_0+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n-1}y_\delta^i\left[(n-i+1)^\alpha-(n-i)^\alpha\right]+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}y\right).
\end{aligned}\tag{3.26}$$

En évaluant $\langle\Pi(y),y\rangle$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle\Pi(y),y\rangle=a(y,y)+\left\langle b\left(u_0+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n-1}y_\delta^i\left[(n-i+1)^\alpha-(n-i)^\alpha\right]+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}y\right),y\right\rangle\\
+\left\langle\partial j\left(u_0+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n-1}y_\delta^i\left[(n-i+1)^\alpha-(n-i)^\alpha\right]+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}y\right),y\right\rangle.
\end{aligned}\tag{3.27}$$

D'après (HP1)(2) :

$$a(y,y)\geq m_a\|y\|_V^2.\tag{3.28}$$

D'après (HP1)(3) :

$$|b(w,y)|\leq M_b\|w\|_V\|y\|_V,$$

d'où :

$$\begin{aligned}
&\left\langle b\left(u_0+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n-1}y_\delta^i\left[(n-i+1)^\alpha-(n-i)^\alpha\right]+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}y\right),y\right\rangle\\
&\geq -M_b\left(\|u_0+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n-1}y_\delta^i\left[(n-i+1)^\alpha-(n-i)^\alpha\right]\|_V+\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\|y\|_V\right)\|y\|_V.
\end{aligned}\tag{3.29}$$

en additionnant les trois inégalités (3.25) *et* (3.28) *et* (3.29) *:*

$$\Pi(y,y) \geq m_a\|y\|_V^2 - M_b\left(c_t + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\|y\|_V\right)\|y\|_V - C_j\left(1 + c_t + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\|y\|_V\right)$$

$$\geq \left(m_a - \frac{\delta^\alpha(M_b+v_j)}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\|y\|_V^2 - \left(M_b c_t + \frac{c_j\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\|y\|_V - c_j(1+c_t).$$

Nous définissons $\bar{\delta} = \frac{\Gamma(1+\alpha)m_a}{\delta^\alpha(M_b+c_j)}$ *afin d'établir la coercivité de l'opérateur* Π*.*
Par la suite, nous utilisons les hypothèses relatives à a et b pour en déduire que :

$$\Pi_0(y,y) \geq \left(m_a - \frac{\delta^\alpha M_b}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\|y\|_V^2.$$

Par conséquent, l'opérateur Π_0 *est pseudomonotone.*
Il est maintenant nécessaire de démontrer que l'opérateur $\Psi : V \to V^*$ *défini par*

$$\Psi(y) := \partial j\left(\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n-1}\left[(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha\right] + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}y + u_0\right),$$

pour tout $y \in V$*, est pseudomonotone.*

En effet : *On pose*

$$u_0 + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n-1} y_\delta^i\left[(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha\right] = u_0 + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n-1} y_\delta^i\Big[(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha\Big],$$
$$w(y) = u_0 + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n-1} y_\delta^i\left[(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha\right] + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}y. \tag{3.30}$$

Ainsi $\Psi(y) = \partial j(w(y))$*.*

1. ***Non vide :*** *Puisque j est convexe, propre et semi-continue inférieurement, on a* $\partial j(u) \neq \emptyset$ *pour tout* $u \in V$ *(cf. [[7], Proposition 2.17]).*
2. ***Convexe :*** *Le sous-différentiel d'une fonction convexe est toujours convexe (cf. [[7], Proposition 2.16]).*
3. ***Faiblement compact :*** $\partial j(w(y))$ *est convexe, fermé et borné dans* V^**. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, il est faiblement compact.*
4. ***Borné :*** *D'après l'hypothèse (HP4), il existe* $c_j > 0$ *tel que pour tout* $\xi \in \Psi(y)$ *:*

$$\|\xi\|_{V^*} \leq c_j(1 + \|w(y)\|_V).$$

Comme $\|w(y)\|_V \le \|u_0 + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} y_\delta^i [(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha]\|_V + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\|y\|_V$, *on obtient* $\|\xi\|_{V^*} \le C(1+\|y\|_V)$. *Donc* Ψ *est borné.*

5. ***Monotonie forte de*** $y \mapsto w(y)$ ***:***

$$\langle w(y_1) - w(y_2), y_1 - y_2 \rangle = \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \|y_1 - y_2\|_V^2.$$

