



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE  
ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et  
de la Recherche Scientifique



---

Université Echahid Hamma Lakhdar El-oued  
Faculté des sciences exactes Département de mathématiques

**Domaine :** Mathématiques

**Spécialité :** Mathématiques Fondamentales et Appliquées

## Titre de mémoire

**ESPAES B-METRIQUES PARTIELS  
ET THEOREMES DU POINT FIXE**

**Proposé par :**

► BACHIR FRIDJAT

**Soutenu devant le jury composé de :**

Président : Mohammed Said Ferhat	M. C.B	C. U.Echahid Hamma Lakhdar El-oued
Encadreur : Khaled Habita	M. C.B	C. U. Echahid Hamma Lakhdar El-oued
Examinatrice : Said Beloul	M. C.B	C. U. Echahid Hamma Lakhdar El-oued

**Année académique : 2021/2022**

# Remerciements

Nous remercions Allah tout puissant de nous avoir donné la foie, le courage pour réaliser ce modeste travail et qui a mis dans notre chemin de bonnes personnes et nous a confié à de bonnes mains.

Nous tenons d'abord à exprimer nos plus vifs remerciements à **Mr. habita khaled** qui a supervisé avec enthousiasme ce travail dans toutes ses étapes et a collaboré de manière importante à sa réalisation.

Nous adressons aussi nos remerciements aux membres du jury qui ont bien accepté lire se travail.

Nos remerciements vont aussi à toute nos famille, nos parents, nos soeurs, nos frères et nos amis Ammara, Aymene k, Aymene D, pour ses encouragements.

Nous témoignons toute notre gratitude à tous les membres du département de Mathématiques et spécialement aux enseignants parmi eux se trouve le professeur Belloul Said qui ont contribué à notre formation et qui nous ont permis de travailler dans de bones conditions.

# Abstrait

Dans ce mémaire,nous avons présenté de la définition des espaces métriques partiels, et de l'étude de l'existence et de l'unicité des points fixes .

Dans le premier chapitre, nous avons mentionné l'espace métrique et le théorème du point fixe de Banach.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié les définitions et prep des espaces suivants : espace b-métrique, espace métrique partiels et espace b-métrique partiels

Le troisième chapitre examine les théories de l'existence et de l'unicité des points fixes communs dans les espaces métriques partiels.

Nous avons fait des généralisations pour ces théorèmes dans le quatrième chapitre et nous avons donné des exemples illustratifs et appliqué l'un de ces théorèmes pour prouver l'existence et l'unicité de la solution commune à un système de résolution d'équations en porte-à-faux

# Résumé

Dans ce Mémoire, nous généralisons à la fois les concepts de b-métrie et de espaces métriques en introduisant l'espace b-métrique partiel. Un analogue du principe de contraction de Banach ainsi que du théorème du point fixe de type Kannan dans les espaces b-métriques partiels est également démontré. Quelques exemples sont inclus qui illustrent les résultats obtenus dans un nouvel espace.

Dans le premier chapitre, nous avons rappelé l'espace métrique et la théorie de Banach du un point fixe.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié les définitions et prop des espaces suivants : espace b-métrique, espace métrique partiels et espace b-métrique partiels

nous avons examiné les théories de l'exesent et de l'unicité des Points Communes répare dans les espace b-métrique partiels

. Nous avons fait des généralisations de ces théorèmes dans les troisième et quatrième chapitres, et nous avons appliqué l'un de ces théorèmes pour étudier l'exesent et l'unicité de La commune a dissous le système de planification interne.

**Mots clés** : espace métrique, espace métrique partiels, espace b-métrique partiels et théorèmes du point fixe  
Résoudre un ensemble de deux équations de rayons propres.

## ملخص

لقد تطرقنا في هذه المذكرة الى التعريف بالفضاء ب المتري الجزئي، و دراسة وجود و وحدانية النقط الصامدة المشتركة.

ففي الفصل الأول ذكرنا بالفضاء المتري و نظرية بناخ للنقطة الصامدة. أما في الفصل الثاني درسنا الفضاء المتري الجزئي و الفضاء ب المتري و الفضاء ب المتري الجزئي

و الفصل الثالث قمنا بدراسة نظريات وجود و وحدانية النقط الصامدة المشتركة.

و قد قمنا بتعميمات لهاته النظريات في الفصل الرابع مع تقديم تطبيق لإثبات وجود و وحدانية حل جملة معادلتين للشعاع الذاتي.

الكلمات الافتتاحية: الفضاء المتري و الفضاء المتري الجزئي و الفضاء ب المتري الجزئي و نظريات النقطة الثابتة حل جملة معادلتين للشعاع الذاتي.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Abstrait</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Notions et résultats préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Espace métrique . . . . .	3
1.2 Boules, Sphères . . . . .	4
1.3 le Suites . . . . .	6
1.4 la Continuité . . . . .	6
1.5 Espaces métriques complets . . . . .	7
1.6 Contraction . . . . .	10
1.7 Théorème de Banach du point fixe . . . . .	11
1.8 Signification du théorème de point fixe . . . . .	13
<b>2 Espaces b-métriques partiels</b>	<b>14</b>
2.1 Espaces métriques partiels . . . . .	14
2.2 Espaces b-métriques . . . . .	18
2.3 Espaces b-métriques partiels . . . . .	20
2.3.1 le suites de cauchy et convergence . . . . .	25
<b>3 Théorèmes de point fixe dans les espaces b-métriques partiels</b>	<b>27</b>
3.1 Introduction . . . . .	27
3.2 Théorèmes de point fixe . . . . .	27
3.2.1 Théorème de Kannan . . . . .	30

3.3	Théorèmes de point fixe fondatal . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Théorèmes du point fixe communs généralisés dans Espaces b-métriques partiels et application</b>	<b>35</b>
4.1	Introduction . . . . .	35
4.2	Théorèmes du point fixe . . . . .	36
4.3	Théorèmes communs du point fixe . . . . .	45
4.4	Application . . . . .	51
	<b>Bibliographie</b>	<b>54</b>

# Introduction

Les théorèmes du point fixe constituent un aspect important et intéressant des mathématiques appliqués et fournissent des solutions à plusieurs problèmes linéaires et non linéaires qui se posent dans les sciences biologiques, d'ingénierie et physiques.

Les origines des principes de contraction métrique et, par conséquent, la théorie métrique du point fixe elle-même, reposent sur la méthode des approximations successives pour prouver l'existence et l'unicité des solutions d'équations différentielles Cette méthode est associée aux noms de mathématiciens célèbres du xixe siècle tels que Cauchy, Liouville, Lipschitz, Peano et, surtout, Picard.

L'origine de la théorie du point fixe est une méthode d'approximations successives utilisée pour prouver la existence de solutions d'équations différentielles introduites par Picard en 1890.

Cependant c'est le mathématicien polonais Stefan Banach, dans sa thèse (1922), qui est crédité en plaçant les idées sous-jacentes à la méthode dans un cadre abstrait adapté à une large applications bien au-delà de la portée des équations différentielles et intégrales élémentaires.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la théorie du point fixe de Banach La théorie métrique du point fixe est une discipline mathématique importante en raison de ses applications dans différents domaines tels que les inégalités variationnelles et linéaires, la théorie de l'optimisation, les problèmes aux limites, etc.

Dans le contexte de la théorie du point fixe métrique, de nombreux chercheurs ont travaillé sur la généralisation du théorème du point fixe de Banach en :

- 1) Généralisant le type de contraction.
- 2) en étendant l'espace métrique lui-même :
  - espaces b-métriques
  - espaces p-métriques
  - Espaces D-métriques
  - Espaces G-métriques

- espace métrique rectangulaire
- espaces quasimétriques
- Espaces métriques probabilistes, etc...

et il existe maintenant une littérature considérable sur toutes ces généralisations des espaces métriques.

L'objet de ce mémoire est de présenter quelques résultats avancés et récents de cette théorie, dans les espaces b-métriques partiels.

Notre mémoire est composé de quatre chapitres : Le premier chapitre est intitulé Concepts et résultats. Les introductions traitent des définitions des espaces métriques, les parties ouvertes, fermées et finies, la convergence et la continuité, l'espace métrique complet, et même les théorèmes du point fixe métrique (de Banach).

Les espaces métriques généralisés est le titre du deuxième chapitre où nous discuterons de la définition, des propriétés et des exemples d'espaces métriques partiels, d'espaces b-métriques et d'espaces b-métriques partiels.

Dans le troisième chapitre, nous avons également introduit les théorèmes du point fixe dont le type de Kannan dans les sous-espaces b-métriques. Quelques exemples illustrant les résultats obtenus sont inclus dans un nouvel espace.

Et dans le quatrième chapitre, nous avons traité de la généralisation des théorèmes du point fixe dans l'espace métrique partiel. Nous avons présenté deux théories avec des exemples et une application qui l'illustrent.

# *Chapiter 1*

## *Notions et résultats préliminaires*

Dans ce chapitre, nous mentionnerons pour un espace métrique et certaines de leurs propriétés, et donnerons quelques exemples. Enfin, nous parlerons également du théorème du point fixe de Banach et de sa preuve vois [3, 4, 7, 10, 22]

### 1.1 Espace métrique

#### **Définition 1.1.1.**

On appelle distance sur un ensemble non vide  $E$  une application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}^+$  possédant les propriétés suivantes :

1.  $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ .
2.  $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x) \Leftrightarrow x = y$  (symétrie).
3.  $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$  (inégalité triangulaire).

#### **Définition 1.1.2.**

Un espace métrique est un couple  $(E; d)$  ou  $E$  est un ensemble non vide et  $d$  est une distance sur  $E$ .

#### **Exemple 1.1.1.**

1. L'ensemble des réels muni de la distance  $d(x, y) = |x - y|$  est un espace métrique.
2. soit  $E = \mathbb{R}^n$  et soit  $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$  et  $Y = (y_1; y_2; \dots; y_n)$  deux éléments de  $E$  chacune des expressions suivantes définit une distance sur  $E$ .
  - i.  $d_1(x; y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$ .

ii.  $d_2(x; y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)^{1/2}$ .

ii.  $d_p(x; y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p)^{1/p}; (p \geq 1)$ .

iii. La distance discrète sur un ensemble  $E$  quelconque est définie par :

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

## 1.2 Boules, Sphères

Soit  $(E; d)$  un espace métrique, soit  $x_0 \in E$  et  $r \in \mathbb{R}_+^*$ .

### Définition 1.2.1.

On appelle boule ouverte(resp boule fermé) de centre  $x_0$  et de rayon  $r$  l'ensemble.

$$B(x_0, r) = \{x \in E, d(x, x_0) < r\}.$$

(resp)

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in E, d(x, x_0) \leq r\}.$$

On appelle sphère de centre  $x_0 \in E$  et de rayon  $r$  l'ensemble

$$S(x_0, r) = \{x \in E, d(x, x_0) = r\}.$$

### Exemple 1.2.1.

Dans l'espace métrique  $(\mathbb{R}; |\cdot|)$  on a

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x \in \mathbb{R}, d(x, x_0) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, -r < x - x_0 < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, -r + x_0 < x < r + x_0\} \end{aligned}$$

alors

$$B(x_0, r) = ] -r + x_0; r + x_0[.$$

la boule fermée est  $\bar{B}(x_0, r) = [-r + x_0; r + x_0]$

**Définition 1.2.2.**

Une partie  $k$  de  $E$  est un ouvert de  $E$  si pour tout  $x_0 \in k$  il existe  $r > 0$  tel que :

$$B(x_0, r) \subset k.$$

Une partie  $F$  de  $E$  est un fermé de  $E$  si et seulement si son complémentaire  $C_E^F$  dans  $E$  est ouvert.

**Proposition 1.2.1.**

Toute boule ouverte est un ouvert.

**Preuve.**

Soit  $B(x, r)$  un ensemble ouvert dans  $E$ . Soit  $y \in B(x, r)$  ; on a  $d(x; y) < r$  On pose :

$$r' = \frac{r - d(x; y)}{2}.$$

Alors  $B(y; r')$  est inclus dans  $B(x; r)$  En effet pour  $z \in B(y; r')$  on a :

$$d(x; z) \leq d(x; y) + d(y; z) \leq d(x; y) + \frac{r - d(x; y)}{2} \leq \frac{r + d(x; y)}{2} < r.$$

**Corollaire 1.2.1.**

Un ensemble ouvert  $A$  dans  $E$  est une union de boules ouvertes.

**Proposition 1.2.2.**

1. Toute intersection des fermés est un fermé.
2. Une réunion finie des fermés est un fermé.
3.  $\emptyset$  et  $E$  sont des fermés. .

**Définition 1.2.3.**

Un voisinage d'un point  $a \in E$  est une partie de  $E$  contenant une boule ouverte centrée en  $a$  c-à-d :

$$v \in V(a) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset v.$$

**Proposition 1.2.3.**

Un ouvert de  $E$  est une partie de  $E$  qui est voisinage de tous ses points.

### 1.3 le Suites

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de l'espace métrique  $(E, d)$ .

#### Définition 1.3.1.

On dit que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x \in E$  :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon, d(x_n, x) < \varepsilon.$$

On note  $x_n \rightarrow x$  ( ou  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$  ).

#### Proposition 1.3.1.

(l'unicité de la limite dans un espace métrique) Si la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans un espace métrique  $(E, d)$  alors la limite est unique.

#### Preuve.

Si on a  $x_1; x_2$  dans  $E$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon, d(x_n, x_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N'_\varepsilon, d(x_n, x_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour  $n \geq \sup \{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ ; on a :

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_n, x_1) + d(x_n, x_2) < \varepsilon.$$

et donc  $\forall \varepsilon > 0 ; d(x_1, x_2) < \varepsilon$ .

D'où

$$d(x_1, x_2) = 0.$$

ce qui donne

$$x_1 = x_2.$$

### 1.4 la Continuité

#### Définition 1.4.1.

Soit  $(E, d)$ ,  $(E', d')$  deux espaces métriques et soit  $a \in E$ , on dit que une application  $f : E \rightarrow E'$  est

continue au point  $a$  si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

**Définition 1.4.2.**

On dit que  $f : E \rightarrow E'$  est continu sur  $(E, d)$  si elle est continue en tout point de  $E$ .

**Définition 1.4.3.**

Une application  $f : E \rightarrow E'$  est dite uniformément continue sur  $E$  si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x; y \in E, d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**Définition 1.4.4.**

On dit que  $f : E \rightarrow E'$  est Lipschitzienne de rapport  $k \in \mathbb{R}^+$  sur  $E$  ( $K$ - Lipschitzienne) si :

$$\forall x; y \in E, d(f(x), f(y)) < Kd(x, y).$$

**Proposition 1.4.1.**

$f$  Lipschitzienne  $\Rightarrow f$  uniformément continue  $\Rightarrow f$  continue .

## 1.5 Espaces métriques complets

**Définition 1.5.1.** (Suite de Cauchy) [13]

On dit qu'une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'un espace métrique  $(E, d)$  est de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p; q \geq N_\varepsilon, d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

**Exemple 1.5.1.**

Dans  $(\mathbb{R}; |\cdot|)$  la suite définie par :

$$u_n = \frac{1}{n}.$$

est de Cauchy.

soit  $p; q \in \mathbb{N} ; p > q$

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &= \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right| = \left| \frac{q-p}{pq} \right| \\ &\leq \frac{q}{pq} \\ &\leq \frac{1}{q} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{p; q \rightarrow +\infty} d(x_p; x_q) \leq \lim_{p; q \rightarrow +\infty} \frac{1}{q} = 0.$$

Donc  $(x_n)$  est de Cauchy.

**Proposition 1.5.1.**

Dans un espace métrique  $(E, d)$  on a :

- 1) Toute suite convergente est une suite de Cauchy ; L'inverse est généralement faux.
- 2) Toute suite de Cauchy est bornée
- 3) Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente converge.

**Preuve.**

-1) Soit  $(x_n)$  une suite convergente vers  $x$  dans  $(E; d)$  on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour toute  $p; q \in \mathbb{N}$  tels que  $p \geq N_\varepsilon$  et  $q \geq N_\varepsilon$  on a :

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x_q, x).$$

$$p \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$q \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_q, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

d'ou  $p, q \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon.$

La suite  $(x_n)$  est donc de Cauchy.

