

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales

Thème

**Etude théorique d'un problème de contact
avec frottement entre deux corps
piézoélectriques**

Présenté par: **Ammari Nacereddine.
Bariki Alaeddine**

Sous la supervision de: **Hadj Ammar Tedjani.**

Année universitaire 2016 – 2017.

Remerciement

Nous remercions tout d'abord **Allah** le tout puissant qui nous a donné la puissance et la volonté pour achever ce travail.

Nous vifs remerciement vont également à notre encadreur **Dr.Hadj Ammar Tedjani** qui nous a guidé durant ce semestre et qui ses conseils et remarque étaient très util pour réaliser ce mémoire.

Nous remercions encore, **Dr.Azeb Ahmed Abdel Aziz** qui ont accepté d'examiner ce travail.

Nous remerciement vont également à nous familles de leurs aides morals et materiels tout au long nous scolarité.

Table des matières

Introduction	1
Notations générales	4
1 Préliminaires	7
1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact	7
1.1.1 Cadre physique	7
1.1.2 Modèle mathématique	8
1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique	9
1.1.4 Conditions aux limites	11
1.1.5 Formulation mathématique des problèmes de contact	14
1.2 Rappels d'analyse	15
1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert	15
1.2.2 Espaces de Sobolev	16
1.2.3 Espaces fonctionnels	17
1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	20
1.2.5 Lemmes de Gronwall	24
2 Problème de contact avec adhésion en Thermo-électro-viscoélasticité avec	
mémoire longue et endommagement	26
2.1 Formulation du problème	27

2.2	Formulation variationnelle	32
2.3	Existence et unicité de la solution	37
	Conclusion générale	53
	Bibliographie	54

Introduction generale

De puis la nuit des temps, l'homme s'est intéressé aux problèmes de contact entre deux corps. Ces problèmes de contact, avec ou sans frottement, entre deux corps déformables ou entre un corps déformable et une fondation rigide, abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le simple contact du sabot de frein avec la roue, d'une roue de voiture avec la route, du piston avec la chemise, l'enfoncement progressif dans un pouf ou un fauteuil lors d'une posture assise, les multiples frottements entre plaques tectoniques ou encore l'écoulement de la lave lors d'une éruption volcanique, ne sont que quelques exemples qui font partie d'une liste non exhaustive de problèmes de contact. Vu l'importance du phénomène, des efforts considérables ont été consacrés à la modélisation, l'analyse ainsi que l'approximation numérique des processus physiques provenant des contacts entre des corps déformables. Par conséquent, une théorie mathématique générale de la mécanique du contact (Mathematical Theory of Contact Mechanics: MTCM) a fait récemment un progrès impressionnant, voir par exemple [[19], [27]] et les références qui y sont incluses.

L'objectif de Cet mémoire est de proposer une certaine contribution à l'étude d'un problème aux limites en mécanique du contact. Nous considérons un loi de comportement pour des matériaux ayant des propriétés mécaniques ainsi que des propriétés électriques (matériaux piézoélectriques), prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau. L'adhésion entre les surfaces de contact, lorsqu'une colle est ajoutée pour éviter aux surfaces un mouvement relatif.

Le sujet de l'endommagement est extrêmement important dans les conceptions en ingénierie puisqu'il y influence directement sur la vie usuelle de la structure où la composante conçue. Il existe une littérature très riche sur ce sujet. Les modèles prenant en considération l'influence de l'endommagement interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. L'analyse mathématique des problèmes unidimensionnels peut être trouvée dans [14]. Les premiers modèles de l'endommagement mécanique provenant des considérations thermodynamiques sont apparus dans [24] . Des modèles généraux récents dans [21] sont issus du principe de la puissance virtuelle. Dans tous ces travaux, l'endommagement du matériau est décrit par une fonction d'endommagement, ayant des valeurs entre zéro et un. Lorsque $\beta = 1$, il n'y a pas d'endommagement dans le matériau,

lorsque $\beta = 0$, le matériau est complètement endommagé et lorsque $0 < \beta < 1$, il y a un endommagement partiel et le système a une capacité réduite. Certains problèmes quasistatiques de contact avec endommagement ont été étudiés dans [27].

Les matériaux piézoélectriques sont extrêmement utilisés comme interrupteurs et actuateurs dans beaucoup de systèmes d'ingénierie, en radioélectronique, l'électroacoustique et la mesure des équipements. Ils sont caractérisés par le couplage des propriétés mécaniques et électriques. Ce couplage conduit à l'apparition d'un potentiel électrique suite à une déformation mécanique et, inversement, une déformation mécanique est générée lorsqu'un potentiel électrique est appliqué. Les matériaux piézoélectriques, pour lesquelles les propriétés mécaniques sont élastiques, sont appelés matériaux électroélastiques et ceux pour lesquelles les propriétés mécaniques sont viscoélastiques sont appelés matériaux électroviscoélastiques. Des modèles généraux pour des matériaux élastiques ayant un effet piézoélectrique peuvent être trouvés dans [26] et plus récemment dans [3]. Des problèmes de contact statiques avec frottement pour des matériaux électroélastiques ont été étudiés dans [17], sous l'hypothèse que la fondation est isolante. Un problème de contact avec *slip*-dépendant pour les matériaux électro-élastiques a été étudié dans [17] et des problèmes pour les matériaux électroviscoélastiques ont été considérés dans [25]. Actuellement, un intérêt considérable est porté aux problèmes de contact avec frottement impliquant les matériaux piézoélectriques (voir par exemple [23] et les références qui y sont incluses). Cependant, il n'existe virtuellement pas de résultats mathématiques à propos des problèmes de contact pour de tels matériaux et on a besoin de développer la théorie mathématique du contact mécanique (MTCT) pour inclure le couplage entre les propriétés mécaniques et électriques.

Les processus d'adhésion sont importants en industrie lorsque des parties, souvent non métalliques, sont collées ensemble. Pour cette raison, le contact adhésif entre les corps, lorsqu'une colle est ajoutée pour empêcher les surfaces d'un mouvement relatif, a récemment reçu, de plus en plus, une grande attention dans la littérature. Des modèles généraux avec adhésion peuvent être trouvés dans [[27], [21]]. Des résultats sur l'analyse mathématiques de plusieurs problèmes de contact avec adhésion peuvent être trouvés dans [[24],[26]]. Récemment, les matériaux composites ont atteint le sommet, puisqu'ils sont très solides

et très légers, et par conséquent, une importance considérable en aviation et en industrie automobile. Cependant, les matériaux composites peuvent subir, sous des contraintes, une délamination dans laquelle plusieurs couches se décolent et se déplacent relativement les unes par rapport aux autres. Pour modéliser le processus lorsque le collage n'est pas permanent et un décolage peut avoir lieu, nous avons besoin de décrire l'adhésion et le contact ensemble. Un nombre de publications récentes traite de tels modèles, voir par exemple [[18], [3], [20]] et les références comprises. L'idée est d'introduire une variable de surface interne, le champ d'adhésion $\alpha \in [0, 1]$, qui décrit la densité fractionnelle des adhésifs actifs sur la surface de contact. En un point de la surface de contact adhésive, lorsque $\alpha = 1$, l'adhésion est complète et tous les adhésifs sont actifs ; lorsque $\alpha = 0$ tous les adhésifs sont inactifs, sévères et il n'y a pas d'adhésion. Lorsque $0 < \alpha < 1$ l'adhésion est partielle et seulement une fraction des adhésifs est active.

Ce mémoire comporte deux chapitres et est structurés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, le but est d'introduire les éléments nécessaires pour une bonne compréhension de la suite du problème traité. Nous commençons par décrire le cadre physique dans lesquels nous travaillons ainsi que le modèle mathématique correspondant, tout en donnant la loi de comportement et conditions aux limites qui apparaissent dans mémoire. Ensuite, nous aborderons le cadre fonctionnel permettant l'analyse mathématique des problèmes ainsi considérés. Nous terminerons ce chapitre en passant en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle concernant les inéquations variationnelles, équations et inéquations variationnelles d'évolution et enfin les lemmes de Gronwall.

Dans le deuxième chapitre, est consacré à l'étude d'un problème de contact sans frottement pour des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue et endommagement dans un processus dynamique. Le problème se formule par un système qui comporte une équation variationnelle par rapport au champ de déplacement, une inéquation variationnelle du type parabolique par rapport au champ d'endommagement, une équation

variationnelle par rapport au champ électrique et une équation différentielle d'ordre un par rapport au champ d'adhésion. On établit un résultat d'existence et d'unicité de la solution. La démonstration est basée sur des arguments d'équations variationnelles, un résultat classique concernant les inéquations paraboliques et des arguments de point fixe.

Notations générales

Notations diverses

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels,
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels,
c	Constante réelle strictement positive,
i.e	C'est à dire,
$\partial_i \Psi$	La dérivée partielle de Ψ par rapport à la i^{eme} composante $x : \partial_i \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \Psi$	Gradient de l'application $\Psi : \nabla \Psi = (\partial_1 \Psi, \dots, \partial_d \Psi)$,
$Div \Psi$	Divergence de l'application, $\Psi : Div \Psi = \partial_1 \Psi + \dots + \partial_d \Psi$,
$\partial \Psi$	Sous-différentiel de l'application Ψ ,
(x, y)	Paire d'un espace produit $X \times Y$,
$\mathbb{S}^d$	Espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d : \mathbb{S}^d = \mathbb{R}_s^{d \times d}$,
.	Produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$,
$ \cdot $	La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{S}^d$,
$\ \cdot\ _X$	La norme sur l'espace X ,
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	Le produit scalaire sur l'espace X ,
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{X' \times X}$	Le produit dual entre X' et X ,
$p.p.$	Presque partout,
Ω^ℓ	Ouvert de $\mathbb{R}^d$, parfois domaine Lipschitzien,
$\overline{\Omega^\ell}$	L'adhérence de Ω^ℓ ,
Γ^ℓ	La frontière de Ω^ℓ ,
Γ_i^ℓ	Les parties de frontière $\Gamma^\ell, (i = 1, 2, 3)$,
$mes(\Gamma_i^\ell)$	Mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_i^ℓ ,

$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ ,
η^ℓ	Normale extérieure unitaire à Γ^ℓ ,
v_η^ℓ, v_τ^ℓ	Les composantes normales et tangentielles du champ vectoriel v^ℓ défini sur $\bar{\Omega}^\ell$,
$C^1(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω^ℓ ,
$D(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact,
$D'(\Omega^\ell)$	Espace des distributions sur Ω^ℓ ,
$L^2(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega^\ell)}$	La norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell\ _{L^2(\Omega^\ell)} = \left(\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 d\Omega^\ell\right)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\exists c > 0 : u^\ell < c, p.p.,$ sur Ω^ℓ ,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ ,
H_{Γ^ℓ}	L'espace $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)\right)^d$,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$,
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}$	Le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$,
$\ \cdot\ _{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}$	La norme de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ définie par $\ \Psi\ _{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} = \sup_{\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} \frac{\langle \Psi, \phi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}}{\ \phi\ _{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}}$,
H'_{Γ^ℓ}	L'espace dual de H_{Γ^ℓ} , i.e, $H'_{\Gamma^\ell} = \left(H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)\right)^d$.
Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par	
$C(0, T; H)$	L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1(0, T; H)$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p(0, T; H)$	L'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	La norme de $L^p(0, T; H)$,
$W^{k,p}(0, T; H)$	L'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	La norme de $W^{k,p}(0, T; H)$.

Notations en élasticité

Ω^1, Ω^2	Les domaines occupés par les corps déformables,
Γ^ℓ	La frontière de Ω^ℓ : $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$,
$\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3$	Les parties de $\Gamma^\ell = \overline{\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \cup \Gamma_3}$,
Γ_3	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ , on écrit σ_i^ℓ les composantes du tenseur dans la base canonique,
φ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
α	Vecteurs d'adhésion sur la surface de contact Γ_3 ,
D^ℓ	Valeurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	Les dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps,
$\varepsilon(u^\ell)$	Tenseur linéarisé des déformations: $(\varepsilon(u^\ell))_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell)$,
$\sigma^\ell \cdot u^\ell$	Produit tensoriel (matriciel) de u^ℓ par σ^ℓ : $(\sigma^\ell \cdot u^\ell)_i = \sigma_{ij}^\ell \cdot u_j^\ell$,
σ_ν^ℓ	Composante normale des contraintes à la frontière du domaine: $\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell$ où ν^ℓ est la normale unitaire sortante sur le bord du domaine Ω^ℓ ,
σ_τ^ℓ	Vecteur composante tangentielle des contraintes à la frontière du domaine,
u_ν^ℓ	Composante normale du déplacement u^ℓ sur le bord du domaine: $u_\nu^\ell = u^\ell \cdot \nu^\ell$,
$u_\nu^\ell \nu^\ell$	Vecteur composante normale du déplacement u^ℓ : $(u_\nu^\ell \nu^\ell)_i = u_\nu^\ell \cdot \nu_i^\ell$,
u_τ^ℓ	Vecteur composante tangentielle du déplacement u^ℓ : $u_\tau^\ell = u^\ell - u_\nu^\ell \nu^\ell$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on commence par définir le cadre physique, une loi de comportement d'un matériau électro-élasto-viscoplastique, les conditions aux limites ainsi que la formulation électro-mécanique de problème à étudier. Ensuite, nous passons en revue quelques résultats concernant les espaces fonctionnels, les équations et inéquations variationnelles, les lemmes de Gronwall et quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.

1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact

1.1.1 Cadre physique

Dans cette section, nous allons introduire le cadre physique et une modèle mathématique de problème utilisés dans ce mémoire. Ensuite, nous indiquerons les formulations mathématiques pour le problème de contact avec adhésion et endommagement entre deux corps électro-élasto-viscoplastiques.

Nous considérons deux corps matériels déformables qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$), avec une frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$, correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , correspondant aux conditions aux limites

électriques, d'autre part, telles que $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, $\text{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$. On note par v^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ . Le corps Ω^ℓ est encasté sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ et agissent des forces volumiques de densité f_0^ℓ et des charges électriques de densité volumiques q_0 . Nous supposons que f_2^ℓ et f_0^ℓ varient très lentement par rapport au temps. Les corps sont soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_3 et ils sont en contact avec adhésion sur Γ_3 . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en contact avec une fondation sur la partie Γ_3 . Les matériaux peuvent être endommagés durant le contact.

