

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supérieur Et De La Recherche Scientifique

UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL
OUED

FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES
Département De Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques fondamentales et appliqué

Sujet

**Analyse d'un problème de contact
avec adhésion et frottement pour
les matériaux thermo-électro-élastiques.**

Présenté par : **HAGA Radhia** **NECIB Ourida**

Devant le jury:

D. Azeb Abd Elaziz	MCA	Président
D. Said Ameer Meziane	MCB	Encadrer
D. Hadj Ammar Tedjani	MCA	Examinateur

Promotion : 2020/2021

Dédicaces

Dieu merci, qui nous a aidés à accomplir cet travail, qui notre succès entre ses mains

Je dédie le fruit de cet humble travail :

A qui Dieu a immortalisé Sa mention dans le Coran est récitée jusqu'au Jour

*du Jugement... et le Paradis se fait sous ses pieds... A qui... à qui Elle m'a porté ici sur leur faiblesse... **ma mère bien-aimée***

A celui qui a bu la coupe vide pour me donner une goutte d'amour...

*A celui qui a cueilli les épines de mon chemin pour me paver Le chemin de la connaissance... vers le grand coeur... **cher père***

A ceux qui sont plus proches de moi que mon âme... A ceux qui ont partagé avec moi

*le câlin de la mère... Mes frères (**Lazhari, Badr El Din et Saber**) et*

*mes soeurs (**Hanane, ouidad et Rahma**)*

A tous mes amis dont les images et les voix résident dans les plus beaux moments et

jours que j'ai vécus tout au long des étapes d'études, et je voudrais mentionner en particulier :

Radhia Haga, Matira Maiza et Kaouther Chamsa.

****Etudiante Ourida Necib****

Dédicaces

Nous dédions le fruit de nos efforts à ceux qui ont beaucoup souffert pour nous rendre heureux.

A ceux qui se sont sacrifiés pour nous mettre sur la voie de savoir : ma mère bien-aimée, cher père et ma mari cher. A ceux qui ont partagé avec moi le câlin de la mère... Mes frères et mes soeurs.

Nous dédions également ce travail à ceux qui nous ont permis d'accéder à ce cher succès : Nos professeurs à qui, nous exprimons nos sincères reconnaissances et considérations. Nous dédions, enfin, ce grand labeur scientifique, à ceux qui nous ont côtoyées durant le cycle universitaire : Nos chers amis

Etudiante Radhia Haga

Remerciements

Tout d'abord, nous remercions Dieu qui nous a donné la force de terminer ce travail. Nous adressons nos sincères remerciements au

Dr Said Ameer Meziane, Professeur au Département de Mathématiques de l'Université d'Eloued pour avoir accepté le encadrement et le suivi de ce travail, qui a joué un grand rôle dans notre succès.

Nous remercions également le **Dr HADJ AMMAR Tedjani**, professeur au Département de mathématiques de l'Université d'Eloued, qui nous a fourni des conseils et une assistance lors de la réalisation de cette mémoire.

Nous remercions également le jury d'avoir accepté de discuter de ce travail, en commençant par le président du jury **Dr Azeb Ahmed ABDELAZIZ**, ainsi que les membres respectés.

Nous remercions également les professeurs respectés qui nous ont aidés et qui nous ont soutenus dans toutes les étapes de nos études.

Enfin que tous ceux qui n'ont pas été mentionnés et qui ont contribué à la réalisation, de près ou de loin, de ce travail.

Table des matières

Notations	vii
Introduction	1
1 Modélisation	3
1.1 Cadre physique	3
1.1.1 Modèle mathématique	5
1.2 Lois de comportements	7
1.2.1 Loi de comportement des matériaux électro-élastiques.	8
1.2.2 Loi de comportement thermo-électro-élastiques avec mémoire longue avec endommagement	8
1.3 Conditions aux limites	10
1.3.1 Condition aux limites de déplacement	10
1.3.2 Condition aux limites de traction.	10
1.3.3 Conditions aux limites électriques.	10
1.3.4 Conditions aux limites de contact.	10
1.3.5 Loi de frottement de type Coulomb.	14
1.3.6 Lois de contact avec frottement et adhésion	15
2 Outils Mathématiques	18
2.1 Contraction	18
2.2 Espaces de Hilbert	19
2.3 Les espaces $L^p(\Omega)$	20
2.4 Espaces de Sobolev	21
2.5 Espaces fonctionnels	22

2.5.1	Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	26
2.5.2	Lemme de Gronwall	31
3	Contact entre deux corps thermo-électro-élastiques avec mémoire longe, adhésion et frottement	32
3.1	Formulation du problème	33
3.2	Formulation variationnelle	35
3.3	Résultats principaux	43
	Conclusion générale	54

Notations

i.e	identiquement égale,
\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels,
\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels,
c	Constante réelle strictement positive,
$\nabla\psi$	Gradient de l'application $\psi : \nabla\psi = (\partial_1\psi, \dots, \partial_d\psi)$,
$\partial_i\psi$	dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante $x : \partial_i\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}$,
\mathbb{S}^d	Espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$,
$\text{Div}\psi$	Divergence de l'application, $\psi : \text{Div}\psi = \partial_1\psi + \dots + \partial_d\psi$,
$(\cdot, \cdot)_X$	Produit scalaire de X,
$\ \cdot\ _X$	Norme de X,
p.p.	Presque partout,
$\bar{\Omega}^\ell$	Adhérence de Ω^ℓ ,
Ω^ℓ	Ouvert de \mathbb{R}^d ,
Γ^ℓ	Frontière de $\Omega^\ell : \Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$,
$mes\Gamma_i^\ell$	Mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_i^ℓ ,
Γ_i^ℓ	Parties de frontière $\Gamma^\ell, (i = 1, 2, 3)$,
$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ ,
ν^ℓ	Normale unitaire sortante à Γ^ℓ ,
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega^\ell)}$	Norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell\ _{L^2(\Omega^\ell)} = (\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx)^{\frac{1}{2}}$,
v_ν^ℓ, v_τ^ℓ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v_ν^ℓ défini sur $\bar{\Omega}^\ell$,
$L^2(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < +\infty$,

$L^\infty(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que, $\exists c > 0 : u^\ell < c$, p.p., sur Ω^ℓ ,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	Espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ ,
H_{Γ^ℓ}	Espace $(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell))^d$,
H'_{Γ^ℓ}	Espace dual de H_{Γ^ℓ} .
$C([0, T]; H)$	Espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1([0, T]; H)$	Espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p([0, T]; H)$	Espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot\ _{L^p([0, T]; H)}$	Norme de $L^p([0, T]; H)$,
$W^{k,p}([0, T]; H)$	Espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}([0, T]; H)}$	Norme de $W^{k,p}([0, T]; H)$,
$\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ , on écrit σ_i^ℓ Composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν^ℓ	Normale des contraintes à la frontière du domaine : $\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell$,
σ_τ^ℓ	Composante tangentielle du champ tensoriel σ^ℓ ,
φ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
β	Vecteurs d'adhésion sur la surface de contact Γ_3 ,
D^ℓ	Valeurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	Dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps,
$\varepsilon(u^\ell)$	Tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon(u^\ell)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell)$.

Introduction

Le contact entre les matériaux est un phénomène très fréquent et important dans notre vie quotidienne, il a attiré l'attention de l'être humain depuis les anciens temps, c'est pourquoi les scientifiques ont essayé de l'étudier et le modéliser. La connaissance, la maîtrise de ce phénomène confèrent aux scientifiques, aux industriels la possibilité d'élaborer des matériaux aux propriétés et aux performances voulues. De ce fait un grand nombre de formation en école d'ingénieur ou bien à l'université est tourné vers les sciences des matériaux et les travaux sur ces sujets se sont considérablement multipliés au cours des derniers temps.

Un progrès considérable a été réalisé récemment dans la modélisation, l'analyse mathématiques des différents processus impliqués dans le contact entre corps déformables et par conséquent, une Théorie Mathématique générale de la Mécanique du Contact (MTCM) est actuellement émergée. Elle est concernée par les structures mathématiques qui sont à la base des problèmes de contact avec des lois constitutives différentes, c'est à dire, différents matériaux, diverses géométries et des conditions de contact différentes, voir par exemple [16, 17, 18].

Les matériaux piézoélectriques ont été découverts au début du siècle par les époux Curie. Les matériaux présentant des propriétés piézoélectriques sont très nombreux, il est impossible de faire un inventaire exhaustif. Le plus connu est sans doute le quartz, toujours utilisé aujourd'hui dans les montres pour générer des impulsions d'horloge.

De manière plus générale, l'effet direct peut être mis à profit dans la réalisation de capteurs tandis que l'effet inverse permet de réaliser des actionneurs (injecteurs à commande piézoélectrique en automobile, nano manipulateur).

L'utilisation de la piézoélectricité a exposé ces dernières années et est en pleine expansion. La capacité de ces matériaux à convertir l'énergie mécanique en énergie électrique

et vice versa est une valeur inestimable pour les transducteurs acoustique, l'échographie médicale, pour la haute précision des pompes et des moteurs. Des performances piézoélectriques élevées ont également ouvert de nouvelles possibilités de "récupération d'énergie", en utilisant le mouvement ambiant et les vibrations pour produire de l'électricité où les piles ou autres sources d'énergie sont impraticables ou indispensables [5, 7].

Ce mémoire reprise une contribution à l'analyse d'un problème de contact entre deux corps déformables, en tenant compte l'effet piézoélectrique du matériaux. Sous l'hypothèse des petites transformations, nous étudions des processus quasi statiques pour des matériaux thermo-électro-viscoélastiques [14]. Notre étude un phénomène de contact comprend les étapes suivantes; la modélisation mathématique, l'analyse variationnelle incluant des résultats d'existence et d'unicité de solution.

Ce mémoire est composé de trois chapitre et structurés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on commence par définir le cadre physique, les lois de comportement des différents matériaux, les conditions aux limites ainsi que la formulation mécanique du problème à étudier.

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire, est dédiée aux définitions élémentaires des notions d'analyses. Nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les espaces fonctionnels, les opérateurs fortement monotones et Lipschitz, les équations et les inéquations variationnelles d'évolution paraboliques, le lemme de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations et qu'ils sont illustrent de façon intéressante certaines manipulations que l'on peut faire sur notre formulation qui caractérise ce qui nous décrivons dans notre mémoire.

Dans la troisième chapitre, nous étudions un problème de Contact entre deux corps avec adhésion et frottement pour les matériaux thermo- électro- viscoelastiques, nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité d'une solution faible [15].

Chapitre 1

Modélisation

Ce chapitre représente un bref rappel de la mécanique où nous allons introduire le cadre physiques utilisé dans ce mémoire, nous commençons de rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement thermo-électro-viscoélastiques. Par ailleurs nous précisons les conditions aux limites de contact avec frottement avec ou sans adhésion. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, et les théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.1 Cadre physique

Considérons deux corps thermo-électro-élastiques à long terme mémoire avec endommagements, occupant deux domaines bornés Ω^1, Ω^2 de l'espace $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$. Nous avons mis un super-script ℓ pour indiquer que la quantité est liée au domaine Ω^ℓ , dans se qui suit l'indice ℓ supérieur est compris entre 1 et 2. Pour chaque domaine Ω^ℓ ($\ell = 1, 2$), avec une surface frontière régulière Γ^ℓ , partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ , correspondant aux conditions aux limites mécanique, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ correspondant aux conditions aux limites électrique, d'autre part, telles que $\Gamma_1^\ell > 0$ et $\Gamma_a^\ell > 0$. On note par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Nous noterons par Γ_3^ℓ l'interface de contact du corps Ω^ℓ , ($\ell = 1, 2$); on a $\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2$, noté par Γ_3 . Le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe et en contact avec frottement, adhésion et compliance normale sur la partie Γ_3 . Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ . De plus, ce milieu est soumis à l'action de potentiel électrique

nul sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2^ℓ sur la partie Γ_b^ℓ . Nous nous intéressons à l'étude de l'évolution des corps matériels sous l'action des forces volumiques des densités f_0^ℓ et des charges électriques de densité volumiques q_0^ℓ . Finalement, Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question.

Cadre physique (Problème électro-mécanique.)

Nous considérons deux corps matériels qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d (\ell = 1, 2; d = 2, 3)$, avec une frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$, tel que $mes\Gamma_1^\ell > 0$. Nous notons que ν la normale unitaire sortante à Γ les corps est encastrées sur $\Gamma_1^\ell, \ell = 1, 2$ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité $f_2^\ell, \ell = 1, 2$ et dans Ω agissent des forces volumiques de densités $f_0^\ell, \ell = 1, 2$. (voir Fig. 1). Nous supposons $f_2^\ell, \ell = 1, 2$. et $f_0^\ell, \ell = 1, 2$. varient très lentement par rapport au temps et soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. En plus de l'action des forces des tractions, le corps est soumis à l'action des chaleurs électriques de densité volumiques $q_0^\ell, \ell = 1, 2$ et de chaleurs électriques surface. Pour les décrire, nous considérons une partition de la frontière $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$ en deux parties mesurables, Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ telles que $mes\Gamma_a^\ell > 0$. Les corps est en contact avec frottant avec adhésion sur la partie Γ_3^ℓ , le potentiel électrique s'annule sur Γ_a^ℓ , et la charges électriques superficielle de densité $q_2^\ell, \ell = 1, 2$. est prescrite sur Γ_b^ℓ .

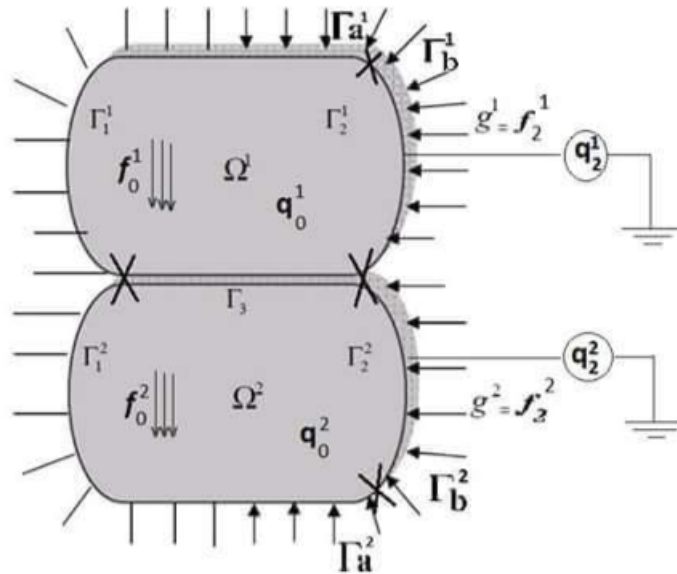


Figure1 Cadre Physique

Avant d'obtenir le modèle mathématique qui correspondent au cadre physique présenté, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de ce mémoire.