L'application $y \mapsto w(y)$ *est affine, continue et fortement monotone.*

6. ***Maximal monotone de*** ∂j ***:*** *La fonction* j *est convexe, propre et semi-continue inférieurement. D'après [[7], Théorème 2.8], son sous-différentiel* ∂j *est un opérateur* ***maximal monotone****.*

7. ***Maximal monotone de*** Ψ ***:*** *La composée d'un opérateur maximal monotone avec une application affine fortement monotone est encore maximale monotone (cf. [[16], Proposition 3.21]). Par conséquent,* Ψ *est* ***maximal monotone****.*

8. ***Pseudomonotonie :*** *Tout opérateur maximal monotone est pseudomonotone (cf. [[7], Théorème 2.8]). Donc* Ψ *est* ***pseudomonotone****.*

Par conséquent, Ψ *est pseudomonotone.*

En d'autres termes, soit $\{y_m\} \subset V$ *telle que* $y_m \rightharpoonup y$ *faiblement dans* V*, lorsque* $m \to \infty$*, et*

$$\beta_m \in \partial_j \left(\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} [(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha] + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} y_m + u_0 \right).$$

Comme l'opérateur ∂j *est borné, la suite* $\{\beta_m\}$ *est bornée dans* V^**.*

Par conséquent, en considérant une sous-suite si nécessaire, on observe que $y_m \rightharpoonup y$ *faiblement dans* V^* *lorsque* $m \to \infty$*.*

Étant donné que le graphe de l'application multivoque

$$y \mapsto \partial j \left(\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} [(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha] + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + u_0 \right)$$

est fermé pour la topologie $V \times V^*$ *(voir [[16], Proposition 3.23(v)]).*

Par conséquent, nous concluons que :

$$\beta \in \partial_j \left(\frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} y_\delta^\alpha [(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha] + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} y + u_0 \right).$$

Par la suite, il devient évident que $\beta \in \Pi(y)$*, et nous définissons*

$$\langle \beta_m, y_m \rangle \to \langle \beta, y \rangle_{V^* \times V} \text{ lorsque } m \to \infty.$$

En utilisant le Lemme A.1, nous déduisons la pseudomonotonicité de l'opérateur Π, *ce qui permet d'établir qu'il est pseudomonotone. Par conséquent, l'opérateur* Π *est pseudomonotone. Ainsi, le* ***problème (PRF)*** *admet au moins une solution.*
Ensuite, nous présentons la suite des solutions du problème de Rothe fractionnaire (3.23).

Lemme 3.3.2. *Sous les hypothèses* $(HP1)$–$(HP4)$ *et l'équation (3.24), il existe* $\delta > 0$ *et une constante positive c indépendante de* δ *telle que* $0 < \delta < \bar{\delta}$; *la solution de (3.23) satisfait :*

$$\max_k \|y_\tau^k\| + \max_k \|u_\tau^k\| + \max_k \|\beta_\tau^k\| \leq c, \tag{3.31}$$

pour $k = 1, \ldots, N$ *et* $\beta_\delta^k \in \partial j(y_\delta^k)$, *et*

$$a(y_\delta^k) + b(u_\delta^k) + \beta_\delta^k = f_\delta^k. \tag{3.32}$$

Preuve 6. *Pour tout* $1 \leq n \leq N$, *en multipliant l'équation (3.32) par* y_δ^n, *nous obtenons :*

$$a(y_\delta^n, y_\delta^n) + a\langle u_\delta^n, y_\delta^n\rangle + \langle \beta_\delta^n, y_\delta^n\rangle_{V^*\times V} = \langle f_\delta^n, y_\delta^n\rangle_{V^*\times V}.$$