1.1.2 Modèle mathématique

Notons que le point au-dessus d'une fonction représente la dérivation par rapport au temps, i.e:

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt}, \ddot{u}^\ell = \frac{d^2u^\ell}{dt^2}.$$

Les fonctions inconnues du problème sont les champs des déplacements $\dot{u}^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, $\ell = 1, 2$. Notons la densité de la masse $\rho^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques $f_0^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy:

$$\text{Div } \sigma^\ell + f_0^\ell = \rho^\ell \ddot{u}^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.1.1)$$

où $\ddot{u}^\ell$ représente l'accélération et $\dot{u}^\ell$ la vitesse du corps.

Les processus d'évolution modélisés par l'équation précédente s'appellent processus dynamiques. Dans certaines situations, cette équation peut encore se simplifier: par exemple dans le cas où $\dot{u}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (processus statiques), ou bien dans le cas où le champ des vitesses $\dot{u}^\ell$ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho^\ell \ddot{u}^\ell$ peut être négligé (processus quasistatiques). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient:

$$\text{Div } \sigma^\ell + f_0^\ell = 0 \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T]. \quad (1.1.2)$$

L'équation équivaut à d relation scalaires, et mathématiquement cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les d composantes u_i^ℓ du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.

A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ de déplacement électrique les potentiels électriques $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $D^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques:

$$\operatorname{div} D^\ell - q_0^\ell = 0 \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.1.3)$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\operatorname{div} D^\ell = (D_{i,i}^\ell)$, et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^ℓ .

1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique

Nous considérons deux corps piézoélectriques qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière et de Lipschitz Γ^ℓ subdivisée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ d'une part et de deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , telles que $\operatorname{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, $\operatorname{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$ et $\Gamma_3^\ell \subset \Gamma_b^\ell$. Soit $T > 0$ nous étudions l'évolution du corps due à l'application de force de volume et de tractions de surfaces dans l'intervalle de temps $[0, T]$. Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega^\ell \cup \Gamma^\ell$, et $t \in [0, T]$.

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement. Voici quatre exemples classiques d'essais sur les solides [1] : essais de chargement monotone, essais de charge-décharge, essais de fluage et essais de relaxation.

Dans la description des phénomènes purement électro-mécanique, par loi de comportement (ou loi constitutive) nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ^ℓ , le tenseur des déformations infinitésimales ε^ℓ et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}^\ell$ et $\dot{\varepsilon}^\ell$. Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électromécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique $D^\ell = (D_i^\ell)$ ainsi que le champ électrique $E^\ell = -\nabla\varphi^\ell$. Nous présentons par la suite les lois de comportement de matériau : matériaux électro-élasto-viscoplastique.

Loi de comportement des matériaux électro-élastiques.

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ^ℓ et le vecteur des déplacements électriques D^ℓ sont reliés par la loi de comportement:

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(u^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell, \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + B^\ell E^\ell, \\ E^\ell = -\nabla \varphi^\ell, \end{cases} \quad (1.1.4)$$

où $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est l'opérateur d'élasticité non linéaire, $E^\ell = -\nabla \varphi^\ell$ est le champ électrique, $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et $B^\ell = (B_{ij}^\ell)$ est le tenseur diélectrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^\ell)^*$ où $(e_{ijk}^\ell)^* = e_{kij}^\ell$, dénote le transposé du tenseur $\mathcal{E}^\ell$ tel que:

$$\mathcal{E}^\ell \sigma^\ell . v = \sigma^\ell . (\mathcal{E}^\ell)^* v^\ell; \quad \forall \sigma^\ell \in \mathbb{S}^d, v^\ell \in \mathbb{R}^d \quad (1.1.5)$$

Lois de comportement des matériaux électro-viscoélastiques.

Un matériau est dit électro-viscoélastique si sa loi de comportement est de la forme:

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell \varepsilon(u^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell, \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + B^\ell E^\ell, \end{cases} \quad (1.1.6)$$

dans laquelle interviennent l'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$, l'opérateur d'élasticité $\mathcal{G}^\ell$, non linéaires.

Nous présentons maintenant la loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec endommagement. Dans ce cas la loi de comportement est donnée par:

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \beta^\ell, \theta^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell, \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + B^\ell E^\ell. \end{cases} \quad (1.1.7)$$

La température θ est définie par une équation parabolique, que représente la conservation de l'énergie comme suit:

$$\psi^\ell(\varepsilon(u^\ell), \beta^\ell, \theta^\ell) + q^\ell = \dot{\theta}^\ell - k_0^\ell \Delta \theta^\ell, \quad (1.1.8)$$

où ψ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici et ci-dessous k_0^ℓ est une constante strictement positive et q^ℓ une donnée, qui représente la source de chaleur du volume. Où β^ℓ est une variable internes d'état définie dans $\Omega^\ell \times [0, T]$, avec $0 \leq \beta^\ell \leq 1$: L'évolution du champ d'endommagement utilisée au deuxième chapitre est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation:

$$\mathcal{S}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \beta^\ell, \theta^\ell) \in \dot{\beta}^\ell - k^\ell \Delta \beta^\ell + \partial \Psi_{k^\ell}(\beta^\ell) \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (1.1.9)$$

où k est une constante positive, $\mathcal{S}$ est la fonction source de l'endommagement, $\partial \Psi_{k^\ell}$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice Ψ_{k^ℓ} et K^ℓ est l'ensemble des endommagements admissibles défini par:

$$K^\ell = \{\xi \in H^1(\Omega^\ell); 0 \leq \xi \leq 1, p.p \text{ dans } \Omega^\ell\}.$$

Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques avec mémoire longue.

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par:

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \beta^\ell, \theta^\ell) + \int_0^T M^\ell(t-s) \varepsilon(u^\ell(s)) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell, \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + B^\ell E^\ell, \end{cases} \quad (1.1.10)$$

où $M^\ell = (M_{ij}^\ell)$ est un tenseur de relaxation. Si $M^\ell = 0$, on retrouve la loi électroviscoélastique donnée par (1.1.7)-(1.1.9).

1.1.4 Conditions aux limites

D'émissions maintenant les conditions aux limites sur chacune des trois parties de Γ^ℓ .

La condition aux limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^\ell \times [0, T]$, le champ des déplacements u^ℓ est par conséquent nul:

$$u^\ell = 0, \text{ sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T]. \quad (1.1.11)$$

La condition aux limites de traction.

Une traction surfacique de densité f_2^ℓ agit sur $\Gamma_2^\ell \times [0, T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma^\ell \nu^\ell$ satisfait:

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell, \text{ sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T]. \quad (1.1.12)$$

Les conditions aux limites électriques.

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations:

$$\varphi^\ell = 0, \text{ sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (1.1.13)$$

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell, \text{ sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T]. \quad (1.1.14)$$

Conditions continue aux limites de contact .

On définit le déplacement normal relatif d'un corps par rapport à l'autre sur la zone de contact Γ_3 par $[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2$, où ν^ℓ est la normale unitaire extérieure à Ω^ℓ .

La continuité des contraintes sur l'interfaces Γ_3 se traduit par :

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \text{ sur } \Gamma_3 \quad (1.1.15)$$

Les conditions de contact avec compliance normale et adhésion.

.On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, on introduit une variable interne d'état définie sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \alpha \leq 1$. Quand $\alpha = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\alpha = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \alpha < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus détails sur ce section, on renvoie par exemple [9]. On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion:

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu([u_\nu]) \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.1.16)$$

où σ_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par:

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0, \end{cases} \quad (1.1.17)$$

Ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens. La condition (1.1.16) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion à la tension de surface. Notons que la condition de compliance normale avec adhésion (1.1.16) a été déjà utilisée dans [[8], [13], [28]].

Quand le champ d'adhésion α est nul, (1.1.16) devient:

$$\sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.1.18)$$

qui représente la condition de compliance normale.

On suppose que la contrainte tangentielle satisfait la condition suivante:

$$\sigma_\tau = -p_\tau(\alpha) R_\tau([u_\tau]) \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.1.19)$$

où $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est la fonction de contact tangentiel et $R_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ est l'opérateur de troncature donné par:

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si } \|v\| < L, \\ L \frac{v}{\|v\|} & \text{si } \|v\| > L, \end{cases} \quad (1.1.20)$$

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme:

$$\dot{\alpha} = - \left(\alpha [\gamma_\nu (R_\nu([u_\nu]))^2 + \gamma_\tau |R_\tau([u_\tau])|^2 - \varepsilon_a] \right)_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.1.21)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \text{ sur } \Gamma_3, \quad (1.1.22)$$

où γ_ν, γ_τ et ε_a sont coefficients d'adhérence positifs, et $[u_\tau] = u_\tau^1 + u_\tau^2$, le déplacement tangent relatif de corps Ω^1 par rapport l'autre corps Ω^2 sur la zone de contact, et α_0 l'adhésion initiale, tel que:

$$0 \leq \alpha_0 \leq 1, p.p \text{ sur } \Gamma_3. \quad (1.1.23)$$

Sous les conditions (1.1.21)-(1.1.23), on a la remarque suivante :

Remark 1.1.1 Nous remarquons que sous les trois conditions précédentes le champ d'adhésion vérifie la restriction $0 \leq \alpha \leq 1$. En effet, puisque $\dot{\alpha} \leq 0$ donc $\alpha \leq \alpha_0 \leq 1$. En outre, si $\alpha = 0$ quand $t = t_0$; donc $\dot{\alpha} = 0$ pour tout $t \geq t_0$, et d'où $\alpha = 0$ pour tout $t \geq t_0$, $p.p.x \in \Gamma_3$. Alors, nous concluons que $0 \leq \alpha \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$ $p.p.x \in \Gamma_3$.

1.1.5 Formulation mathématique des problèmes de contact

On considère ici le problème mécanique qu'on va étudier dans le chapitre 2 .

ProblèmeP (Problème de contact avec adhésion en électro-viscoélasticité avec mémoire longue).

Pour $\ell = 1, 2$, Trouver le champ de déplacement $u^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ de contrainte $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le potentiel électrique $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de déplacement électrique $D^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ d'endommagement $\beta^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champs de temperature $\theta^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, et le champ d'adhésion $\alpha : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tels que:

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \beta^\ell, \theta^\ell) + \int_0^t M^\ell(t-s) \varepsilon(u^\ell(s)) ds + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T],$$

$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - B^\ell \nabla \varphi^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T],$$

$$\psi^\ell(\varepsilon(u^\ell), \beta^\ell, \theta^\ell) + q^\ell = \dot{\theta}^\ell - k_0^\ell \Delta \theta^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T],$$

$$\mathcal{S}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \beta^\ell, \theta^\ell) \in \dot{\beta}^\ell - k_1^\ell \Delta \beta^\ell + \partial \Psi_{k^\ell}(\beta^\ell) \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T],$$

$$\rho^\ell \ddot{u}^\ell = \text{Div } \sigma^\ell + f_0^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T],$$

$$q_0^\ell = \text{div } D^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T],$$

$$u^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T],$$

$$\begin{aligned}
& \sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \text{ sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T], \\
& \left\{ \begin{array}{l} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu \\ \sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu([u_\nu]) \end{array} \right. \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T], \\
& \left\{ \begin{array}{l} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \\ \sigma_\tau = -p_\tau([\alpha]) R_\tau([u_\tau]) \end{array} \right. \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T], \\
& \dot{\alpha} = -(\alpha [\gamma_\nu (R_\nu([u_\nu]))^2 + \gamma_\tau |R_\tau([u_\tau])|^2 - \varepsilon_a])_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T], \\
& k_0^\ell \frac{\partial \theta^\ell}{\partial \nu^\ell} + c \theta^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell \times [0, T], \\
& \frac{\partial \beta^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell \times [0, T], \\
& \varphi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \\
& D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell \text{ sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T],
\end{aligned}$$

$$u^\ell(0) = u_0^\ell, \dot{u}^\ell(0) = v_0^\ell, \beta^\ell(0) = \beta_0^\ell \text{ dans } \Omega^\ell,$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \text{ sur } \Gamma_3,$$

1.2 Rappels d'analyse

1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par:

$$\|u\|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (1.2.1)$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz:

$$(u, v)_H \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H. \quad (1.2.2)$$

On dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme définie par (1.2.1).

Soit H' l'espace dual de H c'est à dire l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme:

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}}{\|v\|_H},$$

où $(\cdot, \cdot)_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

1.2.2 Espaces de Sobolev

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par:

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d\}.$$

D'abord, on note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$. On a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$.

On sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On a les résultats suivants:

$$C^1(\bar{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Theoreme 1.2.1 (*Rellich*)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Theoreme 1.2.2 (*trace de Sobolev*)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_{\Gamma}$ pour tout $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

Remark 1.2.1 L'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle dT . L'application δ s'appelle application de trace; elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_{\Gamma}$ définie pour $u \in C^1(\bar{\Omega})$.

remark 1.2.1 On note que l'application de trase $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compacte.