Nous désignons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), " \cdot " et $|\cdot|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell &= u_i^\ell \cdot v_i^\ell, & \|\mathbf{v}^\ell\| &= (\mathbf{v}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in \mathbb{R}^d, \\ \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell &= \sigma_i^\ell \cdot \tau_i^\ell, & \|\boldsymbol{\tau}^\ell\| &= (\boldsymbol{\tau}^\ell \cdot \boldsymbol{\tau}^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell \in \mathbb{S}^d. \end{aligned}$$

Pour chaque élément $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$, nous notons par v_ν^ℓ et \mathbf{v}_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par :

$$v_\nu^\ell = \mathbf{v}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \mathbf{v}_\tau^\ell = \mathbf{v}^\ell - v_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.1)$$

Nous désignons par $\boldsymbol{\sigma}^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell(x, t)$ le champ des contraintes, par $\mathbf{u}^\ell = \mathbf{u}^\ell(x, t)$, le champ des déplacements et par $\varepsilon(\mathbf{u}^\ell)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \bar{\Omega}^\ell$ et $t \in [0, T]$.

Pour un champ des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ nous dénotons par σ_ν^ℓ et $\boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell$ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu^\ell = (\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell, \quad \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell = \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell - \sigma_\nu^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell. \quad (1.2)$$

En utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell) \cdot \mathbf{v}^\ell = \sigma_\nu^\ell v_\nu^\ell + \boldsymbol{\sigma}_\tau^\ell \cdot \mathbf{v}_\tau^\ell, \quad (1.3)$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement des formulations variationnelles des problèmes mécaniques de contact.

1.1.1 Modèle mathématique

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt}, \quad \ddot{u}^\ell = \frac{d^2u^\ell}{dt^2},$$

avec $\dot{u}_\nu^\ell = \dot{u}^\ell \cdot \nu^\ell$, $\dot{u}_\tau^\ell = \dot{u}^\ell - \dot{u}_\nu^\ell \cdot \nu^\ell$ Rappelons maintenant la relation déformation-déplacement dans l'hypothèse des petites transformations

$$\varepsilon^\ell(\mathbf{u}^\ell) = (\varepsilon_{ij}^\ell(\mathbf{u}^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}^\ell(\mathbf{u}^\ell) = \frac{1}{2}(\partial_j \mathbf{u}_i^\ell + \partial_i \mathbf{u}_j^\ell).$$

Passons maintenant à la description du modèle mathématique associée au cadre physique ci-dessus.

modèle mathématique est décrit l'évolution du corps dans le cadre physique par l'équation du mouvement de Cauchy :

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = \rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T]. \quad (1.4)$$

Les processus d'évolution modélés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier : par exemple dans le cas où $\dot{\mathbf{u}}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesse $\dot{\mathbf{u}}^\ell$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho^\ell \ddot{\mathbf{u}}^\ell$ peut être négligé (processus quasi statiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient :

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T]. \quad (1.5)$$

Puisque le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ , le champ des déplacements s'annule

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (1.6)$$

La condition aux limites en tractions est

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \nu^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T). \quad (1.7)$$

A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution des corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques :

$$\text{div} \mathbf{D}^\ell = q_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.8)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\text{div} \mathbf{D}^\ell = \mathbf{D}_{i,i}^\ell$, et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^ℓ . Rappelons que dans les cadres

physiques, le potentiel électrique s'annule sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.9)$$

tandis que sur Γ_b^ℓ , une charge électrique de densité q_2^ℓ est prescrite,

$$\mathbf{D}^\ell \cdot \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur} \quad \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.10)$$

Ce modèle piézoélectrique (1.4)-(1.10) sera complété ultérieurement par les conditions aux limites sur la surface de contact Γ_3 .

Les équations précédentes sont insuffisantes à elles seules pour décrire le mouvement du corps matériel considéré. Il est nécessaire de décrire ce qui est propre au matériau lui-même, c'est l'objet des lois de comportement que nous décrirons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre.

1.2 Lois de comportements

Les lois de comportements caractérisent ce qui est propre à chaque type de matériaux. Dans la description des phénomènes purement mécaniques, par la loi de comportement, nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ^ℓ , le tenseur des déformations infinitésimales ε^ℓ et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}^\ell$ et $\dot{\varepsilon}^\ell$, cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électromécanique.

Nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique D^ℓ , le champ électrique $E^\ell(\varphi^\ell)$, l'opérateur d'élasticité \mathcal{E}^ℓ , la fonction de viscosité \mathcal{A}^ℓ et la fonction de relaxation \mathcal{Q}^ℓ ext..., ceci est naturellement il lui faut ajouté d'autres relations qui caractérisent le comportement de chaque type de solide. (Corps piézoélectriques, matériaux électro-élastiques, matériaux électro-viscoélastiques, matériaux piézoélectrique-viscoélastiques).

1.2.1 Loi de comportement des matériaux électro-élastiques.

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ et le vecteur des déplacements électriques \mathbf{D}^ℓ sont reliés par la loi de comportement :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{F}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{E}(\varphi^\ell), \\ \mathbf{D}^\ell = \mathcal{B}^\ell \mathbf{E}(\varphi^\ell) + \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \\ \mathbf{E}(\varphi^\ell) = -\nabla \varphi^\ell, \end{cases} \quad (1.11)$$

où \mathcal{F}^ℓ est l'opérateur d'élasticité, non forcément linéaire, à champ électrique nul, $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$ est le tenseur *piézoélectrique* qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul; $\mathcal{B}^\ell = (b_{ij}^\ell)$ est le tenseur de la permittivité électrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif et $E^\ell(\varphi^\ell) = -\nabla \varphi^\ell$, où $\nabla \varphi^\ell = (\varphi_{(.,i)}^\ell)$ représente le champ électrique. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^{\ell,*})$ dénote le transposé du tenseur \mathcal{E}^ℓ , tel que

$$\mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* \mathbf{v} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{S}^d, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.12)$$

Pour plus des détails sur les lois de comportement (1.11), nous renvoyons le lecteur à voir par exemple [1, 2].

1.2.2 Loi de comportement thermo-électro-élastiques avec mémoire longue avec endommagement

Nous utilisons une loi de comportement thermo-électro-viscoélastique avec endommagements donnés par :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell) + \mathcal{B}^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \boldsymbol{\tau}^\ell, \zeta^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \boldsymbol{\tau}^\ell(s), \zeta^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\zeta^\ell), \quad (1.13)$$

où \mathcal{A}^ℓ est un opérateur non linéaire donné, \mathcal{Q}^ℓ est l'opérateur de relaxation, \mathcal{B}^ℓ représente l'opérateur l'élasticité, $E^\ell(\zeta^\ell) = -\nabla \zeta^\ell$ est le champ électrique, \mathcal{E}^ℓ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est sa transposition. Nous présentons par la suite les lois de comportement (1.13) dans cet problème, le point au-dessus

d'une variable représente une dérivée avec par rapport à la variable de temps t , le tenseur de contraintes $\sigma^\ell(t)$ est divisé en trois parties : $\sigma^\ell(t) = \sigma_V^\ell(t) + \sigma_E^\ell(t) + \sigma_R^\ell(t)$, où $\sigma_V^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t))$ représente la partie purement visqueuse de la contrainte, $\sigma_E^\ell(t) = (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta^\ell(t)$ représente la partie électrique de la contrainte et $\sigma_R^\ell(t)$ satisfait une relation élastique de type taux

$$\sigma_R^\ell(t) = \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \zeta^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell(s)), \tau^\ell(s), \zeta^\ell(s)) ds$$

représente la partie de la contrainte thermo-élastiques avec long terme mémoire et endommagements. A noter également que lorsque $\mathcal{Q}^\ell = 0$ la loi de comportement (1.13) devient électro-viscoélastique de Kelvin-Voigt avec endommagements et effets thermiques relation constitutive,

$$\sigma^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \zeta^\ell(t)) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta^\ell(t).$$

L'évolution quasistatique avec endommagements dans les matériaux viscoélastiques a été étudiée dans [1, 5]. La loi de comportement suivante est utilisée pour le potentiel électrique,

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\xi^\ell)), \quad (1.14)$$

où \mathbf{D}^ℓ est le champ de déplacement électrique de permittivité électrique.

L'endommagement ζ^ℓ est donné par l'inclusion différentielle suivante

$$\dot{\zeta}^\ell - \kappa^\ell \Delta \zeta^\ell + \partial \varphi_{K^\ell}(\zeta^\ell) \ni \Psi^\ell(\sigma^\ell - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell), \varepsilon(u^\ell), \zeta^\ell), \quad (1.15)$$

où K^ℓ désigne l'ensemble des fonctions d'endommagement admissibles définies par,

$$K^\ell = \{\alpha \in H^1(\Omega^\ell) : 0 \leq \alpha \leq 1, \text{ p.p. dans } \Omega^\ell\}, \quad (1.16)$$

κ^ℓ un coefficient positif, $\partial \varphi_{K^\ell}$ représente le sous-différentiel de la fonction d'indicateur de l'ensemble K^ℓ et Ψ^ℓ est une fonction constitutive donnée qui décrit les sources des l'endommagement dans le système. Des problèmes de contact avec endommagements ont été étudiés dans [8, 9, 13]. La loi de comportement thermo-électro-viscoélastique (1.13) comprend un effet de température décrit par l'équation parabolique donnée par :

$$\dot{\tau}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \tau^\ell = \Theta^\ell(\sigma^\ell, \varepsilon(u^\ell), \tau^\ell, \zeta^\ell) + \rho^\ell, \quad (1.17)$$

où Θ^ℓ est une fonction constitutive nonlinéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici, et ci-dessous κ_0^ℓ est une constante strictement positive et ρ^ℓ une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

1.3 Conditions aux limites

Définissons maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ^ℓ . (voir Fig1.1)

1.3.1 Condition aux limites de déplacement

Les Corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^\ell \times [0, T]$, le champ des déplacements \mathbf{u}^ℓ est par conséquent nul :

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T]. \quad (1.18)$$

1.3.2 Condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2^ℓ agit sur $\Gamma_2^\ell \times [0, T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell$ satisfait :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T]. \quad (1.19)$$

1.3.3 Conditions aux limites électriques.

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations :

$$\varphi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.20)$$

$$\mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.21)$$

1.3.4 Conditions aux limites de contact.

Les conditions aux limites sur la surface de contact sont décrites à la fois en direction de la normale et dans le plan tangent, ces dernières étant appelées condition de

frottement. En direction de la normale nous pouvons distinguer le contact unilatéral (lorsqu'il ne peut y'avoir d'interpénétration entre les deux corps), bilatéral (lorsqu'il n'y a pas de séparation entre les deux corps), de compliance normale (lorsque la surface de contact est déformable) où bien de réponse normale instantanée (lorsque la surface de contact est lubrifiée). A part le cas limite lorsque la contrainte tangentielle est nulle (le cas sans frottement), le frottement peut être à seuil (quand le glissement se produit que lorsque la force de frottement atteint une valeur critique) ou sans seuil (lorsque le glissement se produit pour n'importe quelle force de frottement). Parmi les lois de frottement à seuil, les plus utilisées dans la littérature sont celles de Coulomb et de Tresca ; elles modélisent un frottement sec, alors que les lois de frottement sans seuil modélisent un frottement lubrifié. On définit le déplacement normal par relatif d' un corps par rapport à l' autre sur la zone de contact Γ_3 par

$$[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2, \quad (1.22)$$

et le déplacement tangent par relatif d' un corps par rapport à l' autre sur la zone de contact Γ_3 par

$$[\mathbf{u}_\tau] = \mathbf{u}_\tau^1 - \mathbf{u}_\tau^2. \quad (1.23)$$

. La continuité des contraintes sur l'inter faces Γ_3 se traduit par :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.24)$$

Conditions aux limites de contact de Signorini.

La condition de contact *non-pénétration* entre les deux corps est exprimée par la relation suivante :

$$[u_\nu] \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.25)$$

Aux point de Γ_3 tels que $[u_\nu] < 0$, il y' a séparation entre les deux corps. Les contraintes normales y sont alors nulles. Par conséquent, on a :

$$[u_\nu] < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.26)$$

Aux point de Γ_3 tels que $[u_\nu] = 0$, le contact est maintenu et chaque corps exerce une réaction normale orienté vers l'autre corps et donc nous pouvons écrire

$$[u_\nu] = 0 \Rightarrow \sigma_\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.27)$$

On dit que le contact entre les deux corps sans frottement si les mouvements tangentiels sont libres, ce qui traduit par :

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3. \quad (1.28)$$

Pour résumer, les conditions de contact (1.22)-(1.28) s'écrivent d'une manière combinée de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) : \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \stackrel{\text{noté}}{\equiv} \sigma_\nu \\ (b) : [u_\nu] \leq 0, \sigma_\nu \leq 0, [u_\nu]\sigma_\nu = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_3. \\ (c) : \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 = \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 = 0 \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Les conditions aux limites de la forme (1.29) sont aussi appelés "*conditions de contact unilatéral*" ou bien "*conditions de contact de Signorini*".

Contact avec compliance normale.

Dans ce cas, la fondation est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν^ℓ satisfait la condition dite de compliance normale

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g), \end{array} \right. \quad (1.30)$$

où g représente l'interstice entre les deux corps et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale.

Cette condition indique que un corps exerce une action sur l' autre corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu] - g$. Précisons que dans le chapitre 3 de cette mémoire, nous considérons le cas d'un corps repose sur l'autre corps, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g = 0$. Pour la fonction de compliance normale p_ν on prend comme exemple la fonction suivante

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+, \quad (1.31)$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si} \quad r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si} \quad r > \alpha, \end{cases} \quad (1.32)$$

où α est un coefficient positif relatif à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.30) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

Maintenant, nous présentons les lois de frottement intervenant dans cette mémoire.