Pour l'inverse on prend la suite  $(x_n)$  tel que  $x_n = \frac{n}{n+1}$  dans l'espace métrique  $(\mathbb{R} - \{1\}; |\cdot|)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1 \notin \mathbb{R} - \{1\}$ . donc  $(x_n)$  diverge.

soit  $p; q \in \mathbb{N}; p > q$

$$\begin{aligned} d(x_p; x_q) &= \left| \frac{p}{p+1} - \frac{q}{q+1} \right| = \left| \frac{p-q}{(p+1)(q+1)} \right| \\ &\leq \frac{p}{p(q+1)} \\ &\leq \frac{1}{q+1} \end{aligned}$$

alors

$$d(x_p; x_q) \leq \frac{1}{q+1}$$

$$\lim_{p; q \rightarrow +\infty} \frac{1}{q+1} = 0.$$

Alors  $\lim_{p; q \rightarrow +\infty} d(x_p; x_q) = 0$ . donc  $(x_n)$  est de Cauchy.

-2) Choisissons  $\varepsilon = 1$  ; il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\forall n \geq n_0; d(x_p; ; x_q) \leq 1.$$

En particulier

$$\forall n \geq n_0; d(x_p; ; x_{n_0}) \leq 1.$$

Ce qui montre que la suite est bornée.

-3. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de Cauchy et soit  $(x_{\varepsilon}(n))_{n \in \mathbb{N}}$  la suite extraire qui converge vers  $x$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ ;  $\exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$  Tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \forall n \geq N_{\varepsilon}; d(x_{\varepsilon_n}; x) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

comme  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy il existe un rang  $N'_{\varepsilon}$  tel que :

$$\forall (p; q) \in N^2; (\forall p \geq N'_{\varepsilon}) \text{ et } (\forall q \geq N'_{\varepsilon}); d(x_p; x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

en particulier, si  $n \geq \max(N_{\varepsilon}, N'_{\varepsilon})$ , on en déduit que :

$$d(x_p; x_q) \leq d(x_n; x_{\varepsilon(n)}) + d(x_{\varepsilon(n)}; x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ce qui prouve la convergence de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $x$ .

**Définition 1.5.2.** (Espace complet)

Un espace métrique  $(E, d)$  est dite complet si tout suite de Cauchy  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $E$  converge dans  $E$ .

**Exemple 1.5.2.**

1.)  $(\mathbb{R}; |\cdot|); (\mathbb{R}^n; d_2)$  sont comple.

2.)  $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$  n'est pas complet, car il existe dans  $\mathbb{Q}$  une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  défini par  $x_n = \frac{E(2^n \sqrt{2} - 1)}{2^n}$  est de Cauchy, mais ne converge pas.

En effet, on a  $\frac{2^n \sqrt{2} - 1}{2^n} < x_n \leq \sqrt{2}$  d'où  $x_n \rightarrow \sqrt{2}$  dans  $\mathbb{R}$  Donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy.

Parailleurs,  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$  L'unicité de la limite implique que  $(x_n)_{n \in \mathbb{Q}}$  ne converge pas dans  $\mathbb{Q}$ .

**Proposition 1.5.2.**

On a

1. Dans un espace métrique  $(E, d)$ , toute partie complète est fermée.
2. Dans un espace métrique  $(E, d)$ , les parties fermées sont des parties complètes

## 1.6 Contraction

**Définition 1.6.1.**

Soit  $(E; d)$  espace métrique complet et l'application  $T : E \rightarrow E$ ; on dit  $T$  est une application l'pchtizienne s'il existe une constante positive  $k \geq 0$ , telle que pour tout couple d'éléments  $x; y \in E$ , on a l'inégalité

$$d(Tx; Ty) \leq kd(x; y)$$

- Si  $k < 1$  l'application est une contraction
- Si  $k = 1$  l'application est appelée une application non expansive.

**Exemple 1.6.1.**

Soit  $X = \mathbb{R}$  et  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application définie par :  $Tx = \frac{1}{2}x + 1$ ;  $x \in \mathbb{R}$

Alors  $T$  est une contraction.

- Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'une fonction soit uniformément continue.

**Proposition 1.6.1.**

Une application  $T : E \rightarrow E$  qui  $k$ -lipchitzienne est uniformément continue.

**Preuve.**

Sachant que  $d(Tx; Ty) \leq kd(x; y)$  pour un  $k > 0$  donné, il suffit de prendre  $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ ; il s'ensuit que.

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \frac{\varepsilon}{k}, d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{k} &\Rightarrow d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \\ &\Rightarrow d(Tx, Ty) \leq k \frac{\varepsilon}{k} \\ &\Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc  $T$  est uniformément continue.

**Remarque 1.6.1.**

- La composition de deux applications Lipschitziennes est une application Lipschitzienne.
- Si  $T$  est une application Lipschitzienne,  $T^n$  la composition  $n$  fois de  $T$  avec elle-même est aussi Lipschitzienne.

## 1.7 Théorème de Banach du point fixe

Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet. Soient  $E$  un espace métrique et  $f$  une fonction de  $E$  dans  $E$ .

### Définition 1.7.1.

La fonction  $T : E \rightarrow E$  est dite de type Lipschitz s'il existe une constante  $k \geq 0$  telle que :

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y); x; y \in E.$$

### Définition 1.7.2.

La fonction  $T : E \rightarrow E$  de type Lipschitz est appelée fonction contractante si  $0 < k < 1$ .

### Définition 1.7.3.

soit  $T : E \rightarrow E$  une application On dit que  $x$  est un point fixe de  $f$  si  $f(x) = x$ .

### Exemple 1.7.1.

La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow \frac{1}{2}\sin x$  est contractante définie sur  $\mathbb{R}$  de constante  $k$  alors  $f$  admet un point fixe unique.

-En effet il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis.

### Théorème 1.7.1. (Banach(1922)) [12]

Soit  $E$  un espace métrique complet,  $f$  une application contractante définie sur  $E$  de constante  $K$  alors  $f$  admet un point fixe unique.

### Preuve.

#### Unicité

Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux points fixe de  $f$  alors  $f(x_1) = x_1; f(x_2) = x_2$  et

$$d(f(x_1); f(x_2)) \leq kd(x_1; x_2) \Rightarrow d(x_1; x_2) \leq kd(x_1; x_2) \Rightarrow d(x_1; x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

#### L'existence

Soit  $x_0 \in E$ ; définissons par récurrence la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $x_{n+1} = f(x_n)$  et montrons que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy dans l'espace métrique complet  $E$ , d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = x \in E$  et comme  $f$  est continue il viendra  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_{n+1} = f(\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n) \Rightarrow x = f(x)$

$(x_n)$  est une suite de Cauchy de  $E$ .

En effet, soient  $p; q$  deux entiers tels que  $q > p$  alors.

$$d(x_p; x_q) \leq d(x_p; x_{p+1}) + d(x_{p+1}; x_{p+2}) + \dots + d(x_{q-1}; x_q)$$

Sachant que

$$\begin{aligned} d(x_p; x_{p+1}) &= d(f(x_{p-1}); f(x_p)) \leq kd(x_{p-1}; x_p) \\ &\leq k^2 d(x_{p-2}; x_{p-1}) \leq k^3 d(x_{p-3}; x_{p-2}) \leq \dots \leq k^n d(x_0; x_1). \end{aligned}$$

d'ou

$$\begin{aligned} d(x_p; x_q) &\leq (k^p + k^{p+1} + k^{p+2} + \dots + k^{q-1})d(x_0; x_1) \\ &\leq k^p d(x_0; x_1) \sum_{p=0}^{p=+\infty} k^p \\ &\leq \frac{k^p d(x_0; x_1)}{1 - k}. \end{aligned}$$

si  $d(x_0; x_1) = 0$  alors  $x_1 = x_0 = f(x_0)$  et  $x_0$  est le point fixe sinon  $d(x_0; x_1) > 0$  et  $\frac{k^p d(x_0; x_1)}{1 - k} < \varepsilon$  si  $p \geq n_0$  entier convenablement choisi.

**Exemple 1.7.2.**

1.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sqrt{x+1}$  possède un unique point fixe.  
(en l'occurrence  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ )
2.  $f: ]0; 1[ \rightarrow ]0; 1[ : x \rightarrow \frac{x}{2}$  ne possède pas de point fixe :  $]0; 1[$  n'est pas un Banach. (on prend  $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin ]0; 1[.$ )
3.  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \sqrt{x^2+1}$  ne possède pas de point fixe ; elle n'est pas contractante  
(même si  $\forall x \neq y; |f(x) - f(y)| < |x - y|$ ).
4.  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow \frac{x}{2} + 1$  ne possède pas de point fixe ; on n'a pas  $f([0; 1]) \subset [0; 1]$ .

**Remarque 1.7.1.**

a. Si  $f$  est une application Lipschitzienne pas nécessairement une contraction mais l'une de ces itérées  $f^p$  est une contraction, alors  $f$  a encore un point fixe et un seul. Ceci résulte de l'unicité. En effet, soit  $x$  l'unique point fixe de  $f^p$  on a

$$f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(x).$$

ce qui convient dire que  $f(x)$  est aussi un point fixe de  $f^p$  et grâce à l'unicité  $f(x) = x$ . Donc ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

b. Il se peut que  $f$  ne soit pas une contraction sur tout l'espace  $E$  mais juste dans le voisinage d'un point donné.

Dans ce cas on a le résultat suivant qui est la version local du théorème de Banach.

**Théorème 1.7.2.**

Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet et  $f : B(x_0, r) \rightarrow E$  une contraction de constante  $k$  avec

$$d(f(x_0); x_0) > (1 - k)r.$$

Alors  $f$  admet un unique point fixe dans  $B(x_0, r)$ .

**Preuve.**

On a  $d(f(x_0); x_0) > (1 - k)r$  donc il existe  $r_0$  tel que  $0 \leq r_0 \leq r$  et  $d(f(x_0); x_0) > (1 - k)r_0$

On montre que  $f : \overline{B(x_0; r_0)} \rightarrow B'(x_0; r_0)$

Soit  $x \in B'(x_0; r_0)$  alors

$$\begin{aligned} d(f(x); x_0) &\leq d(f(x); f(x_0)) + d(f(x_0); x_0) \\ &\leq kd(x; x_0) + d(f(x_0); x_0) \\ &\leq kr_0 + (1 - k)r_0 \\ &= r_0. \end{aligned}$$

Donc l'application  $f : \overline{B(x_0; r_0)} \rightarrow B'(x_0; r_0)$  est contractante avec  $B'(x_0; r_0)$  est un espace complet.

Par suite l'application le théorème de Banach à  $f$  assure qu'elle admet un unique point fixe dans  $B(x_0; r)$  comme  $B'(x_0; r_0) \subset B(x_0; r)$  et  $f$  contractante sur  $B(x_0, r)$  ce point fixe reste unique dans  $B(x_0, r)$ .

## 1.8 Signification du théorème de point fixe

L'application de ce théorème nous donne des résultats qui sont d'une importance fondamentale dans l'analyse non linéaire. Citons quelques un :

1. Existence de la solution.
2. Unicité de la solution.
3. Stabilité de la solution sous une petite perturbation de l'équation.
4. Existence de la convergence des méthodes d'approximation.
5. Stabilité des méthodes d'approximation.

# *Chapiter 2*

## *Espaces b-métriques partiels*

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et propriétés sur les espaces métriques partiels, les espaces b-métriques et les espaces b-métriques partiels.

### 2.1 Espaces métriques partiels

**Définition 2.1.1.** [20]

Soit  $X$  un ensemble non vide. Une métrique partiel sur  $X$  est une application  $p: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour tous  $x; y; z \in \mathbb{X}$  On a :

$$p1 \quad p(x; x) \leq p(x; y).$$

$$p2 \quad x = y \iff p(x; x) = p(x; y) = p(y; y).$$

$$p3 \quad p(x; y) = p(y; x).$$

$$p4 \quad p(x; y) \leq p(x; z) + p(z; y) - p(z; z).$$

Un espace métrique partiel est une paire  $(X; p)$  tel que  $X$  est un ensemble non vide et  $p$  est un métrique partiel sur  $X$ .

**Exemple 2.1.1.** [20]

la fontion  $\rho: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $\rho(x; y) = d(x; y) + a$  ; ou  $a \geq 0$  est un métrique partiel dans  $X$ .

**Preuve.** 1.  $\rho(x; y) = d(x; y) + a$

$$\rho(x; x) = d(x; x) + a = a$$

et

$$\rho(x; y) = d(x; y) + a$$

$$\rho(x; x) = d(x; x) + a \leq d(x; y) + a.$$

car

$$0 = d(x; x) \leq d(x; y).$$

donc

$$\rho(x; x) \leq \rho(x; y).$$

$$2. \quad x = y \iff \rho(x; x) = \rho(x; y) = \rho(y; y)$$

$$\rho(x; x) = d(x; x) + a = d(x; y) + a = d(y; y) + a$$

$$d(x; y) + a = a \Rightarrow d(x; y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

La 2<sup>ème</sup> condition est satisfaite.

3.

$$\rho(x; y) = d(x; y) + a = d(y; x) + a = \rho(y; x)$$

$$\rho(x; y) = \rho(y; x).$$

4.

$$\begin{aligned} \rho(x; y) &= d(x; y) + a \leq d(x; z) + d(z; y) + 2a - a \\ &\leq \rho(x; z) + \rho(z; y) - \rho(y; y). \end{aligned}$$

La 4<sup>ème</sup> condition est satisfaite.

### Exemple 2.1.2.

a. la fonction  $\rho: \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $\rho(x; y) = -\min\{x; y\}$  pour tout  $x; y \in \mathbb{R}^-$ ; le paire  $(\mathbb{R}^-; \rho)$  est un espace métrique partiel.

b. la fonction  $\rho: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $\rho(x; y) = \max\{x; y\}$  pour tout  $x; y \in \mathbb{R}^+$ ; le paire  $(\mathbb{R}^+; \rho)$  est un espace métrique partiel.

### Preuve.

b. En effet, pour tous  $x; y; z \in \mathbb{R}^+$  :

$$P1: \max\{x; y\} \geq y \text{ donc } \rho(x; y) \geq \rho(x; x).$$

P2: on pose  $p(x; y) = p(x; y) = p(y; y)$ ; donc  $x = y$ .

P3: C'est évident que  $p(x; y) = p(y; x)$ .

P4: on vérifie que :

$$\max\{x; z\} \leq \max\{x; y\} + \max\{y; z\} - \max\{y; y\}.$$

En considérant les cas  $y \leq x \leq z$  et  $x \leq y \leq z$  et  $x \leq z \leq y$ ; d'où

$$p(x; z) \leq p(x; y) + p(z; y) - p(y; y).$$

Les boules ouvertes sont les  $B_\varepsilon(x)$  de la forme

$$B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^+ : \max\{x; y\} < \varepsilon\} = B(0; \varepsilon).$$

avec  $x \leq \varepsilon$  autrement, if  $x \geq \varepsilon$ ; alors  $B_\varepsilon(x)$  .on pose que  $y \in B_\varepsilon(x)$

Alors  $\max\{x; y\} < \varepsilon$  qui implique que  $y < \varepsilon$ .

a. De la même manière, on retrouve la solution de l'exemple (a).

**Définition 2.1.2.**

i Une suite  $(x_n)$  dans un espace métrique partiel  $(X, p)$  converge vers  $x \in X$  si et seulement si  $p(x, x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x, x_n)$ .

ii Une suite  $(x_n)$  dans un espace métrique partiel  $(X, p)$ ; est dite de Cauchy si et seulement si  $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(x_n, x_m)$  existe (et finie).

iii un espace métrique partiel  $(X, p)$  est complet si toute suite de Cauchy  $(x_n)$  dans  $X$  converge vers un point  $x \in X$  tel que  $p(x, x) = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} p(x_n, x_m)$ .

iv  $(x_n)$  est dite de Cauchy dans  $X$  si

$$\exists a > 0; \forall \varepsilon > 0; \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{N}; \forall n; m > \eta_\varepsilon; |p(x_n; x_m) - a| < \varepsilon.$$

**Lemme 2.1.1.**

a Une suite  $(x_n)$  est de Cauchy dans un espace métrique partiel  $(X, p)$  si et seulement si  $(x_n)$  est de Cauchy dans l'espace métrique  $(X, p^s)$ .

b Un espace métrique partiel  $(X, p)$  est complet si et seulement si l'espace métrique  $(X, p^s)$  est com-

plet. De plus ;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p^s(x_n; x) = 0 \iff p(x; x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p(x_n; x) = \lim_{n; m \rightarrow +\infty} p(x_n; x_m).$$

**Lemme 2.1.2.**

Soit  $(X; p)$  un espace métrique partiel complet alors

1. si  $p(x; y) = 0$  alors  $x = y$ .