1.2.3 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section les espaces de type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, on montre leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace. On rappelle aussi quelques espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs dans l'espace de Hilbert. Toutes les notations ainsi que les espaces fonctionnels utilisés dans ce memoire sont introduits dans cette section. Nous désignons par $\mathbb{S}^d$ l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d$, ($d = 2, 3$), $(., .)$ et $|\cdot|$ représentent le produit scalaire et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{S}^d$, respectivement. Ainsi,

$$u.v = u_i.v_i, \quad |v| = (v, v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma.\tau = \sigma_{ij}.\tau_{ij}, \quad |\tau| = (\tau, \tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma, \tau \in \mathbb{S}^d.$$

Introduisons les espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques v^ℓ et τ^ℓ :

$$\left\{ \begin{array}{l} H^\ell = \{v^\ell = (v_i^\ell); v_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L^2(\Omega^\ell))^d, \\ H_1^\ell = \{v^\ell = (v_i^\ell); v_i^\ell \in H^\ell(\Omega^\ell)\} = (H^1(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}^\ell = \{\tau^\ell = (\tau_{ij}^\ell); \tau_{ij}^\ell = \tau_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L^2(\Omega^\ell))^{d \times d}, \\ \mathcal{H}_1^\ell = \{\tau^\ell = (\tau_{ij}^\ell); \tau_{ij}^\ell \in \mathcal{H}^\ell(\Omega^\ell), \text{div } \tau^\ell \in H^\ell\}. \end{array} \right. \quad (1.2.3)$$

Les espaces $H^\ell, H_1^\ell, \mathcal{H}^\ell, \mathcal{H}_1^\ell$, sont des espaces réels de Hilbert munis des produits calaires donnés par:

$$\left\{ \begin{array}{l} (u^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u^\ell.v^\ell dx; \\ (u^\ell, v^\ell)_{H_1^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u^\ell.v^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \nabla u^\ell.\nabla v^\ell dx; \\ (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell.\tau^\ell dx; \\ (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell.\tau^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \text{div } \sigma^\ell.\text{div } \tau^\ell dx. \end{array} \right. \quad (1.2.4)$$

ε et div sont les opérateurs de déformation et de divergence, définis par:

$$\nabla u^\ell = (u_{i,j}^\ell), \quad \varepsilon(u^\ell) = (\varepsilon_{i,j}(u^\ell)), \quad \varepsilon_{i,j}(u^\ell) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\ell + u_{j,i}^\ell); \forall u^\ell \in H_1^\ell,$$

$$\text{div } \sigma^\ell = (\sigma_{ij,j}^\ell), \quad \forall \sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell.$$

Les normes sur les espaces $H^\ell, H_1^\ell, \mathcal{H}^\ell, \mathcal{H}_1^\ell$, sont notées par $\|\cdot\|_{H^\ell}, \|\cdot\|_{H_1^\ell}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$, respectivement. Puisque la frontière Γ^ℓ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $v^\ell \in H_1^\ell$ nous utilisons la notation v^ℓ pour désigner la trace de v^ℓ sur Γ^ℓ et nous notons par v_ν^ℓ et v_τ^ℓ les composantes normales et tangentielles de v^ℓ sur la frontière données par:

$$v_\nu^\ell = v^\ell \cdot \nu^\ell, \quad v_\tau^\ell = v^\ell - v_\nu^\ell \nu^\ell,$$

Soit H'_{Γ^ℓ} est un dual de $H_{\Gamma^\ell} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)^d$ et soit $(\cdot, \cdot)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}$ désigner l'appariement de dualité entre H'_{Γ^ℓ} et H_{Γ^ℓ} . Pour chaque élément $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, soit $\sigma^\ell \nu^\ell$ est un élément H'_{Γ^ℓ} donne par:

$$(\sigma^\ell \nu^\ell, v^\ell)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell} = (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{div } \sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell}$$

Désigne par v_ν^ℓ et v_τ^ℓ la trace normale et la trace tangential de $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, respectivement. Si σ^ℓ est continûment différentiable sur $\Omega^\ell \cup \Gamma^\ell$, tel que:

$$\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell, \quad \sigma_\tau^\ell = \sigma^\ell \nu^\ell - \sigma_\nu^\ell \nu^\ell,$$

$$(\sigma^\ell \nu^\ell, v^\ell)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da,$$

pour tous $v^\ell \in H_1^\ell$, où da est un élément de mesure de surface. Pour obtenir la formulation variationnelle du problème (2.1.1)-(2.1.17), nous introduisons pour la domaine de lient de l'ensemble:

$$\mathcal{Z} = \{\vartheta \in L^\infty(0, T, L^2(\Gamma_3)); 0 \leq \vartheta(t) \leq 1, \forall t \in [0, T], p.p. \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

l'espace des déplacements admissibles V^ℓ est un sous-espace fermé de H_1^ℓ défini par:

$$V^\ell = \{v^\ell \in H_1^\ell; v^\ell = 0, \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

Puisque $\text{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ^ℓ telle que:

$$\|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \|v^\ell\|_{H_1^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (1.2.5)$$

Sur V^ℓ nous considérons le produit scalaire donné par:

$$(u^\ell, v^\ell)_{V^\ell} = (\varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall u^\ell, v^\ell \in V^\ell, \quad (1.2.6)$$

et soit $\|\cdot\|_{V^\ell}$ la norme associée, i.e.

$$\|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} = \|v^\ell\|_{H_1^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (1.2.7)$$

Par l'inégalité de Korn, il vient que $\|\cdot\|_{V^\ell}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}$ sont des normes équivalentes sur V^ℓ et ainsi $(V^\ell, \|\cdot\|_{V^\ell})$ est un espace de Hilbert réel. En outre, par le théorème de trace de Sobolev, il existe une constante $c_0 > 0$, dépendant uniquement de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell$ et Γ_3 telle que:

$$\|v^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v^\ell\|_{V^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (1.2.8)$$

Pour le potentiel électrique et le champ de déplacement électrique nous utilisons les espaces:

$$\begin{aligned} E_0^\ell &= L^2(\Omega^\ell), \quad E_1^\ell = H^1(\Omega^\ell), \\ W^\ell &= \{\psi^\ell \in H^1(\Omega^\ell); \psi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\}, \\ \mathcal{W}^\ell &= \{D^\ell = (D_j^\ell); D_j^\ell \in L^2(\Omega^\ell); \text{div } D^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\}. \end{aligned}$$

respectivement. Puisque $\text{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré montre qu'il existe une constante $c_F^\ell > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que:

$$\|\nabla \psi^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)^d} \geq c_F^\ell \|\psi^\ell\|_{H^\ell(\Omega^\ell)}, \quad \forall \psi^\ell \in W^\ell. \quad (1.2.9)$$

Sur l'espace W^ℓ nous considérons le produit scalaire donné par:

$$(\varphi^\ell, \psi^\ell)_{W^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \nabla \varphi^\ell \cdot \nabla \psi^\ell dx,$$

et soit $\|\cdot\|_{W^\ell}$ la norme associée. En utilisant (1.2.9) on peut vérifier que $\|\cdot\|_{H^\ell(\Omega^\ell)}$ et $\|\cdot\|_{W^\ell}$ sont deux normes équivalentes sur W^ℓ . Il en résulte que $(W^\ell, \|\cdot\|_{W^\ell})$ est un espace de Hilbert

réel. En outre, par le Sobolev trace théorème, il existe une constante c_0 , ne dépendant que de $\Omega^\ell, \Gamma_a^\ell$ et Γ_3 telle que:

$$\|\xi^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_0 \|\xi^\ell\|_{W^\ell}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell. \quad (1.2.10)$$

L'espace $\mathcal{W}^\ell$ est un espace de Hilbert réel avec le produit scalaire:

$$(D^\ell, E^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot E^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} D^\ell \cdot \operatorname{div} E^\ell dx,$$

où $\operatorname{div} D^\ell = (D_{i,i}^\ell)$, et la norme associée $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^\ell}$.

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits:

$$V = V^1 \times V^2, \quad H = H^1 \times H^2, \quad H_1 = H_1^1 \times H_1^2, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2,$$

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2, \quad E_0 = E_0^1 \times E_0^2, \quad E_1 = E_1^1 \times E_1^2,$$

$$W = W^1 \times W^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2,$$

les espaces $V, E_1, W, \mathcal{W}$ sont des espaces de Hilbert réel dotés des produits scalaires canoniques notée $(\cdot, \cdot)_V, (\cdot, \cdot)_{E_1}, (\cdot, \cdot)_W, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}}$. Les normes associés seront désignés par $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_{E_1}, \|\cdot\|_W, \|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivement. On rappelle les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Nous notons par $C([0, T], X)$ et $C^1([0, T], X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes:

$$\|f\|_{C([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X,$$

$$\|f\|_{C^1([0, T], X)} = \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_X + \max_{t \in [0, T]} \|\dot{f}(t)\|_X.$$

Nous notons par $C_c([0, T], X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $[0, T]$ à valeurs dans X .

Definition 1.2.1 Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c([0, T], X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

I- Opérateurs fortement monotones

Definition 1.2.2 Soient $A : H \rightarrow H$ un opérateur non linéaire. On dit que l'opérateur A est:

1. monotone si

$$(Au - Av, u - v)_H \geq 0, \quad \forall u, v \in H,$$

2. fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - v, u - v)_H \geq m \|u - v\|_H^2, \quad \forall u, v \in H,$$

3. Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_H \leq \|u - v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

4. hémicontinu si

$$\forall u, v \in H, \text{ l'application } t \rightarrow A(u + tv) : \mathbb{R} \rightarrow H' \text{ est continue.}$$

Theoreme 1.2.3 (Théorème du point fixe de Banach):

Soit K une partie non vide et fermée de l'espace de Banach X et soit $\Lambda : K \rightarrow K$ une contractante, i.e., $\exists k \in]0, 1[$ tel que :

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq \|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Alors il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$; i.e., possédant un point fixe unique dans K .

Nous allons ainsi utiliser une version du théorème de point fixe de Banach que nous présentons ci-dessus.

Pour cela, nous rappelons que les puissances de l'opérateur sont définies récursivement par $\Lambda^n = \Lambda(\Lambda^{n-1})$ pour $n \geq 2$.

Theoreme 1.2.4 Sous les mêmes conditions du Théorème 1.2.1, on suppose que Λ^n est une contractante pour un certain entier $n \geq 2$. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .

Definition 1.2.3 Une forme bilinéaire $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que:

$$\|a(u, v)\|_H \leq M \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$$

Definition 1.2.4 Une forme bilinéaire $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que:

$$a(u, u) \geq m \|u\|_H^2, \quad \forall u \in H.$$

Theoreme 1.2.5 (Théorème du Lax-Milgram):

Soit X un espace de Hilbert, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive. Soit $l : X \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in X$ qui satisfait:

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in X. \quad (1.2.11)$$

De plus, si $a(., .)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété:

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle u, u \rangle_H \leq \frac{1}{2}a(v, v) - \langle v, v \rangle_H, \quad \forall v \in H. \quad (1.2.12)$$

II- Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout cette section que X est un espace de Hilbert et K un sousensemble de l'espace X .

Definition 1.2.5 On appelle fonction indicatrice de K , la fonction Ψ_K définie par:

$$\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases} \quad (1.2.13)$$

Definition 1.2.6 Soit une fonction $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u , noté $\partial j(u)$ est l'ensemble défini par:

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u) \quad \forall v \in X\}. \quad (1.2.14)$$

Le crochet $(., .)$ désignant la dualité entre X' et X .

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u . La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel $\partial\Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide:

$$\partial\Psi_K = \{u' \in X' \mid (u', v - u) \geq 0 \quad \forall v \in X\}. \quad (1.2.15)$$

III- Équation différentielle ordinaire

Theoreme 1.2.6 (*Théorème de Cauchy- Lipschitz*):

Soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ est un véritable espace de Banach et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$ qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X, \quad \forall x, y \in X, p.p. t \in [0, T], \\ (b) \text{ il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que} \\ F(t, \cdot) \in L^p([0, T], X), \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique, $x \in W^{1,p}([0, T], X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)) \text{ , p.pt } \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

Definition 1.2.7 S'il est l'inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et V est dense dans H , le triplet

$$V \subset H \subset V',$$

s'appelle le triplet de Gelfand, où V' l'espace dual de V .

VI- Équation aux dérivées partielles d'évolution

Theoreme 1.2.7 Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hemicontinu et monotone satisfaisant :

$$(Av, v)_{V \times V'} \geq w \|v\|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in V, \quad (1.2.16)$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C (\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in V, \quad (1.2.17)$$

pour des constantes $w > 0$, $C > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Etant donné $u_0 \in H$ et $f \in L^2([0, T], V')$, il existe une fonction unique u qui satisfait:

$$u \in L^2([0, T], V) \cap C^1([0, T], H), \quad \dot{u} \in L^2([0, T], V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t), \quad p.p.t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

Definition 1.2.8 Soit $u^\ell \in H_1^\ell$. Alors $\epsilon(u^\ell) = 0$ si $u^\ell \in \mathcal{R}^\ell$, i.e

$$\mathcal{R}^\ell = \{u^\ell \in H_1^\ell / \epsilon(u^\ell) = 0\}. \quad (1.2.18)$$

Theoreme 1.2.8 (inégalité de Korn):

Soit $\mathcal{V}^\ell$ un sous-espace fermé de H_1^ℓ tel que :

$$\mathcal{V}^\ell \cap \mathcal{R}^\ell = \{0\}. \quad (1.2.19)$$

Alors l'négalité de Korn est vérifiée sur $\mathcal{V}^\ell$, c'est à dire existe $C > 0$ ne dépendant que Ω^ℓ et $\mathcal{V}^\ell$ tel que:

$$\|\epsilon(u^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq C \|u^\ell\|_{H_1^\ell}, \quad \forall u^\ell \in \mathcal{V}^\ell. \quad (1.2.20)$$

V- Inéquation variationnelle d'évolution

Theoreme 1.2.9 Soit $V \subset H \subset V'$ est un triplet de Gelfand, K est un sous-ensemble fermé non vide et convexe de V , et soit $a : V \times V' \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique et continue qui satisfait

$$\text{il existe } c_1 > 0 \text{ et } c_0 \text{ tel que } a(u, v) + c_0 \|v\|_H^2 \geq c_1 \|v\|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2([0, T], H)$, il existe une unique fonction u qui satisfait:

$$u \in H^1([0, T], H) \cap L^2([0, T], V), \quad u(t) \in K, \forall t \in [0, T],$$

$$(\dot{u}(t), v - u(t))_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq$$

$$(f(t), v - u(t))_H, \quad \forall u \in K, t \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

1.2.5 Lemmes de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemma 1.2.1 *Soient $m, n \in C([0, T], \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante, et $\phi \in C([0, T], \mathbb{R})$:*

1. Si:

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t n(s) \phi(s) ds, \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right), \forall t \in [0, T].$$

2. Si

$$\phi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \phi(s) ds, \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \phi(s) ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s) ds, \forall t \in [0, T],$$

Pour le cas particulier $m = 0$ la partie (1) de ce lemme devient.

corollary 1.2.1 *Soit $n \in C([0, T], \mathbb{R})$ telle que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$. Si $\phi \in C([0, T], \mathbb{R})$ est une fonction telle que:*

$$\phi(t) \leq a + \int_0^t n(s) \phi(s) ds, \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\phi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right), \forall t \in [0, T].$$

Lemma 1.2.2 *Soient $m, n \in C([0, T], \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$. Si $\phi \in C([0, T], \mathbb{R})$ est une fonction telle que:*

$$\frac{1}{2} \phi^2(t) \leq \frac{1}{2} a^2 + \int_0^t m(s) \phi(s) ds + \int_0^t n(s) \phi^2(s) ds, \forall t \in [0, T],$$

$$|\phi(t)| \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s) ds \right), \forall t \in [0, T].$$

Chapitre 2

Problème de contact avec adhésion en Thermo-électro-viscoélasticité avec mémoire longue et endommagement

Dans ce chapitre, on considère un problème de contact sans frottement avec compliance normale et adhésion dans un processus dynamique. Le matériau est électro-viscoélastique avec mémoire longue et endommagement. Le processus d'adhésion sur la surface de contact est modélisé par une variable interne de surface appelée champ d'adhésion. L'endommagement causé par les déformations élastiques du matériau est modélisé par une variable interne du corps appelée champ d'endommagement.