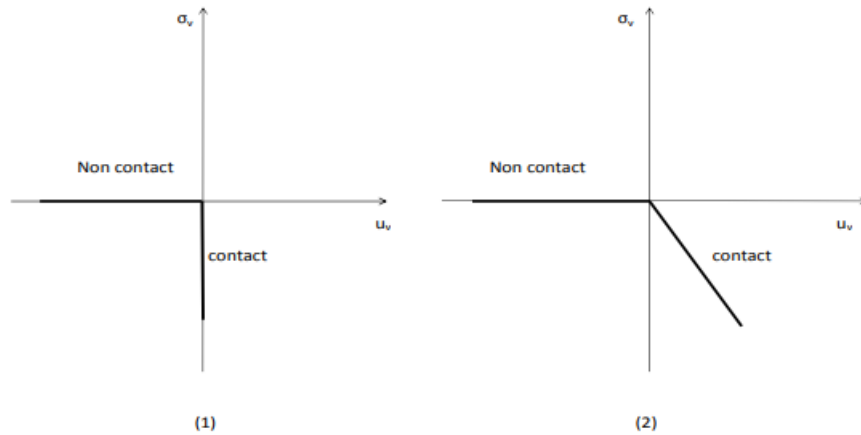


Figure1.3. Loi de Signorini (1) et loi de compliance normale (2) pour $g = 0$

Contact sans frottement

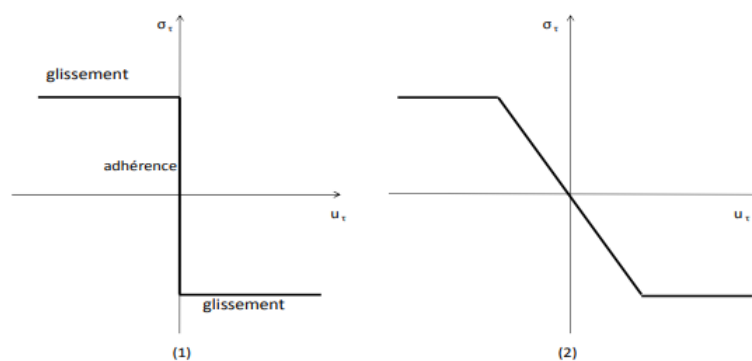
Dans un contact sans frottement, l'action mécanique transmissible par obstacle entre deux solides ne peut être en tout point que normale au contact .

Ceci se traduit par la relation

$$\sigma_\tau = 0$$

qui signifie que la contrainte tangentielle est nulle.

Dans le cas où la contrainte tangentielle est nulle on dit que le mouvement tangentielle se produit avec frottement ce qui nous oblige à introduire une loi de frottement qui prend en considération la composante tangentielle avec les autres variables du système.



Figure(1.4) –Loi de Coulomb (1) et sa régularisation(2).

1.3.5 Loi de frottement de type Coulomb.

C'est une des lois de frottement les plus répandues dans la littérature mathématique. Elle se caractérise par l'intervention de la contrainte normale dans le seuil de frottement et elle peut s'énoncer comme suit :

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu|\sigma_\nu|, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_\tau] = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu|\sigma_\nu| \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda[\dot{\mathbf{u}}_\tau], \end{cases} \quad (1.33)$$

où $\mu \geq 0$ est le coefficient de frottement. C'est une version statique de la loi de Coulomb qui intervient dans la description du contact frottant des problèmes étudiés dans le chapitre 3 de cette mémoire.

Maintenant, nous remplaçons le seuil de frottement σ_ν de la loi (1.33), par la condition de compliance normale (1.30), de façon à obtenir les conditions suivantes.

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq \mu p_\nu([u_\nu] - g), \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| < \mu p_\nu([u_\nu] - g) \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_\tau] = 0, \\ \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| = \mu p_\nu([u_\nu] - g) \Rightarrow \text{il existe } \lambda \geq 0 \text{ tel que } \boldsymbol{\sigma}_\tau = -\lambda[\dot{\mathbf{u}}_\tau]. \end{cases} \quad (1.34)$$

Dans le chapitre 3 nous utilisons la loi (1.34) avec le cas particulier g , i.e. lorsque l'interstice est nul, ce choix ne représente guère une restriction du point de vue mécanique, mais il est imposé pour raison de simplification des calculs.

Une version quasi-statique de la loi de frottement de Coulomb utilisée en littérature est donnée par

$$\begin{cases} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau\| \leq p_\tau([u_\nu] - g), \\ [\mathbf{u}_\tau] \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_\tau = -p_\tau([u_\nu] - g) \frac{[\dot{\mathbf{u}}_\tau]}{\|[\dot{\mathbf{u}}_\tau]\|}, \end{cases} \quad (1.35)$$

où p_τ est une fonction positive. Dans (1.35), la contrainte tangentielle ne peut pas excéder le seuil de frottement $p_\tau([u_\nu] - g)$.

De plus, quand le seuil de frottement est atteint, le corps se met à glisser et la contrainte tangentielle tend à s'opposer au mouvement. Cette condition de frottement a été utilisée dans différents papiers.

1.3.6 Lois de contact avec frottement et adhésion

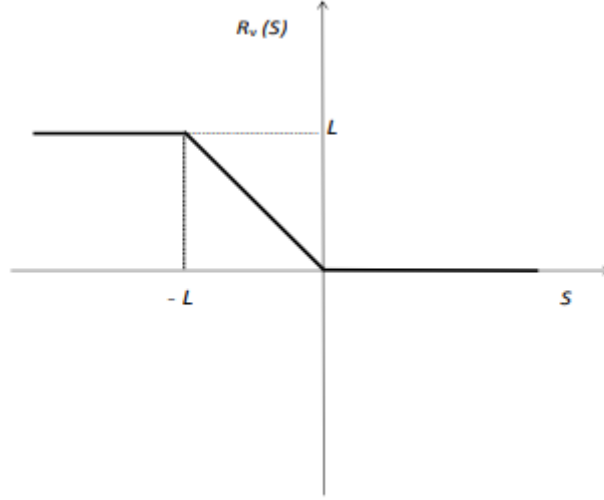
On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, on introduit une variable interne d'état définie sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \beta \leq 1$. Quand $\beta = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\beta = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \beta < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus détails sur ce section, on renvoie par exemple [4]. On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion :

$$\dot{\zeta}^\ell = H_{ad}(\zeta, \alpha_\zeta, R_\nu([u_\nu]), R_\tau([u_\tau])), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (1.36)$$

où σ_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s \leq -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0. \end{cases} \quad (1.37)$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens. La condition (1.36) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion à la tension de surface. Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.36) a été déjà utilisée dans [[3], [10]].



Figure(1.3) -représentation graphique de l'opérateur de traction R_ν .

Quand le champ d'adhésion β est nul, (1.36) devient :

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.38)$$

qui représente la condition de compliance normale.

Ensuite, nous supposons que la composante tangentielle satisfait la condition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_\tau] = 0 \quad \text{on } \Gamma_3 \times (0, T), \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]) \Rightarrow \exists \lambda \geq 0 \\ \text{telle que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \beta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = -\lambda [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \end{array} \right. \quad (1.39)$$

où γ_τ est un coefficient positif et μ est le coefficient de frottement, supposé être positif.

$\mathbf{R}_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ est l'opérateur de troncature défini par :

$$\mathbf{R}_\tau(\mathbf{v}) = \begin{cases} \mathbf{v} & \text{si } \|\mathbf{v}\| \leq L, \\ L \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} & \text{si } \|\mathbf{v}\| > L. \end{cases} \quad (1.40)$$

Notons que les conditions de frottement similaires à ceux dans(1.39) ont été considérées dans [9] dans le cas particulier $\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) = [\mathbf{u}_\tau]$ et $R_\nu([u_\nu]) = -[u_\nu]$, pour L très

grand.

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{\beta} = -(\beta(\gamma_\nu R_\nu([u_\nu])^2 + \gamma_\tau \|\mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\|^2) - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.41)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (1.42)$$

Où γ_ν, γ_τ et ϵ_a sont coefficients d'adhésion positifs, et $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$, le déplacement tangent relatif de corps Ω^1 par rapport l'autre corps Ω^2 sur la zone de contact, et β_0 l'adhésion initiale, tel que :

$$0 \leq \beta_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3. \quad (1.43)$$

Sous les conditions (1.41)- (1.43), on a la remarque suivante :

Remarque 1.3.1 : *Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \beta \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\beta} \leq 0$ donc $\beta \leq \beta_0 \leq 1$. En outre, si $\beta = 0$ quand $t = t_0$, donc $\dot{\beta} = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et d'où $\beta = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \beta \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ p.p. $x \in \Gamma_3$.*

Chapitre 2

Outils Mathématiques

Ce chapitre est consacré à la description des espaces utilisés dans cette mémoire. Nous supposons que Ω^ℓ est un domaine borné et lipschitzien de \mathbb{R}^d , ($d = 2, 3$), c'est à dire que sa frontière Γ^ℓ est présentable comme le graphe d'une fonction lipschitzienne sur un ouvert de \mathbb{R}^{d-1} avec une partitions de trois parties mesurables disjointes $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ d'un coté et une partition de $\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell$, en deux parties ouvertes Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ et d'un autre coté que $mes\Gamma_1^\ell > 0$ et $mes\Gamma_a^\ell > 0$.

2.1 Contraction

En définit quelques définitions qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet des critères de théorème du point fixe de contraction.

Définition 2.1.1 Soit (X, d) un espace métrique, une application $f : X \rightarrow X$ est dite lipschitzienne de rapport $k \geq 0$ si ;

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y) \quad \text{pour tout } x, y \in X$$

k est dite constante de Lipschitz.

Définition 2.1.2 L'application lipschitzienne f est appelée.

1. non expansive si $k \leq 1$,
2. contraction si $0 < k < 1$.

Théorème 2.1.1 Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \rightarrow X$ une contraction avec k sa constante de Lipschitz. Alors f admet un unique point fixe $u \in X$.

En outre, pour tout $x \in X$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = u$$

$$d(f^n(x), u) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, f(x)).$$

Maintenant il nous est paru nécessaire de présenter quelques espaces, quelques résultats sur les opérateurs fortement monotones et Lipschitziens, les inéquations variationnelles et dévotion.

2.2 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\|u\|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (2.1)$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.2)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par (2.1). Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme :

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}}{\|v\|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Théorème 2.2.1 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) : Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual. Alors, pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H.$$

De plus

$$\|\phi\|_{H'} = \|f\|_H.$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

2.3 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 2.3.1 (*Espace de Lebesgue*). Soit $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$. On appelle l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'ensemble,

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } |v|^p \text{ lebesgue intégrable sur } \Omega\}.$$

C'est un espace de Banach s'il est muni de la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$ et $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, mesurable. Alors on définit $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ par :

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |v(x)| = \inf\{c; |v(x)| \leq c\}.$$

L'espace $L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach.

Théorème 2.3.1. Pour tout $p \in [1, +\infty[$, les espaces $L^p(\Omega)$ vérifient les assertions suivantes ;

- 1) Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
- 2) Pour toute fonction $u \in L^p(\Omega)$, toute $v \in L^q(\Omega)$ l'inégalité de Hölder est vérifiée ;i.e

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}, \text{ avec } \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right).$$

- 3) les espaces $L^2(\Omega)$ sont des espaces séparables pour $[1, +\infty[$.

- 4) L'espace $L^2(\Omega)$ munit de produit scalaire

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \forall u, v \in L^2(\Omega).$$

est un espace de Hilbert. De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz correspondant à l'inégalité de Hölder est vérifiée :i.e.

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

2.4 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre plusieurs problèmes concernant les équations aux dérivées partielles.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par :

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d\}.$$

On note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$. On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants :

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 2.4.1 (*Rellich*)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 2.4.2 (*trace de Sobolev*)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.4.1 L'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle dT . L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remarque 2.4.2 On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compact.

Définition 2.4.1 Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u\}.$$

Remarque 2.4.3 Nous avons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} (\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 2.4.3 Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\|\cdot\|$, sont des espaces de Banach. De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le [2].

2.5 Espaces fonctionnels

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques \mathbf{u}^ℓ et $\boldsymbol{\sigma}^\ell$:

$$\begin{cases} H^\ell = \{\mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell) & | & u_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L^2(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}^\ell = \{\boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij}^\ell) & | & \sigma_{ij}^\ell = \sigma_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L^2_s(\Omega^\ell))^{d \times d}, \\ H_1^\ell = \{\mathbf{u}^\ell = (u_i^\ell) & | & u_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell)\} = (H^1(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}_1^\ell = \{\boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}^\ell & | & \sigma_{ij,j}^\ell \in H^\ell\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Les espaces H^ℓ , \mathcal{H}^ℓ , H_1^ℓ et \mathcal{H}_1^ℓ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires suivants :

$$\begin{cases} (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u_i^\ell v_i^\ell dx, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \tau_{ij}^\ell dx, \\ (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H_1^\ell} = (\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} + (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \\ (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \text{Div} \boldsymbol{\tau}^\ell)_{H^\ell}, \end{cases} \quad (2.4)$$

respectivement, où $\varepsilon : H_1^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1^\ell \rightarrow H^\ell$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\varepsilon(\mathbf{u}^\ell) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell)), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\ell) = \frac{1}{2}(u_{ij}^\ell + u_{ji}^\ell), \quad \text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma_{ij}^\ell).$$

Les normes sur les espaces H^ℓ , \mathcal{H}^ℓ , H_1^ℓ et \mathcal{H}_1^ℓ sont notées par $\|\cdot\|_{H^\ell}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}$, $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$, respectivement.

Puisque la frontière Γ^ℓ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur $\boldsymbol{\nu}^\ell$ à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell$ nous utilisons la notation \mathbf{v}^ℓ pour désigner la trace $\gamma \mathbf{v}^\ell$ de \mathbf{v}^ℓ sur Γ^ℓ .

Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1^\ell \rightarrow L^2(\Gamma^\ell)^d$ est linéaire et continue, mais n'est pas surjective.

Désignons par H_{Γ^ℓ}' le dual de H_{Γ^ℓ} et (\cdot, \cdot) le produit de dualité entre H_{Γ^ℓ}' et H_{Γ^ℓ} . Pour tout $\boldsymbol{\sigma}^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, il existe un élément $\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \in H_{\Gamma^\ell}'$ tel que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma \mathbf{v}^\ell) = (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.5)$$

En outre, si $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ est assez régulier (par exemple C^1), nous avons la formule

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell, \gamma \mathbf{v}^\ell) = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell. \quad (2.6)$$

Donc, pour $\boldsymbol{\sigma}^\ell$ assez régulier nous avons la formule de Green suivante :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell da \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell, \quad (2.7)$$

où da est un élément de mesure de surface.