2. si  $x \neq y$  alors  $p(x; y) > 0$ .

**Preuve.**

1. Soit  $p(x; y) = 0$ ; de (P1); on a

$$p(x; x) \leq p(x; y) = 0.$$

et

$$p(y; y) \leq p(x; y) = 0.$$

on trouve et

$$p(x; x) = p(y; y) = p(x; y) = 0.$$

de (P1) on a  $x = y$ .

2. On pose  $x \neq y$ ; par définition  $p(x; y) \geq 0$ ;  $\forall x; y \in X$ ; on pose  $p(x; y) = 0$  de (1);  $x = y$ .

contradiction, d'où  $p(x; y) > 0$ ; donc  $x \neq y$ .

**Définition 2.1.3. (continue)**

soit  $(X; p)$  est un espace métrique partiel.  $F$  une application  $F : X \rightarrow X$

est dite continue en  $x \in X$ , si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\mu > 0$  tel que :

$$F(B_p(x; \mu)) \subseteq B_p(F(x); \varepsilon).$$

**Définition 2.1.4. (suite de 0-Cauchy)**

la soit  $(x_n)$  dans l'espace métrique partiel  $(X; p)$ . est dite 0-Cauchy :

$$\lim_{n; m \rightarrow +\infty} p(x_n; x_m) = 0.$$

l'espace métrique partiel  $(X; p)$  est dit pour être 0-Complet si toute suite 0-Cauchy converge a un

point  $x \in X$  en ce qui concerne la topologie  $\tau_p$  : tel que

$$p(x; x) = 0.$$

on note que chaque suite  $\theta$ -cauchy dans  $(X; p)$  est de Cauchy dans  $(X; p^s)$  et que chaque espace métrique partiel complet est  $\theta$ -complet.

**Lemme 2.1.3.**

Si  $(X; p)$  est un espace métrique partiel, alors les fonctions définies par :

$$p^s; p^m : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+.$$

$$p^s(x; y) = 2p(x; y) - p(x; x) - p(y; y)$$

et

$$p^m(x; y) = \max\{p(x; y) - p(x; x); p(x; y) - p(y; y)\}.$$

définies le métrique équivalent dans  $X$ .

## 2.2 Espaces b-métriques

**Définition 2.2.1.**

Soit  $X$  un ensemble non vide. Soit  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$

On suppose qu'il existe un nombre réel  $s \geq 1$  tel que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout  $x; y; z \in X$ .

B1.  $d(x; y) = 0$  si et seulement si  $x = y$ .

B2.  $d(x; y) = d(y; x)$ .

B2.  $d(x; y) \leq s[d(x; z) + d(z; y)]$ .

le couple  $(X; d)$  est un espace b-métrique Notez que tout espace métrique est un espace b-métrique de base  $s = 1$ . Certains auteurs ont établi des espaces b-métriques qui ne sont pas des espaces métriques. Suivant Boriceanu et al , nous avons les définitions et remarques suivantes. Maintenant, nous présentons la définition des espaces b-métriques.

**Exemple 2.2.1.**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique, et  $\rho(x, y) = [d(x, y)]^p$ , où  $p > 1$  est un nombre réel. on montre que  $\rho$  est une b-métrique avec  $s = 2^{p-1}$  évidemment les conditions (b1) et (b2) de la Définition sont satisfaites.

Si  $1 < p < \infty$ , alors la convexité de la fonction  $f(x) = x^p ; (x > 0)$  implique :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \leq \frac{1}{2}(a^p + b^p).$$

et donc,  $(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$  est vérifiée.

Ainsi, pour chaque  $x, y, z \in X$  on obtient :

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= [d(x, y)]^p \leq [d(x, z) + d(z, y)]^p \\ &\leq 2^{p-1}[d(x, z)^p + d(z, y)^p] \\ &= 2^{p-1}[\rho(x, z) + \rho(z, y)]. \end{aligned}$$

Donc la condition (b3) de la Définition 1.1 est satisfaite et  $\rho$  est une b-métrique. Cependant, si  $(X, d)$  est un espace métrique, alors  $(X, \rho)$  n'est pas nécessairement un espace métrique.

**Par exemple**, si  $X = \mathbb{R}$  est l'ensemble des nombres réels et  $d(x, y) = |x-y|$  est la métrique euclidienne usuelle, alors  $\rho(x, y) = (x-y)^2$  est une b-métrique sur  $\mathbb{R}$  avec  $s = 2$ , mais n'est pas une métrique sur  $\mathbb{R}$ . Aussi l'exemple suivant d'un espace b-métrique est donné dans  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 2.2.2.** [16]

Soit  $X$  l'ensemble des fonctions mesurables de Lebesgue sur  $[0, 1]$  tel que :

$$\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Definiere  $D : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  par :

$$D(f; g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx.$$

Alors  $D$  satisfait les propriétés suivantes :

B1.  $D(f; g) = 0$  si et seulement  $f = g$ .

B2.  $D(f; g) = D(g; f)$  pour tout  $f; g \in X$ .

B3.  $D(f; g) \leq 2[D(f; h) + D(h; g)]$  pour tout  $f; g; h \in X$  est un espace b-métrique. Remarquez que  $s = 2$ .

Nous allons maintenant présenter les notions de convergence, compacité, fermeture et complétude dans un espace b-métrique.

**Définition 2.2.2.**

Soit  $(X, d)$  un espace b-métrique. Alors une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $X$  est appelé :

- a. convergente si et seulement si il existe  $x \in X$  tel que  $d(x_n, x) \rightarrow 0$  comme  $n \rightarrow +\infty$ . Dans ce cas, on écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ .
- b. Cauchy si et seulement si  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  comme  $m, n \rightarrow +\infty$ .

### Définition 2.2.3.

L'espace b-métrique  $(X, d)$  est complet si toute suite de Cauchy en  $X$  converge.

### Remarque 2.2.1.

Remarquez que dans un espace b-métrique  $(X, d)$  les assertions suivantes sont vraies :

- i) une suite convergente a une limite unique .
- ii) chaque suite convergente est Cauchy .
- iii) en général, une b-métrique n'est pas continue.
- iv) en général, une b-métrique n'induit pas de topologie sur  $X$ .

### Définition 2.2.4.

Soient  $(X; d)$  et  $(X'; d')$  des espaces b-métriques de constante  $s$  et  $s'$  respectivement. Alors l'application  $T: X \rightarrow X'$  est dite continue si chaque fois que  $(x_n)$  est une suite de  $X$  converge vers un certain  $x \in X$  par rapport à  $d$ , alors  $(Tx_n)$  converge vers  $Tx$  par rapport à  $d'$ .

Maintenant, nous définissons les espaces b-métriques partiels.

## 2.3 Espaces b-métriques partiels

### Définition 2.3.1.

Soit  $X$  un ensemble non vide. Soit  $b: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$

On suppose qu'il existe un nombre réel  $s \geq 1$  tel que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout  $x, y, z \in X$  :

pb1.  $x = y$  si et seulement si  $b(x; x) = b(x; y) = b(y; y)$ .

pb2.  $b(x; x) \leq b(x; y)$ .

pb3.  $b(x; y) = b(y; x)$ .

pb4.  $b(x; y) \leq s[b(x; z) + b(z; y)] - b(z; z)$ .

le couple  $(X; b)$  est un espace b-métrique partiel tel que  $X$  est un ensemble non vide et  $b$  est une b-métrique partielle sur  $X$ . Le nombre  $s$  est appelé coefficient de  $(X, b)$ .

### Remarque 2.3.1.

Dans un espace b-métrique partiel  $(X, b)$  si  $x, y \in X$  Il est clair que, si  $b(x; y) = 0$ , alors, d'après (p1) et (p2),  $x = y$ . Mais si  $x = y$ ,  $b(x; y) \neq 0$ .

**Remarque 2.3.2.**

il est clair que tout espace métrique partiel est un espace b-métrique partiel de coefficient  $s = 1$  et tout espace b-métrique est un espace b-métrique partiel de même coefficient et d'autodistance nulle. Cependant, l'inverse de ce fait n'a pas besoin d'être vérifié.

**Exemple 2.3.1.**

Soit  $X = \mathbb{R}^+, p > 1$  une constante et  $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  défini par :

$$b(x; y) = [\max\{x; y\}]^p + |x - y|^p.$$

pour tous  $x; y \in X$  Alors  $(X, b)$  est un espace b-métrique partiel de coefficient  $s = 2^p > 1$ , mais ce n'est ni une b-métrique ni un espace métrique partiel. En effet, pour tout  $x > 0$  on a  $b(x; x) = x^p \neq 0$ ; donc,  $b$  n'est pas une b-métrique sur  $X$ . Aussi, pour  $x = 5; y = 1; z = 4$  on a  $b(x; y) = 5^p + 4^p$  et  $b(x; z) + b(z; y) - b(z; z) = 5^p + 1 + 4^p + 3^p - 4^p = 5^p + 1 + 3^p$  alors  $b(x; y) > b(x; z) + b(z; y) - b(z; z)$  pour tout  $p > 1$ ; par conséquent,  $b$  n'est pas une métrique partielle sur  $X$ .

Quelques exemples supplémentaires de b-métrique partielle peuvent être construits avec la l'aide des propositions suivantes.

**Proposition 2.3.1.**

Soit  $X$  un ensemble non vide tel que  $p$  est un partiel et  $d$  est un b-métrique de coefficient  $s > 1$  sur  $X$ . Alors la fonction  $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  défini par  $b(x; y) = p(x; y) + d(x; y)$  pour tout  $x; y \in X$  est une b-métrique partielle sur  $X$ , c'est-à-dire que  $(X, b)$  est une espace b-métrique partielle.

**Preuve.**

Soient  $(X, p)$  un espace métrique partiel et  $(X, d)$  un espace b-métrique avec coefficient  $s > 1$ . Alors (Pb1), (Pb2) et (Pb3) sont évidents pour la fonction  $b$ . Soient  $x; y; z \in X$  arbitraires, alors, comme  $p$  est partiel et  $d$  est b-métrique sur  $X$ , on a :

$$\begin{aligned} b(x; y) &= p(x; y) + d(x; y) \\ &\leq p(x; z) + p(z; y) - p(z; z) + s[d(x; z) + d(z; y)] \\ &\leq s[p(x; z) + p(z; y) - p(z; z) + d(x; z) + d(z; y)] \\ &= s[b(x; z) + b(z; y) - b(z; z)] \\ &\leq s[b(x; z) + b(z; y)] - b(z; z). \end{aligned}$$

Par conséquent, (Pb4) est également satisfaite et donc  $(X, b)$  est un espace b-métrique partiel.

**Proposition 2.3.2.**

Soit  $(X, p)$  un espace métrique partiel,  $q \geq 1$ , alors  $(X, b)$  est un espace b-métrique partiel de coefficient  $s = 2^{q-1}$ , où  $b$  est défini par :

$$b(x; y) = [p(x; y)]^q.$$

**Preuve.**

Soient  $(X, p)$  un espace métrique partiel Alors (Pb1), (Pb2) et (Pb3) sont évidents pour la fonction  $b$ . Soient  $x; y; z \in X$  arbitraires, alors, comme  $p$  est partiel, on a La preuve de cette proposition découle du fait que  $(\frac{a+b}{2})^q < (\frac{a^q+b^q}{2})$  et  $(b-c)^q \leq (b^q - \frac{c^q}{2^{q-1}})$  où  $q \geq 1$  est un nombre réel et  $a; b; c \in \mathbb{R}^*$  avec  $b \geq c$  :

$$\begin{aligned} b(x; y) &= [p(x; y)]^q b(x; y) \leq [p(x; z) + p(z; y) - p(z; z)]^q \\ &\leq [p(x; z) + p(z; y)]^q - \frac{p(z; z)^q}{2^{q-1}} \\ &\leq 2^{q-1}[p(x; z)^q + p(z; y)^q] - \frac{p(z; z)^q}{2^{q-1}} \\ &\leq 2^{q-1}[b(x; z) + b(z; y)] - \frac{b(z; z)}{2^{q-1}} \\ &\leq 2^{q-1}[b(x; z) + b(z; y)] - b(z; z). \end{aligned}$$

Par conséquent, (Pb4) est également satisfaite et donc  $(X, b)$  est un espace b-métrique partiel.

**Exemple 2.3.2.**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $p_p(x, y) = 1 + d(x, y)$  où  $\xi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  est une fonction continue strictement croissante avec  $t \leq \xi(t)$  pour  $t \in [0, +\infty)$  et  $\xi(0) = 0$ . Nous allons montrer que  $p_p$  est une p-métrique partielle avec  $\Omega(t) = \xi(t)$ . évidemment, les conditions (p1)-(p3) de la Définition 2.10 sont satisfaites. D'autre part, pour chaque  $x, y, z \in X$  on obtient :

$$\begin{aligned} p_p(x; y) - p_p(x; x) &= 1 + \xi(d(x; y)) - 1 \\ &\leq \xi(d(x; z) + d(z; y)) \\ &\leq \xi(\xi(d(x; z)) + \xi(d(z; y))) \\ &= \xi(1 + \xi(d(x; z)) + 1 + \xi(d(z; y)) - 1 - 1) \\ &= \Omega(p_p(x; z) + p_p(z; y) - p_p(x; x) - p_p(y; y)). \end{aligned}$$

Ainsi, la condition (p4) de la Définition 2.10 est remplie et  $p_p$  est une p-métrique partielle sur  $X$ . Donc  $p_p$  est une b-métrique partielle sur  $X$ . En particulier, on peut prendre  $\xi(t) = e^t - 1$ . Alors,  $p_p(x; y) = e^{d(x; y)}$  est une p-métrique partielle avec  $\Omega(t) = e^t - 1$ .

**Définition 2.3.2.**

Soit  $X$  un ensemble (non vide) et  $\Omega : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  une fonction continue strictement croissante avec  $\Omega^{-1}(t) \leq t \leq \Omega(t)$  pour  $t \in [0, +\infty)$ . Une fonction  $p_p : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  est appelée b-métrique partielle étendue, ou p-métrique partielle si, pour tout  $x, y, z \in X$  les conditions suivantes sont satisfaites :

- p1.  $x = y$  si et seulement si  $p_p(x; x) = p_p(x; y) = p_p(y; y)$ .
- p2.  $p_p(x; x) \leq p_p(x; y)$ .
- p3.  $p_p(x; y) = p_p(y; x)$ .
- p4.  $p_p(x; y) - p_p(x; x) \leq \Omega[p_p(x; z) + p_p(z; y) - p_p(z; z) - p_p(x; x)]$ .

La couple  $(X, p_p)$  est appelée un espace p-métrique partiel, ou un espace b-métrique partiel étendu.

Notez que la condition (p4), avec (p3), implique que ce qui suit est également vrai pour tout  $x, y, z, \in X$  :

$$p_p(x; y) - p_p(y; y) \leq \Omega[p_p(x; z) + p_p(z; y) - p_p(z; z) - p_p(y; y)].$$

Il convient de noter que la classe des espaces p-métriques partiels est considérablement plus grande que la classe des espaces b-métriques partiels, puisqu'une b-métrique partielle est une p-métrique partielle avec  $\Omega(t) = st$ , tandis qu'une métrique partielle est une p-métrique partielle, avec  $\Omega(t) = t$ . Nous présentons des exemples qui montrent qu'une p-métrique partielle sur  $X$  peut n'être ni une métrique partielle, ni une b-métrique partielle sur  $X$ .