Le problème est formulé par un système d'équations et d'inéquations aux dérivées partielles contenant l'équation de mouvement ou d'équilibre du corps, la loi de comportement du matériau avec endommagement, une inclusion du type parabolique modélisant le champ d'endommagement, une équation différentielle modélisant le champ d'adhésion et les conditions aux limites auxquelles il est soumis.

Ce chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section, nous présentons le problème mécanique, puis nous indiquons les hypothèses sur les données. Dans la deuxième section, nous décrivons la formulation variationnelle du problème mécanique. Enfin, dans la troisième section, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème mécanique.

Les techniques employées sont basées sur les résultats des équations variationnelles et la théorie des opérateurs monotones, suivi par les arguments du point fixe les inéquations.

2.1 Formulation du problème

ProblèmeP. Pour $\ell = 1, 2$, Trouver le champ de déplacements $u^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ de contrainte $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, le potentiel électrique $\varphi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de déplacement électrique $D^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, le champ d'endommagement $\beta^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de temperature $\theta^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, et le champ d'adhésion $\alpha : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, tels que:

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \beta^\ell, \theta^\ell) + \int_0^t M^\ell(t-s) \varepsilon(u^\ell(s)) ds + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.1.1)$$

$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - B^\ell \nabla \varphi^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.1.2)$$

$$\psi^\ell(\varepsilon(u^\ell), \beta^\ell, \theta^\ell) + q^\ell = \dot{\theta}^\ell - k_0^\ell \Delta \theta^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.1.3)$$

$$\mathcal{S}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \beta^\ell, \theta^\ell) \in \dot{\beta}^\ell - k_1^\ell \Delta \beta^\ell + \partial \Psi_{k^\ell}(\beta^\ell) \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.1.4)$$

$$\rho^\ell \ddot{u}^\ell = \text{Div } \sigma^\ell + f_0^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.1.5)$$

$$q_0^\ell = \text{div } D^\ell \text{ dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.1.6)$$

$$u^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T], \quad (2.1.7)$$

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \text{ sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T], \quad (2.1.8)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu \\ \sigma_\nu = -p_\nu([u_\nu]) + \gamma_\nu \alpha^2 R_\nu([u_\nu]) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.1.9)$$

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \\ \sigma_\tau = -p_\tau([\alpha]) R_\tau([u_\tau]) \end{cases} \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.1.10)$$

$$\dot{\alpha} = -(\alpha [\gamma_\nu (R_\nu([u_\nu]))^2 + \gamma_\tau |R_\tau([u_\tau])|^2 - \varepsilon_a])_+ \text{ sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (2.1.11)$$

$$k_0^\ell \frac{\partial \theta^\ell}{\partial \nu^\ell} + c \theta^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell \times [0, T], \quad (2.1.12)$$

$$\frac{\partial \beta^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0 \text{ sur } \Gamma^\ell \times [0, T], \quad (2.1.13)$$

$$\varphi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T], \quad (2.1.14)$$

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell \text{ sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T], \quad (2.1.15)$$

$$u^\ell(0) = u_0^\ell, \dot{u}^\ell(0) = v_0^\ell, \beta^\ell(0) = \beta_0^\ell \text{ dans } \Omega^\ell, \quad (2.1.16)$$

$$\alpha(0) = \alpha_0 \text{ sur } \Gamma_3, \quad (2.1.17)$$

Les équations (2.1.1) et (2.1.2) représentent la loi de comportement du corps avec mémoire longue où $M = (M_{ij})$ est le tenseur de la relaxation. L'équation (2.1.3) représente la conservation d'énergie où ψ^ℓ est une fonction non linéaire constitutive qui représente la température générée par le travail des forces internes et q^ℓ est une source de chaleur volumique donnée. L'évolution du champ d'endommagement est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation (2.1.4) où $\mathcal{S}^\ell$ est la fonction source de l'endommagement. L'équation (2.1.5) représente l'équation du mouvement, la relation (2.1.6) représente l'équation de conservation de la charge, tandis que les conditions (2.1.7) et (2.1.8) sont respectivement, des conditions aux limites de déplacement traction. Les conditions (2.1.9) et (2.1.10) et (2.1.11) représentent les conditions aux limites de contact avec compliance normale et adhésion, (2.1.12) représente respectivement une condition de frontière de Fourier pour la température et une condition de frontière de Neumann homogène pour le champ de dommage sur Γ^ℓ , la relation (2.1.13) représente la condition de Newmann, $\frac{\partial \beta^\ell}{\partial \nu^\ell}$ représente la dérivée normale de β^ℓ . Les équations (2.1.14) et (2.1.15) sont les conditions aux limites électriques et pour finir (2.1.16) et (2.1.17) représentent les conditions initiales.

On considère maintenant les hypothèses suivantes:

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_1^{\mathcal{A}^\ell}, M_2^{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tels que} \\ \quad |\mathcal{A}^\ell(x, \varepsilon)| \leq M_1^{\mathcal{A}^\ell} |\varepsilon| + M_2^{\mathcal{A}^\ell}, \forall \varepsilon \in \mathbb{S}^d, p.p. x \in \Omega^\ell. \\ (b) \text{ Il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tels que} \\ \quad (\mathcal{A}^\ell(x, \varepsilon_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell} |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2, \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, p.p. x \in \Omega^\ell. \\ (c) \mathcal{A}^\ell(., \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d. \\ (d) \mathcal{A}^\ell(x, .) \text{ est continu sur } \mathbb{S}^d, p.p. x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.1.18)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{G}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_{\mathcal{G}^\ell} > 0 \text{ tels que} \\ \quad |\mathcal{G}^\ell(x, \varepsilon_1, \beta_1, \theta_1) - \mathcal{G}^\ell(x, \varepsilon_2, \beta_2, \theta_2)| \leq M_{\mathcal{G}^\ell} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\beta_1 - \beta_2| + |\theta_1 - \theta_2|) \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, p.p.x \in \Omega^\ell. \\ (b) \mathcal{G}^\ell(., \varepsilon, \beta, \theta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in \mathbb{R}. \\ (c) \mathcal{G}^\ell(., 0, 0, 0) \in \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (2.1.19)$$

Le tenseur diélectrique $B^\ell = (B_{ij}^\ell) : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) B^\ell(x; E) = (B_{ij}^\ell(x) E_j), \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \\ (b) B_{ij}^\ell = B_{ji}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), 1 \leq i, j \leq d. \\ (c) \text{ Il existe } M_{B^\ell} > 0 \text{ telle que } B^\ell E \cdot E \geq M_{B^\ell} |E|^2, \\ \quad \forall E = (E_j) \in \mathbb{R}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.1.20)$$

Le tenseur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell) : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ vérifie:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \mathcal{E}^\ell(x, \tau) = (e_{ijk}^\ell(x) \tau_{jk}), \forall \tau = (\tau_{jk}) \in \mathbb{S}^d, p.p.x \in \Omega^\ell. \\ (b) e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), 1 \leq i, k, j \leq d. \end{array} \right. \quad (2.1.21)$$

La fonction constitutive non linéaire $\psi^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_{\psi^\ell} > 0 \text{ tels que} \\ \quad |\psi^\ell(x, \varepsilon_1, \beta_1, \theta_1) - \psi^\ell(x, \varepsilon_2, \beta_2, \theta_2)| \leq M_{\psi^\ell} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\beta_1 - \beta_2| + |\theta_1 - \theta_2|) \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, p.p.x \in \Omega^\ell. \\ (b) \psi^\ell(., \varepsilon, \beta, \theta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in \mathbb{R}. \\ (c) \psi^\ell(., 0, 0, 0) \in L^2(\Omega^\ell). \end{array} \right. \quad (2.1.22)$$

La fonction source d'endommagement $\mathcal{S}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_{\mathcal{S}^\ell} > 0 \text{ tels que} \\ \quad |\mathcal{S}^\ell(x, \varepsilon_1, \beta_1, \theta_1) - \mathcal{S}^\ell(x, \varepsilon_2, \beta_2, \theta_2)| \leq M_{\mathcal{S}^\ell} (|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\beta_1 - \beta_2| + |\theta_1 - \theta_2|) \\ \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}, \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}, p.p.x \in \Omega^\ell. \\ (b) \mathcal{S}^\ell(., \varepsilon, \beta, \theta) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \text{ pour tout } \varepsilon \in \mathbb{S}^d, \beta \in \mathbb{R} \text{ et } \theta \in \mathbb{R}. \\ (c) \mathcal{S}^\ell(., 0, 0, 0) \in L^2(\Omega^\ell). \end{array} \right. \quad (2.1.23)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_\nu > 0 \text{ tels que } |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq M_\nu (|r_1 - r_2|) \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, p.p.x \in \Gamma_3. \\ (b) \text{ } p_\nu(., r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ (c) \text{ } p_\nu(x, r) = 0 \quad \forall r \leq 0, p.p.x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.1.24)$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } M_\tau > 0 \text{ tels que } |p_\tau(x, r_1) - p_\tau(x, r_2)| \leq M_\tau (|r_1 - r_2|) \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, p.p.x \in \Gamma_3. \\ (b) \text{ Il existe } m_\tau > 0 \text{ tels que } |p_\tau(x, r)| \leq m_\tau ; \forall r \in \mathbb{R}, p.p.x \in \Gamma_3. \\ (c) \text{ } p_\tau(., r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3 \text{ pour tout } r \in \mathbb{R}. \\ (d) \text{ } p_\tau(., 0) \in L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (2.1.25)$$

Le tenseur de la relaxation $M^\ell = (M_{ij}^\ell)$ satisfait:

$$M^\ell \in C(0, T; \mathcal{H}) \quad (2.1.26)$$

La densité de masse ρ^ℓ satisfait :

$$\rho^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \text{ il existe } \rho_0^\ell > 0 \text{ telle que } \rho^\ell(x) \geq \rho_0^\ell, p.p.x \in \Omega^\ell, \ell = 1, 2. \quad (2.1.27)$$

On suppose que les forces volumiques f_0^ℓ et les tractions surfaciques f_2^ℓ , et les charges électriques volumiques q_0^ℓ et surfaciques q_2^ℓ ont les régularités:

$$f_0^\ell \in L^2(0, T; H), \quad f_2^\ell \in L^2\left(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d\right), \quad (2.1.28)$$

$$q_0^\ell \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)), \quad (2.1.29)$$

$$q_2^\ell(t) = 0 \text{ sur } \Gamma_3, \forall t \in [0, T]. \quad (2.1.30)$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν, γ_τ et ε_a vérifient:

$$\gamma_\nu, \gamma_\tau \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \varepsilon_a \in L^2(\Gamma_3), \quad \varepsilon_a, \gamma_\nu, \gamma_\tau \geq 0, p.p. \text{ sur } \Gamma_3. \quad (2.1.31)$$

Le champ initial des déplacements satisfait:

$$u_0^\ell \in V^\ell, \quad v_0 \in H, \quad (2.1.32)$$

et le champ initial d'adhésion satisfait :

$$\alpha_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \alpha_0 \leq 1, \quad p.p. \text{ sur } \Gamma_3. \quad (2.1.33)$$

Enfin, le champ initial d'endommagement vérifie:

$$\beta_0^\ell \in K^\ell. \quad (2.1.34)$$

Nous énonçons maintenant quelques définitions qu'on utilise dans la suite de ce chapitre.

D'abord, nous définissons la forme bilinéaire $a : H^\ell(\Omega^\ell) \times H^\ell(\Omega^\ell) \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a(\xi, \varphi) = k^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \xi \cdot \nabla \varphi dx, \\ a_0(\xi, \varphi) = \sum_{l=1}^2 k_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \xi^\ell \cdot \nabla \varphi^\ell dx + \sum_{l=1}^2 c \int_{\Gamma^\ell} \xi^\ell \cdot \varphi^\ell da, \\ a_1(\xi, \varphi) = \sum_{l=1}^2 k_1^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \xi^\ell \cdot \nabla \varphi^\ell dx. \end{cases} \quad (2.1.35)$$

Nous utiliserons le produit scalaire modifié sur $H = L^2(\Omega^\ell)^d$ donné par :

$$((u, v))_H = \sum_{l=1}^2 (\rho^\ell u^\ell, v^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall u^\ell, v^\ell \in H, \quad (2.1.36)$$

et soit $||| \cdot |||_H$ la norme associée, c'est-à-dire:

$$|||v|||_H = ((v, v))_H = \sum_{l=1}^2 (\rho^\ell v^\ell, v^\ell)_{H^\ell}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H.$$

De (2.1.27) il vient que $||| \cdot |||_H$ et $\| \cdot \|_H$ sont des normes équivalentes sur H . D'autre part, l'application d'inclusion de $(V, \| \cdot \|_V)$ dans $(H, \| \cdot \|_H)$ est continue et dense. Nous notons par V' le dual de V . Identifiant le dual de H avec lui même, donc, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$V \subset H \subset V'.$$

La notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ désigne le produit de dualité entre V' et V , nous notons par $\| \cdot \|_{V'}$ la norme sur V' , nous avons

$$(u, v)_{V' \times V} = ((u, v))_H, \quad \forall u \in H, \forall v \in V. \quad (2.1.37)$$

On définit la fonction $f(t) \in V'$ par

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot v^\ell da, \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \quad (2.1.38)$$

et la fonction $q : [0, T] \rightarrow W$ par

$$(q(t), \phi)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T], \quad (2.1.39)$$

Les conditions (2.1.28) et (2.1.29) impliquent

$$f \in L^2(0, T; V'), \quad q \in C(0, T; W). \quad (2.1.40)$$

Soit $J_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la fonctionnelle d'adhésion

$$J_{ad}(\alpha, u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu([u_\nu]) \cdot [v_\nu] da + \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \alpha^2 R_\nu([u_\nu]) \cdot [v_\nu] + p_\tau(\alpha) R_\tau([u_\tau]) \cdot [v_\tau]) da, \quad (2.1.41)$$

conditions (2.1.24) et (2.1.25) entraînant que l'intégrale (2.1.41) est bien définie.