En se référant à(??), (HP1) et (HP4), nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}
\langle f_\delta^n, y_\delta^n\rangle &\geq m_\alpha \|y_\delta^n\|_V^2 - M_b \|u_\delta^n\|_V \|y_\delta^n\|_V - c_j(1 + \|u_\delta^n\|_V)\|y_\delta^n\|_V \\
&\geq m_\alpha \|y_\delta^n\|_V - M_b \left(\|u_0\|_V + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \|y_\delta^i\|_V \left[(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha\right] \right) \|y_\delta^n\|_V \\
&\quad - \left(1 + \|u_0\|_V + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n} \|y_\delta^i\|_V \left[(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha\right] \right) \|y_\delta^n\|_V \\
&\geq m_\alpha \|y_\tau^n\|_V^2 - \frac{M_b \delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \|y_\delta^n\|_V^2 - M_b \|u_0\|_V \|y_\delta^n\|_V^2 \\
&\quad - c_j \|y_\delta^n\|_V - c_j \|u_0\|_V \|y_\delta^n\|_V - \frac{c_j \delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \|y_\delta^n\|_V^2 \\
&\quad - \frac{M_b \delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} \left[(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha\right] \|y_\delta^i\|_V \|y_\delta^n\|_V \\
&\quad - \frac{c_j \delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{n-1} \left[(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha\right] \|y_\delta^i\|_V \|y_\delta^n\|_V.
\end{aligned}$$

Ainsi, en s'appuyant sur l'analyse précédente, nous concluons que :

$$\|f_\delta^n\|_V + \frac{\delta^\alpha(M_b+c_j)}{\Gamma(1+\alpha)}\|y_\delta^i\|_V \sum_{i=1}^{n-1}[(n-i+1)^\alpha-(n-i)^\alpha] + c_j + (c_j+M_b)\|u_0\|_V$$
$$\geq \left(m_a - \frac{\delta^\alpha(M_b+c_j)}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\|y_\delta^n\|_V.$$

En choisissant $\bar{\delta} = \left(\frac{m_1\Gamma(1+\alpha)}{2(M_b+c_j)}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, *nous déduisons que* $m_a - \frac{\delta^\alpha(M_b+c_j)}{\Gamma(1+\alpha)} \geq \frac{m_a}{2}$ *pour tout* $0<\delta<\bar{\delta}$. *Ainsi,*

$$2\frac{\|f_\delta^n\|_V}{m_a} + 2\frac{c_j + c_j\|u_0\|_V + M_b\|u_0\|_V}{m_a}$$
$$+2\frac{\delta^\alpha(M_b+c_j)}{m_a\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n-1}\|y_\delta^i\|_V\,[(n-i+1)^\alpha-(n-i)^\alpha]$$
$$\geq \|y_\delta^n\|_V.$$

En utilisant les hypothèses (HP1), pour tout $\delta>0$ *et* $n\in\mathbb{N}$, *il existe une constante positive* $c_f>0$ *telle que* $|f_\delta^n|_V \leq c_f$.

Pour alléger l'écriture, posons $\tilde{c} = \frac{2}{m_a}\left(c_f + c_j\|u\|_V + M_b\|u_0\|_V + c_j\right)$.

En appliquant l'inégalité de Gronwall discrète généralisée donnée dans le Lemme A.1, nous observons que :

$$\begin{aligned}\|f_\delta^n\|_V &\leq c_0\exp\left(\frac{2\delta^\alpha(M_b+c_j)}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n-1}[(n-i+1)^\alpha-(n-i)^\alpha]\right)\\ &\leq c_0\exp\left(\frac{2\delta^\alpha(M_b+c_j)}{\Gamma(1+\alpha)}\right)\leq c.\end{aligned} \tag{3.33}$$

En combinant les équations (3.33) et (3.22), nous obtenons le résultat suivant :

$$\|u_\delta^n\|_V = \left\|u_0 + \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{i=1}^{n} y_\delta^i\,[(n-i-1)^\alpha-(n-i)^\alpha]\right\|_V$$

$$\leq \|u_0\| + \sum_{i=1}^{n}(t_{n-i-1}^\alpha - t_{n-i}^\alpha) \leq \|u_0\|_V + \frac{cT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \leq c$$

Finalement, d'après l'hypothèse (HP1), nous obtenons l'estimation suivante pour β_δ^n :

$$\|\beta_\delta^n\|_{V*} \leq c_j\left(1+\|u_\delta^n\|_V\right) \leq c_j(1+c). \tag{3.34}$$

Ainsi, le Lemme A.1 est démontré.