**Exemple 2.3.3.**

Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $p_p(x; y) = 1 + \sinh[d(x; y)^2]$ . Nous allons montrer que  $p_p$  est une p-métrique partielle avec  $\Omega(t) = 2 \times \cosh t \sinh t = \sinh 2t$  évidemment, les conditions (p1)-(p3) de la Définition 2.10 sont satisfaites. En utilisant l'inégalité élémentaire  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  pour tout  $a, b \geq 0$ , on obtient que, pour chaque  $x, y, z \in X$  ce qui suit est vrai.

$$\begin{aligned} p_p(x; y) - p_p(x; x) &= 1 + \sinh(d(x; y)^2) - 1 \\ &\leq \sinh((d(x; z) + d(z; y))^2) \\ &\leq \sinh[2(d(x; z)^2 + d(z; y)^2)] \\ &\leq 2 \sinh[\sinh(d(x; z)^2 + \sinh d(z; y)^2)] \times \cosh[\sinh(d(x; z)^2 + \sinh d(z; y)^2)] \\ &\leq 2 \sinh[1 + \sinh(d(x; z)^2 + 1 + \sinh d(z; y)^2) - 1 - 1] \times \cosh[1 + \sinh(d(x; z)^2 + 1 + \sinh d(z; y)^2)] \\ &= \Omega(p_p(x; z) + p_p(z; y) - p_p(z; z) - p_p(x; x)). \end{aligned}$$

Ainsi, la condition (p4) de la Définition 2.10 est remplie et  $p_p$  est une p-métrique partielle sur  $X$ . donc

$p_p$  est une b-métrique partielle étendu sur  $X$ .

**Corollaire 2.3.1.**

Chaque b-métrique partielle "b" sur un ensemble  $X$  non vide génère une topologie  $\tau_b$  sur  $X$  dont la base est la famille des b-boules ouvertes  $B_b(x; \varepsilon)$  où  $\tau_b = B_b(x, \varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0$  et  $B_p(x; \varepsilon) = y \in X : b(x; y) < \varepsilon + b(x; x)$ .

évidemment, l'espace topologique  $(X; \tau_b)$  est  $T_0$ , mais n'a pas besoin d'être  $T_1$ .

**Définition 2.3.3.**

Une fonction  $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  est appelée fonction de distance altérante si les propriétés suivantes sont satisfaites .

1.  $\psi$  est continu et non décroissant .
2.  $\psi(t) = 0$  si et seulement si  $t = 0$ .

D'autre part, Mustafa[17] modifie la Définition 2.3.1 afin que chaque b-métrique b partielle génère une b-métrique  $d_b$  comme suivante.

**Définition 2.3.4.** [17]

Soient  $X$  un ensemble non vide et  $s \geq 1$  un nombre réel donné. Une fonction  $b : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  est une b-métrique partielle si pour tout  $x, y, z \in X$  les conditions suivantes sont satisfaites :

- i.  $x = y$  si et seulement si  $b(x, x) = b(x, y) = b(y, y)$ .
- ii.  $0 \leq b(x, x) \leq b(x, y)$ .
- iii.  $b(x, y) = b(y, x)$ .
- iv.  $b(x, y) \leq s[b(x, z) + b(z, y) - b(z, z)] + (\frac{1-s}{2})(b(x, x) + b(y, y))$ .

Le couple  $(X, b)$  est appelé un espace b-métrique partiel. Le nombre  $s \geq 1$  est appelé le coefficient de  $(X, b)$ .

**Exemple 2.3.4.** (voir aussi[17])

Soit  $X = \mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels. Considérons l'espace métrique  $(X, d)$  où  $d$  est la métrique de distance euclidienne  $d(x, y) = |x-y|$  pour tout  $x, y \in X$  Définissons  $b(x, y) = (x-y)^2 + 5$  pour tout  $x, y \in X$ . Alors  $b$  est une b-métrique partielle sur  $X$  avec  $s = 2$ , mais ce n'est pas une métrique partielle sur  $X$ . Pour le voir, Soit  $x = 1, y = 4$  et  $z = 2$ .

Alors  $b(1, 4) = (1-4)^2 + 5 = 14 \not\leq b(1, 2) + b(2, 4) - b(2, 2) = 6 + 9 - 5 = 10$ .

Aussi,  $b$  n'est pas une b-métrique puisque  $b(x, x) \neq 0$  pour tout  $x \in X$ .

**Maintenant, nous définissons la suite de Cauchy et la suite convergente en partie espaces b-métriques.**

### 2.3.1 le suites de cauchy et convergence

#### Définition 2.3.5.

Soit  $(X, b)$  un espace b-métrique partiel de coefficient  $s$ . Laisser  $(x_n)$  une suite quelconque de  $X$  et  $x \in X$ . Alors :

i. La suite  $(x_n)$  est dite convergente par rapport à  $\tau_b$  et converge vers  $x$ , si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b(x_n, x) = b(x, x).$$

ii. La suite  $(x_n)$  est dite suite de Cauchy dans  $(X, b)$  si  $\lim_{n, m \rightarrow +\infty} b(x_n, x_m)$  existe et est fini.

iii.  $(X, b)$  est dit un espace b-métrique partiel complet si pour toute suite de Cauchy  $(x_n)$  dans  $X$  il existe  $x \in X$  tel que :

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} b(x_n, x_m) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b(x_n, x) = b(x, x).$$

Notez que dans un espace b-métrique partiel la limite de la suite convergente peut ne pas être unique.

#### Exemple 2.3.5.

Soit  $X = \mathbb{R}^+$ ;  $a > 0$  une constante quelconque et définissons:  $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  par :

$$b(x, y) = \max\{x, y\} + a \text{ pour tout } x, y \in X.$$

Alors  $(X, b)$  est un espace b-métrique partiel de coefficient arbitraire  $s \geq 1$ .

Maintenant, définissons une suite  $(x_n)$  dans  $X$  par  $x_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Notons que, si  $y \geq 1$ , on a  $b(x_n, y) = y + a = b(y, y)$ .

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b(x_n, y) = b(y, y).$$

pour tout  $y \geq 1$ . Ainsi, la limite de séquence convergente dans l'espace b-métrique partiel nécessite ne pas être unique.

#### Lemme 2.3.1.

1. Toute suite de Cauchy dans l'espace b-métrique est aussi Cauchy dans l'espace b-métrique partiel et vice versa.
2. L'espace b-métrique partiel est complet si et seulement si l'espace b-métrique (espace b-métrique induit) est complet.

#### Remarque 2.3.3.

- 1) Espace b-métrique  $\xrightarrow{s=1}$  Espace métrique.
- 2) Espace métrique partiel  $\xrightarrow{b(z; z)=0}$  Espace métrique.

3) Espace b-métrique partiel  $\xrightarrow{s=1}$  Espace métrique partiel.

4) Espace b-métrique partiel  $\xrightarrow{b(z;z)=0}$  Espace b-métrique.

Il existe plusieurs autres définitions de l'espace b-métrique partiel .

En conclusion de cette section, nous introduisons ce que nous appelons l'ultra-métrique partielle et conjecturons que la construction de Frink pourrait être utilisée pour obtenir une métrique modulaire à partir d'une métrique ultramodulaire.

S'inspirant de la théorie de l'espace ultra-métrique et de celle de la métrique espaces de types, on peut définir.

**Définition 2.3.6.** ( espace ultra-métrique partiel)

une ultra-métrique partielle sur l'ensemble  $X$  est une fonction  $p : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  tel que :

- i.  $x = y$  si et seulement si  $b(x, x) = b(x, y) = b(y, y)$ .
- ii.  $0 \leq b(x, x) \leq b(x, y)$ .
- iii.  $b(x, y) = b(y, x)$ .
- iv.  $b(x, y) \leq s \max[b(x, z) + b(z, y)] - b(z, z)$ .

Le couple  $(X, b)$  est appelé un espace ultra-métrique partiel. Le nombre  $s \geq 1$  est appelé le coefficient de  $(X, b)$ .

**Définition 2.3.7.** (Espaces  $b_v(s)$ métriques partiels )

Soient  $E$  un ensemble non vide et  $\rho : E \times E \rightarrow [0, \infty)$  une application et  $v \in \mathbb{N}$ . Alors  $(E, \rho)$  est dit un espace  $b_v(s)$ métrique partiel s'il existe un nombre réel  $s \geq 1$  tel que les conditions suivantes soient vérifiées pour tout  $u, w, z_1, z_2, \dots, z_v \in E$  :

- i.  $u = w$  si et seulement si  $\rho(u, u) = \rho(u, w) = \rho(w, w)$ .
- ii.  $0 \leq \rho(u, u) \leq \rho(u, w)$ .
- iii.  $\rho(u, w) = \rho(w, u)$ .
- iv.  $\rho(u, w) \leq s \max[\rho(u, z_1) + \rho(z_1, z_2) + \dots + \rho(z_{v-1}; z_v) + \rho(z_v; y)] - \sum_{i=1}^v b(z_i, z_i)$ .

Il est facile de voir que tout espace  $b_v(s)$  métrique est un espace  $b_v(s)$  métrique partiel.

Cependant, l'inverse n'est pas vrai en général.

**Remarque 2.3.4.** Dans la Définition (2.3.7)

- (1) si nous prenons  $v = 2$ , alors nous dérivons un espace b-métrique rectangulaire partiel.
- (2) si nous prenons  $v = 1$ , alors nous dérivons un espace b-métrique partiel.
- (3) si nous prenons  $v = s = 1$ , alors nous dérivons l'espace métrique partiel.

Il existe plusieurs définitions par les radiologues des espaces b-métriques partiels et l'étude des points fixes qu'ils contiennent, ce qui nécessite une recherche approfondie et une thèse à étudier en détail.

# *Chapiter 3*

## *Théorèmes de point fixe dans les espaces b-métriques partiels*

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous parlerons d'autres théorèmes de point fixe dans les espaces b-métriques partiel, qui sont considérés comme une généralisation des théorèmes du deuxième chapitre, et le théorème suivant est un analogue au principe de contraction de Banach dans l'espace b-métrique partiel et en donnant quelques exemples pour montrer leur importance [20].

Nous en parlerons en détail dans ce chapitre.

### 3.2 Théorèmes de point fixe

**Théorème 3.2.1.** [18] Soit  $(X, b)$  un espace b-métrique partiel complet de coefficient  $s \geq 1$  et  $T : X \rightarrow X$  une application vérifiant la condition suivante :

$$b(Tx, Ty) \leq \lambda b(x, y). \quad (3.1)$$

pour tout  $x, y \in X$ , où  $\lambda \in [0, 1)$ . Alors  $T$  a un unique point fixe  $u \in X$  et  $b(u, u) = 0$ .

**Preuve.**

Montrons d'abord que si point fixe de  $T$  existe, alors il est unique. Laisser  $u, v \in X$  deux points fixes

distincts de  $T$ , c'est-à-dire  $Tu = u$ ,  $Tv = v$ . Il résulte de (3.1) que :

$$\begin{aligned} b(u; v) &= b(Tu; Tv) \leq \lambda b(u; v) \\ &\leq b(u; v). \end{aligned}$$

Une contradiction. Par conséquent, nous devons avoir  $b(u, v) = 0$ , c'est-à-dire  $u = v$ . Ainsi, si le point fixe de  $T$  existe alors il est unique.

De plus, si  $u$  est un point fixe de  $T$  et  $b(u, u) > 0$  alors d'après (3.1) on a

$$b(u, u) = b(Tu, Tu) \leq \lambda b(u, u) < b(u, u)$$

une contradiction. Donc  $b(u, u) = 0$ .

Pour l'existence de point fixe as,  $\lambda \in [0, 1)$  on peut choisir  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour  $0 < \varepsilon < 1$  donné on a  $\lambda^{n_0} < \frac{\varepsilon}{4s}$ .

Soit  $T^{n_0} \equiv F$  et  $F^k x_0 = x_k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , où  $x_0 \in X$  est arbitraire.

Alors, pour tout  $x, y \in X$  on a  $b(Fx; Fy) = b(T^{n_0}x; T^{n_0}y) \leq \lambda^{n_0}b(x, y)$  Maintenant, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  on a  $b(x_{k+1}; x_k) = b(Fx_k; Fx_{k-1}) \leq \lambda^{n_0}b(x_k; x_{k-1}) \leq \lambda^{kn_0}b(x_1; x_0) \rightarrow 0$ ; comme  $k \rightarrow \infty$  On peut donc choisir  $l \in \mathbb{N}$  tel que :

$$b(x_{l+1}; x_l) \leq \frac{\varepsilon}{4s}.$$

Maintenant, laisse

$$B_b[x_l; \frac{\varepsilon}{2}] = \{y \in X : b(x_l; y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + b(x_l; x_l)\}.$$

Nous allons montrer que  $F$  applique  $B_b[x_l, \frac{\varepsilon}{2}]$  sur lui-même. Il est évident que  $x_l \in B_b[x_l, \frac{\varepsilon}{2}]$  donc  $B_b[x_l, \frac{\varepsilon}{2}] \neq \emptyset$ . Soit  $z \in B_b[x_l, \frac{\varepsilon}{2}]$  arbitraire, alors en utilisant (3.2) on a :

$$\begin{aligned} b(Fz; Fx_l) &= \lambda^{n_0}b(z; x_l) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4s}[\frac{\varepsilon}{2} + b(x_l; x_l)] \\ &< \frac{\varepsilon}{4s}[1 + b(x_l; x_l)]. \end{aligned}$$

aussi

$$b(Fx_l; x_l) = b(x_{l+1}; x_l) < \frac{\varepsilon}{4s}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
 b(Fz; x_l) &\leq s[b(Fz; Fx_l) + b(Fx_l; x_l)] - b(x_l; x_l) \\
 &< s\left[\frac{\varepsilon}{4s}(1 + b(x_l; x_l) + \frac{\varepsilon}{4s}) - b(x_l; x_l)\right] \\
 &< \frac{\varepsilon}{4}\left[1 + b(x_l; x_l) + \frac{\varepsilon}{4}\right] - b(x_l; x_l) \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{4} - 1\right)b(x_l; x_l) \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + b(x_l; x_l).
 \end{aligned}$$

Donc,  $Fz \in B_b[x_l, \frac{\varepsilon}{2}]$ . Ainsi,  $F$  mappe  $B_b[x_l, \frac{\varepsilon}{2}]$  sur lui-même.

Notons que,  $x_l \in B_b[x_l, \frac{\varepsilon}{2}]$  donc  $Fx_l \in B_b[x_l, \frac{\varepsilon}{2}]$  et répétition de ce processus donne  $F^n x_l \in B_b[x_l, \frac{\varepsilon}{2}]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $x_m \in B_b[x_l, \frac{\varepsilon}{2}]$  pour tout  $m \geq l$ . Ainsi, on obtient que,

$$b(x_n; x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + b(x_l; x_l).$$

pour tous  $n; m > l$  et la suite  $\{x_n\}$  est la suite de Cauchy. Aussi comme

$$b(x_l; x_l) \leq b(x_{l+1}; x_l) < \frac{\varepsilon}{4s} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a  $b(x_l; x_l) < \frac{\varepsilon}{2}$  et donc :

$$b(x_n; x_m) < \varepsilon.$$

pour tous  $n; m > l$  par complétude de  $X$  il existe  $u \in X$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b(x_n; u) = \lim_{n; m \rightarrow +\infty} b(x_n; x_m) = b(u; u) = 0. \quad (3.2)$$

Nous allons montrer que  $u$  est un point fixe de  $T$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$\begin{aligned}
 b(u; Tu) &\leq s[b(u; x_{n+1}) + b(x_{n+1}; Tu)] - b(x_{n+1}; x_{n+1}) \\
 &\leq s[b(u; x_{n+1}) + b(Tx_n; Tu)] \\
 &\leq sb(u; x_{n+1}) + s\lambda b(x_n; u).
 \end{aligned}$$

En utilisant (3.3) dans l'inégalité ci-dessus, nous obtenons  $b(u, Tu) = 0$ , c'est-à-dire  $Tu = u$ . Ainsi  $u$  est un point fixe de  $T$  et c'est l'unique point fixe de  $T$ .

**Exemple 3.2.1.** Soit  $X = \{1; 2; 3; 4\}$  et  $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  défini par :

$$b(x; y) = \begin{cases} |x - y|^2 + \max\{x; y\} & \text{si } x \neq y. \\ x & \text{si } x = y \neq 1. \\ 0 & \text{si } x = y = 1. \end{cases}$$

Alors  $(X, b)$  est un espace b-métrique partiel complet de coefficient  $s = 4 > 1$ .

Définissons  $T : X \rightarrow X$  par :  $T1 = 1, T2 = 1, T3 = 2, T4 = 2$ .