2.2 Formulation variationnelle

A l'aide des formules de Green on voit directement que si u , σ et α sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (2.1.5), (2.1.7), (2.1.9) et (2.1.10) avec (2.1.41) pour tout $t \in [0, T]$ on déduit que:

$$(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (Div \sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in H_1^\ell.$$

On a

$$\int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(v^\ell) dx + \int_{\Omega^\ell} Div \sigma^\ell \cdot v^\ell dx = \int_{\Gamma_1^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da + \int_{\Gamma_2^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da + \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell.$$

La formule de Green pour $\ell = 1$:

$$\int_{\Omega^1} \sigma^1 \varepsilon(v^1) dx + \int_{\Omega^1} Div \sigma^1 \cdot v^1 dx = \int_{\Gamma_1^1} \sigma^1 \nu^1 \cdot v^1 da + \int_{\Gamma_2^1} \sigma^1 \nu^1 \cdot v^1 da + \int_{\Gamma_3^1} \sigma^1 \nu^1 \cdot v^1 da, \quad \forall v^1 \in V^1. \quad (2.2.1)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$:

$$\int_{\Omega^2} \sigma^2 \varepsilon(v^2) dx + \int_{\Omega^2} Div \sigma^2 \cdot v^2 dx = \int_{\Gamma_1^2} \sigma^2 \nu^2 \cdot v^2 da + \int_{\Gamma_2^2} \sigma^2 \nu^2 \cdot v^2 da + \int_{\Gamma_3^2} \sigma^2 \nu^2 \cdot v^2 da, \quad \forall v^2 \in V^2, \quad (2.2.2)$$

à addition (2.2.1) et (2.2.2)

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(v^\ell) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div } \sigma^\ell \cdot v^\ell dx = \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_1^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après (2.1.5), et (2.1.7)-(2.1.10) on a:

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(v^\ell) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} (\rho^\ell \ddot{u}^\ell - f_0^\ell) \cdot v^\ell dx = \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot v^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \rho^\ell \ddot{u}^\ell \cdot v^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot v^\ell dx = \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot v^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\rho^\ell \ddot{u}^\ell, v^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot v^\ell dx = \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot v^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après les définition de produit scalaire on a:

$$\sum_{\ell=1}^2 (\rho^\ell \ddot{u}^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = ((\ddot{u}, v))_{H^\ell} = (\ddot{u}, v)_{V' \times V}, \quad \forall \ddot{u} \in H, \forall v \in V.$$

Donc:

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\ddot{u}, v)_{V' \times V} = \\ & \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot v^\ell da + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après (2.1.38)

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot v^\ell da.$$

En suite:

$$\sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\ddot{u}, v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell.$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da = ?$:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da &= \int_{\Gamma_3} \sigma^1 \nu^1 \cdot v^1 da + \int_{\Gamma_3} \sigma^2 \nu^2 \cdot v^2 da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau (v_\tau^1 - v_\tau^2) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu^1 - v_\nu^2) da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau [v_\tau] da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu [v_\nu] da \\ &= - \int_{\Gamma_3} p_\tau(\alpha) R_\tau([u_\tau]) \cdot [v_\tau] da + \int_{\Gamma_3} ((\gamma_\nu \alpha^2 R_\nu([u_\nu]) - p_\nu([u_\nu])) \cdot [v_\nu]) da, \end{aligned}$$

alors:

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da = -J_{ad}(\alpha, u, v).$$

Donc:

$$\sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\ddot{u}, v)_{V' \times V} + J_{ad}(\alpha((t)), u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V}, \quad \forall v \in V, \quad (2.2.3)$$

et de (2.1.1), on obtient:

$$\begin{aligned} (\ddot{u}, v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \beta^\ell, \theta^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \\ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t M^\ell(t-s) \varepsilon(u^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^{\ell, \varepsilon}(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + \\ J_{ad}(\alpha((t)), u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V}, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

En utilise la formule de Green pour les inconnues électrique du problème ainsi que les conditions (2.1.6), (2.1.15) et la définition (2.1.39) on a:

$$(D^\ell, \nabla \phi^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div } D^\ell, \phi^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell,$$

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div } D^\ell \cdot \phi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \phi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \phi^\ell da, \quad \forall \phi^\ell \in H_1^\ell.$$

La formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} D^1 \cdot \nabla \phi^1 dx + \int_{\Omega^1} \text{Div } D^1 \cdot \phi^1 dx = \int_{\Gamma_a^1} D^1 \nu^1 \cdot \phi^1 da + \int_{\Gamma_b^1} D^1 \nu^1 \cdot \phi^1 da, \quad \forall \phi^1 \in H_1^1. \quad (2.2.5)$$

La formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} D^2 \cdot \nabla \phi^2 dx + \int_{\Omega^2} \text{Div } D^2 \cdot \phi^2 dx = \int_{\Gamma_a^2} D^2 \nu^2 \cdot \phi^2 da + \int_{\Gamma_b^2} D^2 \nu^2 \cdot \phi^2 da, \quad \forall \phi^2 \in H_1^2. \quad (2.2.6)$$

Pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (2.1.14) :

$$\int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \phi^\ell da = 0,$$

à addition (2.2.5) et (2.2.6) on a:

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \text{Div } D^\ell \cdot \phi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \phi^\ell da.$$

On a d'après (2.1.6) et (2.1.15) :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \phi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^2 \cdot \phi^\ell dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da, \\ \sum_{\ell=1}^2 (D^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^2 \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da &= 0. \end{aligned}$$

On a d'après (2.1.39) :

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^2 \cdot \phi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \phi^\ell da = (q(t), \phi)_W.$$

Donc:

$$\sum_{\ell=1}^2 (D^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} + (q(t), \phi)_W = 0.$$

De (2.1.2) , on obtient:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (B^\ell \nabla \varphi^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell_\varepsilon(u^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = \\ (q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Enfin, pour tout $t \in [0, T]$ et de (2.1.3) et (2.1.12), on obtient:

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\theta}^\ell(t), v^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - K_0^\ell (\Delta \theta^\ell(t), v^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} - c (\theta^\ell(t), v^\ell)_{L^2(\Gamma^\ell)} = \\ & \left(\psi^\ell (\varepsilon (u^\ell(t)), \beta^\ell(t), \theta^\ell(t)), v^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + (q^\ell(t), v^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall v^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green avec et (2.1.35), on trouve:

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\theta}^\ell(t), v^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - a_0 (\theta(t), v)_{L^2(\Omega^\ell)} = \\ & \left(\psi^\ell (\varepsilon (u^\ell(t)), \beta^\ell(t), \theta^\ell(t)), v^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + (q^\ell(t), v^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall v^\ell \in V^\ell. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Enfin, soit $\beta^\ell(t) \in K^\ell$ et pour tout $t \in [0, T]$. De la **définition** (1.2.15) de $\partial \Psi_{K^\ell}(\beta^\ell)$ et de (2.1.4), on obtient:

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\beta}^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - K_1^\ell (\Delta \beta^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)} \\ & \geq (\mathcal{S}^\ell (\varepsilon (u^\ell(t)), \beta^\ell(t), \theta^\ell(t)), \xi^\ell - \beta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall \xi^\ell \in K^\ell, \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green avec (2.1.13) et (2.1.35), on trouve:

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\beta}^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - a_1 (\beta(t), \xi - \beta(t))_{L^2(\Omega^\ell)} \\ & \geq (\mathcal{S}^\ell (\varepsilon (u^\ell(t)), \beta^\ell(t), \theta^\ell(t)), \xi^\ell - \beta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall \xi^\ell \in K^\ell. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

De (2.2.4), (2.2.8) et (2.2.9), (2.1.11) et (2.1.16), (2.1.17), on obtient la formulation variationnelle du problème **P**.

Problème PV. Trouver le champ de déplacements $u = (u^1, u^2) : [0, T] \rightarrow V$, le champ des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, le potentiel électrique $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2) : [0, T] \rightarrow W$, le champ de déplacement électrique $D = (D^1, D^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$, le champ d'endommagement $\beta = (\beta^1, \beta^2) : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega^\ell)$, le champs de temperature $\theta = (\theta^1, \theta^2) : [0, T] \rightarrow H^1(\Omega^\ell)$, et le champ d'adhésion $\alpha : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$, tels que:

$$\left\{ \begin{aligned} & (\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell (\varepsilon(u^\ell(t)), \beta^\ell, \theta^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \\ & \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t M^\ell(t-s) \varepsilon(u^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi^\ell(t), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \\ & J_{ad}(\alpha(t), u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V}, \forall v \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \right. \quad (2.2.10)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dot{\theta}^\ell(t), v^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - a_0(\theta(t), v)_{L^2(\Omega^\ell)} = \\ \left(\psi^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \beta^\ell(t), \theta^\ell(t)), v^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + (q^\ell(t), v^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall v^\ell \in V^\ell, \end{array} \right. \quad (2.2.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dot{\beta}^\ell(t), \xi^\ell - \beta^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - a_1(\beta(t), \xi - \beta(t)) \\ \geq (\mathcal{S}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \beta^\ell(t), \theta^\ell(t)), \xi^\ell - \beta^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall \xi^\ell \in K^\ell, \end{array} \right. \quad (2.2.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\ell=1}^2 (B^\ell \nabla \varphi^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = \\ (q(t), \phi)_W, \forall \phi \in W, t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (2.2.13)$$

$$\dot{\alpha} = - \left(\alpha [\gamma_\nu(R_\nu([u_\nu]))^2 + \gamma_\tau |R_\tau([u_\tau])|^2 - \varepsilon_a] \right)_+, p.p. \ t \in [0, T], \quad (2.2.14)$$

$$u^\ell(0) = u_0^\ell, \dot{u}^\ell(0) = v_0^\ell, \alpha^\ell(0) = \alpha_0^\ell, \beta^\ell(0) = \beta_0^\ell, \theta^\ell(0) = \theta_0^\ell. \quad (2.2.15)$$

2.3 Existence et unicité de la solution

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel **PV**.

Theoreme 2.3.1 *Sous les hypothèses (2.1.18)-(2.1.34), le problème **PV** admet une solution unique $\{u, \sigma, \varphi, \alpha, \beta, \theta, D\}$ ayant la régularité suivante:*

$$u \in H^1(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (2.3.1)$$

$$\varphi \in C(0, T; W), \quad (2.3.2)$$

$$\beta \in H^1(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1), \quad (2.3.3)$$

$$\theta \in H^1(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1), \quad (2.3.4)$$

$$\alpha \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}. \quad (2.3.5)$$

Les fonctions $(u, \sigma, \varphi, \alpha, \beta, \theta, D)$ qui satisfaisant (2.1.1)-(2.1.2) et (2.2.10) – (2.2.15) s'appellent une solution faible du problème P. Nous concluons que sous les hypothèses

(2.1.18)-(2.1.34), le problème mécanique (2.1.1)-(2.1.17) a une solution faible unique qui satisfait (2.3.1)-(2.3.5). La régularité de la solution faible est donnée par (2.3.1)-(2.3.5) et en termes de contraintes:

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \operatorname{Div} \sigma \in L^2(0, T; V'), \quad (2.3.6)$$

$$D \in C(0, T; W). \quad (2.3.7)$$

En effet, de (2.2.10) et (2.2.13), il vient que $\rho^\ell \ddot{u}^\ell = \operatorname{Div} \sigma^\ell(t) + f_0^\ell(t)$, $\operatorname{div} D^\ell(t) = q_0^\ell(t)$ pour tout $t \in [0, T]$, De la régularité (2.3.1) et (2.3.2) de u et φ combinée avec (2.1.1)-(2.1.2) et (2.1.18)-(2.1.29), on obtient (2.3.6) et (2.3.7).

Preuve. La démonstration du **théorème 2.3.1** sera faite en plusieurs étapes, elle est basée sur les résultats des inéquations variationnelles, les opérateurs monotones et les arguments du point fixe. Nous supposons dans la suite de cette section que (2.1.18)-(2.1.34) sont vérifiés, C désigne une constante positive qui dépend de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \gamma_\nu, \gamma_\tau$, et L dont la valeur peut changer d'un endroit à un autre.

Dans la première étape nous considérons le problème auxiliaire suivant pour le champ de déplacement, dans lequel $\eta \in L^2(0, T; V')$ est donné.