Nous définissons le sous-espace fermé de H_1^ℓ

$$\mathbf{V}^\ell = \{ \mathbf{v}^\ell \in H_1^\ell \mid \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot \mathbf{v}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \}. \quad (2.8)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V^ℓ ; alors, il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_1^ℓ telle que

$$\| \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \| \mathbf{v}^\ell \|_{H_1^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \quad (2.9)$$

Nous considérons sur l'espace V^ℓ , le produit scalaire donné par

$$(\mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell)_{V^\ell} = (\varepsilon(\mathbf{u}^\ell), \varepsilon(\mathbf{v}^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{u}^\ell, \mathbf{v}^\ell \in V^\ell, \quad (2.10)$$

et soit $\| \cdot \|_{V^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\| \mathbf{v}^\ell \|_{V^\ell} = \| \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) \|_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \quad (2.11)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\| \cdot \|_{H_1^\ell}$ et $\| \cdot \|_{V^\ell}$ sont des normes équivalentes sur V^ℓ et ainsi $(V^\ell, \| \cdot \|_{V^\ell})$ est un espace de Hilbert.

De plus, en utilisant le Théorème de trace de Sobolev, (2.7) et (2.8), il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ et Γ_3 telle que :

$$\| \mathbf{v}^\ell \|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \| \mathbf{v}^\ell \|_{V^\ell} \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \quad (2.12)$$

Pour une fonction scalaire β , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \{ \beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid 0 \leq \beta(t) \leq 1 \text{ sur } \Gamma_3 \}, \\ \mathcal{Z} &= \{ \beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Q} \mid \beta(0) = \beta_0 \}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

On introduit également les espaces suivants :

$$W^\ell = \{ \xi^\ell \in H^1(\Omega^\ell) \mid \xi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell \},$$

$$\mathcal{W}^\ell = \{ \mathbf{D}^\ell = (D_i^\ell) \mid D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), D_{i,i}^\ell \in L^2(\Omega^\ell) \},$$

où $\text{div} \mathbf{D}^\ell = (D_{i,i}^\ell)$. Ces espaces W^ℓ et \mathcal{W}^ℓ sont des espaces de Hilbert réels munis des produits scalaires donnés par

$$(\varphi^\ell, \xi^\ell)_{W^\ell} = (\nabla \varphi^\ell, \nabla \xi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell}, \quad (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = (\mathbf{D}^\ell, \mathbf{E}^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{div} \mathbf{D}^\ell, \text{div} \mathbf{E}^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad (2.14)$$

soient $\| \cdot \|_{W^\ell}$ et $\| \cdot \|_{\mathcal{W}^\ell}$ les normes associées; c'est-à-dire

$$\| \xi^\ell \|_{W^\ell} = \| \nabla \xi^\ell \|_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \| \mathbf{D}^\ell \|_{\mathcal{W}^\ell}^2 = \| \mathbf{D}^\ell \|_{\mathcal{H}^\ell}^2 + \| \text{div} \mathbf{D}^\ell \|_{L^2(\Omega^\ell)}^2. \quad (2.15)$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$, l'inégalité de Friedrich-Poincaré est vérifiée ainsi il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\| \nabla \xi^\ell \|_{H^\ell} \geq c \| \xi^\ell \|_{H^1(\Omega^\ell)}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (2.16)$$

Une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré trouvé dans [6].

Il s'ensuit de (2.16) que $\| \cdot \|_{H^1(\Omega^\ell)}$ et $\| \cdot \|_{W^\ell}$ sont des normes équivalentes sur W^ℓ et donc $(W^\ell, \| \cdot \|_{W^\ell})$ est un espace réel de Hilbert. De plus, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante \tilde{c}_0^ℓ dépendant uniquement de Ω^ℓ , Γ_a^ℓ et Γ_3 , telle que

$$\| \xi^\ell \|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \tilde{c}_0^\ell \| \xi^\ell \|_{W^\ell}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (2.17)$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits :

$$V = V^1 \times V^2, \quad H = H^1 \times H^2, \quad H_1 = H_1^1 \times H_1^2,$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, \quad W = W^1 \times W^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2,$$

les espaces V, W, \mathcal{W} sont des espaces de Hilbert réel dotés des produits scalaires canoniques notée $(\cdot, \cdot)_V, (\cdot, \cdot)_W, (\cdot, \cdot)_\mathcal{W}$.

Les normes associés seront désignés par $\| \cdot \|_V, \| \cdot \|_W, \| \cdot \|_\mathcal{W}$, respectivement.

On rappelle les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel.

Nous notons par $C([0, T], X)$ et $C^1([0, T], X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes :

$$\| f \|_{C([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \| f(t) \|_X,$$

$$\| f \|_{C^1([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \| f(t) \|_X + \max_{t \in [0, T]} \| \dot{f}(t) \|_X.$$

Nous notons par $C_c([0, T], X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $[0, T]$ à valeurs dans X .

Définition 2.5.1 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c([0, T], X)$ telle que $\| f_n(t) - f(t) \|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

2.5.1 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

I-Opérateur fortement monotone

Nous donnons quelques définitions et propriétés sur les opérateurs non linéaires et les formes bilinéaires dans un espaces de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$.

Définition 2.5.2 Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur non-linéaire. L'opérateur A est dit

(1) monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0 \quad \forall u, v \in X; \quad (2.18)$$

(2) fortement monotone si il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X; \quad (2.19)$$

(3) Lipschitzien si il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (2.20)$$

II- Inéquations quasi-variationnelles elliptiques et d'évolution

La modélisation de plusieurs classes de problèmes physiques conduit aux inégalités variationnelles elliptiques ou d'évolution, dans la fonctionnelles non différentiable dépend de la solution elle Ces dernières sont appelées " inégalités quasi-variationnelles". Pour cela, nous nous considérons un espaces de Hilbert muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associée $\|\cdot\|_X$, soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur non-linéaire et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. Compte tenu de ces données, nous considérons l'inégalité quasi-variationnelle suivante :

$$(Au, u - v)_X + j(u, v) + j(u, u) \geq (f, u - v)_X \quad \forall v \in X. \quad (2.21)$$

Pour résoudre cette inéquation, nous supposons que A fortement monotone et Lipschitzien, c'est à dire A , satisfait à (2.18), (2.19) et la fonctionnelle $j : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$

satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Pour tout } \eta \in X, j(\eta, \cdot) \text{ est convexe et s.c.i. sur } X, \\ (b) \text{ Il existe } \alpha > 0 \text{ tel que} \\ j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \leq \alpha \|u_1 - u_2\|_X \|v_1 - v_2\|_X. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

L'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.21) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 2.5.1 *Supposons que les hypothèses (2.19), (2.20) et (2.22) sont satisfaites. Alors $\alpha < m$, pour tout $f \in X$, il existe une solution unique $u \in X$ au problème (2.21).*

La démonstration du Théorème se trouve dans [11]. Dans le troisième chapitre dans cette mémoire, nous utiliserons un résultat abstrait sur les inéquations quasi-variationnelles d'évolution. Ce résultat concerne les problèmes du type suivant,

Trouver, $u : [0, T] \rightarrow X$ tel que :

$$(Au(t), v - \dot{u}(t))_X + (Bu(t), v - \dot{u}(t))_X + j(u(t), v) - j(u(t), \dot{u}(t)) \geq (f(t), v - \dot{u}(t))_X, \quad (2.23)$$

$\forall v \in X, t \in [0, T]$,

$$u(0) = u_0. \quad (2.24)$$

La différence entre le problème (2.21) et le problème (2.23)-(2.24) consiste dans le fait que le dernier problème est évolutif. En effet, f et u dépendent maintenant du temps. Pour étudier le problème (2.23)-(2.24), en plus des hypothèses (2.18), (2.19) et la fonctionnelle j satisfait (2.22), nous avons besoin de que l'opérateur non linéaire B soit Lipschitz, et aussi supposons que :

$$f \in C([0, T], X), \quad (2.25)$$

$$u_0 \in X. \quad (2.26)$$

Dans l'étude de problèmes (2.23)-(2.24), nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.5.2 *Soient (2.19), (2.20), (2.22) et (2.25)-(2.26) satisfaites avec l'opérateur non linéaire B soit Lipschitzien. Alors :*

1) *Il existe unique solution $u \in C^1([0, T]; X)$ au problème (2.23)-(2.24).*

2) Si u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (2.23)-(2.24) correspondantes aux données $f_1, f_2 \in C([0, T]; X)$, alors il existe $c > 0$ tel que ;

$$\| \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \|_X \leq c (\| f_1(t) - f_2(t) \|_X + \| u_1(t) - u_2(t) \|_X) \quad \forall t \in [0, T].$$

3) Si de plus $f \in W^{1,p}(0, T, X)$ pour $p \in [1, \infty)$, alors la solution $u \in W^{2,p}(0, T; X)$.

Théorème 2.5.3 (Théorème de point fixe de Banach) Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \| \cdot \|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$\| \Lambda(u) - \Lambda(v) \|_X \leq c \| u - v \|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$; i.e, possède un point fixe unique dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 2.5.4 Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \| \cdot \|_X)$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .

Définition 2.5.3 Une forme bilinéaire $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\| b(u, v) \|_X \leq M \| u \|_X \| v \|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 2.5.4 Une forme bilinéaire $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que :

$$b(u, u) \geq m \| u \|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 2.5.5 (Théorème du Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $b : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercitive.

Soit $l : H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in H$ qui satisfait :

$$b(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H. \quad (2.27)$$

De plus, si $b(\cdot, \cdot)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété :

$$\frac{1}{2}b(u, u) - l(u) \leq \frac{1}{2}b(v, v) - l(v), \quad \forall v \in X. \quad (2.28)$$

III- Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous ensemble de l'espace X .

Définition 2.5.5 On appelle fonction indicatrice de K , la fonction Ψ_K définie par

$$\Psi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases}$$

Définition 2.5.6 Soit une fonction $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u , noté $\partial j(u)$ est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u), \forall v \in K\}. \quad (2.29)$$

Le crochet (\cdot, \cdot) désignant la dualité entre X' et X .

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u . La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel $\partial \Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide.

$$\partial \Psi_K = \{u' \in X' \mid (u', v - u) \leq 0, \forall v \in K\}. \quad (2.30)$$

IV- Équation différentielle ordinaire

Théorème 2.5.6 (Cauchy-Lipschitz) : Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés

suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \| F(t, x) - F(t, y) \|_X \leq L_F \| x - y \|_X \quad \forall x, y \in X, p.p. t \in [0, T], \\ (b) \text{ il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(\cdot, x) \in L^p([0, T]; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}([0, T]; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad p.p. t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

V- Inégalités variationnelle paraboliques

Soit V et H deux espaces de Hilbert tel que V est dense dans H et son injection est continue, l'espace H est identifié à son propre dual et à un sous-espace du dual V' de V . Nous écrivons $V \subset H \subset V'$ et on dit que les inclusions ci-dessus définissent un triple de Gelfand. Nous désignons par $\| \cdot \|_V$, $\| \cdot \|_H$ et $\| \cdot \|_{V'}$ les normes sur les espaces V , H et V' respectivement, et nous utilisons $V \times V'$ pour l'appariement de dualité entre V et V' . Notez que si $f \in H$ alors $\langle f, v \rangle_{V \times V'} = (f, v)_H$, $\forall v \in H$. se qui suit est un résultat standard pour les inégalités variationnelles paraboliques.

Théorème 2.5.7 *Soit $V \subset H \subset V'$ un triple de Gelfand, soit K un non-vide ensemble fermé et convexe de V . Supposons que $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est continue forme bilinéaire symétrique telle que pour certaines constantes $\alpha > 0$ et c_0 ,*

$$a(v, v) + c_0 \| v \|_H^2 \geq \alpha \| v \|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$, il existe une fonction unique $u \in H^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ tel que $u(0) = u_0$ et $u(t) \in K$, $\forall t \in [0, T]$ et pour presque tout $t \in (0, T)$.

$$\langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in V.$$

2.5.2 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici le lemme du type Gronwall qui intervient dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 2.5.1 *Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$*

(1) *Si*

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq (a + \int_0^t m(s)ds) \exp\left(\int_0^t n(s)ds\right) \quad \forall t \in [0, T],$$

(2) *Si*

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{at} \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Dans le cas particulier $a = 0$, $n = 1$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 2.5.1 *Soient $m \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que*

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s)ds + \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors, il existe $c > 0$ tel que

$$\psi(t) \leq \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Le Corollaire est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution.

Dans le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient.

Chapitre 3

Contact entre deux corps thermo-électro-élastiques avec mémoire longue, adhésion et frottement

Dans ce chapitre, nous considérons un modèle mathématique dans un processus quasi-statique d'un problème de contact avec compliance normale et adhésion entre deux corps thermo-électro-élastiques, où les inconnues dans ce cas, sont les champs des déplacements u^ℓ , les champs des contraintes σ^ℓ , les potentiels électriques ξ^ℓ , un champ d'adhésion ζ , les champs des températures τ^ℓ , les champs d'endommagements ς^ℓ et les champs des déplacements électriques \mathbf{D}^ℓ , avec la loi de comportement thermo-électro-élastiques non linéaire avec longue mémoire. Pour ce problème le contact est modélisé par l'adhésion dont l'évolution est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. En utilisant les formules de Green, on propose une formulation variationnelle au problème, nous présentons un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Les démonstrations sont basées sur des arguments d'inéquations variationnelles dépendant du temps du type parabolique, ainsi la théorie des équations d'évolutions du premier ordre avec des opérateurs non linéaires, et de point fixe.