Alors,  $T$  satisfait toutes les conditions du théorème 3.1, avec  $\lambda \in [\frac{3}{4}, 1)$ .

Maintenant, d'après le théorème 3.1,  $T$  a un unique point fixe à savoir 3.1 est l'unique point fixe de  $T$ .

Notons que, puisque  $b(2, 2) = 2 \neq 0$  il s'ensuit que  $b$  n'est pas une b-métrique.

De plus,  $b$  n'est pas une métrique partielle. En effet,

$$b(4, 1) = 13 > 9 = b(4, 3) + b(3, 1) - b(3, 3).$$

Par conséquent, les résultats de [9] et [11] ne sont pas applicables alors que le théorème 1 est applicable.

Le théorème suivant est un analogue au théorème du point fixe de Kannan (voir [8]) dans l'espace b-métrique partiel.

### 3.2.1 Théorème de Kannan

**Théorème 3.2.2.** [20] ((R. Kannan 1968))

Soit  $(X, b)$  un espace b-métrique partiel complet de coefficient  $s \geq 1$  et  $T : X \rightarrow X$  une application vérifiant la condition suivante :

$$b(Tx, Ty) \leq \lambda [b(x, Tx) + b(y, Ty)]. \quad (3.3)$$

Pour tout  $x, y \in X$ , où  $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ ,  $\lambda \neq \frac{1}{s}$ .

Alors  $T$  a un unique point fixe  $u \in X$  et  $b(u, u) = 0$ .

**Preuve.**

Montrons d'abord que si  $T$  admet un point fixe, alors il est unique. Nous allons montrer que, si  $u \in X$  est un point fixe de  $T$ , c'est-à-dire  $Tu = u$ , alors  $b(u, u) = 0$ . De (3.4) on obtient :

$$b(u; u) = b(Tu; Tu) \leq \lambda [b(u; Tu) + b(u; Tu)] = 2\lambda b(u; u) < b(u; u).$$

Une contradiction. Par conséquent, nous devons avoir  $b(u, u) = 0$ .

Supposons  $u, v \in X$  deux points fixes distincts de  $T$ , c'est-à-dire  $Tu = u, Tv = v$ .

Alors on a  $b(u, u) = b(v, v) = 0$ , et il résulte de (3.4) que :

$$b(u; v) = b(Tu; Tv) \leq \lambda[b(u; Tu) + b(v; Tv)] = \lambda[b(u; u) + b(v; v)] = 0.$$

Par conséquent, nous devons avoir  $b(u, v) = 0$ , c'est-à-dire  $u = v$ .

Donc si le point fixe de  $T$  existe, alors il est unique.

Pour existence de point fixe, soit  $x_0 \in X$  arbitraire ; posons  $x_n = T^n x_0$  et  $b_n = b(x_n, x_{n+1})$ .

On peut supposer  $b_n > 0$  pour tout  $n \geq 0$ , si non  $x_n$  est un point fixe de  $T$  pour au moins un  $n \geq 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il résulte de (3.4) que :

$$\begin{aligned} b_n &= b(x_n; x_{n+1}) = b(Tx_{n-1}; Tx_n) \\ &\leq \lambda[b(x_{n-1}; Tx_{n-1}) + b(x_n; Tx_n)] \\ &= \lambda[b(x_{n-1}; x_n) + b(x_n; x_{n+1})] \\ &= \lambda[b_{n-1} + b_n]. \end{aligned}$$

Donc  $b_n \leq \mu b_{n-1}$ , où  $\mu = \frac{\lambda}{1-\lambda} < 1$  comme  $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ .

En répétant ce processus on obtient :

$$b_n \leq \mu^n b_0.$$

Donc,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ .

Maintenant, nous allons montrer que  $\{x_n\}$  est une suite Cauchy. Il découle de (3.4) que pour  $n, m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b(x_n; x_m) &= b(T^n x_0; T^m x_0) = b(Tx_{n-1}; Tx_{m-1}) \\ &\leq \lambda[b(x_{n-1}; Tx_{n-1}) + b(x_{m-1}; Tx_{m-1})] \\ &= \lambda[b(x_{n-1}; x_n) + b(x_{m-1}; x_m)] \\ &= \lambda[b_{n-1} + b_{m-1}]. \end{aligned}$$

Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$ , pour tout donné  $\varepsilon > 0$  on peut trouver  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $b_n < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $b_m < \frac{\varepsilon}{2}$  pour tout  $n, m > n_0$ .

Ainsi, il découle de ce qui précède l'inégalité qui :

$$b(x_n; x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pour tous  $n; m > n_0$  Ainsi,  $\{x_n\}$  est la suite de Cauchy en  $X$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b(x_n; x_m) = 0$ . Par complétude de  $X$  il existe  $u \in X$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b(x_n; u) = \lim_{n; m \rightarrow +\infty} b(x_n; x_m) = b(u; u) = 0. \quad (3.4)$$

Nous allons montrer que  $u$  est un point fixe de  $T$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il résulte de (3.4) que :

$$\begin{aligned} b(u; Tu) &\leq s[b(u; x_{n+1}) + b(x_{n+1}; Tu)] - b(x_{n+1}; x_{n+1}) \\ &\leq s[b(u; x_{n+1}) + b(Tx_n; Tu)] \\ &\leq s[b(u; x_{n+1}) + \lambda[b(x_n; Tx_n) + b(u; Tu)]]. \end{aligned}$$

C'est

$$b(u; Tu) \leq \frac{s}{1-s\lambda} b(u; x_{n+1}) + \frac{s\lambda}{1-s\lambda} b(x_n; x_{n+1}).$$

Notez que  $\lambda \neq \frac{1}{s}$ ; par conséquent, il découle de (3.4) et de l'inégalité ci-dessus que  $b(u, Tu) = 0$ , c'est-à-dire  $Tu = u$ . Ainsi,  $u$  est un unique point fixe de  $T$ .

### 3.3 Théorèmes de point fixe fondatal

**Théorème 3.3.1.** [20] Soit  $(X, b)$  un espace b-métrique partiel de coefficient  $s > 1$  et  $T : X \rightarrow X$  une application satisfaisant :

$$b(Tx, Ty) \leq \lambda \max\{b(x, y), b(x, Tx), b(y, Ty)\}. \quad (3.5)$$

pour tout  $x, y \in X$  où  $\lambda \in [0, \frac{1}{s})$ .

Alors,  $T$  a un unique point fixe  $u \in X$  et  $b(u, u) = 0$ .

**Preuve.**

Montrons d'abord que si point fixe de  $T$  existe, alors il est unique. Laisser  $u, v \in X$  deux points fixes distincts de  $T$ , c'est-à-dire  $Tu = u, Tv = v$ . Il résulte de (3.5) que :

$$\begin{aligned} b(u, v) &= b(Tu, Tv) \leq \lambda \max\{b(u, v), b(u, Tu), b(v, Tv)\} \\ &= \lambda \max\{b(u, v), b(u, u), b(v, v)\} \\ &= \lambda b(u, v) \\ &< b(u, v). \end{aligned}$$

Une contradiction. Par conséquent, nous devons avoir  $b(u, v) = 0$ , c'est-à-dire  $u = v$ . Ainsi, si le point fixe de  $T$  existe alors il est unique.

Pour l'existence du point fixe, soit  $x_0 \in X$  arbitraire et définissons une suite  $\{x_n\}$  par  $x_{n+1} = Tx_n$  pour tout  $n \geq 0$ . Or, pour tout  $n$  on obtient de (3.5) que :

$$\begin{aligned} b(x_{n+1}, x_n) &= b(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq \lambda \max\{b(x_n, x_{n-1}), b(x_n, Tx_n), b(x_{n-1}, Tx_{n-1})\} \\ &= \lambda \max\{b(x_n, x_{n-1}), b(x_n, x_{n+1}), b(x_{n-1}, x_n)\} \\ &= \lambda \max\{b(x_n; x_{n-1}); b(x_n; x_{n+1})\}. \end{aligned}$$

si

$$\max\{b(x_n, x_{n-1}), b(x_n, x_{n+1})\} = b(x_n, x_{n+1}).$$

Alors on obtient de l'inégalité ci-dessus que

$$b(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda b(x_{n+1}, x_n) < b(x_{n+1}, x_n).$$

une contradiction. Par conséquent, nous devons avoir .

$$\max\{b(x_n, x_{n-1}), b(x_n, x_{n+1})\} = b(x_n, x_{n-1}).$$

Puis à partir de l'inégalité ci-dessus, nous obtenons.

$$b(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda b(x_n, x_{n-1}).$$

En répétant ce processus, on obtient :

$$b(x_{n+1}, x_n) \leq \lambda^n b(x_1, x_0). \tag{3.6}$$

Pour tous  $n \geq 0$  Pour  $m, n \in \mathbb{N}$  avec  $m > n$ , on obtient :

$$\begin{aligned} b(x_n; x_m) &\leq s[b(x_n, x_{n+1}) + b(x_{n+1}, x_m] - b(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq sb(x_n, x_{n+1}) + s^2[b(x_{n+1}, x_{n+2}) + b(x_{n+2}, x_m)] - sb(x_{n+2}, x_{n+2}) \\ &\leq sb(x_n, x_{n+1}) + s^2b(x_{n+1}, x_{n+2}) + s^3b(x_{n+2}, x_{n+3}) + \dots + s^{m-n}b(x_{m-1}, x_m). \end{aligned}$$

En utilisant (3.6) dans l'inégalité ci-dessus,

$$\begin{aligned}
 b(x_n; x_m) &\leq s\lambda^n b(x_1, x_0) + s^2\lambda^{n+1}b(x_1, x_0) + s^3\lambda^n b(x_1, x_0) + \dots + s^{m-n}\lambda^{m-1}b(x_1, x_0) \\
 &\leq s\lambda^n [1 + s\lambda + (s\lambda)^2 + \dots] b(x_1, x_0) \\
 &= \frac{s\lambda^n}{1 - s\lambda} b(x_1, x_0).
 \end{aligned}$$

Comme  $\lambda \in [0, \frac{1}{s})$  et  $s > 1$ , il résulte de l'inégalité ci-dessus que  $\lim_{n,m \rightarrow +\infty} b(x_n, x_m) = 0$ .

Donc  $\{x_n\}$  est une suite de Cauchy dans  $X$ . Par complétude de  $X$  il existe  $u \in X$  tel que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b(x_n; u) = \lim_{n,m \rightarrow +\infty} b(x_n; x_m) = b(u; u) = 0. \tag{3.7}$$

Nous allons montrer que  $u$  est un point fixe de  $T$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$\begin{aligned}
 b(u; Tu) &\leq s[b(u, x_{n+1}) + b(x_{n+1}, Tu)] - b(x_{n+1}, x_{n+1}) \\
 &\leq s[b(u, x_{n+1}) + b(Tx_n, Tu)] \\
 &\leq sb(u, x_{n+1}) + s\lambda b(x_n, u).
 \end{aligned}$$

En utilisant (3.7) dans l'inégalité ci-dessus, nous obtenons  $b(u, Tu) = 0$ , c'est-à-dire  $Tu = u$ .

Ainsi,  $u$  est un point fixe de  $T$  et c'est un unique point fixe de  $T$ .

# *Chapiter 4*

## *Théorèmes du point fixe communs généralisés dans Espaces b-métriques partiels et application*

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons et démontrons deux théorèmes de point fixe de Chatterjea sur l'espace b-métrique partiels. Nous proposons une extension du principe de connexion de Banach sur l'espace b-métrique partiel déjà introduit par Shukla et étudions également quelques Résultats lors du remplissage d'un espace partiel de type échelle. En particulier, nous démontrons le théorème du point fixe conjoint de Chatterjea-Kannan. Nous vérifions la stabilité de T pour une répétition de Picard et devinons la propriété P pour de telles applications. Nous donnons également des exemples pour illustrer nos résultats [11].

**Problème** Le théorème 3.2 préconise l'existence d'un point fixe pour une contraction de Chatterjea dans un espace b-métrique partiel complet pour lequel la constante  $s$  est telle que  $s \geq 2$ .

Une question-problème intéressant pourrait être de rechercher si le théorème 3.2 peut être formulé pour des valeurs  $1 < s < 2$  avec un intervalle approprié pour la constante de contraction  $\lambda$ .

Bien sûr Le théorème 3.2 reste vrai pour l'inégalité forte  $s \geq \sqrt{2}$  mais notre question demeure puisqu'il nous reste à comprendre ce qui se passe pour  $1 \leq s < \sqrt{2}$ .

Nous concluons cette section en présentant un point fixe conjoint **Chatterjea-Kannan** conduisant à l'existence d'un point fixe unique [11].

## 4.2 Théorèmes du point fixe

Nous concluons cette section en présentant un point fixe conjoint **Chatterjea-Kannan** conduisant à l'existence d'un point fixe unique.

### **Théorème 4.2.1.** [11]

Soit  $(X, b)$  un espace b-métrique partiel 0-complet de coefficient  $s \geq 1$  et  $T : X \rightarrow X$  une auto-application vérifiant la condition suivante :

$$b(Tx; Ty) \leq \lambda_1 b(x; y) + \lambda_2 \frac{b(x; Tx)b(y; Ty)}{1 + b(x; y)} + \lambda_3 \frac{b(x; Ty)b(y; Tx)}{1 + b(x; y)} + \lambda_4 \frac{b(x; Tx)b(x; Ty)}{1 + b(x; y)} + \lambda_5 \frac{b(y; Ty)b(y; Tx)}{1 + b(x; y)} \dots \dots \dots (Ch - Ka)$$

pour tout  $x, y \in X$  où  $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4; \lambda_5$  sont des nombres réels non négatifs vérifiant :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + 2s\lambda_3 + s\lambda_4 + s\lambda_5 < 1.$$

Alors  $T$  admet un unique point fixe  $u$  dans  $X$  et  $b(u, u) = 0$ .

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du lemme suivant.

### **Lemme 4.2.1.** [11]

Soit  $(X, p)$  un espace b-métrique partiel de coefficient  $s \geq 1$  et  $T : X \rightarrow X$  une auto-application.

Supposons que  $(x_n)$  est une suite dans  $X$  construite comme  $x_{n+1} = Tx_n$  et telle que :

$b(x_n, x_{n+1}) \leq \lambda b(x_{n-1}, x_n)$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , où  $\lambda \in [0, 1)$  est une constante. Alors  $(x_n)$  est une suite de 0-Cauchy.

### **Preuve.**

Soit  $x_0 \in X$  et construisons une suite itérative de Picard  $(x_n)$  par  $x_{n+1} = Tx_n, (n \in \mathbb{N})$ . Nous distinguons les trois cas suivants :

**Car1**  $\lambda \in [0; \frac{1}{s}) ; s > 1$ . Par  $b(x_n; x_{n+1}) \leq \lambda b(x_{n-1}; x_n)$ .

on a  $b(x; x_{n+1}) \leq \lambda^n b(x_0; x_1)$ .

Ainsi, pour tout  $n > m$  et  $n; m \in \mathbb{N}$

on a, en suivant la preuve du théorème 3.2:

$$\begin{aligned}
 b(x_m; x_n) &\leq s[b(x_m; x_{m+1}) + b(x_{m+1}; x_n)] - b(x_{m+1}; x_{m+1}) \\
 &\leq s[b(x_m; x_{m+1}) + b(x_{m+1}; x_n)] \\
 &\leq sb(x_m; x_{m+1}) + s^2b(x_{m+1}; x_{m+2}) + s^3[b(x_{m+2}; x_{m+3}) + b(x_{m+3}; x_n)] \\
 &\vdots \\
 &\leq s\lambda^m(1 + s\lambda + (s\lambda)^2 + \dots + (s\lambda)^{n-m-1})b(x_0; x_1) \\
 &\leq s\lambda^m\left[\sum_{i=0}^{\infty} (s\lambda)^i\right]b(x_0; x_1) \\
 &= \frac{s\lambda^m}{1 - s\lambda}b(x_0; x_1) \rightarrow 0; (m \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

Ce qui implique que  $(x_n)$  est une suite  $\theta$ -Cauchy.