Problème $\mathbf{PV}_\eta^u$. Trouver le champ des déplacements $u_\eta = (u_\eta^1, u_\eta^2) : [0, T] \rightarrow V$ tels que:

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_\eta^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\eta(t), v)_{V' \times V} \\ & = (f(t), v)_{V' \times V}, \forall v \in V, p.p. t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

$$u_\eta^\ell(0) = u_0^\ell, \dot{u}_\eta^\ell(0) = v_0^\ell, \text{ sur } \Omega^\ell. \quad (2.3.9)$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemma 2.3.1 *Il existe une unique solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^u$ qui satisfait (2.3.1).*

Preuve. Nous définissons l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par:

$$(Au, v)_{V \times V'} = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u_\eta^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \forall u, v \in V. \quad (2.3.10)$$

En utilisant maintenant (2.3.10) et 2.1.18 (a), il s'ensuit que:

$$\|Au - Av\|_{V'}^2 \leq \sum_{\ell=1}^2 \|\mathcal{A}^\ell_\varepsilon(u^\ell) - \mathcal{A}^\ell_\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \leq C \|u - v\|_V^2, \forall u, v \in V, \quad (2.3.11)$$

ce qui implique que $A : V \rightarrow V'$ est continu. Maintenant, par (2.3.10) et (2.1.18) (b), on obtient:

$$(Au - Av, u - v)_{V \times V'} \geq m \|u - v\|_V^2, \forall u, v \in V, \quad (2.3.12)$$

où $m = \min \{m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}\}$; i.e. $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur monotone. On prend $v = 0$ dans (2.3.12) et on obtient:

$$(Au, u)_{V \times V'} \geq m \|u\|_V^2 - \|A_0\|_{V'}^2 \|u\|_V, \forall u \in V,$$

$$(Au, u)_{V \times V'} \geq \frac{1}{2} m \|u\|_V^2 - \frac{1}{2m} \|A_0\|_{V'}^2, \forall u \in V,$$

Ainsi A satisfait la condition (1.2.14) avec $\omega = \frac{1}{2}m$ et $\lambda = -\frac{1}{2m} \|A_0\|_{V'}^2$. De plus à l'aide de (2.3.11) nous déduisons que:

$$\|Au\|_{V'} \leq C^1 \|u\|_V + C^2, \forall u \in V.$$

Cette inégalité implique que l'opérateur A satisfait la condition (1.2.17). Finalement, nous rappelons que par (2.1.28), (2.1.29) et (2.1.32), (2.1.33), (2.1.34) nous avons $f - \eta \in L^2(0, T; V')$ et $v_0 \in H$. Il vient du **Théorème 1.2.6** qu'il existe une unique fonction qui satisfait:

$$v_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{v}_\eta \in L^2(0, T; V'), \quad (2.3.13)$$

$$\dot{v}_\eta(t) + Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t), p.p. t \in [0, T], \quad (2.3.14)$$

$$v_\eta(0) = v_0. \quad (2.3.15)$$

Soit $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ est une fonction définie par:

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.16)$$

On déduit de (2.3.10) et (2.3.13)-(2.3.16) que u_η est la solution unique du problème $\mathbf{PV}_\eta^u$ tel que (2.3.1) est vérifiée. Ceci conclut la partie d'existence du **Lemma 2.3.1**. La partie unicité découle de l'unicité de la solution du problème (2.3.13)-(2.3.15), garantie par le **Théorème 1.2.6**.

Dans la deuxième étape, nous utilisons aussi le champ de déplacement u_η obtenu dans le **lemma2.3.1** pour construire le problème variationnel suivant.

Problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$. Trouver le potentiel électrique $\varphi_\eta = (\varphi_\eta^1, \varphi_\eta^2) : [0, T] \rightarrow W$ tels que:

$$\sum_{\ell=1}^2 (B^\ell \nabla \varphi_\eta^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \phi)_W, \forall \phi \in W, t \in [0, T]. \quad (2.3.17)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemma 2.3.2 *Le problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$ possède une solution unique qui satisfait la régularité (2.3.2).*

Preuve. Soit $b(., .) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par:

$$b(\varphi, \phi) = \sum_{\ell=1}^2 (B^\ell \nabla \varphi^\ell, \nabla \phi^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall \varphi, \phi \in W. \quad (2.3.18)$$

Nous utilisons (2.3.18), (1.2.9) et (2.1.20) pour déduire que $b(., .)$ est continue, symétrique et coercive. En outre, nous appliquons le théorème de représentation de Riesz pour définir la fonction $q_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que:

$$(q(t), \phi)_W = (q_\eta^\ell(t), \phi^\ell)_{W^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall \phi \in W, t \in [0, T].$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram on obtient l'existence et l'unicité $\varphi_\eta(t) \in W$ tel que:

$$b(\varphi_\eta(t), \phi) = (q(t), \phi)_W, \quad \forall \phi \in W. \quad (2.3.19)$$

Nous concluons que $\varphi_\eta(t)$ est une solution du Problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$. Pour $t_1, t_2 \in [0, T]$, en utilisant des arguments basés sur (2.3.17) nous trouvons:

$$\|\varphi_\eta(t_1) + \varphi_\eta(t_2)\|_W \leq C (\|u_\eta(t_1) + u_\eta(t_2)\|_V + \|q(t_1) + q(t_2)\|_W). \quad (2.3.20)$$

Comme $u_\eta \in C^1(0, T; H)$ et $q \in C(0, T; W)$ nous déduisons de l'inégalité (2.3.20) que $\varphi_\eta \in C(0, T; W)$.

Problème $\mathbf{PV}_\lambda^\theta$. Trouver le champ de température $\theta_\lambda = (\theta_\lambda^1, \theta_\lambda^2) : [0, T] \rightarrow E_0$ tel que:

$$\sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\theta}_\lambda^\ell(t), v^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - a_0(\theta_\lambda(t), v)_{L^2(\Omega^\ell)} = \sum_{\ell=1}^2 (\lambda^\ell(t) + q^\ell(t), v^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall v^\ell \in V^\ell, \quad (2.3.21)$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0. \quad (2.3.22)$$

Lemma 2.3.3 *pour tout $\lambda \in H^1(0, T; E'_1)$, Le problème $\mathbf{PV}_\lambda^\theta$ admet une solution unique θ_λ qui satisfait :*

$$\theta_\lambda \in H^1(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1),$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0.$$

Preuve. L'application d'inclusion de $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ dans $(E_0, \|\cdot\|_{E_0})$ est continue et à image dense. Notant par E'_1 l'espace dual de E_1 et identifiant le dual de E_0 avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$E_1 \subset E_0 = E'_0 \subset E'_1.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{E'_1 \times E_1}$ pour désigner le produit de dualité entre E'_1 et E_1 , nous avons:

$$(\theta, \xi)_{E'_1 \times E_1} = (\theta, \xi)_{E_0}, \quad \forall \theta \in E_0, \xi \in E_1. \quad (2.3.23)$$

Pour tout $\phi, \xi \in E_1$, on a:

$$a_0(\phi, \xi) = a_0(\xi, \phi).$$

Nous utilisons (2.3.23) et la définitions (2.1.35), en utilisant l'inégalité de Hölder et pour tout $\phi, \xi \in E_1$, on a:

$$\|a_0(\phi, \xi)\| \leq k_0 \|\nabla \phi\|_H \|\nabla \xi\|_H + k_2 \|\phi\|_{L^2(\Gamma)} \|\xi\|_{L^2(\Gamma)}, \quad (2.3.24)$$

Gardant en tête théorème (trace de sobolev), l'inégalité (2.3.24) devient:

$$\|a_0(\phi, \xi)\|_{E_0} \leq C' \|\phi\|_{E_1} \|\xi\|_{E_1}, \quad (2.3.25)$$

donc, a_0 est continue et donc hemicontinu.

D'après la définitions (2.3.23) on vérifie:

$$a_0(\phi, \phi) \geq 0,$$

i.e, que a_0 est monotone.

D'autre part, moyennant (2.3.24), comme $k_2 > 0$ et pour tout $\xi \in E_1$, on a:

$$a_0(\phi, \phi) \geq k_0 \|\nabla \phi\|_H,$$

et d'où

$$a_0(\phi, \phi) \geq k_0 \|\phi\|_{E_1}^2 - k_0 \|\phi\|_{E_0}^2.$$

Alors, a_0 satisfait la conditions (1.2.16) du **théorème 1.2.7** avec $C = k_0$ et $\lambda = -k_0 \|\phi\|_{E_0}^2$.

Ensuite, de (2.3.25) nous déduisons que a_0 conditions (1.2.17).

Il s'ensuit maintenant de la régularité (2.1.40) et $\theta_0 \in E_0$, $\lambda \in H^1(0, T; E_1')$ que $q_\lambda = \lambda + q \in H^1(0, T; E_0)$.

Finalement, nous remarquons que toutes les condions du **théorème 1.2.7** sont vérifiées, donc nous concluons qu'il existe une uniquee fonctions θ_λ qui satisfait:

$$\theta_\lambda \in H^1(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1),$$

$$\dot{\theta}_\lambda(t) + a_0 \theta_\lambda(t) = q_\lambda(t),$$

$$\theta_\lambda(0) = \theta_0.$$

Dans la quatrième étape, soit $\varsigma \in C(0, T; E_0)$. On considère alors pour le champ d'endommagement le problème variationnel suivant.

Problème PV_ς^β . Trouver le champ d'endommagement $\beta_\varsigma = (\beta_\varsigma^1, \beta_\varsigma^2) : [0, T] \rightarrow E_0$ tel que:

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\beta}_\varsigma^\ell(t), \xi^\ell - \beta_\varsigma^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - a_1(\beta_\varsigma(t), \xi - \beta_\varsigma(t)) \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\varsigma^\ell(t), \xi^\ell - \beta_\varsigma^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall \xi = (\xi^1, \xi^2) \in K^\ell, p.p. t \in [0, T], \\ & \beta_\varsigma(0) = \beta_0. \end{aligned} \tag{2.3.26}$$

Où $K = K^1 \times K^2$.

On a le résultat suivant.

Lemma 2.3.4 *Le problème PV_ς^β admet une solution unique telle que:*

$$\beta_\varsigma \in H^1(0, T; E_0) \cap L^2(0, T; E_1).$$

Preuve. L'application d'inclusion de $(E_1, \|\cdot\|_{E_1})$ dans $(E_0, \|\cdot\|_{E_0})$ est continue et à image dense. Notant par E'_1 l'espace dual de E_1 et identifiant le dual de E_0 avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$E_1 \subset E_0 = E'_0 \subset E'_1.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{E'_1 \times E_1}$ pour désigner le produit de dualité entre E'_1 et E_1 , nous avons:

$$(\beta, \xi)_{E'_1 \times E_1} = (\beta, \xi)_{E_0}, \quad \forall \beta \in E_0, \xi \in E_1.$$

On sait que l'ensemble des endommagements admissibles K est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans E_1 . Ainsi, le champ d'endommagement initial $\beta_0 \in K$. Maintenant, en utilisant la définition (2.1.35) de la forme bilinéaire a , pour tout $\phi, \xi \in E_1$, on a:

$$a_1(\phi, \xi) = a_1(\xi, \phi)$$

et

$$\|a_1(\phi, \xi)\| \leq 3k_1 \|\nabla \phi\|_H \|\nabla \xi\|_H$$

alors

$$\|a_1(\phi, \xi)\| \leq c \|\phi\|_{H^1} \|\xi\|_{H^1},$$

donc, a_1 est continue et symétrique. Ainsi, pour tout $\phi \in E_1$, nous avons:

$$\|a_1(\phi, \phi)\| \leq k_1 \|\nabla \phi\|_H^2,$$

et d'où

$$a_1(\phi, \phi) + c_0 \|\phi\|_{E_0}^2 \geq c_1 \|\phi\|_{E_1}^2, \quad \text{avec } c_0 = k_1 + 1, c_1 = k_1.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du **théorème 1.2.9** sont vérifiées. Ce qui conclut la preuve du **lemma 2.3.4**.

Dans la prochaine étape, nous utilisons encore la solution u_η obtenue dans le **Lemma 2.3.1**, notons par $u_{\eta\nu}$ et $u_{\eta\tau}$ ses composantes normales et tangentiellles, respectivement, et construisons le problème de Cauchy suivant pour le champ d'adhésion.

Problème PV_η^α . Trouver le champ d'adhésion $\alpha_\eta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que:

$$\dot{\alpha}_\eta(t) = - \left(\alpha_\eta(t) \left[\gamma_\nu(R_\nu([u_{\eta\nu}(t)])) \right]^2 + \gamma_\tau |R_\tau([u_{\eta\tau}(t)])|^2 - \varepsilon_a \right)_+, \quad p.p. \quad t \in [0, T], \quad (2.3.27)$$

$$\alpha_\eta(0) = \alpha_0. \quad (2.3.28)$$

Nous avons le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemma 2.3.5 *Il existe une solution unique du Problème $\mathbf{PV}_\eta^\alpha$ et cela satisfait:*

$$\alpha_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3) \cap \mathcal{Z}).$$

Preuve. Pour la simplicité, nous supprimons la dépendance de diverses fonctions sur Γ_3 , et notée que les égalités et inégalités ci-dessous sont valables *p.p.* sur Γ_3 . Considérer l'application $F_\eta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ défini par:

$$F_\eta(t, \alpha) = - \left(\alpha_\eta \left[\gamma_\nu (R_\nu([u_{\eta\nu}(t)])) \right]^2 + \gamma_\tau |R_\tau([u_{\eta\tau}(t)])|^2 - \varepsilon_a \right)_+, \quad (2.3.29)$$

pour tout $t \in [0, T]$ et $\alpha \in L^2(\Gamma_3)$. Il résulte des propriétés de l'opérateur de troncature R_ν et R_τ que F_η Lipschitz est continue par rapport à la seconde variable, de manière uniforme dans le temps. En outre, pour tous $\alpha \in L^2(\Gamma_3)$, l'application $t \rightarrow F_\eta(t, \alpha)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Ainsi, en utilisant le théorème de Cauchy-Lipschitz donné dans le **théorème 1.2.6** on en déduit qu'il existe une fonction unique $\alpha_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ solution au problème $\mathbf{PV}_\eta^\alpha$. Aussi, les arguments utilisés dans la **remarque 1.1.1** montrent que $0 \leq \alpha_\eta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, *p.p.* sur Γ_3 . Par conséquent, à partir de la définition de l'ensemble $\mathcal{Z}$ nous trouvons que $\alpha_\eta(t) \in \mathcal{Z}$, qui conclut la preuve du lemme.

Maintenant, pour chaque $(\eta, \varsigma) \in L^2(0, T; V' \times E_0)$ et $\lambda \in H^1(0, T; E'_1)$, nous notons par u_η la solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^u$ fournie dans le **Lemma 2.3.1**, par φ_η la solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^\varphi$ fournie dans le **Lemma 2.3.2**, par θ_λ la solution du problème $\mathbf{PV}_\lambda^\theta$ fournie dans le **Lemma 2.3.3**, et par β_ς la solution du problème $\mathbf{PV}_\varsigma^\alpha$ fournie dans le **Lemma 2.3.4**, par α_η la solution du problème $\mathbf{PV}_\eta^\alpha$ fournie dans le **Lemma 2.3.5**.

