

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ ECHAHID HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**Stabilité des systèmes thermoélastiques
avec la loi de Gurtin-Pipkin
de propagation de chaleur**

Présenté par: *Dadda Salah*
Hamdi Abdelmounaim

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Letoufa Yassin
Fareh Abdelfeteh
Menacer Bakar

Président.
Rapporteur
Examineur

Univ. El Oued
Univ. El Oued
Univ. El Oued

Année universitaire : 2019/2020

Dédicace

Avant tout je remercie le bon Dieu le tout puissant, qui m'a donné la force

et le courage pour poursuivre mes études

je dédie ce modeste travail :

A ma mère, que a oeuvré pour ma réussite, par son amour son soutien,

et ses précieux conseils.

A toute ma famille, qui porte le nom **DADDA**.

A tous mes chers amis.

”Salah”

Dédicace

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon promoteur de mémoire Monsieur **”Abdelfeteh Fareh”** . Je le remercie de m’avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.

J’adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs, intervenants et toutes les Personnes qui par leurs paroles, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes Réflexions et ont accepté à me rencontrer et répondre à mes questions durant mes études.

Je remercie mes très chers parents, **Mohammed Tayeb** et **Benzaoui Assia**, ainsi ma grand mère **Mebarka Bensaci** qui ont toujours été là pour moi, « Vous avez tout sacrifié pour vos enfants n’épargnant ni santé ni efforts. Vous m’avez Donné un magnifique modèle de labeur et de persévérance. Je suis redevable d’une éducation dont je suis fier ».

Je remercie mes frères **Charafedine**, **Djassem**, **Yacine** et **Aymen** pour leur encouragement. Je remercie très spécialement mon ami monsieur **Salah Dada** pour leur devoir et travail ensemble pour l’aboutissement de ce mémoire.

Pour leur sincère amitié et confiance, et à qui je dois ma reconnaissance et mon Attachement.

à tous ces intervenants, je présente mes remerciements, mon respect et ma gratitude.

” Abdelmounaim ”

Remerciements

*Nous remercions « **Allah** » qui nous a donné la volonté pour la réalisation de ce modeste mémoire.*

*Nous tenons à notifier un remerciement spécial à tous nos professeurs qui ont contribué à notre formation de mathématique, en particulier, notre encadreur Monsieur ”**Abdelfeteh Fareh**”.*

Ainsi que tous nos professeurs qui nous ont enseigné durant nos études à la faculté des sciences exactes.

nous remercions également tous nos collègues d’étude, particulièrement notre promotion de master mathématique, 2019/2020 à l’université de Echahid Hama Lakhdar El-Oued.

Enfin, nous remercions vivement notre famille pour l’aide matérielle et morale durant la période de préparation.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Préliminaires	3
1.1 Espace de Hilbert	3
1.2 Les espaces $L^p(\Omega)$	3
1.3 Espaces de Sobolev	4
1.4 L'espace $L^2_\mu(\mathbb{R}^+, V)$	7
1.5 Injection continue et injection compacte	8
1.6 Théorème de Lax-Milgram	9
1.7 Semi-groupe fortement continu	10
1.7.1 Théorèmes de Hille-Yosida et Lumer-Phillips	11
1.7.2 Stabilité exponentielle	11
1.8 Régularité	12
2 Stabilité exponentielle d'un problème thermoélastique linéaire	16
2.1 Introduction	16
2.2 Existence et unicité :	19
2.3 Stabilité exponentielle	24
3 Stabilité exponentielle d'un système de type Timoshenko avec la loi de Gurtin-Pipkin	31
3.1 Introduction	31
3.2 Existence et unicité :	34
3.3 Stabilité exponentielle	38

Notations générales

$\mathbb{R}^d$	Espace euclidien de dimension d .
Ω	Ouvert de $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue .
$\mathcal{L}(E, F)$	Espace des opérateur bornés et linéaires de E dans F .
E'	Le dual topologique de E .
C_0^∞	Espace des fonctions tests.
L^p	Espace des fonctions dont la puissance p est intégrable au sens de Lebesgue.
$L^2(\Omega)$	Espace des fonctions de carré intégrables sur Ω .
H^1, H_0^1, H^2	Espaces de Sobolev.
$D(\mathcal{A})$	Domaine de l'opérateur A .
C_0 -semigroupe	Semi-groupe fortement continu.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire.
$\ \cdot \ _E$	Norme sur l'espace E .
$ \cdot _{m, \Omega}$	Semi-norme de l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$.
$\ \cdot \ _{m, \Omega}$	Norme de l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$.
D^α	Dérivée partielle par rapport au multi-indice α .
$ \alpha $	Longueur du multi-indice.
u_t	Dérivée partielle de u par rapport à t .
∂	Opérateur de différentiation partielle.
∇	Opérateur gradient.
Δ	Opérateur de Laplace.

Introduction générale

Dans la plupart des études sur la stabilité des systèmes thermoélastiques, la propagation de la chaleur est donnée par loi de Fourier suivant

$$q + \kappa \nabla \theta = 0, \quad (1)$$

Ceci avec l'équation constitutive

$$\theta_t + \nabla q = 0$$

donne l'équation de la chaleur

$$\theta_t = -\kappa \Delta \theta.$$

Il est bien connu que cette équation prévoit le paradoxe de vitesse infinie, ce qui signifie qu'une perturbation à un point du milieu aura un effet immédiat en un point à l'infini, qui est physiquement incorrect.

Pour éviter ce paradoxe plusieurs théories ont été développées, parmi ces théorie on note la théorie de Gurtin et Pipkin qui suggèrent au lieu de (1) la loi

$$q(t) = -(k * \nabla \theta)(t) = - \int_0^\infty k(s) \nabla \theta(t-s) ds, \quad (2)$$

où $k(s)$ est une fonction de relaxation qui représente la conductivité du milieu. La présence du terme de convolution dans (2) implique une vitesse de propagation finie des perturbations thermiques.

Dans ce mémoire on va considérer des systèmes en thermoélasticité dont la propagation de la chaleur est donnée par la loi (2) et on étudie le comportement de ces systèmes lorsque le temps t tend à l'infini.

Dans le premier chapitre, nous allons présenter quelques notions de base de l'analyse fonctionnelle et de la théorie de semi-groupe qui seront utilisées dans les chapitres ultérieurs. Ensuite nous donnons la notions de stabilité (voir [1,4,7,8,9,10,11,16]).

Le deuxième chapitre sera consacré à la stabilité d'un système thermoélastique linéaire qui était étudié par Pata et Vuk [15], où nous détaillons la démonstration.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous allons étudier l'existence, l'unicité d'une solution pour un système thermoélastique poreux dont la propagation de la chaleur est donnée par la loi de Gurtin-Pipkin (2). Nous avons montré que la solution est exponentiellement stable, Dans ce chapitre, nous sommes appuyés sur des articles [2,3,5,6,11,12,13,15].

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre on va donner quelques notions générales de l'analyse fonctionnelle qui seront utiles dans les chapitres qui suivent.

1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 (*Un espace de Hilbert*)

Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $\langle u, v \rangle$ et qui est complet pour la norme $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$.

Soit $E = L^2(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions de carré sommable de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{K}(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. L'expression suivante

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx$$

définit sur E un produit scalaire.

1.2 Les espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.2.1 [7] *soit $p \in [1, \infty[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ on défini :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad f \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

On note

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \text{ mesurable et } \exists \ C > 0 \text{ t.q. } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \left\{ C ; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}$$

Théorème 1.2.1 [7] (Inégalité de Hölder)

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Alors on a $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Pour $p = q = 2$ on arrive à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Inégalité de Young

Soient p et q deux réels conjugués : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}_+^2, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

en particulier si $u, v \in L^2(\Omega)$, alors

$$\int_{\Omega} |uv| \leq \varepsilon \int_{\Omega} |u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} |v|^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

1.3 Espaces de Sobolev

Définition 1.3.1 : Soit φ une fonction, définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Le support de φ est l'ensemble

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.3.2 : (L'espace des fonctions tests)

On appelle espace des fonctions tests sur Ω et on le note $\mathcal{D}(\Omega)$ (ou $C_0^\infty(\Omega)$) l'espace des fonctions de classe $C^\infty(\Omega)$ à support compact inclu dans Ω .

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $C_c^k(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^k à support compact dans Ω .

Remarque 1.3.1 : Une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$ est nulle dans un voisinage du bord de Ω . Plus précisément, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe K borné et fermé de $\mathbb{R}^d$, tel que $\varphi(x) = 0$, pour tout $x \in \Omega \setminus K$.

Définition 1.3.3 : (Dérivée faible)

Une fonction $f \in L^p(\Omega)$ admet une dérivée partielle généralisée (ou dérivée faible), par rapport à x_j , dans $L^p(\Omega)$ s'il existe une fonction $g_j \in L^p(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} g_j(x) \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx.$$

On note alors $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ la dérivée partielle généralisée de f par rapport à x_j .

Définition 1.3.4 De la même manière on définit la dérivée généralisée d'ordre α par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} g_{\alpha}(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^{\alpha} \varphi(x) dx,$$

dans ce cas g_{α} sera notée par $D^{\alpha} f$.

Définition 1.3.5 [16] Pour $m \in \mathbb{N}$, on pose

$$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : D^{\alpha} u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n : |\alpha| \leq m\}$$

on désigne par :

$$D^{\alpha} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ d'entiers positifs ou nuls. Où $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ est la longueur du multi-indice α .

On munit $H^m(\Omega)$ par le produit scalaire

$$(u, v)_{m, \Omega} := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} v(x) dx$$

la norme associée sera

$$\|u\|_{m, \Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Définition 1.3.6 : Pour $m \in \mathbb{N}$, $H_0^m(\Omega)$ désigne la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

Pour $m = 1$

$$H_0^1(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^1(\Omega)}$$

Proposition 1.3.1 : L'espace $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Proposition 1.3.2 [16] Soit $u \in H^1(\Omega)$, alors $u \in H_0^1(\Omega)$ si et seulement si $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

Le dual de $H_0^m(\Omega)$ [4]

Le dual $(H_0^m(\Omega))'$ de l'espace $H_0^m(\Omega)$, s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et se note par $H^{-m}(\Omega)$.

$$H^{-m}(\Omega) = \left\{ T \in \mathcal{D}'(\Omega) : T = \sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha f_\alpha, f_\alpha \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Sur cet espace nous considérons la norme suivante

$$\|T\|_{H^{-m}} = \inf_{T = \sum \partial^\alpha f_\alpha} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

Soit $T \in H^{-m}(\Omega)$, alors T définit une forme linéaire continue sur $C_0^\infty(\Omega)$ muni de la norme H^m . En effet soit $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$; on a,

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \sum_{|\alpha| \leq m} \langle \partial^\alpha f_\alpha, \varphi \rangle \right| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |\langle f_\alpha, \partial^\alpha \varphi \rangle| \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{L^2} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^2}$$

ainsi,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

d'où,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq \inf_{T = \sum \partial^\alpha f_\alpha} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \|\varphi\|_{H^m} = \|T\|_{H^{-m}} \|\varphi\|_{H^m} \quad (1.1)$$

Comme $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$, T se prolonge en une forme linéaire $\tilde{T}$ continue sur $H_0^m(\Omega)$, i.e. $\tilde{T} \in (H_0^m(\Omega))'$. De plus l'inégalité (1.1) ci-dessus montre que $\|\tilde{T}\|_{(H_0^m(\Omega))'} \leq \|T\|_{H^{-m}}$. On a ainsi une application $T \mapsto \tilde{T}$ de $H^{-m}(\Omega)$ dans $(H_0^m(\Omega))'$

Proposition 1.3.3

L'application $T \mapsto \tilde{T}$ est linéaire, bijective et bicontinue de $H^{-m}(\Omega)$ dans $(H_0^m(\Omega))'$.

Puisque $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, on peut identifier le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$ à un espace de distributions sur Ω :

$$\begin{cases} H^{-1}(\Omega) \equiv (H_0^1(\Omega))' \\ H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

De façon générale, X' désigne le dual de X .

$$H^{-m}(\Omega) \equiv (H_0^m(\Omega))'$$

Proposition 1.3.4 (*Inégalités de Poincaré et Poincaré-Wirtinger*)

On suppose que Ω est borné et de classe C^1 . Alors il existe une constante $C = C(\Omega) > 0$ telle que pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

Si de plus Ω est connexe, alors pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|u - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

où $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u dx$ désigne la moyenne de u sur Ω .