**Cas2.** Soit  $\lambda \in [\frac{1}{s}, 1)$ ;  $s > 1$ .

Dans ce cas, on a  $\lambda^n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Donc il n'y a pas  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $\lambda^{n_0} < \frac{1}{s}$ . Ainsi, par le cas 1, nous affirmons que :

$$\{(T^{n_0})x_0\}_{n \geq 1} := \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots, x_{n_0+n}, \dots\}.$$

est une suite  $\theta$ -Cauchy. Alors  $(x_n)$  est une suite de  $\theta$ -Cauchy.

**Cas 3.** Soit  $s = 1$ . Semblable au processus du cas 1, la revendication est valable.

Maintenant, nous démontrons le théorème 4.1.

**Preuve.**

Choisissons  $x_0 \in X$  et construisons une suite itérative de Picard  $(x_n)$  par  $x_{n+1} = Tx_n$ ; ( $n \in \mathbb{N}$ ).

S'il existe de  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ , alors  $x_{n_0} = x_{n_0+1} = Tx_{n_0}$  c'est-à-dire que  $x_{n_0}$  est un point fixe de  $T$ .

Ensuite, sans perte de généralité, soit  $x_n \neq x_{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par (Ch-Ka), nous avons :

$$\begin{aligned}
 b(x_n; x_{n+1}) &= b(Tx_{n-1}; Tx_n) \\
 &\leq \lambda_1 b(x_{n-1}; x_n) + \lambda_2 \frac{b(x_{n-1}; Tx_{n-1})b(x_n; Tx_n)}{1 + b(x_{n-1}; x_n)} + \lambda_3 \frac{b(x_{n-1}; Tx_n)b(x_n; Tx_{n-1})}{1 + b(x_{n-1}; x_n)} \\
 &+ \lambda_4 \frac{b(x_{n-1}; Tx_{n-1})b(x_{n-1}; Tx_n)}{1 + b(x_{n-1}; x_n)} + \lambda_5 \frac{b(x_n; Tx_n)b(x_n; Tx_{n-1})}{1 + b(x_{n-1}; x_n)} \\
 &= \lambda_1 b(x_{n-1}; x_n) + \lambda_2 \frac{b(x_{n-1}; x_n)b(x_n; x_{n+1})}{1 + b(x_{n-1}; x_n)} + \lambda_3 \frac{b(x_{n-1}; x_{n+1})b(x_n; x_n)}{1 + b(x_{n-1}; x_n)} \\
 &+ \lambda_4 \frac{b(x_{n-1}; x_n)b(x_{n-1}; x_{n+1})}{1 + b(x_{n-1}; x_n)} + \lambda_5 \frac{b(x_n; x_{n+1})b(x_n; x_n)}{1 + b(x_{n-1}; x_n)}.
 \end{aligned}$$

Au vu des axiomes (pm2) et (pm4), on a :

$$\begin{aligned} \lambda_3 \frac{b(x_{n-1}; x_{n+1})b(x_n; x_n)}{1 + b(x_{n-1}; x_n)} &\leq \lambda_3 \frac{b(x_{n-1}; x_{n+1})b(x_n; x_n)}{b(x_{n-1}; x_n)} \\ &\leq \lambda_3 b(x_{n-1}; x_{n+1}) \\ &\leq s\lambda_3 [b(x_{n-1}; x_n) + b(x_n; x_{n+1})]. \end{aligned}$$

i.e

$$\lambda_3 \frac{b(x_{n-1}; x_{n+1})b(x_n; x_n)}{1 + b(x_{n-1}; x_n)} \leq s\lambda_3 [b(x_{n-1}; x_n) + b(x_n; x_{n+1})].$$

Nous avons également :

$$\begin{aligned} \lambda_4 \frac{b(x_{n-1}; x_n)b(x_{n-1}; x_{n+1})}{1 + b(x_{n-1}; x_n)} &\leq \lambda_4 \frac{b(x_{n-1}; x_n)b(x_{n-1}; x_{n+1})}{b(x_{n-1}; x_n)} \\ &\leq \lambda_4 b(x_{n-1}; x_{n+1}) \\ &\leq s\lambda_4 [b(x_{n-1}; x_n) + b(x_n; x_{n+1})]. \end{aligned}$$

i.e

$$\lambda_4 \frac{b(x_{n-1}; x_n)b(x_{n-1}; x_{n+1})}{1 + b(x_{n-1}; x_n)} \leq s\lambda_4 [b(x_{n-1}; x_n) + b(x_n; x_{n+1})].$$

Ainsi

$$\begin{aligned} b(x_n; x_{n+1}) = b(Tx_{n-1}; Tx_n) &\leq \lambda_1 b(x_{n-1}; x_n) + \lambda_2 b(x_n; x_{n+1}) + s\lambda_3 [b(x_{n-1}; x_n) + b(x_n; x_{n+1})] \\ &\quad + s\lambda_4 [b(x_{n-1}; x_n) + b(x_n; x_{n+1})] + s\lambda_5 b(x_n; x_{n+1}). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$(1 - \lambda_1 - \lambda_2 - s\lambda_3 - s\lambda_4)b(x_n; x_{n+1}) \leq (\lambda_1 + s\lambda_3 + s\lambda_4)b(x_{n-1}; x_n). \quad (4.1)$$

Encore une fois, par (Ch-Ka), et en exploitant la symétrie de  $b$ , c'est-à-dire

$$b(x_n; x_{n+1}) = b(Tx_n; Tx_{n-1}).$$

on est conduit à

$$(1 - \lambda_1 - \lambda_2 - s\lambda_3 - s\lambda_5)b(x_n; x_{n+1}) \leq (\lambda_1 + s\lambda_3 + s\lambda_5)b(x_{n-1}; x_n). \quad (4.2)$$

L'addition des rendements (3.8) et (3.9) :

$$b(x_n; x_{n+1}) \leq \frac{2\lambda_1 + 2s\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5}{2 - 2\lambda_2 - 2s\lambda_3 - s\lambda_4 - s\lambda_5} b(x_{n-1}; x_n).$$

Mettre  $\lambda = \frac{2\lambda_1 + 2s\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5}{2 - 2\lambda_2 - 2s\lambda_3 - s\lambda_4 - s\lambda_5}$  En vue de  $\lambda_1 + \lambda_2 + 2s\lambda_3 + s\lambda_4 + s\lambda_5 < 1$  alors  $0 \leq \lambda < 1$ .

Ainsi, d'après le lemme 4.2.1,  $(x_n)$  est une suite 0-Cauchy dans  $X$ . Puisque  $(X, p)$  est 0-complet, alors il existe un point  $x^* \in X$  tel que :

$$\lim_{n; m \rightarrow +\infty} b(x_n; x_m) = \lim_{n \rightarrow +\infty} b(x^*; x_n) = b(x^*; x^*) = 0.$$

par (Ch-Ka), il est facile de voir que :

$$\begin{aligned} b(x_{n+1}; Tx^*) &= b(Tx_n; x^*) \\ &\leq \lambda_1 b(x_n; x^*) + \lambda_2 \frac{b(x_n; x_{n+1})b(x^*; Tx^*)}{1 + b(x_n; x^*)} + \lambda_3 \frac{b(x_n; Tx^*)b(x^*; x_{n+1})}{1 + b(x_n; x^*)} \\ &\quad + \lambda_4 \frac{b(x_n; x_{n+1})b(x_n; Tx^*)}{1 + b(x_n; x^*)} + \lambda_5 \frac{b(x^*; Tx^*)b(x^*; x_{n+1})}{1 + b(x_n; x^*)}. \end{aligned}$$

En prenant la limite comme  $n \rightarrow \infty$ , on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b(x_{n+1}, Tx^*) = 0.$$

D'un autre côté

$$b(x^*; Tx^*) \leq s[b(x^*; x_{n+1}) + b(x_{n+1}; Tx^*)] - b(x_{n+1}; x_{n+1}).$$

En prenant la limite des deux côtés comme  $n \rightarrow \infty$ , nous obtenons.

$$b(x^*; Tx^*) = 0.$$

Cela donne que  $Tx^* = x^*$ . Autrement dit,  $x^*$  est un point fixe de  $T$ .

Pour l'unicité du point fixe, supposons que  $y^*$  est un autre point fixe de  $T$ .

Alors par (Ch-Ka), il est facile de vérifier que :

$$\begin{aligned} b(x^*; y^*) &= b(Tx^*; Ty^*) \\ &\leq \lambda_1 b(x^*; y^*) + \lambda_3 b(x^*; y^*) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_3)b(x^*; y^*). \end{aligned}$$

Car  $\lambda_1 + \lambda_2 + 2s\lambda_3 + s\lambda_4 + s\lambda_5 < 1$  implique  $\lambda_1 + \lambda_3 < 1$  on en déduit que  $x^* = y^*$  puisque  $p(x^*, y^*) = 0$ .

**Corollaire 4.2.1.**

Soient  $(X, p)$  un espace métrique partiel complet de coefficient  $s \geq 1$  et  $T : X \rightarrow X$  une auto-application vérifiant la condition suivante :

$$b(Tx; Ty) \leq \lambda_1 b(x; y) + \lambda_2 \frac{b(x; Tx)b(y; Ty)}{1 + b(x; y)} + \lambda_3 \frac{b(x; Ty)b(y; Tx)}{1 + b(x; y)} \\ + \lambda_4 \frac{b(x; Tx)b(x; Ty)}{1 + b(x; y)} + \lambda_5 \frac{b(y; Ty)b(y; Tx)}{1 + b(x; y)}.$$

pour tout  $x, y \in X$ , où  $\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3; \lambda_4; \lambda_5$  sont des nombres réels non négatifs vérifiant :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 < 1.$$

Alors  $T$  admet un unique point fixe dans  $X$ .

**Preuve.**

Soit  $s = 1$  dans le théorème 4.2.1, donc l'affirmation est vraie.

**Remarque 4.2.1.**

Soient  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$  dans le Théorème 4.2.1 ou dans le Corollaire 4.2.1, alors le Théorème 4.2.1 et le Corollaire 4.2.1 se réduisent à Théorème 3.2.1 et au principe de contraction de Banach, respectivement. De ce point de vue, nos résultats sont de véritables généralisations des précédents résultats.

Récemment, Qing et Rhoades ont établi la notion de  $T$ -stabilité de l'itération de Picard dans l'espace métrique. Dans ce qui suit, nous modifions leur définition et introduisons le concept de  $T$ -stabilité de l'itération de Picard dans l'espace b-métrique partiel.

**Définition 4.2.1.** [11]

Soit  $(X, p)$  un espace b-métrique partiel,  $x_0 \in X$  et  $T : X \rightarrow X$  un application avec  $F(T) \neq \emptyset$ , où  $F(T)$  désigne l'ensemble de tous les points fixes de  $T$ .

Alors l'itération de Picard  $x_{n+1} = Tx_n$  est dite  $T$ -stable par rapport à  $T$  si  $x_n \xrightarrow{b} q$ ,  $q \in F(T)$ .

et chaque fois que  $(y_n)$  est une suite dans  $X$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b(y_{n+1}, Ty_n) = 0$ , on a  $y_n \xrightarrow{b} q$ .

Ce qui suit est un lemme utile pour la preuve de notre résultat principal dans cette section.

**Lemme 4.2.2.** [9]

Soient  $(a_n), (c_n)$  des suites positives vérifiant  $a_{n+1} \leq ha_n + c_n$  pour tout  $n \in N$ ,  $0 \leq h < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$ ; Alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

Nous énonçons maintenant notre résultat principal sur la T-stabilité.

**Théorème 4.2.2.** [11]

Sous les conditions du théorème 4.1, si :

$$2s\lambda_1 + 2\lambda_3 + (s + s^2)(\lambda_4 + \lambda_5) < 2.$$

alors l'itération de Picard est T-stable.

**Preuve.**

D'après le théorème 4.2.1, nous savons que  $T$  a un unique point fixe  $x^* \in X$  et  $b(x^*, x^*) = 0$ .

Supposons que  $(y_n)$  est une suite dans  $X$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b(y_{n+1}, Ty_n) = 0$ .

Profitant de (Ch-Ka), d'une part, nous avons :

$$\begin{aligned} b(Ty_n; x^*) &= b(Ty_n; Tx^*) \\ &\leq \lambda_1 b(y_n; x^*) + \lambda_2 \frac{b(y_n; Ty_n)b(x^*; Tx^*)}{1 + b(y_n; x^*)} + \lambda_3 \frac{b(y_n; Tx^*)b(x^*; Ty_n)}{1 + b(y_n; x^*)} \\ &\quad + \lambda_4 \frac{b(y_n; Ty_n)b(y_n; Tx^*)}{1 + b(y_n; x^*)} + \lambda_5 \frac{b(x^*; Tx^*)b(x^*; Ty_n)}{1 + b(y_n; x^*)} \\ &\leq \lambda_1 b(y_n; x^*) + \lambda_3 b(x^*; Ty_n) + \lambda_4 b(y_n; Ty_n). \end{aligned}$$

ce qui signifie

$$(1 - \lambda_3 - s\lambda_4)b(Ty_n; x^*) \leq (\lambda_1 + s\lambda_4)b(y_n; x^*). \quad (4.3)$$

D'autre part, du fait de la symétrie de  $b$ , on a :

$$b(Ty_n; x^*) = b(Tx^*; Ty_n).$$

qui donne

$$(1 - \lambda_3 - s\lambda_5)b(Ty_n; x^*) \leq (\lambda_1 + s\lambda_5)b(y_n; x^*). \quad (4.4)$$

En combinant (4.3) et (4.4), on obtient :

$$(2 - 2\lambda_3 - s\lambda_4 - s\lambda_5)b(x^*; Ty_n) \leq (2\lambda_1 + s\lambda_4 + s\lambda_5)b(x^*; y_n).$$

Menant à

$$b(x^*; Ty_n) \leq \frac{2\lambda_1 + s\lambda_4 + s\lambda_5}{2 - 2\lambda_3 - s\lambda_4 - s\lambda_5} b(x^*; y_n). \quad (4.5)$$

Si nous fixons

$$l = s(2\lambda_1 + s\lambda_4 + s\lambda_5) < 2 - 2\lambda_3 - s\lambda_4 - s\lambda_5.$$

il découle de

$$2s\lambda_1 + 2\lambda_3 + (s + s^2)(\lambda_4 + \lambda_5) < 2.$$

que  $0 \leq l < 1$ .

D'après le lemme 4.2.1, posons  $a_n = b(y_n, x^*)$ ,  $c_n = sb(y_{n+1}, Ty_n)$ , et grâce à (3.8), on a :

$$a_{n+1} = b(y_{n+1}; x^*) \leq s[b(y_{n+1}; Ty_n) + b(Ty_n; x^*)] \leq ha_n + c_n.$$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b(y_n, x^*) = 0 = p(x^*, x^*)$ .

C'est-à-dire avoir  $y_n \xrightarrow{b} x^*$ . Par conséquent, l'itération de Picard est T-stable.

**Corollaire 4.2.2.** *Sous les conditions du corollaire 4.2.1, l'itération de Picard est T-stable.*

**Preuve.** Notez simplement que le corollaire 4.2.1 est un cas particulier du théorème 4.1 où nous prenons  $s = 1$ .

**Corollaire 4.2.3.** *Soit  $(X, p)$  un espace b-métrique partiel complet de coefficient  $s \geq 1$  et  $T : X \rightarrow X$  une application vérifiant la condition suivante :*

$$p(Tx; Ty) \leq \lambda b(x; y).$$

Pour tout  $x, y \in X$ , où  $\lambda \in [0, 1)$ . L'itération de Picard est T-stable.

**Preuve.** Notez simplement que le Corollaire 4.2.3 est un cas particulier du Corollaire 4.1 où nous prenons

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0.$$

**Problème2.** Les auteurs prévoient, dans [8], d'étudier la T-stabilité des contractions de **Kannan et de Chatterjea** pour l'itération de Picard pour une auto-application définie sur un espace b-métrique partiel.

Le corollaire (3.2.4) illustre l'idée de la propriété dite b.

Si une application T satisfait  $F(T) = F(T^n)$  pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , alors on dit qu'elle a la propriété b.

Les résultats suivants sont des généralisations des résultats correspondants dans des espaces b-métriques partiels.

**Théorème 4.2.3.** *Soit  $(X, p)$  un espace b-métrique partiel de coefficient  $s \geq 1$ . Soit  $T : X \rightarrow X$  une*

application telle que  $F(T) \neq \emptyset$  et que :

$$b(Tx; T^2x) \leq \lambda b(x; Tx). \quad (4.6)$$

pour tout  $x \in X$ , où  $0 \leq \lambda < 1$  est une constante. Alors  $T$  a la propriété b.