La solvabilité du ***Problème (PV)*** *découle du résultat suivant.* □

Preuve du Théorème 3.3.1 Considérons une suite $\{\delta_n\}$ telle que $\delta_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$

D'après l'estimation (18), les suites $\{\bar{y}_\delta\}$, $\{\bar{u}_\delta\}$ et $\{\bar{\beta}_\delta\}$, qui s'interpolent respectivement en $\{y_\delta\}$, $\{u_\delta\}$ et $\{\beta_\delta\}$, sont bornées pour $k = 1, \ldots, N$.

Par conséquent, il existe $y \in V$, $u \in V$ et $\beta \in V^*$ tels que :

$$\bar{y}_\delta \rightharpoonup y \quad \text{faiblement dans } V \quad \text{lorsque } \delta \to 0, \tag{3.35}$$

$$\bar{u}_\delta \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } V \quad \text{lorsque } \tau \to 0, \tag{3.36}$$

$$\bar{\beta}_\delta \rightharpoonup \beta \quad \text{faiblement dans } V^* \quad \text{lorsque } \tau \to 0. \tag{3.37}$$

En utilisant [[16], Lemme 4 (a)], nous déduisons que :

$$ {}_0I_t^\alpha \bar{y}_\delta \to {}_0 I_t^\alpha y \quad \text{faiblement dans V} \quad \text{lorsque } \delta \to 0$$

En utilisant l'équation (3.31), et pour tout $t \in (0, T)$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\|\bar{u}_\delta(t) - u_0 - {}_0I_t^\alpha \bar{y}_\delta(t)\| \\ &= \left\| \frac{\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{i=1}^{n} y_\delta^i \Big[(n-i+1)^\alpha - (n-i)^\alpha \Big] - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \bar{y}_\delta(s)\, ds \right\| \\ &\leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{t_n} (t_n - s)^{\alpha-1}\, ds + \int_0^t \left| (t-s)^{\alpha-1} - (t_n - s)^{\alpha-1} \right| ds \\ &\leq \frac{c}{\Gamma(\alpha)} \left[(t_n - t)^\alpha + t^\alpha + (t_n - t)^\alpha - t_n^\alpha \right], \end{aligned} \tag{3.38}$$

pour $t \in [t_{n-1}, t_n]$. Alors,

$$\bar{u}_\delta(t) - u_0 - {}_0 I_t^\alpha \bar{y}_\delta(t)) \to 0 \quad \text{fortement dans } V \quad \text{lorsque } \tau \to 0.$$

En combinaison avec l'équation (3.38), cela conduit à :

$$\bar{u}_\delta(t) \to u_0 + {}_0 I_t^\alpha y_\delta(t) \to 0 \quad \text{faiblement dans } V \quad \text{lorsque } \delta \to 0. \tag{3.39}$$

En considérant l'application $u \mapsto \partial_j u$, qui est semi-continue supérieurement de V vers V^*, et en utilisant (3.37) ainsi que le Théorème 3.13 de [6], on obtient :

$$\beta(t) \in \partial_j \Big(u_0 + {}_0 I_t^\alpha y_\delta \Big) \quad \text{pour presque tout } t \in (0, T).$$

Nous définissons maintenant les opérateurs de Nemytskii a et b associés aux fonctions a et b par :

$$(\bar{a}y)(t) = ay(t), \qquad (\bar{b}y)(t) = b(u_0 +_0 I_t^\alpha y(t)),$$

pour tout $w \in V$ et presque tout $t \in (0,T)$.

Sous l'hypothèse $(HP1)$(iii), ainsi que les équations (3.34) et (3.35), nous obtenons pour tout
$t \in (0,T)$:

$$\bar{a}\bar{y}_\delta \to a(y) \quad \text{faiblement dans } V, \quad \text{lorsque } \tau \to 0, \tag{3.40}$$

$$b(u_0 +_0 I_t^\alpha \bar{y}_\delta(t)) \to b(u_0 +_0 I_t^\alpha y(t)) \quad \text{faiblement dans } V, \quad \text{lorsque } \tau \to 0.$$

D'après l'hypothèse $(HP1)$ et l'équation (18), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\int_0^T \|b({}_0I_t^\alpha \bar{y}(t) + u_0)\|_V \, dt \\ &\leq \frac{M_b C}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^T t^\alpha \, dt + TM_b\|u_0\|_V \\ &= \frac{M_b c T^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + TM_b\|u_0\|_V \end{aligned} \tag{3.41}$$

En appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{\delta\to 0} b(\bar{y}_\delta, v) &= \lim_{\delta\to 0} \int_0^T b({}_0I_t^\alpha \bar{y}_\delta(t) + u_0, v(t))\, dt \\ &= \int_0^T \lim_{\delta\to 0} b({}_0I_t^\alpha \bar{y}_\delta(t) + u_0, v(t))\, dt \\ &= \int_0^T b({}_0I_t^\alpha y(t) + u_0, v(t))\, dt = b(y,v). \end{aligned}$$

Au contraire, d'après le Lemme 3.3 de [25], nous savons que :

$$f_\tau \to f \quad \text{fortement dans } V \quad \text{lorsque } \tau \to 0.$$

Enfin, en utilisant les équations (3.39), (3.40) et (3.41), on peut passer à la limite dans l'équation (3.20), ce qui implique que $y \in L^2(0,T;V)$ est une solution du **problème (PRF)**.

Par conséquent, on déduit que $u \in W^{1,2}(0,T;V)$, avec $u(t) = u_0 +_0 I_t^\alpha y(t)$,
pour presque tout $t \in (0,T)$,est une solution du **problème (PV)**.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail, nous avons étudié un problème de contact quasi-statique pour un matériau viscoélastique à comportement fractionnaire de type Kelvin–Voigt, avec frottement de Coulomb et conditions de contact unilatéral. Le problème a été formulé de manière variationnelle appropriée, en utilisant les espaces de Sobolev, les espaces de Bochner et la dérivée fractionnaire de Caputo.

Le résultat principal démontré est l'existence d'une solution au problème, obtenue en appliquant la méthode de Rothe pour la semi-discrétisation temporelle, combinée aux propriétés de monotonie et de compacité. Nous avons montré que des conditions naturelles sur les données physiques garantissent l'existence d'une solution unique dans des espaces adaptés.

Cette étude ouvre plusieurs perspectives pour des travaux futurs, notamment : l'étude de problèmes de contact plus complexes (usure, endommagement), ou la réalisation de simulations numériques par la méthode des éléments finis ou des différences finies, en particulier pour l'approximation numérique de la dérivée fractionnaire.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Acad. Press, New York, 1975.

[2] R. L. Bagley and P. J. Torvik, A theoretical basis for the application of fractional calculus in viscoelasticity, *J. Rheol.*, 27 (1983), 201–210.

[3] V. Barbu and T. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht, 1986.

[4] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Masson, Paris, 1987.

[5] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2010.

[6] C. Carstensen and J. Gwinner, A theory of discretization for nonlinear evolution inequalities applied to parabolic Signorini problems, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 177 (1999), 363–394.

[7] I. Ekeland and R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[8] E. Franck, *EDP elliptiques et méthodes de Galerkin*, Mémoire de Master, Univ. Strasbourg, 2024.

[9] T. Hadj Ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, Frictional contact problem for electro-viscoelastic materials with long-term memory, damage and adhesion, *Electron. J. Differ. Equ.*, 222 (2014), 1–21.

[10] W. Han and M. Sofonea, Evolutionary variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, *SIAM J. Numer. Anal.*, 38 (2000), 556–579.

[11] D. Hömberg, *Rothe Method for Parabolic Equations*, Cours, 2022.

[12] I. R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1994.

[13] N. Kikuchi and J. T. Oden, Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media, *Int. J. Eng. Sci.*, 18 (1982), 1173–1284.

[14] M. Ledret, *La méthode de Galerkin*, Cours, 2013.

[15] L. Li and J.-G. Liu, A generalized definition of Caputo derivatives and its application to fractional ODEs, *SIAM J. Math. Anal.*, 50 (2018), 2867–2900.

[16] S. Migorski and A. Ochal, Quasi-static hemivariational inequality via vanishing acceleration approach, *SIAM J. Math. Anal.*, 41 (2009), 1415–1435.

[17] J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastoplastic Bodies : An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.

[18] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1967.

[19] S. F. Universität Berlin, *The Ritz Method and the Galerkin Method*, Numerical PDEs, 2024.

[20] G. Zouaghi, *Résolution numérique de quelques problèmes paraboliques linéaires et non linéaires*, Mémoire de Master, Centre Univ. Abd Elhafid Boussouf, Mila, Algérie, 2020.