Proposition 1.3.5 [4] Pour $m \in \mathbb{N}$, $u \in L^2(\Omega)$ et $v \in H_0^m(\Omega)$, on a

$$\left| \int u(x) \bar{v}(x) dx \right| \leq \|u\|_{H^{-m}(\Omega)} \|v\|_{H_0^m(\Omega)} \quad (1.2)$$

1.4 L'espace $L_{\mu}^2(\mathbb{R}^+, V)$

On définit les espaces de Lebesgue à poids

$$L_{\mu}^2(\mathbb{R}^+, L^2) = \left\{ u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}; \int_0^{+\infty} \mu(s) \|u(s)\|^2 ds < \infty \right\}$$

muni par le produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mu,0} = \int_0^{\infty} \mu(s) \langle \varphi(s), \psi(s) \rangle ds$$

et la norme associée

$$\|\varphi\|_{\mu,0}^2 = \int_0^\infty \mu(s) \|\varphi(s)\|^2 ds$$

et

$$L_\mu^2(\mathbb{R}^+, H_0^1) = \left\{ u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}; \int_0^{+\infty} \mu(s) \|\nabla u(s)\|^2 ds < \infty \right\}$$

dont le produit scalaire est

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mu,1} = \int_0^\infty \mu(s) \langle D\varphi(s), D\psi(s) \rangle ds$$

et la norme est

$$\|\varphi\|_{\mu,1}^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mu,1}.$$

Il est clair que

$$L_\mu^2(\mathbb{R}^+, H_0^1) \subset L_\mu^2(\mathbb{R}^+, L^2).$$

De plus en utilisant l'inégalité de Poincaré nous obtenons le résultat suivant :

$$\|\varphi\|_{\mu,0}^2 \leq \lambda_0(\Omega) \|\varphi\|_{\mu,1}^2.$$

1.5 Injection continue et injection compacte

Définition 1.5.1 : [10] Soient deux espaces de Banach X et Y tels que $Y \subset X$. On dit que Y s'injecte de manière continue dans X (en notation $Y \hookrightarrow X$) si et seulement si l'opérateur identité

$$Id : Y \rightarrow X : y \rightarrow y$$

est continu. De même, on dit que Y s'injecte de manière compacte dans X (en notation $Y \hookrightarrow_c X$) si et seulement si l'opérateur Id est compact de Y dans X .

Notations : Pour u et v appartenant à $H^1(\Omega)$ on posera

$$B(u, v) = \sum_i \int_\Omega \partial_i u \overline{\partial_i v} dx$$

et on appellera énergie de u la quantité

$$E(u) = B(u, u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx.$$

La quantité $E(u)^{1/2}$ n'est pas une norme sur $H^1(\Omega)$, les constantes ayant une énergie nulle.

On a par contre le résultat suivant.

Corollaire 1.5.1 [10] Sur l'espace $H_0^1(\Omega)$, la forme $B(u, v)$ est un produit scalaire. et $E(u)^{1/2}$ est une norme équivalente à la norme $\|u\|_1$. En particulier, $H_0^1(\Omega)$ muni de B est un espace de Hilbert. On a en effet

$$\|u\|_1^2 = E(u) + \|u\|_{L^2}^2$$

et, pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on a d'après l'inégalité de Poincaré

$$E(u) \leq \|u\|_1^2 \leq (1 + C^2) E(u).$$

Théorème 1.5.1 : (Formule de Green)

Soit Ω , un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$. On a

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma$$

où n désigne la normale extérieure sur Ω et $d\sigma$ la mesure sur $\partial\Omega$.

1.6 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.6.1 Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, on dit que a est

* continue s'il existe $C > 0$ t.q. pour tout $(u, v) \in H \times H$:

$$|a(u, v)| \leq C \|u\| \|v\|$$

* coercive s'il existe $\alpha > 0$ t.q. pour tout $u \in H$:

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Théorème 1.6.1 [7] (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $a(u, v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H .

Alors pour tout $L \in \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$ il existe $u \in H$ unique tel que :

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H.$$

1.7 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.7.1 [9] Soit E un espace de Banach , une famille des opérateurs linéaires et continu

$\{S(t), t \geq 0\}$, $S(t) \in \mathcal{L}(E)$ est dite semi-groupe si elle verifie :

❶ $S(0) = I$

❷ $S(t_1 + t_2) = S(t_1)S(t_2) \quad \forall t_1, t_2 \geq 0$

si de plus elle verifie :

❸ Pour chaque $x \in E$, $S(\cdot)x : [0, \infty[\rightarrow E$ est continue en t sur $[0, \infty[: (c-\tilde{a}-d)$.

$$\forall x \in E, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t)x - x\| = 0,$$

la famille $\{S(t), t \geq 0\}$ est appelée Semigroupe fortement continu ou C_0 -semigroupe.

Définition 1.7.2 Le générateur infinitésimal de $S(t)$ est l'opérateur linéaire $\mathcal{A}$ de domaine

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in E : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

défini par

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} = \left. \frac{d^+ S(t)x}{dt} \right|_{t=0}, \quad \forall x \in D(\mathcal{A}).$$

Définition 1.7.3 Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire non-borné. On dit que :

1. $\mathcal{A}$ est dissipatif si

$$(\mathcal{A}v, v) \leq 0 \quad \forall v \in D(\mathcal{A})$$

2. $\mathcal{A}$ est maximal si $\text{Im}(I - \mathcal{A}) = H$ i.e.

$$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(\mathcal{A}) \quad \text{tel que} \quad u - \mathcal{A}u = f$$

3. $\mathcal{A}$ est monotone si $-\mathcal{A}$ est dissipatif i.e $(\mathcal{A}u, u) \geq 0$ pour tout $u \in D(\mathcal{A})$.

1.7.1 Théorèmes de Hille-Yosida et Lumer-Phillips

Théorème 1.7.1 (Hille-Yosida)[8]

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(\mathcal{A})$ il existe une fonction unique :

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C([0, +\infty[; D(\mathcal{A}))$$

telle que :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = 0 & \text{sur } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 & (\text{donnée initiale}) \end{cases}$$

De plus on :

$$|u(t)| \leq |u_0| \quad \text{et} \quad \left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |\mathcal{A}u(t)| \leq |\mathcal{A}u_0| \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.7.2 (Lumer-Phillips)[7]

Soit $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \rightarrow H$ un opérateur linéaire et $D(\mathcal{A})$ dense dans H . Alors, $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe de contractions si et seulement si :

- ❶ $\mathcal{A}$ est dissipatif.
- ❷ Il existe $\lambda > 0$ tel que $\text{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = H$. ($\mathcal{A}$ est maximal).

1.7.2 Stabilité exponentielle

Définition 1.7.4 [16](Stabilité exponentielle)

Le semigroupe $S(t) = e^{At}$ est dit exponentiellement stable s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $M \geq 1$ telle que

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t} \quad \forall t \geq 0.$$

Théorème 1.7.3 [3] (Goirgi-Pata)

Soit $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$ un semigroupe de contractions sur un espace réel de Hilbert $\mathcal{H}$ de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$. Si l'opérateur $i\beta - \mathcal{A}$ est uniformément bornée inférieurement

$$\exists \sigma > 0 \quad ; \quad \inf_{\beta \in \mathbb{R}} \|(i\beta - \mathcal{A})z\| \geq \sigma \|z\| \quad \forall z \in D(\mathcal{A})$$

alors $S(t)$ est exponentiellement stable.

1.8 Régularité

Soit $\Omega = (0, \ell)$, et notons par D la dérivée par rapport à la variable espace $x \in \Omega$. Avec la notation usuelle, nous introduisons les espaces L^p, H^k et H_0^k agissant sur Ω . Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $|\cdot|$ respectivement le produit scalaire et la norme sur L^2 .

Il est bien évident que l'opérateur $A = -D^2$, de domaine $\mathcal{D}(A) = H^2 \cap H_0^1$ avec les conditions aux limites de Dirichlet, est auto-adjoint et positif sur L^2 . Ainsi, on peut définir les puissances A^σ de A pour $\sigma \in \mathbb{R}$. L'espace $V_\sigma = \mathcal{D}(A^{\sigma/2})$ est aussi un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_\sigma = \langle A^{\sigma/2}u, A^{\sigma/2}v \rangle.$$

et la norme $\|u\|_\sigma^2 = \langle A^{\sigma/2}u, A^{\sigma/2}u \rangle$.

En particulier, $V_{-1} = H^{-1}, V_0 = L^2, V_1 = H_0^1$ et

$$\langle A^{1/2}u, A^{1/2}v \rangle = \langle Du, Dv \rangle, \quad \forall u, v \in H_0^1.$$

Lemme 1.8.1 *Soit $v \in L^2$, alors, on a*

$$\|Dv\|_{H^{-1}} = \|v - \bar{v}\|$$

où

$$\bar{v} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell v(x) dx$$

est la valeur moyenne de v .

Preuve En effet, si $\bar{v} = 0$

$$\|Dv\|_{H^{-1}} = \sup_{\|Du\|=1} |\langle Dv, u \rangle| = \sup_{\|Du\|=1} |\langle v, Du \rangle| \leq \sup_{\|Du\|=1} \|v\| \|Du\| = \|v\|$$

et l'égalité est atteinte pour

$$u(x) = \frac{1}{\|v\|} \int_0^x v(y) dy$$

Le cas général provient en remarquant que $Dv = D(v - \bar{v})$.

Nous introduisons l'espace

$$\mathcal{M}_\sigma = L_\mu^2(\mathbb{R}^+, V_\sigma)$$

à savoir, l'espace Hilbert de fonctions de $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans V_σ , muni du produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{M}_\sigma} = \int_0^\infty \mu(s) \langle \varphi(s), \psi(s) \rangle_\sigma ds$$

et la norme

$$\|\varphi\|_{\mathcal{M}_\sigma}^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{M}_\sigma}.$$

Nous aurons aussi besoin de l'espace :

$$H_\mu^1(\mathbb{R}^+, H_0^1) = \{ \varphi : \varphi(s), D_s \varphi(s) \in L_\mu^2(\mathbb{R}^+, H_0^1) \}.$$

Lemme 1.8.2 (*Forme différentielle de Grönwall*)

Soient ϕ, ψ des fonctions intégrables sur $I \subset \mathbb{R}$. Si l'inégalité différentielle suivante est vérifiée :

$$\frac{d\phi}{dt}(t) \leq \psi(t)\phi(t)$$

alors on a l'inégalité :

$$\phi(t) \leq \phi(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^t \psi(s) ds \right)$$

pour $t \geq t_0$.

Théorème 1.8.1 Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^+)$. On définit la fonction

$$\hat{\varphi} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, s \longmapsto \hat{\varphi}(s) = \int_0^s e^{-\frac{\delta}{2}(s-r)} \varphi(r) dr, \delta, s > 0, r \geq 0$$

Alors $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^+)$ et

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{2}{\delta} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Preuve On a pour tout $s \in \mathbb{R}^+$

$$\hat{\varphi}'(s) = -\frac{\delta}{2} \hat{\varphi}(s) + \varphi(s).$$

Donc

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{2}{\delta} [\varphi(s) - \hat{\varphi}'(s)].$$

Soit $A > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
\int_0^A [\hat{\varphi}(s)]^2 ds &= \frac{2}{\delta} \int_0^A \hat{\varphi}(s) [\varphi(s) - \hat{\varphi}'(s)] ds \\
&= \frac{2}{\delta} \int_0^A \hat{\varphi}(s) \varphi(s) ds - \frac{2}{\delta} \int_0^A \hat{\varphi}(s) \hat{\varphi}'(s) ds \\
&= \frac{2}{\delta} \int_0^A \hat{\varphi}(s) \varphi(s) ds - \frac{[\hat{\varphi}(A)]^2}{\delta} \\
&\leq \frac{2}{\delta} \int_0^A \hat{\varphi}(s) \varphi(s) ds.
\end{aligned}$$

Utilisons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_0^A \hat{\varphi}(s) \varphi(s) ds \leq \left(\int_0^A [\hat{\varphi}(s)]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^A [\varphi(s)]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En simplifiant dans l'inégalité précédente, on obtient finalement

$$\left(\int_0^A [\hat{\varphi}(s)]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{\delta} \left(\int_0^A [\varphi(s)]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2}{\delta} \left(\int_0^\infty [\varphi(s)]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^+)$ et en faisant tendre A vers ∞ on a bien

$$\|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{2}{\delta} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Lemme 1.8.3 [12] Soient μ, h deux fonctions positives et intégrables sur $\mathbb{R}^+$. telle que :

$$\mu(r+s) \leq C\mu(s)e^{-\delta r}, r \geq 0, s > 0, \delta > 0,$$

et

$$\int_0^\infty \mu(s)[h(s)]^2 ds < \infty.$$

Alors

$$\int_0^\infty \mu(s) \int_0^s h(r) dr ds \leq \frac{2\sqrt{C}}{\delta} \left(\int_0^\infty \mu(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \mu(s)[h(s)]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve On pose

$$\varphi(s) = \sqrt{\mu(s)}h(s) \quad \text{et} \quad \hat{\varphi}(s) = \int_0^s e^{-\frac{\delta}{2}(s-r)} \varphi(r) dr,$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème 1.8.1 on aura

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu(s) \int_0^s h(r) \, dr \, ds &\leq \sqrt{C} \int_0^\infty \sqrt{\mu(s)} \hat{\varphi}(s) \, ds \\
&\leq \sqrt{C} \left(\int_0^\infty \mu(s) \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \|\hat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq \frac{2\sqrt{C}}{\delta} \left(\int_0^\infty \mu(s) \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq \frac{2\sqrt{C}}{\delta} \left(\int_0^\infty \mu(s) \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \mu(s) [h(s)]^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Lemme 1.8.4 (*Lemme de Riemann-Lebesgue*)

Si f est une fonction intégrable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes.