En outre, nous appliquons le théorème de représentation de Riesz pour définir la fonction $\Lambda : L^2(0, T; V' \times E_0 \times E_0) \rightarrow L^2(0, T; V' \times E_0 \times E_0)$ par:

$$\Lambda(\eta, \lambda, \varsigma)(t) = (\Lambda^0(\eta, \lambda, \varsigma)(t), \Lambda^1(\eta, \lambda, \varsigma)(t), \Lambda^2(\eta, \lambda, \varsigma)(t)) \in V' \times E_0 \times E_0, \quad (2.3.30)$$

avec:

$$(\Lambda^0(\eta, \lambda, \varsigma)(t), v)_{V' \times V} = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \beta_\varsigma^\ell, \theta_\lambda^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + J_{ad}(\alpha_\eta(t), u_\eta(t), v)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t M^\ell(t-s) \varepsilon(u_\eta^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_\eta^\ell(t), \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell}, \forall v \in V, \quad (2.3.31)$$

$$\Lambda^1((\eta, \lambda, \varsigma))(t) = \psi^\ell(\varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \beta_\varsigma^\ell(t), \theta_\lambda^\ell(t)), \quad (2.3.32)$$

$$\Lambda^2((\eta, \lambda, \varsigma))(t) = \mathcal{S}^\ell(\varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \beta_\varsigma^\ell(t), \theta_\lambda^\ell(t)). \quad (2.3.33)$$

Lemma 2.3.6 *L'opérateur Λ a un unique point fixe $(\eta^*, \lambda^*, \varsigma^*) \in C(0, T; V' \times E_0 \times E_0)$ telle que :*

$$\Lambda(\eta^*, \lambda^*, \varsigma^*) = (\eta^*, \lambda^*, \varsigma^*).$$

Preuve. Nous montrons que pour un nombre entier positif m , la puissance m ième de l'opérateur, notée Λ^m est une contraction de $C(0, T; V' \times E_0 \times E_0)$. Soient $(\eta_1, \lambda_1, \varsigma_1), (\eta_2, \lambda_2, \varsigma_2) \in C(0, T; V' \times E_0 \times E_0)$ et par simplicité, nous utilisons les notations $u_{\eta i} = u_i, \dot{u}_{\eta i} = v_i, \varphi_{\eta i} = \varphi_i, \theta_{\lambda i} = \theta_i, \beta_{\varsigma i} = \beta_i, \alpha_{\eta i} = \alpha_i$ pour $i = 1, 2$.

En utilisant (2.1.19) et (2.1.21)-(2.1.26), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|\Lambda^0(\eta_1, \lambda_1, \varsigma_1)(t) - \Lambda^0(\eta_2, \lambda_2, \varsigma_2)(t)\|_{V'}^2 &\leq \sum_{\ell=1}^2 \|\mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u_1^\ell(t)), \beta_1^\ell, \theta_1^\ell) - \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u_2^\ell(t)), \beta_2^\ell, \theta_2^\ell)\|_{\mathcal{H}^{\ell'}}^2 \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \left\| \int_0^t M^\ell(t-s) \varepsilon(u_1^\ell(s) - u_2^\ell(s)) ds \right\|_{\mathcal{H}^{\ell'}}^2 + \sum_{\ell=1}^2 \left\| (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_1^\ell(t) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_2^\ell(t) \right\|_{\mathcal{H}^{\ell'}}^2 \\ &+ C \|p_\nu([u_{1\nu}(t)]) - p_\nu([u_{2\nu}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 + C \|\alpha_1^2(t) R_\nu([u_{1\nu}(t)]) - \alpha_2^2(t) R_\nu([u_{2\nu}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &+ C \|p_\tau(\alpha_1(t)) R_\tau([u_{1\tau}(t)]) - p_\tau(\alpha_2(t)) R_\tau([u_{2\tau}(t)])\|_{L^2(\Gamma_3)}^2. \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

et en utilisant la définition de R_ν et R_τ , on a :

$$\begin{aligned} \|\Lambda^0(\eta_1, \lambda_1, \varsigma_1)(t) - \Lambda^0(\eta_2, \lambda_2, \varsigma_2)(t)\|_{V'}^2 &\leq C \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \right. \\ &\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &\left. + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{E_0}^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

D'après l'hypothèse (2.1.22), il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \|\Lambda^1(\eta_1, \lambda_1, \varsigma_1)(t) - \Lambda^1(\eta_2, \lambda_2, \varsigma_2)(t)\|_{E_0}^2 &= \\ \|\psi^\ell(\varepsilon(u_1^\ell(t)), \beta_1^\ell(t), \theta_1^\ell(t)) - \psi^\ell(\varepsilon(u_2^\ell(t)), \beta_2^\ell(t), \theta_2^\ell(t))\|_{E_0}^2 \end{aligned}$$

$$\leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{E_0}^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2). \quad (2.3.36)$$

Nous rappelons que $u_{\eta\nu}^\ell$ et $u_{\eta\tau}^\ell$ représentent les composantes normale et tangentielle de la fonction u_η^ℓ respectivement. Maintenant, de (2.3.33) et (2.1.23), on obtien:

$$\begin{aligned} & \|\Lambda^2(\eta_1, \lambda_1, \varsigma_1)(t) - \Lambda^2(\eta_2, \lambda_2, \varsigma_2)(t)\|_{E_0}^2 = \\ & \|\mathcal{S}^\ell(\varepsilon(u_1^\ell(t)), \beta_1^\ell(t), \theta_1^\ell(t)) - \mathcal{S}^\ell(\varepsilon(u_2^\ell(t)), \beta_2^\ell(t), \theta_2^\ell(t))\|_{E_0}^2 \\ & \leq C(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{E_0}^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2). \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

Alors, depuis (2.3.34)-(2.3.37), on a:

$$\begin{aligned} & \|\Lambda(\eta_1, \lambda_1, \varsigma_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \lambda_2, \varsigma_2)(t)\|_{V' \times E_0 \times E_0}^2 \leq C\left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \right. \\ & \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 + \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ & \left. + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{E_0}^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2\right). \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

D'autre part, de (2.3.8), nous trouvons:

$$\begin{aligned} & (\dot{v}_1 - \dot{v}_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(v_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(v_2^\ell), \varepsilon(v_1^\ell - v_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + (\eta_1 - \eta_2, v_1 - v_2)_{V' \times V} = 0. \end{aligned}$$

Nous intégrons l'égalité précédente par rapport au temps cette relation et, en utilisant les conditions initiales, $v_1(0) = v_2(0) = 0$ et de (2.1.18), nous trouvons:

$$m_{\mathcal{A}^\ell} \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \leq - \int_0^t (\eta_1(s) - \eta_2(s), v_1(s) - v_2(s))_{V' \times V} ds.$$

En utilisant l'inégalité $2ab \leq \frac{a^2}{m_{\mathcal{A}^\ell}} + m_{\mathcal{A}^\ell} b^2$, pour tout $t \in [0, T]$, on a:

$$\int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.39)$$

Nous intégrons maintenant (2.3.27) avec l'état initial (2.3.28) pour obtenir:

$$\alpha_i(t) = \alpha_0 - \int_0^t (\alpha_i(s) [\gamma_\nu R_\nu([u_{i\nu}(s)]) - \gamma_\tau R_\tau([u_{i\tau}(s)])] - \varepsilon_a) + ds.$$

Alors:

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|(\alpha_1(s) [\gamma_\nu R_\nu([u_{1\nu}(s)]) - \gamma_\tau R_\tau([u_{1\tau}(s)])])\|_{L^2(\Gamma_3)} ds +$$

$$C \int_0^t \|(\alpha_2(s) [\gamma_\nu R_\nu([u_{2\nu}(s)])] - \gamma_\tau R_\tau([u_{2\tau}(s)]))\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

En utilisant la définition des opérateurs de troncation R_ν et R_τ et en écrivant que $\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2$, après quelques calculs élémentaires nous trouvons:

$$\begin{aligned} & \|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \\ & C \left(\int_0^t \|\alpha_1(s) - \alpha_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right). \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

Il s'ensuit maintenant d'un argument de type Gronwall que:

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds,$$

et, en utilisant (1.2.8), nous obtenons

$$\|\alpha_1(t) - \alpha_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds, \quad (2.3.41)$$

En utilisant maintenant (2.3.17), (1.2.9), (2.1.20) et (2.3.17), il en découle:

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_W^2 \leq C \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2. \quad (2.3.42)$$

De (2.3.21), nous déduisons que:

$$\left(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2, \theta_1 - \theta_2 \right)_{L^2(\Omega)} + a_0(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2) = (\lambda_1 - \lambda_2, \theta_1 - \theta_2)_{L^2(\Omega)}, p.p. \ t \in [0, T].$$

En intégrant l'inégalité précédente avec les conditions initiales:

$$\theta_1(0) = \theta_0 \text{ et } \theta_2(0) = \theta_0,$$

et en utilisant l'inégalité:

$$a_0(\theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2) \geq 0,$$

on obtient:

$$\frac{1}{2} \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\lambda_1(s) - \lambda_2(s), \theta_1(s) - \theta_2(s))_{L^2(\Omega)} ds.$$

Il vient alors que

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Nous combinons l'inégalité précédente avec le lemme de Gronwall, pour trouver:

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \quad (2.3.43)$$

De (2.3.26), nous déduisons que:

$$\left(\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2, \beta_1 - \beta_2 \right)_{L^2(\Omega)} + a_1(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \leq (\varsigma_1 - \varsigma_2, \beta_1 - \beta_2)_{L^2(\Omega)}, p.p. \ t \in [0, T].$$

En intégrant l'inégalité précédente avec les conditions initiales:

$$\beta_1(0) = \beta_0 \text{ et } \beta_2(0) = \beta_0,$$

et en utilisant l'inégalité:

$$a_0(\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2) \geq 0,$$

on obtient:

$$\frac{1}{2} \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t (\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s), \beta_1(s) - \beta_2(s))_{L^2(\Omega)} ds.$$

Il vient alors que

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Nous combinons l'inégalité précédente avec le lemme de Gronwall, pour trouver:

$$\|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \quad (2.3.44)$$

On sait que:

$$u_i(t) = \int_0^t v_i(s) ds + u_0,$$

donc:

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.45)$$

Nous combinons (2.3.41)-(2.3.45) avec (2.3.38) pour obtenir:

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1, \lambda_1, \varsigma_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \lambda_2, \varsigma_2)(t)\|_{V' \times E_0 \times E_0}^2 &\leq C \left(\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds + \right. \\ &\quad \left. \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{E_0}^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 \right), \end{aligned}$$

donc:

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1, \lambda_1, \varsigma_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \lambda_2, \varsigma_2)(t)\|_{V' \times E_0 \times E_0}^2 &\leq C \left(\int_0^t \|v_1(s) - v_2(s)\|_V^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{E_0}^2 + \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{E_0}^2 \right). \end{aligned}$$

Nous combinons les inégalités (2.3.39), (2.3.43) et (2.3.44) pour obtenir:

$$\begin{aligned} \|\Lambda(\eta_1, \lambda_1, \varsigma_1)(t) - \Lambda(\eta_2, \lambda_2, \varsigma_2)(t)\|_{V' \times E_0 \times E_0}^2 &\leq \\ C \int_0^t \|(\eta_1, \varsigma_1, \lambda_1)(s) - (\eta_2, \varsigma_2, \lambda_2)(s)\|_{V' \times E_0 \times E_0}^2 ds. \end{aligned}$$

En réitérant m fois l'inégalité on obtient:

$$\begin{aligned} \|\Lambda^m(\eta_1, \lambda_1, \varsigma_1)(t) - \Lambda^m(\eta_2, \lambda_2, \varsigma_2)(t)\|_{L^2(0, T; V' \times E_0 \times E_0)}^2 &\leq \\ \frac{C^m T^m}{m!} \|(\eta_1, \lambda_1, \varsigma_1) - (\eta_2, \lambda_2, \varsigma_2)\|_{L^2(0, T; V' \times E_0 \times E_0)}^2. \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

Comme $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{C^m T^m}{m!} = 0$, cela implique pour m assez grand, l'opérateur Λ^m est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; V' \times E_0 \times E_0)$. Il existe donc un unique $(\eta^*, \varsigma^*, \lambda^*) \in L^2(0, T; V' \times E_0 \times E_0)$, tel que $\Lambda^m(\eta^*, \lambda^*, \varsigma^*) = (\eta^*, \lambda^*, \varsigma^*)$ et $(\eta^*, \lambda^*, \varsigma^*)$ est aussi l'unique point fixe de Λ .

Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour prouver le **Théorème 2.3.1**.

Démonstration du Théorème 2.3.1.