**Preuve.** Nous supposons toujours que  $n > 1$ , puisque l'énoncé pour  $n = 1$  est trivial.

Soit  $z \in F(T^n)$  Il est clair que :

$$\begin{aligned} b(z; Tz) &\leq b(TT^{n-1}z; T^2T^{n-1}z) \leq \lambda b(T^{n-1}z; T^n z) = \lambda b(TT^{n-2}z; T^2T^{n-2}z) \\ &\leq \lambda^2 b(T^{n-2}z; T^{n-1}z) \leq \dots \leq \lambda^n b(z; Tz) \rightarrow 0; (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Par conséquent,  $b(z, Tz) = 0$ , c'est-à-dire,  $Tz = z$ .

En conclusion de cette section, nous formulons une conjecture sur la propriété P par rapport au théorème 4.2.1 et au corollaire 4.2.1. Ils sont encore à prouver.

**Conjecture 1.**

Sous les conditions du théorème 3.4,  $T$  possède la propriété P. Pour le preuve, il suffit de vérifier si l'application  $T$  satisfait (4.2.1).

**preuve**, il suffit de vérifier si l'application  $T$  satisfait (4.6).

Aussi

**Conjecture 2.**

Sous les conditions du Corollaire 4.1.1,  $T$  possède la propriété b.

Nous concluons cet article en donnant des exemples pour illustrer le Théorème 4.1.1.

**Exemple 4.2.1.** Soit  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  défini par :

$$b(x; y) = \begin{cases} |x - y|^2 + \max\{x; y\} & \text{si } x \neq y. \\ x & \text{si } x = y \neq 1. \\ 0 & \text{si } x = y = 1. \end{cases}$$

Alors  $(X, p)$  est un espace b-métrique partiel complet de coefficient  $s = 4 > 1$ . Définissez maintenant l'auto-mapping  $T : X \rightarrow X$  par  $T1 = 1 ; T2 = 1 ; T3 = 3 ; T4 = 2$ .

Un calcul simple donne

$$\left\{ \begin{array}{l} b(T1; T2) = b(1; 1) = 0 \leq \frac{3}{4}3 = \frac{3}{4}b(1; 2). \\ b(T1; T3) = b(1; 2) = 3 \leq \frac{3}{4}4 = \frac{3}{4}b(1; 3). \\ b(T1; T4) = b(1; 3) = 3 \leq \frac{3}{4}13 = \frac{3}{4}b(1; 4). \\ b(T2; T3) = b(1; 2) = 3 \leq \frac{3}{4}4 = \frac{3}{4}b(2; 3). \\ b(T2; T4) = b(1; 2) = 3 \leq \frac{3}{4}8 = \frac{3}{4}b(2; 4). \\ b(T3; T4) = b(2; 2) = 2 \leq \frac{3}{4}5 = \frac{3}{4}b(3; 4). \end{array} \right.$$

Alors,  $T$  satisfait toutes les conditions du théorème 1.4, avec  $\lambda_1 \in [\frac{3}{4}; 1)$ ;  $\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0$  et évidemment  $\lambda_1 + \lambda_2 + 2s\lambda_3 + s\lambda_4 + s\lambda_5 + 2s3 + s4 + s5 < 1$ .

Or, d'après le théorème 1.4,  $T$  a un unique point fixe, qui dans ce cas est 1.

**Exemple 4.2.2.** Soit  $X = [0, 1]$ ,  $k > 1$  et définissons une application  $b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$

par  $b(x, y) = |x - y|^k$  pour tout  $x, y \in X$ . Alors  $(X, p)$  est un espace b-métrique partiel complet de coefficient  $s = 2^k > 1$ .

Définissons une application  $T : X \rightarrow X$  par  $Tx = e^{x-\lambda}$ , où  $\lambda > 1 + \ln 2$  est une constante.

Alors par théorème de la valeur moyenne des différentielles, pour tout  $x, y \in X$  et  $x \neq y$ , il existe un nombre réel  $\xi$  appartenant à entre  $x$  et  $y$  tel que :

$$|e^{x-\lambda} - e^{y-\lambda}|^k = (e^{\xi-\lambda})^k |x - y|^k \leq (e^{1-\lambda})^k |x - y|^k.$$

Ainsi

$$b(Tx; Ty) = |e^{x-\lambda} - e^{y-\lambda}|^k \leq q(e^{1-\lambda})^k |x - y|^k \leq (e^{1-\lambda})^k b(x; y).$$

Alors,  $T$  satisfait toutes les conditions du théorème 3.4, avec  $\lambda_1 = (e^{1-\lambda})^k$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$  et évidemment  $\lambda_1 + \lambda_2 + 2s\lambda_3 + s\lambda_4 + s\lambda_5 < 1$ . Or, d'après le théorème 3.4,  $T$  admet un point fixe unique en  $u \in X$ .

en vue de  $\lambda > 1 + \ln 2$ , alors  $\lambda_1 = (e^{1-\lambda})^k < 2^{1-p} = \frac{1}{s}$ , donc  $2s\lambda_1 + 2\lambda_3(s + s^2)(\lambda_4 + \lambda_5) < 2$  et toutes les conditions du théorème 3.10 sont satisfait. Donc d'après le théorème 3.10, l'itération de Picard est  $T$ -stable.

Pour voir exactement ce que signifie cette  $T$ -stabilité, considérons la suite  $y_n = \frac{n}{n+1}$ ;  $u \in X$ . Il

s'ensuit que :

$$b(y_{n+1}; Ty_n) = \left| \frac{n+1}{n+2}u - e^{\frac{n}{n+1}u-\lambda} \right| \rightarrow |u - e^{u-\lambda}| = 0; (n \rightarrow \infty).$$

Notez que  $y_n = \frac{n}{n+1}u \rightarrow u; n \rightarrow \infty$ .

Aller plus loin Récemment, Zheng et al. ont introduit la contraction dite - dans les espaces métriques complets et cette technique a été appliquée avec succès à l'application de type Kannan dans les espaces métriques partiels (voir [6]). Les résultats du présent article seront appliqués dans des recherches futures par les auteurs concernant la  $\theta - \phi$ contraction dans des espaces b-métriques partiels complets. Par conséquent, la poursuite de cette recherche considère la contraction de type  $\theta - \phi$ -Chatterjea dans des espaces b-métriques partiels et étudie l'existence de points fixes. Nous avons une définition de la contraction de type  $\theta - \phi$ -Chatterjea et nous devons vérifier qu'elle suit l'idée des contractions de Chatterjea et généralise de manière à conserver leurs propriétés et leur relation avec les autres contractions.

De plus, une question naturelle est de vérifier si ce nouveau type de contraction est T-stable et possède la propriété b.

### 4.3 Théorèmes communs du point fixe

**Théorème 4.3.1.** [2]

Soient  $S, T : X \rightarrow X$  des auto-applications d'une b-métrique partielle complète espace  $(X, p_b)$  tel que  $T(X) \subseteq S(X)$  et :

$$p_b(Su; Tv) \leq ap_b(u; Su) + bp_b(v; Tv) + cp_b(u; Tv) + dp_b(v; Su) + ep_b(u; v). \quad (4.7)$$

$\forall u; v \in X$  et  $a; b; c; d; e$  sont des réels positifs vérifiant  $a + b + c + e + d(2s-1) \leq 1$  et  $s > 1$ . Alors  $S$  et  $T$  ont un unique point fixe commun dans  $X$ .

**Preuve.**

Supposons  $u_0 \in X$  et puisque  $T(X) \subseteq S(X)$ , on peut donc définir inductivement une suite  $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$  dans  $X$  comme :

$$u_n = Tu_{n-1} et u_{n+1} = Su_n. \quad (4.8)$$

pour  $n = 0; 1; 2; \dots$  Si  $u_n = u_{n+1}$ .

i.e  $u_n = Su_n$ , c'est-à-dire que  $u_n$  est un point fixe de S.

Puisque,  $u_n = u_{n+1} \Rightarrow u_{n+1} = Su_n = Su_{n+1}$ . Alors

$$\begin{aligned} p_b(u_{n+1}; u_{n+2}) &= p_b(Su_{n+1}; Tu_n) \\ &\leq ap_b(u_{n+1}; Su_{n+1}) + bp_b(u_n; Tu_n) + cp_b(u_{n+1}; Tu_n) + dp_b(u_n; Su_{n+1}) + ep_b(u_{n+1}; u_n) \\ &= ap_b(u_{n+1}; u_{n+2}) + bp_b(u_n; u_{n+1}) + cp_b(u_{n+1}; u_{n+1}) + dp_b(u_n; u_{n+2}) + ep_b(u_{n+1}; u_n) \\ &\leq ap_b(u_{n+1}; u_{n+2}) + bp_b(u_n; u_{n+1}) + cp_b(u_{n+1}; u_{n+1}) + d[s(p_b(u_n; u_{n+1}) + p_b(u_{n+1}; u_{n+2})) - p_b(u_{n+1}; u_{n+1})] + \\ &ep_b(u_{n+1}; u_n). \end{aligned}$$

i.e

$$(1 - a - ds)p_b(u_{n+1}; u_{n+2}) + dp_b(u_{n+1}; u_{n+1}) \leq (b + ds + e)p_b(u_n; u_{n+1}) + cp_b(u_{n+1}; u_{n+1}).$$

i.e  $(1 - a - ds)p_b(u_{n+1}; u_{n+2}) + dp_b(u_{n+1}; u_{n+2}) \leq (b + ds + e)p_b(u_n; u_{n+1}) + cp_b(u_{n+1}; u_{n+1})$ . i.e

$$(1 + d - a - ds)p_b(u_{n+1}; u_{n+2}) \leq (b + ds + e + c)p_b(u_n; u_{n+1})$$

$$(1 + d - a - ds)p_b(u_{n+1}; u_{n+2}) \leq (b + ds + e + c)p_b(u_{n+1}; u_{n+2})$$

$$(1 - a - b - c - e - d(2s - 1))p_b(u_{n+1}; u_{n+2}) \leq 0$$

$$p_b(u_{n+1}; u_{n+2}) \leq 0 \Rightarrow p_b(u_{n+1}; u_{n+2}) = 0.$$

i.e  $Tu_n = u_{n+1} = u_{n+2}$  et  $u_n = u_{n+1} \Rightarrow Tu_n = u_n$ .

c'est-à-dire que  $u_n$  est un point fixe de T .

Aussi,  $u_n = u_{n+1} = u_{n+2} = \dots$ , c'est-à-dire que  $u_n$  est un point fixe commun de S et T .

Supposons donc que pour n pair,  $u_n \neq u_{n+1}$ . Puis :

$$\begin{aligned} p_b(u_{n+1}; u_n) &= p_b(Su_n; Tu_{n-1}) \\ &\leq ap_b(u_n; Su_n) + bp_b(u_{n-1}; Tu_{n-1}) + cp_b(u_n; Tu_{n-1}) + dp_b(u_{n-1}; Su_n) + ep_b(u_n; u_{n-1}) \\ &\leq ap_b(u_n; u_{n+1}) + bp_b(u_{n-1}; u_n) + cp_b(u_n; u_n) + dp_b(u_{n-1}; u_{n+1}) + ep_b(u_n; u_{n-1}) \\ &\leq ap_b(u_n; u_{n+1}) + bp_b(u_{n-1}; u_n) + cp_b(u_n; u_n) + ds[p_b(u_{n-1}; u_n) \\ &+ p_b(u_n; u_{n+1})] - dp_b(u_n; u_n) + ep_b(u_n; u_{n-1}) \\ &\leq ap_b(u_n; u_{n+1}) + bp_b(u_{n-1}; u_n) + cp_b(u_n; u_n) + dsp_b(u_{n-1}; u_n) + dsp_b(u_n; u_{n+1}) \\ &- dp_b(u_n; u_n) + ep_b(u_n; u_{n-1})(1 - a - ds)p_b(u_n; u_{n+1}) \\ &\leq (b + ds + e)p_b(u_{n-1}; u_n) + (c - d)p_b(u_n; u_n). \end{aligned}$$

i.e  $(1 - a - ds)p_b(u_n; u_{n+1}) + dp_b(u_n; u_n) \leq (b + ds + e)p_b(u_{n-1}; u_n) + cp_b(u_n; u_n)$ .

i.e  $(1 - a - ds)p_b(u_n; u_{n+1}) + dp_b(u_n; u_{n+1}) \leq (b + ds + e)p_b(u_{n-1}; u_n) + cp_b(u_n; u_{n-1})$ .

i.e  $(1 + d - a - ds)p_b(u_n; u_{n+1}) \leq (b + c + e + ds)p_b(u_n; u_{n-1})$ .

$$\text{i.e } p_b(u_n; u_{n+1}) \leq \frac{b + c + e + ds}{1 + d - a - ds} p_b(u_n; u_{n-1}).$$

$$p_b(u_n; u_{n+1}) \leq k p_b(u_n; u_{n-1}) \text{ avec } k = \frac{b + c + e + ds}{1 + d - a - ds} \leq 1. \quad (4.9)$$

Si  $n$  est impair, la même inégalité (4.9) peut être obtenue de manière analogue.

En poursuivant ce processus, nous atteignons.

$$p_b(u_n; u_{n+1}) \leq k^n p_b(u_0; u_1).$$

Nous affirmons que  $\{u_n\}$  est une suite de Cauchy dans  $X$ . Pour  $m > n$  et  $m, n \in \mathbb{N}$ , considérons :

$$\begin{aligned} p_b(u_n; u_m) &\leq s[p_b(u_n; u_{n+1}) + p_b(u_{n+1}; u_m)] - p_b(u_{n+1}; u_{n+1}) \\ &\leq s[p_b(u_n; u_{n+1}) + p_b(u_{n+1}; u_m)] \\ &\leq s p_b(u_n; u_{n+1}) + s[sp_b(u_{n+1}; u_{n+2}) + p_b(u_{n+2}; u_m) - p_b(u_{n+2}; u_{n+2})] \\ &\leq s p_b(u_n; u_{n+1}) + s[sp_b(u_{n+1}; u_{n+2}) + p_b(u_{n+2}; u_m)] \\ &\leq s k^n p_b(u_0; u_1) + s^2 k^{n+1} p_b(u_0; u_1) + \dots \\ &\leq s k^n p_b(u_0; u_1) (1 + sk + (sk)^2 + \dots) \\ &\leq \frac{sk^n}{1 - sk} p_b(u_0; u_1) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

i.e ;  $\{u_n\}$  est une suite de Cauchy. En utilisant la complétude de  $X$ ,  $\{u_n\}$  converge vers  $u^* \in X$  et on a

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} p_b(u_n, u_m) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_b(u_n, u^*) = p_b(u^*, u^*) = 0.$$

De plus, nous affirmons que  $u^*$  est un point fixe de  $S$ .

Soit  $\{u_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$  une sous-suite de  $\{u_n\}$ .

Alors,

$$\begin{aligned} p_b(u^*; Su^*) &\leq s[p_b(u^*; u_{n_i}) + p_b(u_{n_i}; Su^*)] - p_b(u_{n_i}; u_{n_i}) \\ &\leq s p_b(u^*; u_{n_i}) + s p_b(Tu_{n-i}; Su^*) \\ &\leq s p_b(u^*; u_{n_i}) + s p_b(Su^*; Tu_{n-i}) \\ &\leq s p_b(u^*; u_{n_i}) + s[ap_b(u^*; Su^*) + bp_b(u_{n-i}; Tu_{n-i}) \\ &\quad + cp_b(u^*; Tu_{n-i}) + dp_b(u_{n-i}; Su^*) + ep_b(u^*; u_{n-i})] \\ &\leq s p_b(u^*; u_{n_i}) + s[ap_b(u^*; Su^*) + bp_b(u_{n-i}; u_{n_i}) + cp_b(u^*; u_{n_i}) + dp_b(u_{n-i}; Su^*) + ep_b(u^*; u_{n-i})]. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Comme  $n \rightarrow \infty$ ,  $p_b(u^*, Su^*) \leq s(a + d)p_b(u^*, Su^*)$ , ce qui donne une contradiction.

Donc,  $u^* = Su^* \Rightarrow u^*$  est point fixe de S.