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f(t) e^{int} \, dt = 0.$$

Chapitre 2

Stabilité exponentielle d'un problème thermoélastique linéaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions l'existence, l'unicité et le comportement asymptotique de la solution d'un problème un problème décrivant l'évolution d'une barre thermoélastique linéaire à conduction thermique héréditaire, c'est-à-dire la propagation de la chaleur est donnée par la loi de Gurtin-Pipkin.

Soit une barre unidimensionnel homogène occupant un intervalle $\Omega = (0, \ell) \subset \mathbb{R}$ dans la configuration de référentielle. On prend la densité de masse $\rho = 1$. Nous considérons de petites variations de la température et de son gradient à partir des valeurs de l'état initial (référentiel), et de petites déformations à partir de la configuration référentielle. De plus on suppose que le stress σ , la vitesse à laquelle la chaleur est absorbée par unité du volume h et le flux de chaleur q sont décrits par les équations constitutives suivantes :

$$\begin{aligned}\sigma(x, t) &= C\varepsilon(x, t) - \frac{\gamma}{\theta_0}\vartheta(x, t) \\ h(x, t) &= \gamma\varepsilon_t(x, t) + c_0\vartheta_t(x, t) \\ q(x, t) &= -\theta_0 \int_{-\infty}^t k(t-s)\vartheta_x(x, s)ds\end{aligned}\tag{2.1}$$

où θ_0 est la température absolue, $\varepsilon = u_x$ est la déformation, k est le noyau de mémoire de la flux de la chaleur, et les constantes positives C, γ, c_0 sont des constantes constitutives qui seront supposées positives.

Dans le cadre de la théorie linéaire de Gurtin-Pipkin pour le flux de chaleur, on introduit les nouvelles variables :

$$\vartheta^t(x, s) = \vartheta(x, t - s), \quad s \geq 0,$$

et

$$\eta(x, s) = \eta^t(x, s) = \int_0^s \vartheta^t(x, \tau) d\tau, \quad s \geq 0, \quad (2.2)$$

On suppose que $k(\infty) = 0$, $\eta(x, 0) = 0$, un changement de variable et une intégration par parties donnent

$$\begin{aligned} q_x(t) &= - \int_0^{+\infty} k(s) \vartheta_{xx}(t - s) ds \\ &= - \left[k(s) \int_0^s \vartheta_{xx}^t(x, \tau) d\tau \right]_0^\infty + \int_0^{+\infty} k'(s) \int_0^s \vartheta_{xx}^t(x, \tau) d\tau ds \\ &= - [k(s) \eta_{xx}(s)]_0^\infty + \int_0^{+\infty} k'(s) \eta_{xx}(s) ds \\ &= - \int_0^\infty -k'(s) \eta_{xx}(x, s) ds. \end{aligned}$$

On pose $\mu(s) = -k'(s)$, on a :

$$q_x(t) = - \int_0^\infty \mu(s) \eta_{xx}(x, s) ds.$$

Le système fondamental des équations de champ pour la théorie de thermoélasticité linéaire dans l'absence de terme source est donné par

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = \sigma_x(x, t) \\ h(x, t) = -q(x, t) \end{cases} \quad (2.3)$$

Pour simplifier les calculs on prend $C = \gamma = \theta_0 = c_0 = 1$, et on substitue les équations (2.1) dans (2.3) on obtient le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(t) = u_{xx}(t) - \vartheta_x(t) & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty) \\ \vartheta_t(t) = -u_{xt}(t) + \int_0^\infty \mu(s) \eta_{xx}^t(s) ds & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty) \\ \eta_t^t(s) = \vartheta(t) - \eta_s^t(s), \quad s \geq 0 & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty) \end{cases} \quad (2.4)$$

On associe au système (3.1) les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(0) = u_0(x) \\ u_t(0) = v_0(x) \\ \vartheta(0) = \vartheta_0(x) \\ \eta^0(s) = \eta_0(s), \quad s \geq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(\ell, t) &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ \eta^t(0, s) = \eta^t(\ell, s) &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, s \geq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Concernant le noyau du terme mémoire μ dans (3.1), on suppose qu'elle vérifie les hypothèses suivantes :

$$\textbf{(h1)} \quad \mu \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+),$$

$$\textbf{(h2)} \quad \mu(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+,$$

$$\textbf{(h3)} \quad \mu'(s) \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+,$$

$$\textbf{(h4)} \quad k_0 = \int_0^\infty \mu(s) ds > 0,$$

$$\textbf{(h5)} \quad \mu'(s) + \delta \mu(s) \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad \delta > 0.$$

On définit l'espace de Hilbert suivant

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, \ell) \times L^2(0, \ell) \times L^2(0, \ell) \times \mathcal{M}_1$$

où $\mathcal{M}_1 = L_\mu^2(\mathbb{R}^+, H_0^1)$.

Le produit scalaire dans $\mathcal{H}$ est

$$\langle z, z^* \rangle_{\mathcal{H}} = \langle u, u^* \rangle_1 + \langle v, v^* \rangle + \langle \vartheta, \vartheta^* \rangle + \langle \eta, \eta^* \rangle_{\mathcal{M}_1}$$

pour $z = (u, v, \vartheta, \eta)^T, z^* = (u^*, v^*, \vartheta^*, \eta^*)^T \in \mathcal{H}$.

En multipliant la première équation dans (2.4) par $\overline{u_t}$ et la deuxième par $\overline{\vartheta}$, la troisième par $\overline{\eta^t}$ dans $L^2(0, \ell)$ puis on additionne, et on intègre par partie on obtient :

$$\begin{cases} \int_0^l u_{tt} \overline{u_t} dx = \int_0^l u_{xx} \overline{u_t} - \vartheta_x \overline{u_t} dx \\ \int_0^l \vartheta_t \overline{\vartheta} dx = \int_0^l -u_{xt} \overline{\vartheta} + \left(\int_0^\infty \mu(s) \eta_{xx}^t(s) ds \right) \overline{\vartheta} dx \\ \int_0^l \eta_t^t \overline{\eta^t} dx = \int_0^l \vartheta \overline{\eta^t} - \eta_s^t \overline{\eta^t} dx, \quad s \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^l u_{tt} \overline{u_t} dx + \int_0^l \vartheta_t \overline{\vartheta} dx + \int_0^l \eta_t^t \overline{\eta^t} dx &= \int_0^l u_{xx} \overline{u_t} dx - \int_0^l \vartheta_x \overline{u_t} dx \\ &\quad - \int_0^l u_{xt} \overline{\vartheta} dx + \int_0^l \left(\int_0^\infty \mu(s) \eta_{xx}^t(s) ds \right) \overline{\vartheta} dx \\ &\quad + \int_0^l \vartheta \overline{\eta^t} dx - \int_0^l \eta_s^t \overline{\eta^t} dx \end{aligned}$$

Cela implique

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l (|u_t|^2 + |\vartheta|^2 + |\eta^t|^2 + |u_x|^2) dx = - \int_0^l u_x \overline{u_{tx}} dx + \int_0^l \left(\int_0^\infty \mu(s) \eta_{xx}^t(s) ds \right) \overline{\vartheta} dx$$

On définit l'énergie associée au système (2.4) par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l (|u_t|^2 + |\vartheta|^2 + |\eta^t|^2 + |u_x|^2) dx.$$

On va maintenant étudier l'existence et l'unicité d'une solution au problème (2.4).

2.2 Existence et unicité :

Pour écrire notre problème dans le cadre de la théorie de semigroupe on introduit la nouvelle variable $v = u_t$ alors, le système (3.1) avec les données initiales s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z(t) = Lz(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

où L est l'opérateur défini par

$$L \begin{pmatrix} u \\ v \\ \vartheta \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ D^2u - Dv \\ -Dv + \int_0^\infty \mu(s) D^2\eta(s) ds \\ \vartheta - D_s\eta \end{pmatrix}$$

de domaine :

$$\mathcal{D}(L) = \left\{ z \in \mathcal{H} \begin{pmatrix} u \in H^2(0, \ell) \cap H_0^1(0, \ell) \\ v \in H_0^1(0, \ell) \\ \vartheta \in H_0^1(0, \ell) \\ \int_0^\infty \mu(s) D^2\eta(s) ds \in L^2(0, \ell) \\ \eta \in H_\mu^1(\mathbb{R}^+, H_0^1) \\ \eta(0) = 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Le resultat d'existence et unicité est donné par le théorème suivant

Théorème 2.2.1 *Supposons que le noyau du terme mémoire satisfait les conditions (h1)-(h5). Alors, l'opérateur L engendre un C_0 -semigroupe de contractions $S(t) = e^{tL}$, et par suite le problème (2.7) admet une solution unique*

$$z(x, t) = S(t)z_0(x).$$

Preuve La démonstration se fait à l'aide du théorème de Lumer-Phillips, pour cela il suffit de montrer que L est dissipatif et maximal.

Nous montrons tout d'abord que L est dissipatif. En effet, pour chaque $z = (u, v, \vartheta, \eta)^T \in \mathcal{D}(L)$ nous avons

$$\begin{aligned}
\langle Lz, z \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle Lu, u \rangle_1 + \langle Lv, v \rangle + \langle L\vartheta, \vartheta \rangle + \langle L\eta, \eta \rangle_{\mathcal{M}_1} \\
&= \langle v, u \rangle_1 + \langle D^2u - D\vartheta, v \rangle + \langle -Dv + \int_0^\infty \mu(s) D^2\eta(s) ds, \vartheta \rangle \\
&\quad + \langle \vartheta - D_s\eta, \eta \rangle_{\mathcal{M}_1} \\
&= \langle Dv, Du \rangle + \langle D^2u, v \rangle + \langle -D\vartheta, v \rangle + \langle -Dv, \vartheta \rangle \\
&\quad + \langle \int_0^\infty \mu(s) D^2\eta(s) ds, \vartheta \rangle + \langle \vartheta, \eta \rangle_{\mathcal{M}_1} + \langle -D_s\eta, \eta \rangle_{\mathcal{M}_1} \\
&= -\langle D_s\eta, \eta \rangle_{\mathcal{M}_1} \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \mu(s) \frac{d}{ds} \|D\eta(s)\|^2 ds
\end{aligned}$$

Une intégration par partie donne

$$\int_0^\infty \mu(s) \frac{d}{ds} \|D\eta(s)\|^2 ds = \mu(s) \|D\eta(s)\|^2 \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \mu'(s) \|D\eta(s)\|^2 ds. \quad (2.8)$$

Notons que le premier terme dans le membre à droite est égale à zero, en effet, puisque les deux termes $\mu \|D\eta\|$ et $\mu \|DD_s\eta\|^2$ (comme fonctions de s) appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^+)$ et $\eta(0) = 0$ on a

$$\begin{aligned}
\lim_{s \rightarrow 0} \mu(s) \|D\eta(s)\|^2 &= \lim_{s \rightarrow 0} \mu(s) \left\| \int_0^s DD_s\eta(\tau) d\tau \right\|^2 \\
&\leq \limsup_{s \rightarrow 0} \left(\int_0^s \mu(s)^{1/2} \|DD_s\eta(\tau)\| d\tau \right)^2
\end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\lim_{s \rightarrow 0} \mu(s) \|D\eta(s)\|^2 \leq \limsup_{s \rightarrow 0} s \int_0^s \mu(\tau) \|DD_s\eta(\tau)\|^2 d\tau = 0. \quad (2.9)$$

Il en résulte que

$$\int_0^\infty \mu(s) \frac{d}{ds} \|D\eta(s)\|^2 ds = \lim_{s \rightarrow \infty} \mu(s) \|D\eta(s)\|^2 - \int_0^\infty \mu'(s) \|D\eta(s)\|^2 ds \quad (2.10)$$

mais le membre de gauche de (2.10) est borné, d'autre part d'après les (h2) et (h3) les deux membres droite sont positifs. Il en résulte que la limite précédente existe et finie, donc elle égale à zéro. En utilisant à nouveau (h3) on conclut que

$$\langle Lz, z \rangle_{\mathcal{H}} = -\langle D_s\eta, \eta \rangle_{\mathcal{M}_1} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mu'(s) \|D\eta(s)\|^2 ds \leq 0$$

et par suite est dissipatif.

Deuxièmement, nous montrons que l'opérateur $I - L$ est surjective. C'est-à-dire que pour toute $z^* = (u^*, v^*, \vartheta^*, \eta^*) \in \mathcal{H}$ il existe $z = (u, v, \vartheta, \eta)^T \in \mathcal{D}(L)$ tels que :

$$(I - L)z = z^*. \quad (2.11)$$

qui s'écrit en composantes

$$u - v = u^* \quad (2.12)$$

$$v - D^2u + D\vartheta = v^* \quad (2.13)$$

$$\vartheta + Dv - \int_0^\infty \mu(s) D^2\eta(s) ds = \vartheta^* \quad (2.14)$$

$$\eta - \vartheta + D_s\eta = \eta^* \quad (2.15)$$

En multipliant (2.15) par e^s , On obtient

$$\eta(s)e^s - \vartheta e^s + D_s\eta(s)e^s = e^s\eta^*(s).$$

Et aussi

$$\eta(s)e^s + D_s\eta(s)e^s = \vartheta e^s + e^s\eta^*(s). \quad (2.16)$$

On intègre sur $(0, s)$

$$\begin{aligned} \int_0^s (\eta(y)e^y + D_y\eta(y)e^y) dy &= \int_0^s \vartheta e^y dy + \int_0^s e^y \eta^*(r) dy \\ &= \vartheta \int_0^s e^r dy + \int_0^s e^y \eta^*(y) dy. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \eta(s)e^s &= \vartheta [e^{\lambda_n y}]_0^s + \int_0^s e^y \eta^*(y) dy \\ &= (e^s - 1) \vartheta + \int_0^s e^y \eta^*(y) dy. \end{aligned}$$

Alors,

$$\eta(s) = \eta(s; \vartheta) = (1 - e^{-s}) \vartheta + \int_0^s e^{y-s} \eta^*(y) dy. \quad (2.17)$$

En substituant (2.12) dans (2.13), puis (2.12) et (2.17) dans (2.14), on obtient le système suivant

$$\begin{cases} u - D^2u + D\vartheta = u^* + v^* \\ \vartheta - c_\mu D^2\vartheta + Du = \vartheta^* + Du^* + \int_0^\infty \mu(s) \int_0^s e^{y-s} D^2\eta^*(y) dy ds \end{cases} \quad (2.18)$$

où on a posé

$$c_\mu = \int_0^\infty \mu(s) (1 - e^{-s}) ds$$

où c_μ est une constante strictement positive.