3.1 Formulation du problème

Problème \mathcal{P} . Pour $\ell = 1, 2$, trouver les champs des déplacements $\mathbf{u}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$, les champs des températures $\tau^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, les champs d'endommagements $\varsigma^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, les champs des potentiels électriques $\xi^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, un champ d'adhésion $\zeta : \Gamma_3 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, et les champs des déplacements électriques $\mathbf{D}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ tel que :

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) + \mathcal{B}^\ell(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(t)), \tau^\ell(t), \varsigma^\ell(t)) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell(s)), \tau^\ell(s), \varsigma^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\xi^\ell(t)), \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\xi^\ell)). \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (3.2)$$

$$\dot{\tau}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \tau^\ell = \Theta^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \tau^\ell, \varsigma^\ell) + \rho^\ell, \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (3.3)$$

$$\dot{\varsigma}^\ell - \kappa^\ell \Delta \varsigma^\ell + \partial \psi_{k^\ell}(\varsigma^\ell) \ni \Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell - \mathcal{A}^\ell \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^\ell), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^\ell), \varsigma^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (3.4)$$

$$\text{Div} \boldsymbol{\sigma}^\ell + \mathbf{f}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (3.5)$$

$$\text{Div} \mathbf{D}^\ell - \mathbf{q}_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T). \quad (3.6)$$

$$\mathbf{u}^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T). \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{f}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T). \quad (3.8)$$

$$\dot{\zeta}^\ell = H_{ad}(\zeta, \alpha_\zeta, R_\nu([u_\nu]), R_\tau([u_\tau])), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.9)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\nu^\ell = \boldsymbol{\sigma}_\nu^2 = \boldsymbol{\sigma}_\nu \text{ où } \boldsymbol{\sigma}_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \zeta^2 R_\nu([u_\nu]) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (3.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 R_\tau([u_\tau])\| \leq \mu p_\nu([u_\nu]), \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 R_\tau([u_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu]), \Rightarrow [\dot{\mathbf{u}}_\tau] = 0, \\ \|\sigma_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 R_\tau([u_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu]), \Rightarrow \exists \lambda \geq 0, \\ \text{tell que } \sigma_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 R_\tau([u_\tau]) = -\lambda [\dot{\mathbf{u}}_\tau]. \end{array} \right. \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.11)$$

$$\xi^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0, T). \quad (3.12)$$

$$\mathbf{D}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell = \mathbf{q}_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0, T). \quad (3.13)$$

$$\kappa_0^\ell \frac{\partial^\ell \tau^\ell}{\partial \nu^\ell} + \lambda_0^\ell \tau^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T). \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \zeta^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T). \quad (3.15)$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \boldsymbol{\tau}^\ell(0) = \boldsymbol{\tau}_0^\ell, \varsigma^\ell(0) = \varsigma_0^\ell, \quad \text{dans } \Omega^\ell. \quad (3.16)$$

$$\zeta(0) = \zeta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (3.17)$$

Les équations (3.1) - (3.2) représentent la loi de comportement thermo-électro-élastique avec une mémoire à long terme et d'endommagement. L'équation (3.3) représente la conservation de l'énergie où θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur générée par le travail des forces internes et ρ^ℓ est une source de chaleur volumique donnée. L'inclusion (3.4) décrit l'évolution du champ d'endommagement. Les équations (3.5) et (3.6) sont les équations d'équilibre pour les champs de contrainte et de déplacement électrique, respectivement. Ensuite, les équations (3.7) et (3.8) représentent respectivement la condition aux limites de déplacement et de traction. La condition (3.9) représente les conditions normales de conformité à l'adhésion où $[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2$ représente les déplacements dans la direction normale, aussi $[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2$, correspond au saut des déplacements dans la direction tangentielle, voir (1.22) et (1.25). La condition (3.10) décrit le contact avec compliance normale et adhésion sur Γ_3 , où γ_ν est un coefficient d'adhérence donné, p_ν est une fonction positive donnée, et elle était déjà utilisée dans [11, 12]. La condition (3.11) est une condition de loi de friction de Coulomb non locale couplée avec compliance normale et adhésion. Les équations (3.12) et (3.13) représentent les conditions aux limites électrique.

La relation (3.14) représente une condition aux limite de Fourier pour la température sur Γ^ℓ . La relation (3.15) représente une condition aux limites de Neumann homogène pour le champ d'endommagement sur Γ^ℓ . Enfin les fonctions u_0 , τ_0 , ς_0 et ξ_0 dans (3.16) et (3.17) sont les initiales donnée.

3.2 Formulation variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle du problème \mathcal{P} , nous avons besoin d'introduire quelques hypothèses sur les données.

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que, } \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d \\ \quad | \mathcal{A}^\ell(x, \omega_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \omega_2) | \leq L_{\mathcal{A}^\ell} | \omega_1 - \omega_2 |, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ telle que, } \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d \\ \quad (\mathcal{A}^\ell(x, \omega_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \omega_2))(\omega_1 - \omega_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell} | \omega_1 - \omega_2 |^2, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{A}^\ell(x, \omega), \quad \text{est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{S}^d. \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{A}^\ell(x, 0) \in \mathcal{H}^\ell \text{ continue sur } \mathbb{S}^d, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (3.18)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\mathcal{B}^\ell} > 0 \text{ telle que, } \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d, r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad | \mathcal{B}^\ell(x, \omega_1, r_1, d_1) - \mathcal{B}^\ell(x, \omega_2, r_2, d_2) | \leq L_{\mathcal{B}^\ell} (| \omega_1 - \omega_2 | + | r_1 - r_2 | + | d_1 - d_2 |) \\ \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{B}^\ell(x, \omega, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{S}^d, r, d \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{B}^\ell(x, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (3.19)$$

La fonction de relaxation $\mathcal{Q}^\ell : \Omega^\ell \times (0, T) \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\mathcal{Q}^\ell} > 0 \text{ telle que, } \forall \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d, r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad | \mathcal{Q}^\ell(x, t, \omega_1, r_1, d_1) - \mathcal{Q}^\ell(x, t, \omega_2, r_2, d_2) | \leq L_{\mathcal{Q}^\ell} (| \omega_1 - \omega_2 | + | r_1 - r_2 | + | d_1 - d_2 |) \\ \quad \forall t \in (0, T) \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, \omega, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } t \in (0, T), \omega \in \mathbb{S}^d, r, d \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ l'application } t \longmapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, \omega, r, d) \text{ est continue dans } (0, T) \\ \quad \text{pour tout } \omega \in \mathbb{S}^d, r, d \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto \mathcal{Q}^\ell(x, t, 0, 0, 0) \in \mathcal{H}^\ell, \forall t \in (0, T). \end{array} \right. \quad (3.20)$$

La fonction d'énergie $\Theta^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_{\Theta^\ell} > 0 \text{ telle que, } \forall \eta_1, \eta_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d, \alpha_1, \alpha_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}. \\ \quad | \Theta^\ell(x, \eta_1, \omega_1, \alpha_1, d_1) - \Theta^\ell(x, \eta_2, \omega_2, \alpha_2, d_2) | \leq L_{\Theta^\ell} (| \eta_1 - \eta_2 | + | \omega_1 - \omega_2 | \\ \quad + | \alpha_1 - \alpha_2 | + | d_1 - d_2 |) \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ l'application } x \longmapsto \Theta^\ell(x, \eta, \omega, \alpha, d) \text{ est Lebesgue mesurable dans } \Omega^\ell \\ \quad \text{pour tout } \eta, \omega \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha, d \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ l'application } x \longmapsto \Theta^\ell(x, 0, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega^\ell). \\ (d) \text{ l'application } x \longmapsto \Theta^\ell(x, \eta, \omega, \alpha, d) \text{ est borné pour tout} \\ \quad \eta, \omega \in \mathbb{S}^d, \alpha, d \in \mathbb{R} \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (3.21)$$

L'opérateur de permittivité électrique $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{G}^\ell(x, E) = (b_{ij}^\ell(x) E_j), \quad b_{ij}^\ell = (b_{ji}^\ell), \quad b_{ij}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell) \quad , 1 \leq i, j \leq d. \\ (b) \text{ il existe } m_{\mathcal{G}^\ell} > 0 \text{ tel que } \mathcal{G}^\ell E \cdot E \geq m_{\mathcal{G}^\ell} | E |^2, \forall E = (E_{ij}) \in \mathbb{R}^d, \\ \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (3.22)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e_{ijk}^\ell(x) \tau_{jk}), \quad \forall \tau = (\tau_{ij}) \in \mathbb{S}^d \text{ p.p. } \quad x \in \Omega^\ell. \\ (b) e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \quad 1 \leq i, j, k \leq d. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

La fonction de taux d'adhésion $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a) \text{ il existe } L_{H_{ad}} > 0 \text{ telle que, } \forall \zeta_1, \zeta_2, \omega_1, \omega_2 \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}, d_1, d_2 \in \mathbb{R}^{d-1}, \\
 \quad | H_{ad}(x, \zeta_1, \omega_1, r_1, d_1) - H_{ad}(x, \zeta_2, \omega_2, r_2, d_2) | \leq \\
 \quad L_{H_{ad}} (| \zeta_1 - \zeta_2 | + | \omega_1 - \omega_2 | + | r_1 - r_2 | + | d_1 - d_2 |) \quad , \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\
 (b) \text{ l'application } x \longmapsto H_{ad}(x, \zeta, \omega, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable on } \Gamma_3 \\
 \quad \text{pour tout } \zeta, \omega, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{d-1}. \\
 (c) \text{ l'application } (x, \zeta, r, d) \longmapsto H_{ad}(x, \zeta, \omega, r, d) \text{ est continue sur} \\
 \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\
 (d) H_{ad}(x, 0, \omega, r, d) = 0 \text{ pour tout } \zeta, \omega, r \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{R}^{d-1}. \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\
 (e) H_{ad}(x, \zeta, \omega, r, d) \geq 0, \forall \zeta \leq 0, \omega, r \in \mathbb{R}, \quad d \in \mathbb{R}^{d-1}. \text{ p.p. } x \in \Gamma_3 \text{ et} \\
 \quad H_{ad}(x, \zeta, \omega, r, d) \leq 0, \forall \zeta \geq 1, \omega, r \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^{d-1}. \quad \text{ p.p. } x \in \Gamma_3.
 \end{array} \right. \quad (3.24)$$

La fonction source d'endommagement $\Psi^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a) \text{ il existe } L_{\Psi^\ell} > 0 \text{ telle que, } \quad \forall \eta_1, \eta_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{S}^d, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\
 \quad | \Psi^\ell(x, \eta_1, \omega_1, \alpha_1) - \Psi^\ell(x, \eta_2, \omega_2, \alpha_2) | \leq L_{\Psi^\ell} (| \eta_1 - \eta_2 | + | \omega_1 - \omega_2 | + | \alpha_1 - \alpha_2 |) \\
 \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell. \\
 (b) \text{ l'application } x \longmapsto \Psi^\ell(x, \eta, \omega, \alpha) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell \\
 \quad \text{pour tout } \eta, \omega \in \mathbb{S}^d \text{ et } \alpha \in \mathbb{R}. \\
 (c) \text{ l'application } x \longmapsto \Psi^\ell(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega^\ell). \\
 (d) \text{ l'application } x \longmapsto \Psi^\ell(x, \eta, \omega, \alpha) \text{ est borné, } \quad \forall \eta, \omega \in \mathbb{S}^d, \alpha \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell.
 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (a) \text{ il existe } L_\nu > 0 \text{ tels que } |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2|, \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\
 (b) (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\
 (c) \text{ l'application } x \longmapsto p_\nu(x, r) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \quad \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\
 (d) p_\nu(x, r) = 0 \text{ pour tout } r \leq 0, \quad \text{ p.p. } x \in \Gamma_3.
 \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Les coefficients de l'adhésion γ_ν et γ_τ satisfont aux conditions ;

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \gamma_\nu, \gamma_\tau \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (3.27)$$

Les forces, les tractions ont la régularité. les forces volumiques f_0^ℓ , les tractions surfassetiques f_2^ℓ , les charges électriques volumiques sont q_0^ℓ , et surfacique q_2^ℓ ont la régularités :

$$\begin{aligned} f_0^\ell &\in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)^d), & f_2^\ell &\in C(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \\ q_0^\ell &\in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)), & q_2^\ell &\in C(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)), & \rho^\ell &\in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Le coefficient d'énergie κ_0^ℓ , et le coefficient des microfissures κ^ℓ satisfont .

$$\kappa_0^\ell > 0 \quad \text{et} \quad \kappa^\ell > 0. \quad (3.29)$$

Finalement, on suppose que le coefficient de frottement et les données initiales satisfont :

$$\begin{aligned} \mu &\in L^\infty(\Gamma_3), & \mu(x) &\geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3, \\ \mathbf{u}_0^\ell &\in \mathbf{V}^\ell, & \varsigma_0^\ell &\in K^\ell, & \tau_0^\ell &\in L_1^\ell, & \zeta_0 &\in L^2(\Gamma_3), & 0 \leq \zeta_0 \leq 1, & \text{p.p. sur } \Gamma_3. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Le théorème de représentation de Riesz, nous permet de définir les fonctions $f = (f^1, f^2) : [0, T] \longrightarrow V$ et $q = (q^1, q^2) : [0, T] \longrightarrow W$. comme suit :

$$(f(t), v)_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot v^\ell da, \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \quad (3.31)$$

$$(q(t), \phi)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T]. \quad (3.32)$$

Les conditions (3.28) impliquent

$$f \in C(0, T; V), \quad q \in C(0, T; W). \quad (3.33)$$

Nous introduisons les fonctions continues suivantes $a_0 : L_1 \times L_1 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$a : L_1 \times L_1 \longrightarrow \mathbb{R}$, par :

$$a_o(\tau, \alpha) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa_o^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell \cdot \nabla \alpha^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \tau^\ell \alpha^\ell da. \quad (3.34)$$

$$a(\varsigma, \alpha) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell \cdot \nabla \alpha^\ell dx. \quad (3.35)$$

On définit la fonctionnelle d'adhésion comme suit $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$j_{ad}(\zeta, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \zeta^2 R_\nu([u_\nu]) \cdot [v_\nu] + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) \cdot [\mathbf{v}_\tau]) da. \quad (3.36)$$

La fonctionnelle de frottement $j_{fr} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$j_{fr}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) \| [\mathbf{v}_\tau] \| da. \quad (3.37)$$

A l'aide des formules de Green on voit directement que si $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}$ et ζ sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (3.5), (3.7), (3.10) et (3.11) avec (3.36), (3.37) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que :

$$(\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + (Div \boldsymbol{\sigma}^\ell, \mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t))_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell (\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t))) dx + \int_{\Omega^\ell} Div \boldsymbol{\sigma}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx &= \int_{\Gamma_1^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_2^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da + \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

d'après (3.5) et (3.7)-(3.8) on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell (\varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t))) dx - \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx &= \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3^\ell} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da, \quad \forall \mathbf{v}^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

D'après (3.31)

$$(f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da.$$

En suite :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} = (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da \quad (3.38)$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da = ?$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^1 \boldsymbol{\nu}^1 \cdot (\mathbf{v}^1 - \dot{\mathbf{u}}^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^2 \boldsymbol{\nu}^2 \cdot (\mathbf{v}^2 - \dot{\mathbf{u}}^2(t)) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^1 (\mathbf{v}_\nu^1 - \dot{\mathbf{u}}_\nu^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu^2 (\mathbf{v}_\nu^2 - \dot{\mathbf{u}}_\nu^2(t)) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^1 (\mathbf{v}_\tau^1 - \dot{\mathbf{u}}_\tau^1(t)) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau^2 (\mathbf{v}_\tau^2 - \dot{\mathbf{u}}_\tau^2(t)) da. \end{aligned}$$