Existence. Soit $(\eta^*, \varsigma^*, \lambda^*) \in L^2(0, T; V' \times E_0 \times E_0)$ est un point fixe de Λ et soit qui est défini par (2.3.30)-(2.3.33), nous adobtons les notations:

$$u_* = u_{\eta^*}, \quad \varphi_* = \varphi_{\eta^*}, \quad \alpha_* = \alpha_{\eta^*}, \quad \beta_* = \beta_{\varsigma^*}, \quad \theta_* = \theta_{\lambda^*}, \quad (2.3.47)$$

et pour tout $t \in [0, T]$, on pose:

$$\begin{aligned} \sigma_*^\ell(t) &= \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)) + \mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u_*^\ell(t)), \beta_*^\ell(t), \theta_*^\ell(t)) + \\ &\quad \int_0^t M^\ell(t-s) \varepsilon(u_*^\ell(s)) ds + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell(t), \end{aligned} \quad (2.3.48)$$

$$D_*^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell(t)) - B^\ell \nabla \varphi_*^\ell(t) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times [0, T], \quad (2.3.49)$$

Nous montrons que le quadruplet $(u_*, \varphi_*, \alpha_*, \beta_* \theta_*)$ satisfaisant (2.2.10)-(2.2.15) et la régularité (2.3.1) -(2.3.5). En effet, nous écrivons (2.3.8) pour $\eta = \eta^*$ et en utilisant (2.3.47), on obtient:

$$\begin{aligned} (\ddot{u}_*(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\eta^*(t), v)_{V' \times V} \\ = (f(t), v)_{V' \times V}, \forall v \in V, p.p. t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.3.50)$$

En outre, nous écrivons (2.3.21) pour $\lambda = \lambda^*$ et en utilisant (2.3.47), on obtient:

$$\left(\dot{\theta}_*^\ell(t), v^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - a_0(\theta_*(t), v)_{L^2(\Omega^\ell)} = (\lambda^{*\ell}(t) + q^\ell(t), v^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall v^\ell \in V^\ell, \quad (2.3.51)$$

En outre, nous écrivons (2.3.26) pour $\varsigma = \varsigma^*$ et en utilisant (2.3.47), on obtient:

$$\begin{aligned} \beta_*^\ell(t) \in K^\ell, \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\beta}_*^\ell(t), \xi^\ell - \beta_*^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - a_1(\beta_*(t), \xi - \beta_*(t)) \\ \geq \sum_{\ell=1}^2 (\varsigma^{*\ell}(t), \xi^\ell - \beta_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall \xi^\ell \in K^\ell, p.p. t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.3.52)$$

Nous combinons les égalités $\Lambda^0(\eta, \lambda, \varsigma)(t) = \eta^*, \Lambda^1(\eta, \lambda, \varsigma)(t) = \lambda^*$ et $\Lambda^2(\eta, \lambda, \varsigma)(t) = \varsigma^*$ avec (2.3.31), (2.3.32) et (2.3.33) pour obtenir

$$\begin{aligned} (\eta^{*\ell}(t), v)_{V' \times V} = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \beta^\ell, \theta^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + J_{ad}(\alpha_*(t), u_*(t), v) \\ + \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t M^\ell(t-s) \varepsilon(u_*^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} \\ + \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell(t), \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell}, \forall v \in V, \end{aligned} \quad (2.3.53)$$

$$\lambda^{*\ell}(t) = \psi^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \beta^\ell(t), \theta^\ell(t)), \quad (2.3.54)$$

$$\varsigma^{*\ell}(t) = \mathcal{S}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \beta_*^\ell(t), \theta^\ell(t)). \quad (2.3.55)$$

De (2.3.53) et (2.3.50), on a:

$$(\ddot{u}_*(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{G}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \beta^\ell, \theta^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\ell=1}^2 \left(\int_0^t M^\ell(t-s) \varepsilon(u_*^\ell(s)) ds, \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \left((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \varphi_*^\ell(t), \varepsilon(v^\ell) \right)_{\mathcal{H}^\ell} + \\
 & J_{ad}(\alpha_*(t), u_*(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V}, \forall v \in V, p.p. t \in [0, T].
 \end{aligned} \tag{2.3.56}$$

Ainsi, de (2.3.54) et (2.3.51), on a:

$$\begin{aligned}
 & \left(\dot{\theta}_*^\ell(t), v^\ell \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - a_0(\theta_*^\ell(t), v)_{L^2(\Omega^\ell)} = \\
 & (\psi^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \beta^\ell(t), \theta_\lambda^\ell(t)) + q^\ell(t), v^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall v^\ell \in V^\ell,
 \end{aligned} \tag{2.3.57}$$

Ainsi, de (2.3.55) et (2.3.52), on a:

$$\begin{aligned}
 & \beta_*^\ell(t) \in K^\ell, \forall t \in [0, T], \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\beta}_*^\ell(t), \xi^\ell - \beta_*^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - a_1(\beta_*^\ell(t), \xi - \beta_*^\ell(t)) \\
 & \geq \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{S}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \beta_*^\ell(t), \theta^\ell(t)), \xi^\ell - \beta_*^\ell(t))_{L^2(\Omega^\ell)}, \forall \xi^\ell \in K^\ell,
 \end{aligned} \tag{2.3.58}$$

Nous écrivons (2.3.17) pour $\eta = \eta^*$ et en employant (2.3.47), on obtient:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=1}^2 (B^\ell \nabla \varphi_*^\ell(t), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell(t)), \nabla \phi^\ell)_{H^\ell} = \\
 & (q(t), \phi)_W, \forall \phi \in W, t \in [0, T].
 \end{aligned} \tag{2.3.59}$$

Aussi, nous écrivons (2.3.27) pour $\eta = \eta^*$ et en utilisant (2.3.47), on obtient:

$$\dot{\alpha}_*(t) = -(\alpha_*(t) [\gamma_\nu(R_\nu([u_{*\nu}(t)])^2 + \gamma_\tau |R_\tau([u_{*\tau}(t)])|^2 - \varepsilon_a)]_+, p.p. t \in [0, T], \tag{2.3.60}$$

Maintenant, de (2.3.56)-(2.3.60) avec les conditions initiales (2.2.15) et d'après les lemmes (2.3.2), (2.3.3), (2.3.5), (2.3.4) et (2.3.6), nous trouvons que $(u_*, \varphi_*, \alpha_*, \beta_*, \theta_*)$ satisfait (2.2.10)-(2.2.15) et la régularité (2.3.1)-(2.3.5). Puisque (u_*, φ_*) satisfait (2.3.1)-(2.3.2) et de (2.3.48), on a:

$$\sigma_* \in L^2(0, T; \mathcal{H}). \tag{2.3.61}$$

Pour tout $v^\ell \in D(\Omega^\ell)$, on pose $v = (v^1, v^2)$ avec $v^{3-\ell} = 0$ dans (2.3.56), ainsi que (2.3.47) et (2.1.38), on obtient:

$$\rho^\ell \ddot{u}_*^\ell = \text{Div } \sigma_*^\ell + f_0^\ell, \text{ p.p. } t \in [0, T], \ell = 1, 2.$$

En utilisant maintenant (2.1.27), (2.1.28) et (2.3.61), on a alors:

$$(Div \sigma_*^1, Div \sigma_*^2) \in L^2(0, T; V').$$

pour $t_1, t_2 \in [0, T]$, d'après (1.2.7), (1.2.9) avec (2.3.49) et (2.1.20)-(2.1.21), nous déduisons que:

$$\|D_*(t_1) - D_*(t_2)\|_h \leq C(\|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)\|_W + \|u_*(t_1) - u_*(t_2)\|_V).$$

de la régularité de (u_*, φ_*) donnée par (2.3.1)-(2.3.2), nous impliquons que:

$$D_* \in C(0, T; H). \quad (2.3.62)$$

En prenant $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ où $\phi^\ell \in D(\Omega^\ell)^d$ et $\phi^{3-\ell} = 0$ dans (2.3.59) et de (2.1.39) il vient:

$$q_0^\ell(t) = div D_*^\ell(t), \quad \forall t \in [0, T], \ell = 1, 2.$$

D'après (2.1.29) et (2.3.62), on a:

$$D_* \in C(0, T; \mathcal{W}).$$

Enfin, nous concluons que $(u_*, \sigma_*, \varphi_*, D_*, \alpha_*, \beta_* \theta_*)$ est une solution faible du problème **PV** ayant la régularité (2.3.1)-(2.3.7), en ce qui termine la preuve de la partie d'existence du **théorème 2.3.1**.

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur qui est défini par (2.3.30)-(2.3.33).

Conclusion générale

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de contact avec compliance normale et adhésion entre deux corps électro-viscoélastique en piézoélectricité et avec l'endommagement et temperature.

On a utilisé la formule de Green pour obtenir la formulation variationnelle de ce problème. Comme la frontière des corps et donné de problème ont de bonne régularité. Donc, la solution du problème électro-mécanique et du problème variationnelle est la même.

On a montré l'existence et l'unicité de la solution de problème précédent par l'utilisation des arguments suivants: équation variationnelle dépendant du temps, équation variationnelle d'évolution, inéquation variationnelle d'évolution du type parabolique, équation différentielle et point fixe.

Bibliographie

- [1] A. Ahmed Abdelaziz, Etude théorique de quelques problèmes dynamiques en contact avec endommagement, Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1, (2015)
- [2] A. Klarbring, A. Mikelic and M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, Int.J. Eng. Sci. 26(1988), 811-832.
- [3] B. Tengiz and G. Tengiz, Some dynamic problems of the theory of electroelasticity, Mem. Differential Equations Math. Phys. 10 (1997), 1-53.
- [4] J.A.C. Martins and T.J. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, Nonlinear Analysis 11 (1987), 407-428.
- [5] J.T. Oden and J.A.C. Martins, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 52 (1985), 527-634.
- [6] K.L. Kuttler and M. Shillor, Set-valued pseudomonotone maps and degenerate evolution inclusions, Comm. Contemp. Math. 1 (1999), 87-123.
- [7] M. Fremond, Adhérence des solides, J. Mécanique et application, 6(3) (1987), 323-335.
- [8] M. Frémond, Adhérence des solides, J. Mécanique Théorique et Appliquée, 6 (1987), 383-407.
- [9] M. Frémond. Contact with adhesion. Dans Topics in nonsmooth mechanics (Edité par J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, et G. Strang), Birkhauser Verlag, Basel (1988), 177-221.

-
- [10] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocu, A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 177 (1999), no. 3-4, 383-399.
 - [11] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, *Lect. Notes Phys.* 655, Springer, Berlin Heidelberg, 2004.
 - [12] M. Sofonea and El H. Essoufi, A Piezoelectric Contact Problem with Slip Dependent Coefficient of Friction, *Mathematical Modelling and Analysis* 9 (2004), 229-242.
 - [13] M. Sofonea, W. Han, M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, *Pure and Applied Mathematics* 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York 2006.
 - [14] M. Frémond, K. L. Kuttler, B. Nedjar and M. Shillor, One-dimensional models of damage, *Adv. Math. Sci. Appl.* 8 (2), 541-570. (1998).
 - [15] M. Fremond, Equilibre des structures qui adhèrent à leur support, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 295, Série (1982), 913-916.
 - [16] M. Fremond, Adhérence des solides, *J. Mécanique et application*, 6(3) (1987), 323-335.
 - [17] M. Sofonea and El H Essoufi, A piezoelectric contact problem with slip dependent coefficient of friction, *Mathematical Modelling and Analysis* 9 (2004), 229-242.
 - [18] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, Dynamic frictionless contact with adhesion, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* 55 (2004), 32-47.
 - [19] T. Hadj ammar, S. Drabla and B. Benabderrahmane, Analysis and approximation of frictionless contact problems between two piezoelectric bodies with adhesion, *Georgian Math. J.*, 44 (2014), 1-15.
 - [20] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, A dynamic contact problem between elastoviscoplastic piezoelectric bodies, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 49 (2014), 01-21.

- [21] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, Frictional contact problem for electroviscoelastic materials with long-term memory, damage, and adhesion, *Electronic Journal of Differential Equations*, 222 (2014), 01-21.
- [22] T. Hadj ammar, B. Benabderrahmane and S. Drabla, Mixed finite element approximation for a contact problem in electro-elasticity, *Kuwait J. Sci.*, 42 (2015), 31-54.
- [23] T. Hadj ammar and B. Benabderrahmane, Mixed Formulation for a Signorini Problem, *Journal of Mathematics and Statistics* 8 (2012), 216-220.
- [24] T. Hadj ammar and B. Benabderrahmane, Variational analysis of a contact problem with friction between two deformable bodies, *Stud. Univ. Babe,s-Bolyai Math.* 57 (2012), No. 3, 427-444.
- [25] T. Hadj ammar, Etude théorique et numérique d'un problème de contact sans frottement entre deux corps déformables, *Mémoire de Magister, Univ. Ouargla.*, (2006).
- [26] T. Hadj ammar, Etude Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact Entre Deux Corps Déformables, *Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1*, (2015).
- [27] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, *Studies in Advanced Mathematics* 30, American Mathematical Society and International Press, 2002.
- [28] Z. Zellagui, Analyse Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact en Mécanique des Solides Déformables, *Thèse de Doctorat, Université de Sétif 1, Sétif*, 2012.

Résumé:

Cette mémoire contient une Etude théorique d'un problème de contact avec frottement entre deux corps piézoélectricité. Cette étude se compose en deux chapitres, Le premier chapitre considère la formulation mathématique de problème de contact et rappel d'analyse. Le deuxième chapitre est divisé en trois sections. Dans la première section considère la forme mathématique cet problème noté par $\mathbf{P}$, par l'utilisation de la forme de Green on obtient aussi une forme variationnelle $\mathbf{PV}$ dans le deuxième section,. Enfin, dans la troisième section, nous étudions l'existence et l'unicité d'une solution faible du problème.

Mots-Clés:

piézoélectricité, compliance normale, adhésion, inéquation d'évolution, point fixe, l'endommagement , existence, unicité.

Abstract:

This memory contains a study theoretically with friction contact enter two piezoelectricity body. This study consists of two chapters, The first chapter considers the mathematical formulation of contact problem and return analysis. The second chapter is divided into three sections. The first section considers the mathematical form this problem noted by $\mathbf{P}$, by using the form of Green is also obtained a variational form $\mathbf{PV}$ in the second section ,. Finally, in the third section , we study the existence and uniqueness of a weak solution of the problem.

Key-words:

piezoelectricity, normal compliance, adhesion, evolutionary inequality, fixed point, damage, existence, uniqueness.

هدف هذه النظرية لحركة جسمين في ميدان كهربائية الضغطية .
فصلين, الى بعض الوسائل الرياضية اللازمة في
| هذه المذكرة, اما في الفصل الثاني مكون ثلاث اجزاء. الجزء الاول نعتبر فيه الشكل
الرياضي لهذه الدراسة و يرمز له بالرمز $\mathbf{P}$. ثم باستعمال شكل قرين في الجزء الثاني نحصل
| على شكل مختلف مسألة $\mathbf{P}$ و يرمز له بالرمز $\mathbf{PV}$. وفي الجزء الثالث و الاخير قمنا
بدراسة وجود و وحدانية الحل الضعيف للمسألة المطروحة.
الكلمات المفتاحية:
| الكهربائية الضغطية, الامتثال القياسية, التشوه, تطور متباينة, النقطة الثابتة, التصاق,
الوحدانية.