Notons que l'intégrale dans la seconde équation de (2.18) appartient à $H^{-1}(0, \ell)$. En effet, soit $\psi \in H_0^1(0, \ell)$ telle que $\|D\psi\| \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \int_0^\infty \mu(s) D^2 \int_0^s \eta^*(\tau) e^{\tau-s} d\tau ds, \psi \right\rangle \right| &= \left| \left\langle \int_0^\infty \mu(s) \int_0^s D\eta^*(\tau) e^{\tau-s} d\tau ds, D\psi \right\rangle \right| \\ &= \int_0^\ell \left(\int_0^\infty \mu(s) \int_0^s D\eta^*(\tau) e^{\tau-s} d\tau ds \right) D\psi dx \\ &= \int_0^\infty \mu(s) e^{-s} \int_0^s e^\tau \int_0^\ell D\eta^*(\tau) D\psi dx d\tau ds \\ &\leq \int_0^\infty \mu(s) e^{-s} \int_0^s e^\tau \|D\eta^*(\tau)\| d\tau ds \\ &\leq \int_0^\infty e^\tau \|D\eta^*(\tau)\| \int_\tau^\infty \mu(s) e^{-s} ds d\tau \\ &\leq \int_0^\infty \mu(\tau) e^\tau \|D\eta^*(\tau)\| \int_\tau^\infty e^{-s} ds d\tau \\ &= \int_0^\infty \mu(\tau) \|D\eta^*(\tau)\| d\tau < \infty. \end{aligned}$$

Il est clair que les autres termes appartiennent à $H^{-1}(0, \ell)$. Ainsi, en utilisant le théorème de Lax-Milgram, le problème elliptique (2.18) admet une solution unique $(\tilde{u}, \tilde{\vartheta}) \in H_0^1(0, \ell) \times H_0^1(0, \ell)$. Donc le vecteur $\tilde{z} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\eta})$, avec $\tilde{v} = \tilde{u} - u^*$ et $\tilde{\eta} = \eta(s; \tilde{\vartheta})$, $\tilde{\eta}(0) = 0$, résoudre le système (2.12)- (2.15).

Il reste à prouver que $\tilde{z} \in \mathcal{D}(L)$. D'abord, on a

$$\tilde{v} = \tilde{u} - u^* \in H_0^1(0, \ell).$$

et d'après (2.13) on a

$$D^2\tilde{u} = v^* - \tilde{v} - D\tilde{\vartheta} \in L^2(0, \ell),$$

ce qui entraîne $\tilde{u} \in H^2(0, \ell)$.

D'autre part, l'hypothèse (h1) donne

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\eta}\|_{\mathcal{M}_1}^2 &\leq 2 \int_0^\infty \mu(s) \left\| (1 - e^{-s}) D\tilde{\vartheta} + \int_0^s e^{y-s} D\eta^*(y) dy \right\|^2 ds \\
&\leq 2 \|D\tilde{\vartheta}\|^2 \int_0^\infty (1 - e^{-s})^2 \mu(s) ds + 2 \int_0^\infty \mu(s) \left\| \int_0^s e^{y-s} D\eta^*(y) dy \right\|^2 ds \\
&\leq 2k_0 \|D\tilde{\vartheta}\|^2 + 2 \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{y-s} \sqrt{\mu(s)} \|D\eta^*(y)\| dy \right)^2 ds.
\end{aligned}$$

Utilisons maintenant le théorème 1.8.1, on obtient

$$\|\tilde{\eta}\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq 2k_0 \|D\tilde{\vartheta}\|^2 + 2\|\eta^*\|_{\mathcal{M}_1}^2$$

ce qui implique que $\tilde{\eta} \in \mathcal{M}_1$ et par conséquence,

$$D_s \tilde{\eta} = \eta^* - \tilde{\vartheta} - \tilde{\eta} \in \mathcal{M}_1.$$

D'après (2.14) on a

$$\int_0^\infty \mu(s) D^2 \tilde{\eta}(s) ds \in L^2.$$

Ce qui prouve que pour toute $z^* = (u^*, v^*, \vartheta^*, \eta^*)^T \in \mathcal{H}$ il existe un unique $z = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\vartheta}, \tilde{\eta})^T \in \mathcal{D}(L)$ tel que $(I - L)z = z^*$, ce qui termine la preuve que L est maximal.

2.3 Stabilité exponentielle

Dans ce paragraphe nous allons montrer que la solution du problème (2.7) est exponentiellement stable.

Théorème 2.3.1 *Soit $z(x, t) = S(t)z_0(x)$ la solution du problème (2.7) où $S(t) = e^{tL}$, et supposons que les hypothèses (h1)-(h5) sont satisfaites, alors il existe deux constantes $\omega, \xi > 0$ telles que*

$$\|z(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \xi e^{-\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Preuve D'après le théorème (1.7.3), il suffit de prouver que l'opérateur $i\beta - L$ est uniformément inférieurement borné.

Supposons que l'assertion est fausse alors il existe une suite $(\beta_n) \subset \mathbb{R}$ et $z_n = (u_n, v_n, \vartheta_n, \eta_n)^T \in \mathcal{D}(L)$ telle que

$$\|z_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u_n\|_1^2 + \|v_n\|^2 + \|\vartheta_n\|^2 + \|\eta_n(s)\|_{\mathcal{M}_1}^2 = 1 \quad (2.19)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(i\beta_n - L) z_n\|_{\mathcal{H}} = 0 \quad (2.20)$$

ce qui est équivalent à

$$i\beta_n u_n - v_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H_0^1(0, \ell) \quad (2.21)$$

$$i\beta_n v_n - D^2 u_n + D\vartheta_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, \ell) \quad (2.22)$$

$$i\beta_n \vartheta_n + Dv_n - \int_0^\infty \mu(s) D^2 \eta_n(s) ds \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(0, \ell) \quad (2.23)$$

$$i\beta_n \eta_n(s) - \vartheta_n + D_s \eta_n(s) \longrightarrow 0 \quad \text{dans } \mathcal{M}_1. \quad (2.24)$$

Nous avons tout d'abord

$$\int_0^\infty \mu'(s) \|D\eta_n(s)\|^2 ds = 2\Re \langle Lz_n, z_n \rangle_{\mathcal{H}} = -2\Re \langle (i\beta_n - L)z_n, z_n \rangle_{\mathcal{H}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad (2.25)$$

en profitant de l'hypothèse (h5) nous obtenons

$$\|\eta_n(s)\|_{\mathcal{M}_1}^2 = \int_0^\infty \mu(s) \|D\eta_n(s)\|^2 ds \leq -\frac{1}{\delta} \int_0^\infty \mu'(s) \|D\eta_n(s)\|^2 ds \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.26)$$

Remarquons que l'injection $L^2(0, \ell) \hookrightarrow H^{-1}(0, \ell)$ est continue, donc (2.22) reste vrai en remplaçant $L^2(0, \ell)$ par $H^{-1}(0, \ell)$, en utilisant (2.19) on obtient

$$\begin{aligned} \|D^2 u_n - D\vartheta_n\|_{-1} &\leq \|D^2 u_n\|_{-1} + \|D\vartheta_n\|_{-1} \\ &\leq \|u_n\|_1 + \|\vartheta_n\| \leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

donc nous obtenons que

$$\begin{aligned} |\beta_n| \|v_n\|_{-1} &= \|i\beta_n v_n\|_{-1} = \|i\beta_n v_n + D^2 u_n - D\vartheta_n - D^2 u_n + D\vartheta_n\|_{-1} \\ &\leq \|i\beta_n v_n + D^2 u_n - D\vartheta_n\|_{-1} + \|D^2 u_n - D\vartheta_n\|_{-1} \\ &\leq C_1 + \sqrt{2} = k_1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

pour $k_1 > 0$ une valeur indépendante de $n \in \mathbb{N}$. D'une manière analogue posons $H^{-1}(0, \ell)$ au lieu de $L^2(0, \ell)$ dans (2.23) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on arrive à

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^\infty \mu(s) D^2 \eta_n(s) ds \right\|_{-1} &= \sup_{\|D\varphi\| \leq 1} \left| \left\langle \int_0^\infty \mu(s) D^2 \eta_n(s) ds, \varphi \right\rangle \right| \\
&\leq \left(\int_0^\ell \left| \int_0^\infty \mu(s) D \eta_n(s) ds \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \mu(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \mu(s) \int_0^\ell |D \eta_n(s)|^2 dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= k_0^{1/2} \|\eta_n(s)\|_{\mathcal{M}_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Ce qui implique

$$\|i\beta_n \vartheta_n + Dv_n\|_{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \tag{2.29}$$

et comme Dv_n est borné dans $H^{-1}(0, \ell)$ nous concluons que

$$\begin{aligned}
\|i\beta_n \vartheta\|_{-1} &= \|i\beta_n \vartheta + Dv_n - Dv_n\|_{-1} \\
&\leq \|i\beta_n \vartheta + Dv_n\|_{-1} + \|Dv_n\|_{-1} \leq k_2
\end{aligned} \tag{2.30}$$

pour $k_2 > 0$ valeur indépendante de $n \in \mathbb{N}$. Nous montrons maintenant que $\|\vartheta_n\| \rightarrow 0$.

En utilisant injection continue de $\mathcal{M}_1 \hookrightarrow \mathcal{M}_0$ (2.24) reste vrai dans $\mathcal{M}_0$. Alors, en définie $\xi_n(s) = s\vartheta_n$ ainsi la suite ξ_n appartient à $\mathcal{M}_0$ et

$$\begin{aligned}
\|\xi_n\|_{\mu,0}^2 &= \int_0^\infty \mu(s) \langle s\vartheta_n, s\vartheta_n \rangle ds = \int_0^\infty \mu(s) s^2 \langle \vartheta_n, \vartheta_n \rangle ds \\
&\leq \|\vartheta_n\| \int_0^\infty s^2 \mu(s) ds \leq \int_0^\infty s^2 \mu(s) ds = k_3 < \infty,
\end{aligned} \tag{2.31}$$

D'après l'hypothèse (h5) on a

$$\frac{\mu'(s)}{\mu(s)} \leq -\delta \implies \mu(s) \leq e^{-s\delta} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$$

Maintenant on prend le produit scalaire de (2.24) par ξ_n on arrive à

$$\langle i\beta_n \eta_n, \xi_n \rangle_{\mu,0} - \langle \vartheta_n, \xi_n \rangle_{\mu,0} + \langle D_s \eta_n(s), \xi_n \rangle_{\mu,0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \tag{2.32}$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
|i\beta_n \langle \eta_n, \xi_n \rangle_{\mu,0}| &= |\beta_n| \left| \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta_n, \xi_n \rangle ds \right| \\
&= |\beta_n| \int_0^\infty s\mu(s) |\langle \eta_n, \vartheta_n \rangle| ds \\
&\leq |\beta_n| \int_0^\infty s\mu(s) \|D\eta_n(s)\| \|A^{-1/2}\vartheta_n\| ds \\
&\leq |\beta_n| \int_0^\infty s\mu(s) \|D\eta_n\| \|\vartheta_n\|_{-1} ds \\
&\leq |\beta_n| \|\vartheta_n\|_{-1} \int_0^\infty (s\mu(s)^{1/2}) (\mu(s)^{1/2} \|D\eta_n\|) ds \\
&\leq k_2 k_3^{1/2} \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned} \tag{2.33}$$

une intégration par parties conduit à

$$- \int_0^\infty s^2 \mu'(s) ds = 2 \int_0^\infty s\mu(s) ds = k_4 < \infty. \tag{2.34}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
|\langle D_s \eta_n(s), \xi_n \rangle_{\mu,0}| &= \left| \int_0^\infty s\mu(s) D_s \langle \eta_n(s), \vartheta_n \rangle ds \right| \\
&= \left| \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta_n(s), \vartheta_n \rangle ds + \int_0^\infty s\mu'(s) \langle \eta_n(s), \vartheta_n \rangle ds \right| \\
&\leq \int_0^\infty \mu(s) \|\eta_n(s)\| ds + \int_0^\infty -s\mu'(s) \|\eta_n(s)\| ds
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Puisque $\|\vartheta_n\| \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Les deux termes à droite tendent vers zéro, en effet, combinons les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Poincaré et (2.25), (2.26) et (2.34) nous obtenons ce qui suit :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu(s) \|\eta_n(s)\| ds &\leq \chi_0 \int_0^\infty \sqrt{\mu(s)} \sqrt{\mu(s)} \|\eta_n(s)\|_1 ds \\
&\leq \chi_0 \left(\int_0^\infty \mu(s) ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \mu(s) \|\eta_n(s)\|_1^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq \chi_0 k_0^{1/2} \|\eta_n(s)\|_{\mathcal{M}_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned} \tag{2.36}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty -s\mu'(s)\|\eta_n(s)\| \, ds &= \chi_0 \int_0^\infty s\sqrt{-\mu'(s)}\sqrt{-\mu'(s)}\|\eta_n(s)\|_1 \, ds \\
&\leq \chi_0 \left(\int_0^\infty -s^2\mu'(s) \, ds \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty -\mu'(s)\|\eta_n(s)\|_1^2 \, ds \right)^{1/2} \\
&\leq \chi_0 K_4^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty -\mu'(s)\|\eta_n(s)\|_1^2 \, ds \right)^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Par conséquant, le second terme de (2.32) tend vers zéro, et nous concluons que

$$\|\vartheta_n\|^2 = \frac{2}{K_4} \langle \vartheta_n, \xi_n \rangle_{\mu,0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{2.38}$$