Moyennant (3.10) et (3.11), on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da = \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\nu([\mathbf{v}_\nu - \dot{\mathbf{u}}_\nu(t)]) da + \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da,$$

alors :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}^\ell \boldsymbol{\nu}^\ell \cdot (\mathbf{v}^\ell - \dot{\mathbf{u}}^\ell(t)) da &= \int_{\Gamma_3} (-p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \zeta^2 R_\nu([u_\nu])) ([v_\nu - \dot{u}_\nu(t)]) da \\ &+ \int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Nous supposons que $\Gamma_3 = \Gamma_3^+ \cup \Gamma_3^-$, où

$$\begin{aligned} \Gamma_3^+ &= \{x \in \Gamma_3 / \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| < \mu p_\nu([u_\nu])\} \\ \text{et } \Gamma_3^- &= \{x \in \Gamma_3 / \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| = \mu p_\nu([u_\nu])\}. \end{aligned} \quad \text{D'où,}$$

$$\int_{\Gamma_3} \boldsymbol{\sigma}_\tau([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da = \int_{\Gamma_3^+} \boldsymbol{\sigma}_\tau([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da + \int_{\Gamma_3^-} \boldsymbol{\sigma}_\tau([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da.$$

Pour $[\dot{\mathbf{u}}_\tau]$:

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\int_{\Gamma_3^+} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\dot{\mathbf{u}}_\tau]) da \geq - \int_{\Gamma_3^+} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\| da.$$

Maintenant, en utilisant (3.11),

$$\int_{\Gamma_3^+} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\dot{\mathbf{u}}_\tau]) da \geq - \int_{\Gamma_3^+} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\| da = 0. \quad (3.40)$$

Et

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda [\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)] [\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)] da.$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da &= -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\|^2 da \\ &= - \int_{\Gamma_3^-} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau])\| \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\| da \\ &= - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\| da, \end{aligned}$$

alors :

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \|\dot{\mathbf{u}}_\tau\| da. \quad (3.41)$$

Pour $[\mathbf{v}_\tau]$:

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau]) da = - \int_{\Gamma_3^-} \lambda [\dot{\mathbf{u}}_\tau][\mathbf{v}_\tau] da.$$

Aussi, on utilise inégalité de Cauchy-Schwartz, donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau]) da &\geq -\lambda \int_{\Gamma_3^-} \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \| \| [\mathbf{v}_\tau] \| da \\ &\geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) \| [\mathbf{v}_\tau] \| da. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Nous utilisons (3.41) et l'égalité (3.42) pour trouver :

$$\int_{\Gamma_3^-} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da \geq - \int_{\Gamma_3^-} \mu p_\nu([u_\nu]) (\| [\mathbf{v}_\tau] \| - \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \|) da. \quad (3.43)$$

Et de (3.39) et (3.43) , il vient :

$$\int_{\Gamma_3} (\boldsymbol{\sigma}_\tau + \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]))([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da \geq - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\| [\mathbf{v}_\tau] \| - \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \|) da. \quad (3.44)$$

En combinant les inégalités (3.36), (3.40) et (3.44), d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} &\geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \zeta^2 R_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - \dot{\mathbf{u}}_\nu(t)]) da \\ &- \int_{\Gamma_3} \gamma_\tau \zeta^2 \mathbf{R}_\tau([\mathbf{u}_\tau]) ([\mathbf{v}_\tau - \dot{\mathbf{u}}_\tau(t)]) da - \int_{\Gamma_3} \mu p_\nu([u_\nu]) (\| [\mathbf{v}_\tau] \| - \| [\dot{\mathbf{u}}_\tau] \|) da \\ &- \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu]) ([v_\nu - \dot{u}_\nu(t)]) da \end{aligned}$$

et, d'après (3.36),(3.37) on a :

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^2 (\boldsymbol{\sigma}^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\zeta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ + j_{vc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{cases} \quad (3.45)$$

Maintenant, pour les inconnues d'endommagements, soit $\varsigma^\ell(t) \in K^\ell$, $\ell = 1, 2$ et pour tout $t \in [0, T]$. La définition de $\partial\psi_{K^\ell}(\varsigma^\ell)$ (2.30) et de (1.15), on obtient :

$$(\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(u^\ell(t)), \varsigma^\ell(t)) - \dot{\varsigma}^\ell(t) + \kappa^\ell \Delta \varsigma^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} \leq 0, \quad \forall \alpha^\ell \in K^\ell.$$

Donc :

$$\left(\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell(t)), \varepsilon(u^\ell(t)), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}$$

$$\leq (\zeta^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} - \kappa^\ell (\Delta \varsigma^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}.$$

En utilisant la formule de Green et (3.15)

$$(\Delta \varsigma^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + (\nabla \varsigma^\ell(t), \nabla(\alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)))_{L^2(\Omega^\ell)} = \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial \varsigma^\ell(t)}{\partial \nu} \cdot (\alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) da,$$

$$(\Delta \varsigma^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} = - \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell(t) \cdot \nabla(\alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) dx.$$

En suite :

$$\begin{aligned} & (\zeta^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell(t) \cdot \nabla(\alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) dx \\ & \geq \left(\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)), \varepsilon(u^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \ell = 1, 2. \end{aligned}$$

Additionner, pour $\ell = 1, 2$ il vient

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\zeta^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell(t) \cdot \nabla(\alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) dx \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell(\boldsymbol{\sigma}^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)), \varepsilon(u^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \alpha \in K. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Problème PV. Trouver les champs des déplacements $\mathbf{u} = (u^1, u^2) : [0, T] \rightarrow \mathbf{V}$, les champs des contraintes $\boldsymbol{\sigma}^\ell = (\sigma^1, \sigma^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, les champs des potentiels électriques $\xi = (\xi^1, \xi^2) : [0, T] \rightarrow W$, les champs températures $\tau = (\tau^1, \tau^2) : [0, T] \rightarrow L_1$, les champs d'endommagements $\varsigma = (\varsigma^1, \varsigma^2) : [0, T] \rightarrow L_1$, le champs d'adhésion $\zeta : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ et les champs des déplacements électriques, tels que : $\mathbf{D} = (D^1, D^2) : [0, T] \rightarrow$

\mathbf{W} tel que pour tout $t \in [0, T]$.

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \tau^\ell, \varsigma^\ell) + \int_0^\ell \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u^\ell(s)), \tau^\ell(s), \varsigma^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\zeta^\ell). \quad (3.47)$$

$$\mathbf{D}^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\zeta^\ell)), \quad (3.48)$$

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(\mathbf{v}^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}^\ell)(t))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\zeta(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ + j_{fr}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - j_{fr}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) \\ + j_{vc}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t)) \geq (f(t), \mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}(t))_V, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\zeta^\ell(t))), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, \quad t \in (0, T). \quad (3.50)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}^\ell(t) - \rho^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\tau(t), \alpha) = \sum_{\ell=1}^2 (\Theta^\ell(\sigma^\ell(t), \varepsilon(\mathbf{u}^\ell(t)), \tau^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \alpha \in L_1. \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} & \sum_1^2 (\varsigma^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \varsigma^\ell(t) \cdot \nabla (\alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) dx \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell(\sigma^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)), \varepsilon(u^\ell(t), \varsigma^\ell(t)), \alpha^\ell - \varsigma^\ell(t)) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \alpha \in K. \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\dot{\zeta}^\ell(t) = H_{ad}(\zeta(t), \alpha_\zeta(t), R_\nu([u_\nu(t)]), R_\tau([u_\tau(t)])), \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.53)$$

$$\mathbf{u}^\ell(0) = \mathbf{u}_0^\ell, \tau^\ell(0) = \tau_0^\ell, \varsigma^\ell(0) = \varsigma_0^\ell \text{ et } \zeta(0) = \zeta_0, \quad \text{dans } \Omega^\ell. \quad (3.54)$$

3.3 Résultats principaux

Les résultats principaux sont énoncés par le théorème suivant.

Théorème 3.3.1 *Supposons que (3.18)-(3.30) sont vérifiées. Alors, il existe alors une solution unique $\{\mathbf{u}, \xi, \zeta, \sigma, \tau, \varsigma, \mathbf{D}\}$, du problème PV, de plus la solution satisfait :*

$$\mathbf{u} \in C^1(0, T; \mathbf{V}), \quad (3.55)$$

$$\xi \in C(0, T; \mathbf{W}), \quad (3.56)$$

$$\zeta \in \mathbf{W}^{1, \infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}, \quad (3.57)$$

$$\sigma \in C(0, T; \mathcal{H}_1), \quad (3.58)$$

$$\tau \in L^2(0, T; L_1) \cap H^1(0, T; L_0), \quad (3.59)$$

$$\varsigma \in L^2(0, T; L_1) \cap H^1(0, T; L_0), \quad (3.60)$$

$$\mathbf{D} \in C(0, T; \mathcal{W}). \quad (3.61)$$

La démonstration du Théorème 3.3.1 s'effectue en plusieurs étapes que nous prouvons dans ce qui suit. Par tout dans cette section, nous supposons ce qui suit que tenir (3.81) à (3.93) et nous considérons que C , est un constante positive générique qui dépend de Ω^ℓ , Γ_1^ℓ , Γ_3 , p_ν , p_τ , \mathcal{A}^ℓ , \mathcal{B}^ℓ , \mathcal{G}^ℓ , \mathcal{Q}^ℓ , \mathcal{E}^ℓ , H_{ad} , γ_ν , γ_τ , Θ^ℓ , Ψ^ℓ , $\kappa_0^\ell, \kappa^\ell$ et T avec $\ell = 1, 2$, mais ne dépend ne de t ni de reste de données d'entrée et donc la valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

Dans la première étape.

Soit $(\lambda, \mu) \in C(0, T; L_0 \times L_0)$ et considérons le problème auxiliaire.

Problème PV $_{(\lambda, \mu)}$. Trouver $\tau_\lambda : [0, T] \rightarrow L_0$, $\varsigma_\mu : [0, T] \rightarrow L_0$ tell que :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}_\lambda^\ell(t) - \lambda^\ell(t) - \rho^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\tau_\lambda^\ell(t), \alpha) = 0, \quad \forall \alpha \in L_0, \quad (3.62)$$

$$\varsigma_\mu(t) \in K, \quad \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\varsigma}_\mu^\ell(t) - \mu^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma_\mu^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\varsigma_\mu(t), \alpha - \varsigma_\mu(t)) \geq 0, \quad \forall \alpha \in K, \quad (3.63)$$

$$\tau_\lambda(0) = \tau_0, \varsigma_\mu(0) = \varsigma_0 \quad (3.64)$$

où $K = K^1 \times K^2$.

Lemme 3.3.1 *Il existe un unique solution $\{\tau_\lambda, \varsigma_\mu\}$ au problème auxiliaire PV $_{(\lambda, \mu)}$ satisfaisant (3.59)- (3.60).*

Démonstration. On outre par une application de l'inégalité de Poincaré-Friedrich, on peut trouver une constant C_0 tell que

$$\int_{\Omega^\ell} |\nabla \alpha|^2 dx + \frac{\lambda_0^\ell}{\kappa_0^\ell} \int_{\Gamma^\ell} |\alpha|^2 da \geq c_0 \int_{\Omega^\ell} |\alpha|^2 dx, \quad \forall \alpha \in L_1^\ell, \ell = 1, 2.$$

Ainsi, nous obtenons

$$a_0(\alpha, \alpha) \geq c_1 \|\alpha\|_{L_1}^2, \quad \forall \alpha \in L_1$$

où $c_1 = \kappa_0 \min(1, c_0)/2$, ce qui implique que a_0 est L_1 - elliptique.

Par conséquent sur la base arguments techniques de l'analyse fonctionnelle concernant les équations paraboliques, l'équation variationnelle (3.62) à une solution unique τ_λ

satisfaisant $\tau_\lambda(0) = \tau_0$ à la régularité (3.59). Par contre on sait que la forme a n'est pas L_1 -elliptique, pour résoudre ce problème nous introduisons les fonctions :

$$\tilde{\zeta}_\mu^\ell(t) = e^{-\kappa^\ell t} \zeta_\mu^\ell(t), \quad \tilde{\alpha}^\ell(t) = e^{-\kappa^\ell t} \alpha^\ell(t), \quad \ell = 1, 2.$$

On remarque que si $\zeta_\mu^\ell, \alpha^\ell \in K^\ell$, alors $\tilde{\zeta}_\mu^\ell, \tilde{\alpha}^\ell \in K^\ell$. Par conséquent (3.63) est équivalent à l'inégalité

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_\mu \in K, \quad & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tilde{\zeta}}_\mu^\ell(t) - e^{-\kappa^\ell t} \mu^\ell(t), \tilde{\alpha}^\ell - \tilde{\zeta}_\mu^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\tilde{\zeta}_\mu(t), \tilde{\alpha} - \tilde{\zeta}_\mu(t)) \\ & + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell (\tilde{\zeta}_\mu^\ell, \tilde{\alpha}^\ell - \tilde{\zeta}_\mu^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} \geq 0 \quad \forall \tilde{\alpha} \in K, \quad p.p \ t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Le fait que

$$a(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}) + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell (\tilde{\alpha}^\ell, \tilde{\alpha}^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} \geq \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \|\tilde{\alpha}^\ell\|_{L_1^\ell}^2, \quad \forall \tilde{\alpha} \in L_1. \quad (3.66)$$

Et en utilisant des arguments classique d'analyse fonctionnelle concernant les inégalités paraboliques (3.62) (voir Théorème 2.5.6), implique que (3.65) à une solution unique $\tilde{\zeta}_\mu$ ayant la régularité (3.60), on utilise les fonctions $\zeta_\mu^\ell(t) = e^{\kappa^\ell t} \tilde{\zeta}_\mu^\ell(t)$, on conclure que ζ_μ^ℓ est une solution unique de (3.63), ayant la même régularité.

Dans la deuxième étape.

Soit $(\lambda, \mu, \eta) \in C(0, T; L_0 \times L_0 \times V)$, on utilise le $\{\tau_\lambda, \varsigma_\lambda\}$ obtenu en lemme 3.3.1, et considérons le problème auxiliaire.