Multipliant (2.21) par v_n et (2.22) par u_n nous obtenons

$$i\beta_n \langle u_n, v_n \rangle - \|v_n\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \tag{2.39}$$

et

$$i\beta_n \langle v_n, u_n \rangle + \|u_n\|_1^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{2.40}$$

Additionnons les deux identités on trouve

$$\|u_n\|_1^2 - \|v_n\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{2.41}$$

D'autre part on a d'après (2.38) , (2.26) et (2.19) :

$$\|u_n\|_1^2 + \|v_n\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1, \tag{2.42}$$

et par suite

$$\|v_n\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}. \tag{2.43}$$

Par contre , puisque $A^{-1}Dv_n$ est borné dans H_0^1 ,

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}Dv_n\|_1^2 &= \langle A^{\frac{1}{2}}A^{-1}Dv_n, A^{\frac{1}{2}}A^{-1}Dv_n \rangle \\
&= \langle A^{\frac{-1}{2}}Dv_n, A^{\frac{-1}{2}}Dv_n \rangle \\
&= \langle v_n, v_n \rangle = \|v_n\|^2 \leq 1
\end{aligned}$$

ceci avec (2.43) nous concluons que

$$\begin{aligned}
\langle i\beta_n\vartheta_n + Dv_n, A^{-1}Dv_n \rangle &= \langle i\beta_n\vartheta_n, A^{-1}Dv_n \rangle + \langle A^{-1/2}Dv_n, A^{-1/2}Dv_n \rangle \\
&= \langle i\beta_n\vartheta_n, A^{-1}Dv_n \rangle + \|Dv_n\|_{-1}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

En utilisant (2.27) et (2.38)

$$\langle i\beta_n \vartheta_n, A^{-1} Dv_n \rangle \leq |\beta_n| \|v_n\|_{-1} \|\vartheta_n\| \leq K_1 \|\vartheta_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.45)$$

Rappelons que

$$\bar{v}_n = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell v_n(x) \, dx,$$

il est clair que

$$Dv_n = D(v_n - \bar{v}_n)$$

car $\bar{v}_n$ est une fonction constante. On remarque que

$$\begin{aligned} \|v_n - \bar{v}_n\|^2 &= \langle v_n - \bar{v}_n, v_n - \bar{v}_n \rangle \\ &= \|v_n\|^2 - \bar{v}_n \int_0^\ell v_n(x) \, dx - \overline{\int_0^\ell v_n(x) \, dx} \bar{v}_n + \ell \bar{v}_n \bar{v}_n \\ &= \|v_n\|^2 - \ell \bar{v}_n \bar{v}_n - \ell \bar{v}_n \bar{v}_n + \ell \bar{v}_n \bar{v}_n \\ &= \|v_n\|^2 - \ell |\bar{v}_n|^2. \end{aligned}$$

Rappelant la définition de $\|Dv_n\|_{-1}$ nous concluons que

$$\|v_n\|^2 - \ell |\bar{v}_n|^2 = \|v_n - \bar{v}_n\|^2 = \|Dv_n\|_{-1}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (2.46)$$

Une combinaison de (2.46) et (2.43) donne

$$|\bar{v}_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\ell}}. \quad (2.47)$$

En passant à la limite dans $|\bar{v}_n|$ on obtient

$$|\bar{v}| = \frac{1}{\sqrt{2\ell}}. \quad (2.48)$$

D'après (2.47), il est alors évident que $\bar{v}_n$ converge vers la fonction constante $\bar{v}$ dans $L^2(0, \ell)$.

Nous distinguons maintenant deux cas :

Cas 1 : (β_n) n'est pas borné Dans ce cas, on peut extraire une sous suite qui converge vers l'infini, $|\beta_n| \rightarrow \infty$.

D'après (2.27), on a

$$v_n \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(0, \ell).$$

De l'unicité de la limite, nous concluons que $\bar{v} = 0$, et ceci est contradictoire avec (2.48).

Cas 2 : (β_n) est borné D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut extraire une sous-suite de (β_{n_k}) qui converge vers une valeur $\beta \in R$. Il est alors évident que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(i\beta - L) z_n\|_{\mathcal{H}} = 0$$

et de (2.19)-(2.48) reste vrai en remplaçant β_n par β . En particulier, de (2.19)-(2.21)

$$\begin{aligned} \|v_n\|_1 &\leq \|i\beta u_n - v_n\|_1 + \|i\beta u_n\|_1 \\ &\leq \|i\beta u_n - v_n\|_1 + |\beta| \|u_n\|_1 \\ &\leq C + |\beta| \end{aligned}$$

(puisque $(i\beta u_n - v_n)$ converge dans $H_0^1(0, \ell)$, elle est donc borné). Donc v_n est borné dans $H_0^1(0, \ell)$.

Ensuite, il existe $v^* \in H_0^1(0, \ell)$ tels que $v_n \rightarrow v^*$ faiblement dans $H_0^1(0, \ell)$ et d'après l'unicité de la limite nous arrivons à $v^* = \bar{v}$, ce qui est une contradiction, puisque de (2.48) on sait que $\bar{v}$ est une constante non nulle, et ne peut pas donc être dans $H_0^1(0, \ell)$, ce qui termine la démonstration.

Chapitre 3

Stabilité exponentielle d'un système de type Timoshenko avec la loi de Gurtin-Pipkin

3.1 Introduction

On considère le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho u_{tt} = \kappa (u_{xx} + \varphi_x) - \beta \theta_x & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty) \\ J \varphi_{tt} = \alpha \varphi_{xx} - \kappa (u_x + \varphi) + \delta \theta - \tau \varphi_t & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty) \\ c \theta_t + \kappa q_x + \beta u_{xt} - \delta \varphi_t = 0 & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty) \\ q(t) = -(k * \nabla \theta)(t) = - \int_0^{+\infty} k(s) \theta_x(t-s) ds, & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où u est le déplacement transversale, φ est l'angle de filament d'un milieu solide unidimensionnel de longueur ℓ , θ la différence de température, q est le flux de chaleur. ρ, J, c, κ et τ sont des constantes constitutives positives. k est le noyau de mémoire de la flux de la chaleur, et on a

$$\int_0^{+\infty} k(s) ds < \infty.$$

En introduisant les nouvelles variables :

$$\theta^t(x, s) = \theta(x, t - s) \quad s \geq 0$$

et

$$\eta(x, s) = \eta^t(x, s) = \int_0^s \theta^t(x, \tau) d\tau \quad s \geq 0 \quad (3.2)$$

On obtient une nouvelle équation

$$\eta_t(x, s) = \theta - D_s \eta(x, s). \quad (3.3)$$

On suppose que $k(\infty) = 0$, $\eta(x, 0) = 0$, un changement de variable et une intégration par parties donnent

$$\begin{aligned} q(t) &= - \int_0^{+\infty} k(s) \vartheta_x(t-s) ds \\ &= [-k(s) \eta_x^t(x, s)]_0^\infty + \int_0^\infty k'(s) \eta_x^t(x, s) ds \\ &= \int_0^\infty -k'(s) \eta_x^t(x, s) ds \end{aligned} \quad (3.4)$$

On pose $\mu(s) = -k'(s)$, on a :

$$q(t) = \int_0^\infty \mu(s) \eta_x(x, s) ds. \quad (3.5)$$

On substitue l'équation (3.5) dans (3.1) avec (3.3) on obtient le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho u_{tt} = \kappa (u_{xx} + \varphi_x) - \beta \theta_x & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty) \\ J \varphi_{tt} = \alpha \varphi_{xx} - \kappa (u_x + \varphi) + \delta \theta - \tau \varphi_t & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty) \\ c \theta_t + \kappa \int_0^\infty \mu(s) \eta_{xx}(x, s) ds + \beta u_{xt} - \delta \varphi_t = 0 & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty) \\ \eta_t^t(s) = \theta(t) - \eta_s^t(s), \quad s \geq 0 & \text{dans } (0, \ell) \times (0, \infty). \end{array} \right. \quad (3.6)$$

On associe au système (3.1) les conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(x, 0) = u_0(x) & , \\ u_t(x, 0) = v_0(x) & , \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & , \\ \varphi_t(x, 0) = \phi_0(x) & , \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & , \\ \eta^0(s) = \eta_0(s) & s \geq 0. \end{array} \right.$$

et les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u(0, t) = u(\ell, t) = \varphi_x(0, t) = \varphi_x(\ell, t) = \theta(0, t) = \theta(\ell, t) = 0, & \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ \eta^t(0, s) = \eta^t(\ell, s) = 0, & \quad \forall t \in \mathbb{R}^+, s \geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Concernant le noyau du terme mémoire μ dans (3.1), on suppose qu'elle vérifie les hypothèses suivantes :

$$(h1) \quad \mu \in C^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^+)$$

$$(h2) \quad \mu(s) \geq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

$$(h3) \quad \mu'(s) \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

$$(h4) \quad k_0 = \int_0^\infty \mu(s) ds > 0$$

$$(h5) \quad \mu'(s) + \nu\mu(s) \leq 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}^+ \quad , \quad \nu > 0$$

Remarque 3.1.1

Si μ satisfait l'hypothèse (h5), la forme différentielle du lemme de Grönwall donne

$$\mu(r+s) \leq Ce^{-\nu r} \mu(s), \quad \forall r \geq 0 \text{ et } s > 0, C > 0$$

et par suite

$$\mu(s) = \mu((s-r)+r) \leq Ce^{-\nu(s-r)} \mu(r), \quad \forall r \geq 0 \text{ et } s > 0, C > 0. \quad (3.8)$$

On définit l'espace de Hilbert suivant

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, \ell) \times L^2(0, \ell) \times H_*^1(0, \ell) \times L_*^2(0, \ell) \times L^2(0, \ell) \times \mathcal{M}_1.$$

où

$$H_*^1(0, \ell) := \left\{ u \in H^1(0, \ell) \quad , \quad \int_0^\ell u(x) dx = 0 \right\}$$

et

$$L_*^2(0, \ell) := \left\{ u \in L^2(0, \ell) \quad , \quad \int_0^\ell u(x) dx = 0 \right\}.$$

Le produit scalaire dans $\mathcal{H}$ est

$$\langle z, z^* \rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^\ell (\rho v \bar{v}^* + J \phi \bar{\phi}^* + c \theta \bar{\theta}^* + \alpha \varphi_x \bar{\varphi}_x^* + \kappa (u_x + \varphi) (\bar{u}_x^* + \bar{\varphi}^*)) dx + \kappa \langle \eta, \eta^* \rangle_{\mathcal{M}_1}.$$

Pour écrire notre problème dans le cadre de la théorie de semigroupe on introduit les nouvelles variables $v = u_t, \phi = \varphi_t$ alors, le système (3.1) avec les données initiales s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z(t) = \mathcal{A}z(t) \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

où $\mathcal{A}$ est l'opérateur défini par

$$\mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \\ \phi \\ \theta \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \frac{\kappa}{\rho} (D^2 u + D\varphi) - \frac{\beta}{\rho} D\theta \\ \phi \\ \frac{\alpha}{J} D^2 \varphi - \frac{\kappa}{J} (Du + \varphi) + \frac{\delta}{J} \theta - \frac{\tau}{J} \phi \\ \frac{\kappa}{c} \int_0^\infty \mu(s) D^2 \eta(s) ds - \frac{\beta}{c} Dv - \frac{\delta}{c} \phi \\ \theta - D_s \eta \end{pmatrix}$$

de domaine :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left(z \in \mathcal{H} \left| \begin{array}{l} u \in H^2(0, \ell) \cap H_0^1(0, \ell) \\ v \in H_0^1(0, \ell) \\ D\varphi \in H_0^1(0, \ell) \\ \theta \in H_0^1(0, \ell) \\ \int_0^\infty \mu(s) D^2 \eta(s) ds \in L^2(0, \ell) \\ \eta \in H_\mu^1(\mathbb{R}^+, H_0^1) \\ \eta(0) = 0 \end{array} \right. \right)$$

3.2 Existence et unicité :

Le resultat d'existence et unicité est donné par le théorème suivant

Théorème 3.2.1 :

Supposons que le noyau du terme mémoire satisfait les conditions (h1)-(h5). Alors, l'opérateur $\mathcal{A}$ engendre un C_0 -semigroupe de contractions $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$, et par suite le problème (3.9) admet une solution unique

$$z(x, t) = S(t)z_0(x).$$

Preuve Pour montrer l'existence d'une solution au problème (3.9), on applique le théorème de Lumer-Phillips, pour cela il suffit de montrer que $\mathcal{A}$ est dissipatif et maximal.

Nous montrons tout d'abord que $\mathcal{A}$ est dissipatif. En effet, pour chaque $z = (u, v, \varphi, \phi, \theta, \eta)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ nous avons

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}z, z \rangle_{\mathcal{H}} &= \kappa \int_0^\ell D^2 u(x) \bar{v}(x) dx + \kappa \int_0^\ell D\varphi(x) \bar{v}(x) dx - \beta \int_0^\ell D\theta(x) \bar{v}(x) dx \\
&+ \alpha \int_0^\ell D^2 \varphi(x) \bar{\phi}(x) dx - \kappa \int_0^\ell Du(x) \bar{\phi}(x) dx - \kappa \int_0^\ell \varphi(x) \bar{\phi}(x) dx \\
&+ \delta \int_0^\ell \theta(x) \bar{\phi}(x) dx - \tau \|\phi\|^2 + \kappa \int_0^\infty \mu(s) \langle D^2 \eta, \theta \rangle ds - \beta \int_0^\ell Dv(x) \bar{\theta}(x) dx \\
&- \delta \int_0^\ell \phi(x) \bar{\theta}(x) dx + \kappa \int_0^\ell Dv(x) \overline{Du}(x) dx + \alpha \int_0^\ell D\phi(x) \overline{D\varphi}(x) dx \\
&+ \kappa \int_0^\ell \phi(x) \overline{\varphi}(x) dx + \kappa \int_0^\ell Dv(x) \overline{\varphi}(x) dx + \kappa \int_0^\ell \phi(x) \overline{Du}(x) dx + \kappa \int_0^\infty \mu(s) \langle D\theta, D\eta \rangle ds \\
&- \kappa \langle D_s \eta, \eta \rangle.
\end{aligned}$$

Une intégration par partie donne

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}z, z \rangle_{\mathcal{H}} &= -\kappa \int_0^\ell Du(x) \overline{Dv}(x) dx - \kappa \int_0^\ell \varphi(x) \overline{Dv}(x) dx + \beta \int_0^\ell \theta(x) \overline{Dv}(x) dx \\
&- \alpha \int_0^\ell D\varphi(x) \overline{D\phi}(x) dx - \kappa \int_0^\ell Du(x) \bar{\phi}(x) dx - \kappa \int_0^\ell \varphi(x) \bar{\phi}(x) dx \\
&+ \delta \int_0^\ell \theta(x) \bar{\phi}(x) dx - \tau \|\phi\|^2 - \kappa \int_0^\infty \mu(s) \langle D\eta, D\theta \rangle ds - \beta \int_0^\ell Dv(x) \bar{\theta}(x) dx \\
&- \delta \int_0^\ell \phi(x) \bar{\theta}(x) dx + \kappa \int_0^\ell Dv(x) \overline{Du}(x) dx + \alpha \int_0^\ell D\phi(x) \overline{D\varphi}(x) dx \\
&+ \kappa \int_0^\ell \phi(x) \overline{\varphi}(x) dx + \kappa \int_0^\ell Dv(x) \overline{\varphi}(x) dx + \kappa \int_0^\ell \phi(x) \overline{Du}(x) dx \\
&+ \kappa \int_0^\infty \mu(s) \langle D\theta, D\eta \rangle ds - \kappa \langle D_s \eta, \eta \rangle. \\
&= -2i \operatorname{Im} \left(\kappa \int_0^\ell Du(x) \overline{Dv}(x) dx + \kappa \int_0^\ell \varphi(x) \overline{Dv}(x) dx - \beta \int_0^\ell \theta(x) \overline{Dv}(x) dx \right. \\
&+ \alpha \int_0^\ell D\varphi(x) \overline{D\phi}(x) dx + \kappa \int_0^\ell Du(x) \bar{\phi}(x) dx + \kappa \int_0^\ell \varphi(x) \bar{\phi}(x) dx \\
&\left. - \delta \int_0^\ell \theta(x) \bar{\phi}(x) dx + \kappa \int_0^\infty \mu(s) \langle D\eta, D\theta \rangle ds \right) - \kappa \langle D_s \eta, \eta \rangle - \tau \|\phi\|^2.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\Re(\langle \mathcal{A}z, z \rangle_{\mathcal{H}}) = - \left(\tau \|\phi\|^2 + \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty \mu(s) \frac{d}{ds} \|D\eta(s)\|^2 ds \right).$$

Dans le deuxième chapitre, nous avons montré que

$$-\frac{\kappa}{2} \int_0^\infty \mu(s) \frac{d}{ds} \|D\eta(s)\|^2 ds = \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty \mu'(s) \|D\eta(s)\|^2 ds.$$

Alors

$$\Re(\langle \mathcal{A}z, z \rangle_{\mathcal{H}}) = - \left(\tau \|\phi\|^2 - \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty \mu'(s) \|D\eta(s)\|^2 ds \right) \leq 0 \quad (3.10)$$

et par suite $\mathcal{A}$ est dissipatif.

Deuxièmement, pour montrer la maximalité de $\mathcal{A}$, nous supposons que :

$z^* = (u^*, v^*, \varphi^*, \phi^*, \theta^*, \eta^*)^T \in \mathcal{H}$ et on cherche $\tilde{z} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\varphi}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta})^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ solution de $(I - \mathcal{A})z = z^*$, ceci s'écrit en termes de composantes, comme suit

$$(I - \mathcal{A})z = z^* \quad (3.11)$$

qui s'écrit en composantes

$$u - v = u^* \quad (3.12)$$

$$v - \frac{\kappa}{\rho} (D^2u + D\varphi) + \frac{\beta}{\rho} D\theta = v^*. \quad (3.13)$$

$$\varphi - \phi = \varphi^* \quad (3.14)$$

$$\phi - \frac{\alpha}{J} D^2\varphi + \frac{\kappa}{J} (Du + \varphi) - \frac{\delta}{J} \theta + \frac{\mu_1}{J} \phi = \phi^*. \quad (3.15)$$

$$\theta - \frac{\kappa}{c} \int_0^\infty \mu(s) D^2\eta(s) ds + \frac{\beta}{c} Dv + \frac{\delta}{c} \phi = \theta^*. \quad (3.16)$$

$$\eta - \theta + D_s\eta = \eta^*. \quad (3.17)$$

L'intégration de l'équation (3.17) par la méthode de variation du constante donne

$$\eta(s) = \eta(s; \theta) = (1 - e^{-s}) \theta + \int_0^s e^{y-s} \eta^*(y) dy. \quad (3.18)$$

En substituant (3.12) dans (3.13) et (3.14) dans (3.15), puis (3.12) et (3.14), (3.18) dans (3.16), on obtient le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho u - \kappa (D^2u + D\varphi) + \beta D\theta = \rho(u^* + v^*) \\ (J + \mu_1) \varphi - \alpha D^2\varphi + \kappa (Du + \varphi) - \delta \theta = (J + \mu_1) \varphi^* + J\phi^* \\ c\theta - c_\mu D^2\theta + \beta Du + \delta \varphi = c\theta^* + \beta Du^* + \delta \varphi^* + \kappa \int_0^\infty \mu(s) \int_0^s e^{y-s} D^2\eta^*(y) dy ds \end{array} \right. \quad (3.19)$$

où on a posé

$$c_\mu = \int_0^\infty \mu(s) (1 - e^{-s}) ds < \infty$$

c_μ est une constante strictement positive.

Notons que l'intégrale dans la seconde équation de (3.19) appartient à $H^{-1}(0, \ell)$. En effet, soit $\psi \in H_0^1(0, \ell)$ telle que $\|D\psi\| \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \int_0^\infty \mu(s) D^2 \int_0^s \eta^*(\tau) e^{\tau-s} d\tau ds, \psi \right\rangle \right| &= \left| \left\langle \int_0^\infty \mu(s) \int_0^s D\eta^*(\tau) e^{\tau-s} d\tau ds, D\psi \right\rangle \right| \\ &= \int_0^\ell \left(\int_0^\infty \mu(s) \int_0^s D\eta^*(\tau) e^{\tau-s} d\tau ds \right) D\psi dx \\ &= \int_0^\infty \mu(s) \int_0^s e^{\tau-s} \int_0^\ell D\eta^*(\tau) D\psi dx d\tau ds \\ &\leq \int_0^\infty \mu(s) \int_0^s e^{\tau-s} \|D\eta^*(\tau)\| d\tau ds \\ &\leq \int_0^\infty \sqrt{\mu(s)} \int_0^s e^{\tau-s} \sqrt{\mu(\tau)} \|D\eta^*(\tau)\| d\tau ds. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.8.1 on obtient

$$\left| \left\langle \int_0^\infty \mu(s) D^2 \int_0^s \eta^*(\tau) e^{\tau-s} d\tau ds, \psi \right\rangle \right| \leq \sqrt{k_0} \|\eta^*\|_{\mathcal{M}_1} < \infty.$$

A ce stade, nous utilisons le théorème de Lax-Milgram, le problème elliptique (3.19) admet une solution unique $(\tilde{u}, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta})^T \in H_0^1(0, \ell) \times H_*^1(0, \ell) \times H_0^1(0, \ell)$. Donc le vecteur $(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\varphi}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta})^T$ avec $\tilde{v} = \tilde{u} - u^*$ et $\tilde{\phi} = \tilde{\varphi} - \varphi^*, \tilde{\eta} = \eta(s; \tilde{\theta}), \tilde{\eta}(0) = 0$, résoud l'équation (3.11)

Il reste à prouver que $\tilde{z} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

$$\tilde{v} = \tilde{u} - u^* \in H_0^1(0, \ell) \quad \text{et} \quad \tilde{\phi} = \tilde{\varphi} - \varphi^* \in H_*^1(0, \ell),$$

et d'après (3.13) on a

$$D^2 \tilde{u} + D\tilde{\varphi} = -\frac{1}{\kappa} \left(\rho \tilde{u} + u^* + v^* + \beta D\tilde{\theta} \right)$$

ce qui entraîne $\tilde{u} \in H^2(0, \ell)$.

D'autre part, l'hypothèse (h1) donne

$$\begin{aligned}\|\tilde{\eta}\|_{\mathcal{M}_1}^2 &\leq 2\|\tilde{\theta}\|^2 \int_0^\infty (1 - e^{-s})^2 \mu(s) ds + 2 \int_0^\infty \mu(s) \left\| \int_0^s e^{y-s} D\eta^*(y) dy \right\|^2 ds \\ &\leq 2k_0 \|D\tilde{\theta}\|^2 + 2 \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{y-s} \sqrt{\mu(s)} \|D\eta^*(y)\| dy \right)^2 ds.\end{aligned}$$

Utilisons le théorème 1.8.1, on trouve que

$$\|\tilde{\eta}\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq 2k_0 \|D\tilde{\theta}\|^2 + 2\|\eta^*\|_{\mathcal{M}_1}^2.$$

ce qui implique que $\tilde{\eta} \in \mathcal{M}_1$ et par conséquent,

$$D_s \tilde{\eta} = \eta^* - \tilde{\theta} - \tilde{\eta} \in \mathcal{M}_1.$$

D'après (3.16) on a

$$\int_0^\infty \mu(s) D^2 \tilde{\eta}(s) ds \in L^2(0, \ell).$$

Ce qui prouve que pour toute $z^* = (u^*, v^*, \varphi^*, \phi^*, \theta^*, \eta^*)^T \in \mathcal{H}$ il existe un unique $\tilde{z} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\varphi}, \tilde{\phi}, \tilde{\theta}, \tilde{\eta})^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ tel que $(I - \mathcal{A})z = z^*$, ce qui termine la preuve que $\mathcal{A}$ est maximal.

3.3 Stabilité exponentielle

Dans ce paragraphe nous allons montrer que la solution du problème (3.9) est exponentiellement stable.

Théorème 3.3.1 : Soit $z(x, t) = S(t)z_0(x)$ la solution du problème (3.9) où $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$, et supposons que les hypothèses (h1)-(h5) sont satisfaites, alors il existe deux constantes $\omega, \xi > 0$ telles que

$$\|z(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \xi e^{-\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Preuve D'après le théorème (1.7.3), il suffit de prouver que l'opérateur $i\lambda I - \mathcal{A}$ est uniformément inférieurement borné.