Problème $PV_{(\lambda, \mu, \eta)}$. Trouver $u_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \rightarrow V$, $\xi_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \rightarrow W$ et $\zeta_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tell que :

$$\begin{cases} \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\lambda\mu\eta}^\ell) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^\ell), \tau_\lambda^\ell, \varsigma_\mu^\ell), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{\mathbf{u}}_{\lambda\mu\eta}^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \\ j_{\nu c}(u_{\lambda\mu\eta}(t), v - \dot{\mathbf{u}}_{\mu\eta}(t)) + j_{fr}(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t), v) - j_{fr}(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t), \dot{\mathbf{u}}_{\lambda\mu\eta}(t)) \\ + (\eta(t), v - \dot{\mathbf{u}}_{\lambda\mu\eta}(t))_V \geq (f(t), v - \dot{\mathbf{u}}_{\mu\eta}(t))_V, \quad \forall v \in \mathbf{V}, \end{cases} \quad (3.67)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_{\lambda\mu\nu}^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell E^\ell(\xi_{\lambda\mu\eta}^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (-q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, \quad (3.68)$$

$$\dot{\zeta}_{\lambda\mu\eta}(t) = H_{ad}(\zeta_{\lambda\mu\eta}(t), \alpha_{\zeta_{\lambda\mu\eta}}, R_\nu([u_{\lambda\mu\eta\nu}(t)]), R_\tau([u_{\lambda\mu\eta\tau}(t)])), \quad (3.69)$$

$$u_{\lambda\mu\eta}(0) = u_0, \quad \zeta_{\lambda\mu\eta}(0) = \zeta_0. \quad (3.70)$$

Nous avons les résultats suivants :

Lemme 3.3.2 .

1) Le problème $PV_{(\lambda,\mu,\eta)}$ possède une solution unique $\{u_{\lambda\mu\eta}, \xi_{\lambda\mu\eta}, \zeta_{\lambda\mu\eta}\}$, qui satisfait la régularité (3.55)–(3.57).

2) Si \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 , sont deux solutions de (3.67) et (3.70) correspondant aux données $(\lambda_1, \mu_1, \eta_1)$ et $(\lambda_2, \mu_2, \eta_2) \in C(0, T; L_0 \times V)$, alors il existe $c > 0$ tel que, pour $t \in [0, T]$

$$\| \dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t) \|_V \leq c(\| \eta_1(t) - \eta_2(t) \|_V + \| u_1(t) - u_2(t) \|_V). \quad (3.71)$$

Pour prouver (3.67) et (3.71), nous utilisons une existence abstraite et un résultat unique qui être trouvé dans théorème 2.5.2.

Démonstration. Nous allons appliquer le Théorème 2.5.2, dans le cas de l'espace de Hilbert $X = V$ muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_V$ et de la norme associée $\| \cdot \|_V$ définies par (2.10) et (2.11), nous utilisons le Théorème de Riesz–Frèchet pour définir les opérateurs $A : V \rightarrow V$, $B : V \rightarrow V$, $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction $f_\eta : [0, T] \rightarrow V$ par les égalités

$$(Au, v)_V = (\mathcal{A}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (3.72)$$

$$(Bu, v)_V = (\mathcal{G}\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (3.73)$$

$$j(u, v) = j_{nc}(u, v) + j_{fr}(u, v), \quad (3.74)$$

$$(f_\eta, v)_V = (f(t), v)_V - (\eta(t), \varepsilon(v))_{\mathcal{H}}, \quad (3.75)$$

pour tout $u, v \in V$ et $t \in [0, T]$, il s'ensuit des hypothèses (3.18) et (3.19) que l'opérateur A satisfont les conditions (2.18)–(2.19) et l'opérateur B lipschitzienne. Nous utilisons (2.12) pour voir que la fonctionnelle j défini dans (3.74) satisfait la condition (2.22)(a).

$$\begin{aligned} & \text{On a : } j(u_1, v_2) - j(u_1, v_1) + j(u_2, v_1) - j(u_2, v_1) - j(u_2, v_2) \\ & \leq c_0^2(L_\nu + L_\tau)(\| u_1 - u_2 \|_V \| v_1 - v_2 \|_V), \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in V, \end{aligned}$$

qui montre que la fonctionnelle j vérifie la condition (2.22)(b) sur V . De plus en utilisant (2.11) et (2.12) il est facile de voir f_η défini par (3.75) satisfait $f_\eta \in C(0, T; V)$. En utilisant maintenant (3.72)–(3.75) nous remarquons que le (3.67), (3.70) et (3.71) est une conséquence directe du Théorème 2.5.2, 1), 2); ce qui achève la preuve. Ensuite, nous considérons la forme ;

$$\begin{aligned} & G : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}. \\ & G(\xi, \phi) = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell \nabla \xi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall \xi, \phi \in W. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Nous utilisons (3.24), (3.23), (3.31) et (3.76) pour montrer que la forme G est bilinéaire continue, symétrique et coercitive sur W , en utilisant en outre (3.37) et le théorème de représentation de Riesz nous pouvons définir un élément (application) $\omega_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \rightarrow W$ tel que :

$$(\omega_{\lambda\mu\eta}(t), \phi)_W = (q(t), \phi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(\mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall \phi \in W, t \in (0, T).$$

Par l'application le Théorème de Lax-Milgram on déduit qu'il existe un unique élément $\xi_{\mu\eta}(t) \in W$ tel que :

$$G(\xi_{\lambda\mu\eta}(t), \phi) = (\omega_{\lambda\mu\eta}(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W. \quad (3.77)$$

Il suit de (3.77) que $\xi_{\lambda\mu\eta}$ est une solution de l'équation (3.68).

Soit $t_1, t_2 \in [0, T]$ ça suit de (3.68) que

$$\| \xi_{\lambda\mu\eta}(t_1) - \xi_{\lambda\mu\eta}(t_2) \|_W < C(\| \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t_1) - \mathbf{u}_{\lambda\mu\eta}(t_2) \|_V + \| q(t_1) - q(t_2) \|_W). \quad (3.78)$$

Maintenant de (3.34), (3.78) et $u_{\lambda\mu\eta} \in C^1(0, T, V)$, nous obtenons $\xi_{\lambda\mu\eta}(t) \in C(0, T, W)$.

D'autre part nous considérons l'application

$$H_{\lambda\mu\eta} : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$$

$$H_{\lambda\mu\eta}(t, \zeta) = H_{ad}(\zeta(t), \alpha_\zeta, R_\nu([u_{\lambda\mu\eta\nu}(t)]), R_\tau([u_{\lambda\mu\eta\tau}(t)])), \text{ pour tout } t \in [0, T] \text{ et } \zeta \in L^2(\Gamma_3).$$

Il résulte des propriétés de l'opérateur de troncature R_ν et R_τ que $H_{\lambda\mu\eta}$ est Lipschitz continue par rapport à la deuxième variable, uniformément dans le temps.

De plus, pour tout $\zeta \in L^2(\Gamma_3)$ l'application $t \rightarrow H_{\lambda\mu\eta}(t, \zeta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$.

Ainsi en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz (voir Théorème 2.5.5), on déduit qu'il existe l'unique fonction $\zeta_{\lambda\mu\eta} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ solution de l'équation (3.69).

montrent que $0 \leq \zeta_{\lambda\mu\eta}(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 . Par conséquent, de la définition de l'ensemble \mathcal{Z} (2.13) on constate que $\zeta_{\lambda\mu\eta} \in \mathcal{Z}$, ceci complète la preuve.

Dans la troisième étape : On considère l'élément

$$\Pi(\eta, \lambda, \mu)(t) = (\Pi^1(\eta, \lambda, \mu)(t), \Pi^2(\eta, \lambda, \mu)(t), \Pi^3(\eta, \lambda, \mu)(t)) \in V \times L_0 \times L_0, \quad (3.79)$$

définît par l'équation :

$$\begin{aligned} (\Pi^1(\eta, \lambda, \mu)(t), v) &= - \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell (\xi_{\lambda\mu\eta}^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\zeta_{\lambda\mu\eta}(t), u_{\lambda\mu\eta}(t), v) \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_{\lambda\mu\eta}^\ell(s), \tau_\lambda^\ell(s), \varsigma_\mu^\ell(s))) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell}, \forall v \in V \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\Pi^2(\eta, \lambda, \mu) = \left(\Theta^1 \left(\sigma_{\lambda\mu\eta}^1, \varepsilon \left(u_{\lambda\mu\eta}^1 \right), \tau_\lambda^1, \varsigma_\mu^1 \right), \Theta^2 \left(\sigma_{\lambda\mu\eta}^2, \varepsilon \left(u_{\lambda\mu\eta}^2 \right), \tau_\lambda^2, \varsigma_\mu^2 \right) \right), \quad (3.81)$$

$$\Pi^3(\eta, \lambda, \mu) = \left(\Psi^1 \left(\left(\sigma_{\lambda\mu\eta}^1, \varepsilon \left(u_{\lambda\mu\eta}^1 \right), \varsigma_\mu^1 \right), \Psi^2 \left(\left(\sigma_{\lambda\mu\eta}^2, \varepsilon \left(u_{\lambda\mu\eta}^2 \right), \varsigma_\mu^2 \right) \right) \right). \quad (3.82)$$

Telle que l'application $\sigma_{\lambda\mu\eta}^\ell$ est donnée par

$$\sigma_{\lambda\mu\eta}^\ell = \mathcal{B}^\ell \left(\varepsilon \left(u_{\lambda\mu\eta}^\ell \right), \tau_\lambda^\ell, \varsigma_\mu^\ell \right) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell \left(t-s, \varepsilon \left(u_{\lambda\mu\eta}^\ell(s), \tau_\lambda^\ell(s), \varsigma_\mu^\ell(s) \right) \right) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\xi_{\lambda\mu\eta}^\ell). \quad (3.83)$$

Lemme 3.3.3 : L'application Π admet un point fixe $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in C(0, T; V \times L_0 \times L_0)$.

Démonstration :

Soit $(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)$ et $(\eta_2, \lambda_2, \mu_2) \in C(0, T; V \times L_0 \times L_0)$, et notée par $\tau_i, \varsigma_i, u_i, \xi_i, \zeta_i$ et σ_i les fonctions obtenue dans lemme 3.3.1 et lemme 3.3.2, et la relation (3.83) pour $(\eta, \lambda, \mu) = (\eta_i, \lambda_i, \mu_i); i = 1, 2$.

Soit $t \in [0, T]$ nous utilisons (3.20), (3.21), (3.23), (3.25) et la définitions de R_ν, R_τ nous avons .

$$\begin{aligned} & \|\Pi^1(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Pi^1(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_V^2 \leq \sum_{\ell=1}^2 \left\| (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_1^\ell(t) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \xi_2^\ell(t) \right\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 + \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_0^t \left\| \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_1^\ell(s), \tau_1^\ell(s), \varsigma_1^\ell(s))) - \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_2^\ell(s), \tau_2^\ell(s), \varsigma_2^\ell(s))) \right\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 ds + \\ & C \left\| \zeta_1^2(t) R_\nu([u_{1\nu}(t)]) - \zeta_2^2(t) R_\nu([u_{2\nu}(t)]) \right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + C \left\| \zeta_1^2(t) R_\tau([u_{1\tau}(t)]) - \zeta_2^2(t) R_\tau([u_{2\tau}(t)]) \right\|_{L^2(\Gamma_3)}^2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \|\Pi^1(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Pi^1(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_V^2 \leq C \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \right. \\ & \left. \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Par des arguments similaires de (3.18), (3.20) et (3.27) il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} & \|\Pi^2(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Pi^2(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_{L_0}^2 \leq C \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \right. \\ & \left. + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds \right. \\ & \left. + \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 \right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Il s'ensuit aussi que :

$$\begin{aligned} & \|\Pi^3(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(t) - \Pi^3(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(t)\|_{L_0}^2 \leq C \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right. \\ & \left. + \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 \right). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Maintenant de (3.84), (3.85) et (3.86) il s'ensuit ;

$$\begin{aligned} & \|\Pi(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Pi(\eta_2, \lambda_2, \mu)\|_{V \times L_0 \times L_0}^2 \leq C \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right. \\ & + \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds \\ & \left. + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Alors, tant que, $u_i^\ell(t) = \int_0^t \dot{u}_i^\ell(s) ds + u_0^\ell(t)$, $t \in [0, T]$, $\ell = 1, 2$.

Nous avons, $\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds$, et utiliser l'inégalité dans (3.71) on trouve.

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq C \left(\int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds \right). \quad (3.88)$$

Ensuite, nous appliquons l'égalité de Gronwall, on déduit.

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_V ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.89)$$

D'autre part de problème de Cauchy (3.10), on peut écrire :

$$\zeta_i(t) = \zeta_0 - \int_0^t H_a d(\zeta_i(s), \alpha_{\zeta_i(s)}, R_\nu([u_i \nu(s)], R_\tau([u_i \tau(s)])) ds,$$

En utilisant (3.18) et (3.28), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t (\|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ & + C \int_0^t \|R_\nu([u_{1\nu}(s)] - R_\nu([u_{2\nu}(s)])\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \\ & C \int_0^t \|R_\tau([u_{1\tau}(s)] - R_\tau([u_{2\tau}(s)])\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \end{aligned}$$

D'après les définitions de R_ν , R_τ et en écrivant $\zeta_1 = \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_2$, on obtient.

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \left(\int_0^t \|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right). \quad (3.90)$$

Ensuite, nous appliquons l'inégalité de Gronwall et du théorème de trace de Sobolev nous obtenons

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds. \quad (3.91)$$

Nous avons utilisé maintenant (3.9), (3.17), (3.29) et (3.31) pour trouver

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_W^2 \leq C \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \quad (3.92)$$

de (3.62) on déduit que

$$((\dot{\tau}_1 - \dot{\tau}_2, \tau_1 - \tau_2)_{L_0} + a_0(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \tau_2) + (\lambda_1 - \lambda_2, \theta_1 - \theta_2)_{L_0} = 0,$$

nous intégrons cette égalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\tau_1(0) = \tau_2(0) = \tau_0$ et l'inégalité $a_0(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \tau_2) \geq 0$, pour trouver

$$\frac{1}{2} \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 \leq \int_0^t (\lambda_1(s) - \lambda_2(s), \tau_1(s) - \tau_2(s))_{L_0} ds,$$

ce qui implique que

$$\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 \leq \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{L_0}^2 ds.$$

Cette inégalité combinée à l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{L_0}^2 \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{L_0}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.93)$$

De plus, de (3.63) on en déduit que, p.p. $t \in [0, T]$.

$$(\dot{\varsigma}_1 - \dot{\varsigma}_2, \varsigma_1 - \varsigma_2)_{L_0} + a(\varsigma_1 - \varsigma_2, \varsigma_1 - \varsigma_2) \leq (\mu_1 - \mu_2, \varsigma_1 - \varsigma_2)_{L_0}.$$

Intégrer l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales, $\varsigma_1(0) = \varsigma_2(0) = \varsigma_0$ et inégalité $a(\varsigma_1 - \varsigma_2, \varsigma_1 - \varsigma_2) \geq 0$, il vient

$$\frac{1}{2} \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 \leq \int_0^t (\mu_1(s) - \mu_2(s), \varsigma_1(s) - \varsigma_2(s))_{L_0} ds.$$

Ce qui implique que

$$\|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 \leq \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{L_0}^2 ds + \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L_0}^2 ds.$$

Cette inégalité combinée à l'inégalité de Gronwall conduit à

$$\|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L_0}^2 \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{L_0}^2 ds. \quad (3.94)$$

On substitue (3.71), (3.91) et (3.94) en (3.87) pour obtenir

$$\|\Pi(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Pi(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{V \times L_0 \times L_0}^2 \leq C \int_0^t \|(\eta_1, \lambda_1, \mu_1)(s) - (\eta_2, \lambda_2, \mu_2)(s)\|_{V \times L_0 \times L_0}^2 ds.$$

Réitérant cette inégalité m fois nous obtenons,

$$\|\Pi^m(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Pi^m(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{C(0, T; V \times L_0 \times L_0)}^2 \leq \frac{c^m T^m}{m!} \|(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - (\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{C(0, T; V \times L_0 \times L_0)}^2.$$

Ainsi, pour m suffisamment grand, Π^m est une contraction sur l'espace de Banach $C(0, T; V \times L_0 \times L_0)$ et donc Π à un point fixe unique.