Supposons que l'assertion est fausse alors il existe une suite $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$ et $z_n = (u_n, v_n, \varphi_n, \phi_n, \theta_n, \eta_n(s)) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ telles que

$$\|z_n\|_{\mathcal{H}}^2 = \kappa \|Du_n + \varphi_n\|^2 + \rho \|v_n\|^2 + J \|\phi_n\|^2 + c \|\theta_n\|^2 + \alpha \|D\varphi_n\|^2 + \kappa \|\eta_n(s)\|_{\mathcal{M}_1}^2 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.20)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(i\lambda_n - \mathcal{A}) z_n\|_{\mathcal{H}} = 0 \quad (3.21)$$

ce qui est équivalent à

$$i\lambda_n u_n - v_n \longrightarrow 0 \text{ dans } H_0^1(0, \ell) \quad (3.22)$$

$$i\lambda_n v_n - \frac{\kappa}{\rho} (D^2 u_n + D\varphi_n) + \frac{\beta}{\rho} D\theta_n \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, \ell) \quad (3.23)$$

$$i\lambda_n \varphi_n - \phi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } H_*^1(0, \ell) \quad (3.24)$$

$$i\lambda_n \phi_n - \frac{\alpha}{J} D^2 \varphi_n + \frac{\kappa}{J} (Du_n + \varphi_n) - \frac{\delta}{J} \theta_n + \frac{\tau}{J} \phi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } L_*^2(0, \ell) \quad (3.25)$$

$$i\lambda_n \theta_n - \frac{\kappa}{c} \int_0^\infty \mu(s) D^2 \eta_n(s) ds + \frac{\beta}{c} Dv_n + \frac{\delta}{c} \phi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, \ell) \quad (3.26)$$

$$i\lambda_n \eta_n(s) - \theta_n + D_s \eta_n(s) \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{M}_1. \quad (3.27)$$

Nous avons tout d'abord

$$\Re \langle \mathcal{A} z_n, z_n \rangle_{\mathcal{H}} = -\Re \langle (i\lambda_n - \mathcal{A}) z_n, z_n \rangle_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.28)$$

D'après (3.10), nous concluons que

$$\|\phi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ et } \int_0^\infty \mu'(s) \|D\eta_n(s)\|^2 ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.29)$$

en profitant de l'hypothèse (h5) nous obtenons

$$\|\eta_n(s)\|_{\mathcal{M}_1}^2 = \int_0^\infty \mu(s) \|D\eta_n(s)\|^2 ds \leq -\frac{1}{\nu} \int_0^\infty \mu'(s) \|D\eta_n(s)\|^2 ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.30)$$

Remarquons qu'en vertu de l'injection continue $L^2(0, \ell) \hookrightarrow H^{-1}(0, \ell)$, (3.23) reste vrai en remplaçant $L^2(0, \ell)$ par $H^{-1}(0, \ell)$, en utilisant (3.20) on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\kappa}{\rho} (D^2 u_n + D\varphi_n) - \frac{\beta}{\rho} D\theta_n \right\|_{-1} &= \sup_{\|D\psi\| \leq 1} \left| \left\langle \frac{\kappa}{\rho} (D^2 u_n + D\varphi_n) - \frac{\beta}{\rho} D\theta_n, \psi \right\rangle \right| \\
&= \sup_{\|D\psi\| \leq 1} \left| \left\langle D \left[\frac{\kappa}{\rho} (Du_n + \varphi_n) - \frac{\beta}{\rho} \theta_n \right], \psi \right\rangle \right| \\
&= \sup_{\|D\psi\| \leq 1} \left| \left\langle \frac{\kappa}{\rho} (Du_n + \varphi_n) - \frac{\beta}{\rho} \theta_n, D\psi \right\rangle \right| \\
&\leq \left\| \frac{\kappa}{\rho} (Du_n + \varphi_n) - \frac{\beta}{\rho} \theta_n \right\| \cdot \sup_{\|D\psi\| \leq 1} \|D\psi\| \\
&\leq \left\| \frac{\kappa}{\rho} (Du_n + \varphi_n) - \frac{\beta}{\rho} \theta_n \right\| \\
&\leq \frac{\kappa}{\rho} \|Du_n + \varphi_n\| + \frac{\beta}{\rho} \|\theta\| \\
&\leq \frac{1}{\rho} \left(\sqrt{\kappa} + \frac{\beta}{\sqrt{c}} \right) = \varrho.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
|\lambda_n| \|v_n\|_{-1} = \|i\lambda_n v_n\|_{-1} &\leq \left\| i\lambda_n v_n - \frac{\kappa}{\rho} (D^2 u_n + D\varphi_n) + \frac{\beta}{\rho} D\theta_n \right\|_{-1} + \left\| \frac{\kappa}{\rho} (D^2 u_n + D\varphi_n) - \frac{\beta}{\rho} D\theta_n \right\|_{-1} \\
&\leq M + \varrho = k_1.
\end{aligned}$$

Donc nous obtenons

$$|\lambda_n| \|v_n\|_{-1} \leq k_1 \quad (3.31)$$

pour $k_1 > 0$ une valeur indépendante de $n \in \mathbb{N}$. D'une manière analogue en remplaçant $L^2(0, \ell)$ par $H^{-1}(0, \ell)$ dans (3.26) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on arrive à

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^\infty \mu(s) D^2 \eta_n(s) ds \right\|_{-1} &= \sup_{\|D\psi\| \leq 1} \left| \left\langle \int_0^\infty \mu(s) D^2 \eta_n(s) ds, \psi \right\rangle \right| \\
&= \sup_{\|D\psi\| \leq 1} \left| \left\langle \int_0^\infty \mu(s) D\eta_n(s) ds, D\psi \right\rangle \right| \\
&\leq \left(\int_0^\ell \left| \int_0^\infty \mu(s) D\eta_n(s) ds \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sup_{\|D\psi\| \leq 1} \|D\psi\| \\
&\leq \left(\int_0^\ell \left| \int_0^\infty \mu(s) D\eta_n(s) ds \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^\infty \mu(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty \mu(s) \int_0^\ell |D\eta_n(s)|^2 dx ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq k_0^{\frac{1}{2}} \|\eta_n(s)\|_{\mathcal{M}_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\left\| i\lambda_n \theta_n + \frac{\beta}{c} Dv_n \right\|_{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.32)$$

Remarquons que

$$\|Dv_n\|_{-1} \leq \|v_n\| \leq \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

donc Dv_n est borné dans $H^{-1}(0, \ell)$ et

$$\begin{aligned} \|i\lambda_n \theta_n\|_{-1} &= \left\| i\lambda_n \theta_n + \frac{\beta}{c} Dv_n - \frac{\beta}{c} Dv_n \right\|_{-1} \\ &\leq \left\| i\lambda_n \theta_n + \frac{\beta}{c} Dv_n \right\|_{-1} + \frac{\beta}{c} \|Dv_n\|_{-1} \\ &\leq M' + \frac{\beta}{c\sqrt{\rho}} \\ &= k_2 \end{aligned}$$

C'est à dire

$$|\lambda_n| \|\theta_n\|_{-1} = \|i\lambda_n \theta_n\|_{-1} \leq k_2, \quad (3.33)$$

pour $k_2 > 0$ valeur indépendante de $n \in N$. Nous montrons maintenant que $\|\theta_n\| \rightarrow 0$.

Lemme 3.3.1 *Soit (λ_n) est une suite dans $\mathbb{R}$ telle que $\lambda_n \rightarrow \lambda_*$ et $\lambda_* \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\}$.*

Si $\mu > 0$ dans $\mathbb{R}^+$ alors

$$\int_0^\infty \mu(s) (1 - e^{-i\lambda_n s}) ds \rightarrow a \neq 0.$$

Preuve

1. Si $\lambda_* \in \{-\infty, \infty\}$, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, nous obtenons

$$a_n = \int_0^\infty \mu(s) (1 - e^{-i\lambda_n s}) ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \mu(s) ds > 0.$$

2. Si $\lambda_* \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \mu(s) (1 - e^{-i\lambda_* s}) ds \quad \text{et} \quad \Re a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \mu(s) (1 - \cos \lambda_* s) ds > 0.$$

Nous distinguons maintenant deux cas :

Cas $\lambda_n \not\rightarrow 0$.

Alors, on peut extraire une sous-suite qui converge vers $\lambda_\star \in [-\infty, \infty] \setminus \{0\}$, $\lambda_n \rightarrow \lambda_\star$.
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la proposition 1.3.5, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| i\lambda_n \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta_n(s), \theta_n \rangle ds \right| &\leq |\lambda_n| \int_0^\infty \mu(s) |\langle \eta_n(s), \theta_n \rangle| ds \\ &\leq |\lambda_n| \|\theta_n\|_{-1} k_0^{\frac{1}{2}} \|\eta_n(s)\|_{\mathcal{M}_1} \leq k_2 k_0^{\frac{1}{2}} \|\eta_n(s)\|_{\mathcal{M}_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

On définit la suite (ζ_n) telle que

$$i\lambda_n \eta_n(s) - \theta_n + D_s \eta_n(s) = \zeta_n(s). \quad (3.34)$$

avec $\zeta_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{M}_1$,

L'intégration de l'équation (3.34) par la méthode de variation du constante donne

$$\eta_n(s) = \frac{\theta_n}{i\lambda_n} (1 - e^{-i\lambda_n s}) + \int_0^s e^{i\lambda_n(r-s)} \zeta_n(r) dr. \quad (3.35)$$

Lemme 3.3.2 on a

$$\|\theta_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Preuve Posant

$$a_n = \int_0^\infty \mu(s) (1 - e^{-i\lambda_n s}) ds, \quad \text{et} \quad b_n = i\lambda_n \int_0^\infty \mu(s) \int_0^s e^{-i\lambda_n(s-r)} \langle \zeta_n(r), \theta_n \rangle dr ds.$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} i\lambda_n \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta_n(s), \theta_n \rangle ds &= i\lambda_n \int_0^\infty \mu(s) \left\langle \frac{\theta_n}{i\lambda_n} (1 - e^{-i\lambda_n s}) + \int_0^s e^{i\lambda_n(r-s)} \zeta_n(r) dr, \theta_n \right\rangle ds \\ &= a_n \|\theta_n\|^2 + b_n. \end{aligned}$$

Alors

$$a_n \|\theta_n\|^2 + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Il suffit de montrer que $b_n \rightarrow 0$. et $a_n \rightarrow a \neq 0$. En utilisant la proposition 1.3.5, on obtient

$$|b_n| \leq |\lambda_n| \int_0^\infty \mu(s) \int_0^s |\langle \zeta_n(r), \theta_n \rangle| dr ds \leq |\lambda_n| \|\theta_n\|_{-1} \int_0^\infty \mu(s) \int_0^s \|\eta_n(r)\|_1 dr ds.$$

Comme μ satisfait (3.8). Alors, on applique le lemme 1.8.3 et (3.33), on aura

$$|b_n| \leq 2k_2 \frac{\sqrt{k_0 C}}{\nu} \|\eta_n\|_{\mathcal{M}_1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

D'autre part, en appliquant le lemme 3.3.1 sur (a_n) on trouve $a_n \rightarrow a \neq 0$. Alors

$$\|\theta_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

ce qui termine la démonstration de lemme 3.3.2.

Multipliant (3.22) par v_n et (3.23) par u_n dans $L^2(0, \ell)$, en utilisant le lemme 3.3.2 et (3.29) on obtient

$$i\lambda_n \langle u_n, v_n \rangle - \|v_n\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad (3.36)$$

et

$$i\lambda_n \langle v_n, u_n \rangle + \frac{\kappa}{\rho} \|Du_n\|^2 + \frac{\kappa}{\rho} \langle \varphi_n, Du_n \rangle \rightarrow 0,$$

Additionnons les deux expressions précédente on arrive à

$$\kappa (\|Du_n\|^2 + \langle \varphi_n, Du_n \rangle) - \rho \|v_n\|^2 \rightarrow 0. \quad (3.37)$$

De la même manière, en multipliant (3.24) par ϕ_n et (3.25) par φ_n dans $L^2(0, \ell)$, en utilisant le lemme 3.3.2 et (3.29) On obtient

$$i\lambda_n \langle \varphi_n, \phi_n \rangle \rightarrow 0$$

et

$$i\lambda_n \langle \phi_n, \varphi_n \rangle + \frac{\alpha}{J} \|D\varphi_n\|^2 + \frac{\kappa}{J} \langle Du_n \varphi_n \rangle + \frac{\kappa}{J} \|\varphi_n\|^2 \rightarrow 0.$$

Additionnons les deux expressions précédente on arrive à

$$\kappa (\|\varphi_n\|^2 + \langle Du_n, \varphi_n, \rangle) + \alpha \|D\varphi_n\|^2 \rightarrow 0. \quad (3.38)$$

On a

$$\|Du_n + \varphi_n\|^2 = \langle Du_n + \varphi_n, Du_n + \varphi_n \rangle = \|Du_n\|^2 + \|\varphi_n\|^2 + \langle \varphi_n, Du_n \rangle + \langle Du_n, \varphi_n \rangle.$$

D'après (3.37) et (3.38), nous obtenons :

$$\kappa \|Du_n + \varphi_n\|^2 - \rho \|v_n\|^2 + \alpha \|D\varphi_n\|^2 \longrightarrow 0. \quad (3.39)$$

D'après (3.20), On obtient

$$\|v_n\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\rho}. \quad (3.40)$$

Du chapitre précédent. On a $A^{-1}Dv_n$ est borné dans $H_0^1(0, \ell)$

D'après (3.32) et la proposition 1.3.5 nous concluons que

$$\left| \left\langle i\lambda_n \theta_n + \frac{\beta}{c} Dv_n, A^{-1}Dv_n \right\rangle \right| \leq \left\| i\lambda_n \theta_n + \frac{\beta}{c} Dv_n \right\|_{-1} \|A^{-1}Dv_n\|_1 \longrightarrow 0.$$

Qui entraîne

$$\left\langle i\lambda_n \theta_n + \frac{\beta}{c} Dv_n, A^{-1}Dv_n \right\rangle = \langle i\lambda_n \theta_n, A^{-1}Dv_n \rangle + \frac{\beta}{c} \|Dv_n\|_{-1}^2 \longrightarrow 0.$$

En utilisant le lemme 3.3.2 et la proposition 1.3.5, (3.31) :

$$|\langle i\lambda_n \theta_n, A^{-1}Dv_n \rangle| \leq |\lambda_n| \|v_n\|_{-1} \|\theta_n\| \leq k_1 \|\theta_n\| \longrightarrow 0.$$

Rappelons que

$$\bar{v}_n = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell v_n(x) \, dx$$

il est clair que

$$Dv_n = D(v_n - \bar{v}_n)$$

car $\bar{v}_n$ est une fonction constante.