Soit $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in C(0, T; V \times L_0 \times L_0)$, le point fixe de Π , on suppose que :

$$u_* = u_{\lambda^* \mu^* \eta^*}, \quad \xi_* = \xi_{\lambda^* \mu^* \eta^*}, \quad \zeta_* = \zeta_{\lambda^* \mu^* \eta^*}, \quad \tau_* = \tau_{\lambda^*}, \quad \varsigma_* = \varsigma_{\mu^*}, \quad (3.95)$$

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_*^\ell), \tau_*^\ell, \zeta_*^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_*^\ell(s)), \tau_*^\ell, \zeta_*^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\xi_*^\ell), \quad (3.96)$$

$$D_*^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell) + \mathcal{G}^\ell(E^\ell(\zeta_*^\ell)). \quad (3.97)$$

Nous utilisons

$$\Pi^1(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \eta^*, \quad \Pi^2(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \lambda^*, \quad \Pi^3(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \mu^*.$$

Il s'ensuit ;

$$\begin{aligned} (\eta^*(t), v)_V &= - \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\xi_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + J_{ad}(\zeta_*(t), u_*(t), v) + \\ &\sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_*^\ell(s)), \tau_*^\ell(s), \zeta_*^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (3.98)$$

$$\lambda_*^\ell(t) = \Theta^\ell(\sigma_*^\ell(t), \varepsilon(u_*^\ell(t)), \tau_*^\ell(t), \zeta_*^\ell(t)), \quad \ell = 1, 2 \quad (3.99)$$

$$\mu_*^\ell(t) = \Psi^\ell(\sigma_*^\ell(t), \varepsilon(u_*^\ell(t)), \zeta_*^\ell(t)), \quad \ell = 1, 2. \quad (3.100)$$

Maintenant, nous avons tous les ingrédients pour établir la démonstration du Théorème 3.3.1.

Existence. Nous prouvons $\{u_*, \sigma_*, \xi_*, \tau_*, \varsigma_*, \zeta_*, D_*\}$, satisfait (3.41) et les régularités (3.55) (3.61).

En effet, nous écrivons (3.67) pour $(\eta, \lambda, \mu) = (\eta_*, \lambda_*, \mu_*)$ et utilisons (3.95) pour trouver

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell)(t), \varepsilon(u^\ell) - \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_*^\ell), \tau_*^\ell, \zeta_*^\ell), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &+ j_{\nu c}(u_*(t), v - \dot{u}_*(t)) + j_{fr}(u_*(t), v) - j_{fr}(u_*(t), \dot{u}_*(t)) + (\eta^*(t), v - \dot{u}_*(t))_V \\ &\geq (f(t), v - \dot{u}_*(t))_V, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Remplacer (3.98) en (3.101) pour obtenir ;

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell)(t), \varepsilon(u^\ell) - \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_*^\ell), \tau_*^\ell, \zeta_*^\ell), \varepsilon(v^\ell) - \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t \mathcal{Q}^\ell(t-s, \varepsilon(u_*^\ell(s)), \tau_*^\ell(s), \zeta_*^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\zeta_*(t), u_*(t), v - \dot{u}_*(t)) \\ &+ j_{\nu c}(u_*(t), v - \dot{u}_*(t)) + j_{fr}(u_*(t), v) - j_{fr}(u_*(t), \dot{u}_*(t)) - \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\xi_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell) - \\ &\varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)))_{\mathcal{H}^\ell} \geq (f(t), v - \dot{u}_*(t))_V, \quad \forall v \in V, \quad p.p. t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}_*^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0 (\tau_*^\ell(t), \alpha) = \sum_{\ell=1}^2 (\lambda_*^\ell(t) + \rho^\ell(t), \alpha^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} \quad (3.103)$$

pour tout $\alpha \in L_0$, $p.p. t \in [0, T]$.

Ensuite, remplacez (3.99) par (3.62) pour obtenir $\varsigma_*(t) \in K$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\varsigma}_*^\ell(t), \alpha^\ell - \varsigma_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\varsigma_*(t), \alpha - \varsigma_*(t)) \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 (\Psi^\ell(\sigma_*^\ell(t) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t), \varepsilon(u_*^\ell(t), \varsigma_*^\ell(t))), \alpha^\ell - \varsigma_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Pour tous $\alpha \in K$ $p.p. t \in [0, T]$. Nous écrivons maintenant (3.69) pour $(\eta, \lambda, \mu) = (\eta^*, \lambda^*, \mu^*)$ et utilisons (3.95) de voir ça

$$\sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell E^\ell(\xi^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = -(q(t), \phi)_W, \quad (3.105)$$

pour tout $\phi \in W$, $p.p. t \in [0, T]$.

De plus, nous utilisons $u_{\eta^* \lambda^* \mu^*}$ dans (3.69) et (3.95) pour trouver

$$\dot{\zeta}_*(t) = H_{ad}(\zeta_*(t), \alpha_{\zeta_*}(t), R_\nu([u_{*\nu}(t)]), R_\tau([u_{*\tau}(t)])), \quad p.p. t \in [0, T]. \quad (3.106)$$

Les relations (3.101) (3.106) nous permettent de conclure maintenant que $\{u_*, \sigma_*, \xi_*, \varsigma_*, \zeta_*, D_*\}$ satisfait ; (3.41), ensuite la régularité (3.55) - (3.57) et (3.60) découlent de Lemme 3.3.2 et Lemme 3.3.3 .

Puisque u_*, σ_* et ξ_* satisfait (3.55), (3.56) et (3.60), respectivement, il résulte de (3.96) cette ;

$$\sigma_* \in C(0, T; \mathcal{H}). \quad (3.107)$$

Pour $\ell = 1, 2$ on choisit $v = u \pm \phi$ dans (3.102), avec $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$ et $\phi^{3-\ell} = 0$ pour obtenir.

$$\text{Div } \sigma_*^\ell(t) = -f_0^\ell(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2. \quad (3.108)$$

Où $D(\Omega^\ell)$ est l'espace des fonctions réelles infiniment différentiable avec un support compact dans Ω^ℓ La régularité (3.58) découle de (3.97), (3.107) et (3.108).

Soit maintenant $t_1, t_2 \in [0, T]$ de (3.85), (3.92), (3.94) et (3.97), nous concluons qu'il existe une constante positive $C > 0$ vérifiant ;

$$\|D_*(t_1) - D_*(t_2)\|_H \leq C (\|\xi_*(t_1) - \xi_*(t_2)\|_W + \|u_*(t_1) - u_*(t_2)\|_V).$$

La régularité de u_* et ξ_* et donnée par (3.55) et (3.56) implique ;

$$D_* \in C(0, T; H). \quad (3.109)$$

Pour $\ell = 1, 2$ nous choisissons avec $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, avec $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^{3-\ell}$ et $\phi^{3-\ell} = 0$ dans (3.105) et en utilisant (3.101) nous trouvons

$$\text{Div} D_*^\ell = q_0^\ell(t), \quad t \in [0, T], \quad \ell = 1, 2. \quad (3.110)$$

La propriété (3.61) découle de (3.97), (3.109) et (3.110).

Enfin, nous concluons que la solution faible $\{u_*, \sigma_*, \xi_*, \varsigma_*, \zeta_*, D_*\}$ du problème PV à la régularité (3.55) - (3.61), ce qui conclut la partie existence du théorème 3.3.1.

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur $\Pi(., ., .)$, défini par (3.80) - (3.81) et de la solubilité unique des problèmes $PV_{(\lambda, \mu)}$ et $PV_{(\lambda, \eta, \mu)}$.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié théoriquement un problème de contact avec adhésion et frottement entre deux corps électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement. Nous avons présenté un modèle pour le processus quasi-statique de contact avec frottement, adhésion et endommagement entre deux corps électro-viscoélastiques.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. Le contact a été modélisé avec les condition de compliance normale et la loi de Coulomb de friction sèche associée. Ce qui nous donne une inégalité quasi-variationnelles et type d'égalités variationnelles paraboliques non linéaires. On a montré l'existence et l'unicité de la solution faible de problème précédent par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, équation différentielle, le lemme de Gronwall et le théorème de point fixe.

Bibliographie

- [1] R.C. Batra and J.S. Yang, *Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity*, J. of Elasticity, **38** (1995), 209-218.
- [2] S. Boutechbak, A dynamic problem of frictionless contact for elastic-thermoviscoplastic materials with damage, *Int. J. Pure Appl. Math.*, **86** (2013), pp. 173–197.
- [3] H. L. Dai and X. Wang, Thermo-electro-elastic transient responses in piezoelectric hollow structures, *Inter. J. Sol. Struct.*, **42**, (2005), pp. 1151–1171.
- [4] G. Duvaut and J. L. Lions, *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, 1976.
- [5] G. Duvaut and J.L. Lions, *Les inéquations en Mécanique et en Physique*, Springer-Verlag, Berlin (1976).
- [6] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*. C. R. Acad. Sci. Paris, Série II **295** (1982), 913916.
- [7] M. Frémond, *Contact with adhesion*. Dans *Topics in nonsmooth mechanics (Edité par J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, et G. Strang)*, Birkhauser Verlag, Basel (1988), 177-221.
- [8] T. Hadj Ammar, A. Saïdi and A. Azeb Ahmed, Dynamic contact problem with adhesion and damage between thermo-electro-elasto-viscoplastic bodies, *C. R. Mécani.*, **345** (2017), pp. 329–336.
- [9] T. Hadj ammarand, B. Benabderrahmane, *Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies*, Stud. Univ. Babe, s-Bolyai Math. 57 (2012), No. **3**, 427-444.

- [10] T. Hadj Ammar, S. Drabla and B. Benederrahmane, Analysis and approximation of frictionless contact problems between two piezoelectric bodies with adhesion, *Georgian Math. J.*, **44** (2014), pp. 1–15.
- [11] W. Han and M. Sofonea, Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, **38** (2000), pp. 556–579.
- [12] W. Han, M. Sofonea and K. Kazmi, Analysis and numerical solution of a frictionless contact problem for electro-elastic-visco-plastic materials, *Compu. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **196** (2007), pp. 3915–3926.
- [13] Z. Lerguet, *Analyse de Quelques Problèmes de Contact avec Frottement et Adhé-sion*. Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2008).
- [14] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocu, A consistent model coupling adhesion, friction and unilateral contact, *Comput. Meth. Appl. Engrg.*, **177** (1999), pp. 383–399.
- [15] M.Said.ameur,T.Hadj.Amar,L.Maiza, *Analysis of a frictionnal contact problem for viscoelastic piezoelectric materials*, Aust.J.anal.App,Vol17(2020)N¹ Art.6,20 pp,AJMAA.
- [16] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics **276**, Chapman-Hall/CRC Press, New York 2006.
- [17] M. Shillor, M. Sofonea, J.J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lect. Notes Phys. **655**, 2004, Springer, Berlin Heidelberg.
- [18] M. Selmani, A dynamic problem with adhesion and damage in electro-viscoelastic body with long-term memory, *J. Ineq. Pure Appl. Math.*, **10** (2009), pp. 06–19.

Résumé

Dans cette mémoire, on à étudié un problème en mécanique de contact avec frottement et adhésion pour les lois constitutives thermo-électro-viscoélastique, nous avons présenté un modèle pour le processus quasi-statique de contact avec frottement, adhésion et endommagement entre deux corps thermo-électro-viscoélastiques. On a utilisé les formules de Green pour obtenir les formulations variationnelle d'une problème. Le contact a été modélisé avec les condition de compliance normale et la loi de Coulomb de friction sèche associée. Ce qui nous donne une inégalité quasi-variationnelles et type d'égalités variationnelles paraboliques non linéaires et difinit L'existence et l'unicité de solution du problème.

Mots clés; Elécto-élastique, électro-viscoélastique, adhésion, frottement, contact, inéquation quasi-variationnelle, point fixe.

Abstract

In this memory, we studied a problem in contact mechanics with friction and adhesion for the constitutive laws of thermo-electro-viscoelastic, we presented a model for the quasi-static process of contact with friction, adhesion and damage between two electro-viscoelastic bodies. We used Green's formulas to obtain the variational formulations of a problem. The contact was modeled with the conditions of normal compliance and the associated law of Coulomb of dry friction. Which gives us a quasi-variational inequality and type of nonlinear parabolic variational equality and we proved the existence and the uniqueness solution of the problem.

Keywords: Electro-elastic, electro-viscoelastic, adhesion, friction, contact, quasi-variational inequality, fixed point.

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة مشكلة في ميكانيكا التلامس، مع الاحتكاك والالتصاق، للقوانين التأسيسية للكهرباء الزوجية المرنة، وقدمنا نموذجًا لعملية شبه ثابتة للتلامس مع الاحتكاك والالتصاق والضرر بين جسمين كهربائيين مرنين. استخدمنا صيغ "قرين" للحصول على الصيغ المتغيرة للمشكلة. تم تصميم جهة الاتصال وفقًا لشروط الامتثال العادي وقانون "كولوم" للاحتكاك الجاف وهذا يعطينا عدم مساواة شبه متغيرة، ونوع من المساواة المتغيرة المكافئة وغير الخطية كما يبين وجود حل ضعيف ووحيد للمسألة. الكلمات المفتاحية؛ المرونة الكهربائية، اللزوجة الكهربائية، الالتصاق، الاحتكاك، المعادلة المتغيرة، عدم المساواة شبه المتغيرة، النقطة الثابتة.