Rappelant la définition de $\|Dv_n\|_{-1}$ nous concluons que

$$\|v_n\|^2 - \ell |\bar{v}_n|^2 = \|v_n - \bar{v}_n\|^2 = \|Dv_n\|_{-1}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.41)$$

Une combinaison de (3.40) et (3.41) donne

$$|\bar{v}_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\rho\ell}}. \quad (3.42)$$

En passant à la limite dans $|\bar{v}_n|$ on obtient

$$|\bar{v}| = \frac{1}{\sqrt{2\rho\ell}}. \quad (3.43)$$

D'après (3.42), il est alors évident que $\bar{v}_n$ converge vers la fonction constante $\bar{v}$ dans $L^2(0, \ell)$.

Nous distinguons maintenant deux cas :

- 1) (λ_n) **n'est pas borné** Dans ce cas, on peut extraire une sous suite qui converge vers l'infini, $|\lambda_n| \rightarrow \infty$.

D'après (3.31), on a

$$v_n \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1}(0, \ell).$$

De l'unicité de la limite, nous concluons que $\bar{v} = 0$, et ceci est contradictoire avec (3.43).

Lemme 3.3.3 *Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, si une suite $(u_n) \subset E$ est bornée alors il existe un élément $u \in E$ et une sous-suite (u_{n_k}) avec $u_{n_k} \rightharpoonup u$ (la convergence faible).*

- 2) (λ_n) **est borné** D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut extraire une sous-suite de (λ_{n_k}) qui converge vers une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$. Il est alors évident que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(i\lambda - \mathcal{A}) z_n\|_{\mathcal{H}} = 0$$

et de (3.20)-(3.43) reste vrai en remplaçant λ_n par λ . En particulier, de (3.20)-(3.22)

$$\|v_n\|_1 \leq \|i\lambda u_n - v_n\|_1 + \|i\lambda u_n\|_1 \leq \|i\lambda u_n - v_n\|_1 + |\lambda| \|u_n\|_1 \leq C + \frac{|\lambda|}{\sqrt{\kappa}},$$

(puisque $(i\lambda u_n - v_n)$ converge dans $H_0^1(0, \ell)$, elle est donc borné)

Donc v_n est borné dans $H_0^1(0, \ell)$. D'après le lemme 3.3.3, Il existe un élément $v^* \in H_0^1(0, \ell)$ et une sous-suite (v_{n_k}) avec $v_{n_k} \rightharpoonup v^*$ faiblement dans $H_0^1(0, \ell)$.

L'inégalité de Poincaré donne la convergence faible dans $L^2(0, \ell)$.

D'après l'unicité de la limite nous arrivons à $v^* = \bar{v}$. ce qui est une contradiction, puisque de (3.43) on sait que $\bar{v}$ est une constante non nulle, et ne peut pas donc être dans $H_0^1(0, \ell)$.

Cas $\lambda_n \longrightarrow 0$

En utilisant (3.20), on obtient

$$\|i\lambda_n z_n\|_{\mathcal{H}} = |\lambda_n| \|z_n\|_{\mathcal{H}} \leq |\lambda_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui est équivalent à

$$v_n \longrightarrow 0 \text{ dans } H_0^1(0, \ell) \text{ et } \phi_n \longrightarrow 0 \text{ dans } H_*^1(0, \ell). \quad (3.44)$$

$$\frac{\kappa}{\rho} (D^2 u_n + D\varphi_n) - \frac{\beta}{\rho} D\theta_n \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, \ell) \quad (3.45)$$

$$\frac{\alpha}{J} D^2 \varphi_n - \frac{\kappa}{J} (Du_n + \varphi_n) + \frac{\delta}{J} \theta_n \longrightarrow 0 \text{ dans } L_*^2(0, \ell) \quad (3.46)$$

$$\int_0^\infty \mu(s) D^2 \eta_n(s) ds \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, \ell). \quad (3.47)$$

$$\theta_n - D_s \eta_n(s) \longrightarrow 0 \text{ dans } \mathcal{M}_1. \quad (3.48)$$

On considère les suite suivantes

$$\tilde{v}_n = \int_0^\infty \mu(s) D^2 \eta_n(s) ds \quad (3.49)$$

et

$$\tilde{\varepsilon}_n = \theta_n - D_s \eta_n(s) \quad (3.50)$$

On intègre (3.50) sur $(0, s)$, On obtient

$$\eta_n(s) = s\theta_n - \int_0^s \tilde{\varepsilon}_n(r) dr. \quad (3.51)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
|\langle \eta_n(s), \theta_n \rangle_{\mathcal{M}_1}| &= \left| \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta_n(s), \theta_n \rangle_1 ds \right| = \left| \int_0^\infty \mu(s) \langle D^2 \eta_n(s), \theta_n \rangle ds \right| \\
&= \left| \left\langle \int_0^\infty \mu(s) \int_0^\ell D^2 \eta_n(s) ds, \theta_n \right\rangle \right| \\
&= |\langle \tilde{v}_n, \theta_n \rangle| \\
&\leq \|\theta_n\| \cdot \|\tilde{v}_n\| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{c}} \|\tilde{v}_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
\end{aligned}$$

Multipliant (3.51) par θ_n dans $\mathcal{M}_1$, nous obtenons

$$k_3 \|\theta_n\|_1^2 + e_n = \langle \eta_n(s), \theta_n \rangle_{\mathcal{M}_1} \longrightarrow 0,$$

Où

$$e_n = - \int_0^\infty \mu(s) \int_0^s \langle \tilde{\varepsilon}_n(r), \theta_n \rangle_1 dr ds \quad \text{et} \quad k_3 = \int_0^\infty s \mu(s) ds < \infty.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$|e_n| \leq \int_0^\infty \mu(s) \int_0^s |\langle \tilde{\varepsilon}_n(r), \theta_n \rangle_1| dr ds \leq \|\theta_n\|_1 \int_0^\infty \mu(s) \int_0^s \|\tilde{\varepsilon}_n(r)\|_1 dr ds,$$

Comme μ satisfait (3.8). Alors, on applique le lemme 1.8.3, on aura

$$|e_n| \leq \frac{2\sqrt{Ck_0}}{\nu} \|\theta_n\|_1 \|\tilde{\varepsilon}_n\|_{\mathcal{M}_1}. \quad (3.52)$$

On applique l'inégalité de Young sur $\frac{2\sqrt{Ck_0}}{\nu} \|\theta_n\|_1 \|\tilde{\varepsilon}_n\|_{\mathcal{M}_1}$ on obtient

$$|e_n| \leq \epsilon \|\theta_n\|_1^2 + \frac{Ck_0}{\epsilon \nu^2} \|\tilde{\varepsilon}_n\|_{\mathcal{M}_1}^2, \forall \epsilon > 0.$$

et par suit

$$(k_3 - \epsilon) \|\theta_n\|_1^2 - \frac{Ck_0}{\epsilon \nu^2} \|\tilde{\varepsilon}_n\|_{\mathcal{M}_1}^2 \leq k_3 \|\theta_n\|_1^2 + e_n \longrightarrow 0,$$

On choisi $\epsilon > k_3$. Alors

$$\|\theta_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|\theta_n\| \leq \chi \|\theta_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.53)$$

Multipliant (3.45) par u_n et (3.46) par φ_n dans $L^2(0, \ell)$, en utilisant (3.53) on obtien

$$\kappa \|u_n\|_1^2 + \kappa \langle \varphi_n, Du_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

et

$$\alpha \|\varphi_n\|_1^2 + \kappa \langle Du_n, \varphi_n \rangle + \kappa \|\varphi_n\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Additionnons les deux identités on trouve

$$\kappa \|Du_n + \varphi_n\|^2 + \alpha \|D\varphi_n\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $z_n \rightarrow 0$ dans $\mathcal{H}$ et ceci est contradictoire avec (3.20). ce qui termine la démonstration.

Bibliographie

- [1] Bryan P. Rynne, Martin A. Youngson, Linear Functional Analysis, Springer-Verlage London Limited 2008.
- [2] C. Giorgi, A. Marzocchi, V. Pata, Uniform Attractors for a Non-autonomous Semilinear Heat Equation with Memory, *Quart. Appl. Math.* 58(2000), 661-683.
- [3] C. Giorgi, M.G. Naso, and V. Pata. Exponential stability in linear heat conduction with memory : a semigroup approach. *Communications in Applied Analysis An International Journal for Theory and Applications*, 5(1) :121-133, 2001.
- [4] C. Zuily, éléments de Distributions et D'équations aux Dérivées Partielles , Dunod, Paris, 2002.
- [5] F. Dell'Oro, Asymptotic stability of thermoelastic systems of Bresse type, *J. Differential Equations* 258(2015), no. 11, 3902-3927.
- [6] F. Dell'Oro, V. P , On the stability of Timoshenko systems with Gurtin-Pipkin thermal law , *Journal of Differential Equations* Volume 257, Issue 2, 15 July 2014, Pages 523-548.
- [7] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle Théorie et Application*, Masson, Paris, 1983.
- [8] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.
- [9] Kantorovitz, S., *Semigroups of Operators and Spectral Theory*, Pitman Research Notes in Math., no. 330, Longman (1995).
- [10] J.M. Bony, *Cours d'analyse, Théorie des distributions et analyse de Fourier*, Les éditions de l'Ecole Polytechnique, Ellipses.

- [11] M. Coti Zelati, F. Dell'Oro and V. Pata, Energy decay of type III linear thermoelastic plates with memory, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 401(2013), 357-366.
- [12] M. Conti, E. M. Marchini and V. Pata, Exponential stability for a class of linear hyperbolic equations with hereditary memory. *D.C.D.S. SERIES B Volume 18*,(2013) Milano, Italy 1555-1565.
- [13] P.S. Casas, R. Quintanilla, Exponential decay in one-dimensional porous- thermo-elasticity, *Mach. Research Commun.* 32 (2005), 652-658.
- [14] Serge NiÃ§aise, *Analyse numerique et equations aux derivees partielles*, Dunod, Paris, 2000.
- [15] V. Pata, E. Vuk, On the exponential stability of linear thermoelasticity *Contin. Mech. Thermodyn.* 12 (2000) 121-130.
- [16] Z. Liu, S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Chapman et Hall, 1999.

Résumé

Ce mémoire est consacré à :

- l'étude de deux problèmes en therm élasticité linéaire dont la transfert de la chaleur est donnée par la loi de Gurtin-Pipkin.
- Le premier problème est en théorie de porosité où on a montré l'existence et l'unicité d'une solution qui décroît exponentiellement.
- Le deuxième problème est de type Timoshenko avec la loi de Gurtin-Pipkin. On a montré que le problème admet une solution unique qui décroît exponentiellement quant t tend vers l'infini.

Mots clés : Stabilité exponentielle, la loi du Gurtin-pipkin, des systmes thermoélastiques, le théorème de semi-groupes.

Abstract

This memory is devoted to :

- The study of two linear thermoelastic systems with heat transfer given by Gurtin-Pipkin law.
- The first problem is in porous theory, we prove the well-posedness and the exponential decay of the solution.
- The second problem is of Timoshenko type and thermoelasticity with Gurtin-Pipkin law. We use the spectral theory to prove the exponential decay of the solution.

Key words : Exponential stability, Gurtin-pipkin thermal law, Thermoelastic system ,Semigroups theory.

ملخص

هذه المذكرة خصصت لـ :

1. دراسة وجود ووحدانية الحل لمسألة حرارية مرنة خطية واخرى حرارية مرنة مسامية أحادي البعد.
 2. أثبتنا ان الاستقرار الأسّي للمسائلتين متعلق بالتابع المعرف لنواة حد الذاكرة.
 3. اعتمدنا على نظرية Lumer-Phillips في دراسة وجود ووحدانية الحل وعلى نظرية Goirgi-Pata في دراسة الاستقرار الأسّي
- الكلمات المفتاحية:** الاستقرار الأسّي , قانون Gurtin-pipkin للحرارة, الانظمة الحرارية المرنة, نظرية أشباه الزمر.