De plus, on affirme que  $u^*$  est un point fixe de T . Soit  $\{u_{n+l_i}\}_{i=1}^{\infty}$  une sous-suite de  $\{u_n\}$ .

Alors,

$$\begin{aligned}
 p_b(u^*; Tu^*) &\leq s[p_b(u^*; u_{n+l_i}) + p_b(u_{n+l_i}; Tu^*)] - p_b(u_{n+l_i}; u_{n+l_i}) \\
 &\leq sp_b(u^*; u_{n+l_i}) + sp_b(Su_{n_i}; Tu^*) \\
 &\leq sp_b(u^*; u_{n+l_i}) + s[ap_b(u_{n_i}; Su_{n_i}) + bp_b(u^*; Tu^*) \\
 &\quad + cp_b(u_{n_i}; Tu^*) + dp_b(u^*; Su_{n_i}) + ep_b(u_{n_i}; u^*)] \\
 &\leq sp_b(u^*; u_{n+l_i}) + s[ap_b(u_{n_i}; u_{n_i}) + bp_b(u^*; Tu^*) \\
 &\quad + cp_b(u_{n_i}; Tu^*) + dp_b(u^*; u_{n+l_i}) + ep_b(u_{n_i}; u^*)].
 \end{aligned}$$

Comme  $n \rightarrow \infty$ ,  $p_b(u^*, Tu^*) \leq s(a+d)p_b(u^*, Tu^*)$ , ce qui donne une contradiction.

Donc,  $u^* = Tu^* \Rightarrow u^*$  est point fixe de T.

Si u et  $u^*$  sont deux points fixes communs différents de S et T , alors on a  $Su = Tu = u$  et  $Su^* = Tu^* = u^*$ .

Considérer :

$$\begin{aligned}
 p_b(u; Tu^*) &= p_b(Su; Tu^*) \\
 &\leq ap_b(u; Su) + bp_b(u^*; Tu^*) + cp_b(u; Tu^*) + dp_b(u^*; Su) + ep_b(u; u^*) \\
 &\leq ap_b(u; u) + bp_b(u^*; u^*) + cp_b(u; u^*) + dp_b(u^*; u) + ep_b(u; u^*) \\
 &\leq (c + d + e)p_b(u; u^*).
 \end{aligned}$$

une contradiction, i.e.,  $u = u^* \Rightarrow$  S et T a un unique point fixe commun dans X.

Ensuite, nous fournissons une illustration non triviale pour montrer la signification du théorème 4.3.1.

**Exemple 4.3.1.**

Soient  $X = [-10, 10]$  et  $p_b : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  définis comme :  $p_b(u, v) = (|u| + |v| + 2)^2$ .

Alors  $(X, p_b)$  est un espace b-métrique partiel complet et  $s = 2$ . Définissons  $S, T : X \rightarrow X$  comme :

$$Su = \frac{u}{6} \text{ et } Tu = \frac{u}{10} .$$

Soit  $u \geq v$ . Alors :

$$p_b(Su, Tv) = p_b\left(\frac{u}{6}, \frac{u}{10}\right) = \left(\frac{|u|}{6} + \frac{|v|}{10} + 2\right)^2 = \left(\frac{10|u| + 6|v| + 120}{60}\right)^2. \quad (4.11)$$

et

$$\begin{aligned}
 & ap_b(u; Su) + bp_b(v; Tv) + cp_b(u; Tv) + dp_b(v; Su) + ep_b(u; v) \\
 &= ap_b(u; \frac{u}{6}) + bp_b(v; \frac{v}{10}) + cp_b(u; \frac{v}{10}) + dp_b(v; \frac{u}{6}) + ep_b(u; v) \\
 &= a(|u| + \frac{|u|}{6} + 2)^2 + b(|v| + \frac{|v|}{10} + 2)^2 + c(|u| + \frac{|v|}{10} + 2)^2 + d(|v| \\
 &\quad + \frac{|u|}{6} + 2)^2 + e(|u| + |v| + 2)^2 \\
 &= a(\frac{7|u| + 12}{6})^2 + b(\frac{11|v| + 20}{10})^2 + c(\frac{10|u| + |v| + 20}{10})^2 + d(\frac{6|v| + |u| + 12}{6})^2 + e(|u| + |v| + 2)^2. \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

D'après les équations (4.11) et (4.12), il est clair que pour  $a = b = e = \frac{1}{6}$ ,  $c = \frac{1}{3}$ , et  $d = \frac{1}{9}$

$$p_b(Su; Tv) = ap_b(u; Su) + bp_b(v; Tv) + cp_b(u; Tv) + dp_b(v; Su) + ep_b(u; v).$$

Par conséquent, tous les postulats du théorème 4.3.1 sont vérifiés, et 0 est l'unique point fixe commun de S et T.

**Corollaire 4.3.1.** [2]

L'inférence du théorème 4.3.1 est valide si  $c = d = 0$ .

**Preuve.**

La preuve suit le schéma du théorème 4.3.1

Ensuite, nous présentons deux exemples pour comprendre et étayer le résultat prouvé ici. Dans un exemple, les cartes impliquées sont continues et commutatives et dans un autre, les cartes sont discontinues et non commutatives.

Il convient de mentionner que la continuité est difficile à réaliser dans certaines applications de la vie quotidienne et constitue un accessoire idéal.

**Exemple 4.3.2.**

Soient  $X = \mathbb{R}^+$  et  $p_b : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  définis comme :  $p_b(u, v) = \max\{u; v\}^2 + (u - v)^2$ .

Alors  $(X, p_b)$  est un espace b-métrique partiel complet et  $s = 4$ .

Définissons  $S, T : X \rightarrow X$  comme :  $Su = \frac{u}{4}$  et  $Tu = \frac{u}{5}$ .

Soit  $u \geq v$ . Alors :

$$p_b(Su, Tv) = p_b(\frac{u}{4}, \frac{u}{5}) = \max\{\frac{u}{4}; \frac{u}{5}\}^2 + |(\frac{u}{4} - \frac{u}{5})|^2 = \frac{u^2}{16} + |(\frac{5u - 4u}{20})|^2. \quad (4.13)$$

et

$$\begin{aligned}
 ap_b(u; Su) + bp_b(v; Tv) + cp_b(u; Tv) &= ap_b(u; \frac{u}{4}) + bp_b(v; \frac{v}{5}) + cp_b(u; v) \\
 &= a[\max\{u; \frac{u}{4}\}^2 + |u - \frac{u}{4}|^2] + b[\max\{v; \frac{v}{5}\}^2 + |v - \frac{v}{5}|^2] \\
 &\quad + c[\max\{u; v\}^2 + |u - v|^2] \\
 &= \frac{25}{16}au^2 + \frac{41}{25}bv^2 + c[u^2 + |u - v|^2].
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

D'après les équations (4.13) et (4.14), il est clair que pour  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = c = \frac{1}{9}$ .

$$p_b(Su; Tv) = ap_b(u; Su) + bp_b(v; Tv) + cp_b(u; v).$$

Ainsi, tous les postulats du corollaire 4.3.1 sont vérifiés, et 0 est l'unique point fixe commun de S et T.

**Exemple 4.3.3.**

Soient  $X = \mathbb{R}^+$  et  $p_b : X \times X \rightarrow [0, \infty)$  définis comme :  $p_b(u, v) = \max\{u; v\}^2 + (u - v)^2$ .

Alors  $(X, p_b)$  est un espace b-métrique partiel complet et  $s = 4$ .

Définissons  $S, T : X \rightarrow X$  comme :  $Su = \frac{u}{2}$  et  $Tu = \frac{u^2 - u}{2}$ .

Alors :

Nous distinguons deux cas  $u \geq v$  et  $v \geq u$  et  $u, v \in [0; 1]$  Dans les mêmes étapes que la solution, l'exemple précédent 4.3.2, on trouve  $a = \frac{1}{3}$ ,  $b = \frac{1}{4}$ ,  $c = \frac{1}{7}$ .

$$p_b(Su; Tv) = ap_b(u; Su) + bp_b(v; Tv) + cp_b(u; v).$$

pour  $u, v \in [0; 1]$ .

Ainsi, tous les postulats du corollaire 4.3.1 sont vérifiés, et 0 est l'unique point fixe commun de S et T.

**Remarque 4.3.1.**

- i. Les résultats ci-dessus sont également vrais si  $T(X)$  est un sous-espace complet au lieu de complétude de  $X$ .
- ii. Les résultats ci-dessus deviennent plus fascinants si nous évaluons un meilleur postulat naturel des fermetures de l'espace de gamme, c'est-à-dire  $\overline{T(X)} \subseteq S(X)$ .
- iii. En choisissant convenablement les valeurs des constantes  $a, b, c, d$  et  $e$ , nous obtenons les extensions, améliorations, généralisations de Bakhtin, Banach, Chatterjea, Kannan, Reich, et ainsi de suite jusqu'à un espace b-métrique partiel pour une paire discontinue non commutative de cartes.

iv. Dans le théorème 4.3 et le corollaire 4.4 (voir, exemple 4.5), un unique point fixe commun existe pour une paire d'autocartes discontinues qui ne satisfait même pas la commutativité et ainsi étend, généralise et améliore les théorèmes comparables présents dans la littérature (par exemple, Banach , Chatterjea , Ciri, Czerwik , Hardy-Rogers , Kannan , Reich, et ses références).

v. Suivant les arguments du théorème 4.3, nous pouvons assouplir la continuité, la commutativité et l'exhaustivité de nombreux résultats célèbres et contemporains existant dans différents espaces.

## 4.4 Application

### Solution du problème de la poutre en porte-à-faux.

Motivés par le fait que la structure en porte-à-faux permet des constructions en porte-à-faux dépourvues de contreventement périphérique, nous résolvons un système d'équations différentielles du quatrième ordre apparaissant dans le problème aux limites à deux points de la flexion d'une poutre élastique en tant qu'application du corollaire 4.3.1

Supposons  $X = C[I, \mathbb{R}]$  désigne l'ensemble de toutes les fonctions continues sur  $I = [0, 1]$ .

Définissons une b-métrique partielle  $p_b : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  comme :  $p_b(u(t), v(t)) = \max_{t \in [0,1]} \left( \frac{|u(t)| + |v(t)|}{2} \right)^2$  avec  $s = 3$ .

#### Théorème 4.4.1. [2]

Les équations de déformations d'une poutre élastique dont l'une extrémité est libre tandis que l'autre est fixe, dans son état d'équilibre est :

$$\frac{d^4 u}{dt^4} = \psi(t; u(t); u'(t); u''(t); u'''(t)). \quad (4.15)$$

$$u(0) = u'(0) = u''(1) = u'''(1) = 0; t \in [0; 1].$$

et

$$\frac{d^4 v}{dt^4} = \phi(t; v(t); v'(t); v''(t); v'''(t)). \quad (4.16)$$

$$v(0) = v'(0) = v''(1) = v'''(1) = 0; t \in [0; 1].$$

où,  $\psi, \phi : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues vérifiant :

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0,1]} (|\psi(t, u(t), u'(t), u''(t))| + |\phi(t, v(t), v'(t), v''(t))|) &\leq \exp^{-\alpha} \max_{t \in [0,1]} |u(t) + v(t)|^2 \\ &+ \exp^{-\beta} \max_{t \in [0,1]} |u(t)|^2 + \exp^{-\gamma} \max_{t \in [0,1]} |v(t)|^2. \end{aligned}$$

$u, v \in X, \lambda \in [1, \infty), t \in [0, 1]$ . Alors, le problème de la poutre en porte-à-faux (4.15-4.16) a une solution en  $X$ .

**Preuve.**

Le problème de la poutre en porte-à-faux (4.16-4.15) est identique à la résolution du système d'équations intégrales.

$$u(t) = \int_0^1 G(s; t) \psi(s; u(s); u'(s); u''(s)) ds. \quad (4.17)$$

et

$$v(t) = \int_0^1 G(s; t) \phi(s; v(s); v'(s); v''(s)) ds; t \in [0; 1]; u \in X. \quad (4.18)$$

Ici

$$G(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} s^2 (3t - s) & 0 \leq t \leq s \leq 1. \\ \frac{1}{6} t^2 (3s - t) & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

est une fonction de Green continue sur  $[0, 1]$ . Définissons les applications  $S : X \rightarrow X$  et  $T : X \rightarrow X$  comme :

$$Su(t) = \int_0^1 G(s; t) \psi(s; u(s); u'(s); u''(s)) ds.$$

et

$$Tv(t) = \int_0^1 G(s; t) \phi(s; v(s); v'(s); v''(s)) ds.$$

Alors  $u$  est une solution de (4.15-4.16) ssi  $u$  est un unique point fixe commun de  $S$  et  $T$  respectivement.

Clairement,  $S, T : X \rightarrow X$  sont bien définis, donc :

$$\begin{aligned}
 p_b(Su(t); Tv(t)) &= \left( \frac{|Su(t)| + |Tv(t)|}{2} \right)_2 \\
 &= \left( \frac{|\int_0^1 G(s; t)\psi(s; u(s); u'(s); u''(s))ds| + |\int_0^1 G(s; t)\phi(s; v(s); v'(s); v''(s))ds|}{2} \right)_2 \\
 &\leq \left( \frac{\int_0^1 G(s; t)|\psi(s; u(s); u'(s); u''(s))|ds + \int_0^1 G(s; t)|\phi(s; v(s); v'(s); v''(s))|ds}{2} \right)_2 \\
 &= \frac{1}{4} \left( \int_0^1 G(s; t)|\psi(s; u(s); u'(s); u''(s))|ds + \int_0^1 G(s; t)|\phi(s; v(s); v'(s); v''(s))|ds \right)^2 \\
 &\leq \frac{1}{4} \max(|\psi(s; u(s); u'(s); u''(s))| + |\phi(s; v(s); v'(s); v''(s))|)^2 \left( \int_{-1}^1 G(s; t)ds \right)^2 \\
 &\leq \frac{1}{4} [exp^{-\alpha} \max_{t \in [0,1]} |u(t) + v(t)|^2 + exp^{-\beta} \max_{t \in [0,1]} |u(t)|^2 \\
 &\quad + exp^{-\gamma} \max_{t \in [0,1]} |v(t)|^2] \left( \int_{-1}^1 G(s; t)ds \right)^2 \\
 &\leq \frac{1}{4} [exp^{-\alpha} \max_{t \in [0,1]} |u(t) + v(t)|^2 + exp^{-\beta} \max_{t \in [0,1]} |u(t)|^2 + exp^{-\gamma} \max_{t \in [0,1]} |v(t)|^2] \frac{5}{12} \\
 &\leq exp^{-\alpha} p_b(u(t); v(t)) + exp^{-\beta} p_b(u(t); Su(t)) + exp^{-\gamma} p_b(v(t); Tv(t)).
 \end{aligned}$$

Donc tous les postulats de Corollary 4.3.1 sont vérifiés pour :

$a = exp^{-\alpha}$  ,  $b = exp^{-\beta}$  ,  $e = exp^{-\gamma}$  et le problème de la poutre en porte-à-faux a une et une seule solution.

# Bibliographie

- [1] A. Tomar, E. Karapinar, On variants of continuity and existence of fixed point via meir-keeler contractions in MC-spaces, *J. Adv. Math. Stud.*, (2)9 (2016), 348–359.
- [2] Anita T ;Meena Joshi ;Venkatesh Bhatt ;Fixed point and a Cantilever beam problem in a partial b-metric space ;*Acta Univ. Sapientiae, Mathematica*, 13, 2 (2021) 506–518
- [3] C. Berger, *Topologie pour la licence (cours et exercices)* Université de Vice Sophia Anti polis 2004.
- [4] Dhananjay Gopal, Praveen Agarwal, Poom Kumam. *Metric Structures and Fixed Point Theory*, CRC Press, 8 avr. 2021 - (316 pages)
- [5] D. J. Leko, Y. U. Gaba ; Fixed point for  $\theta$ - $\phi$ -Chatterjea contraction in complete partial b-metric spaces, in preparation
- [6] *Fixed Point Theorems and Applications* Vittorino Pata Dipartimento di Matematica F. Brioschi Politecnico di Milano
- [7] G. Choquet, *Cours d'analyse. Tome II*, Masson, Paris, 1964.
- [8] Khamsi, M. A., and Kirk, W. A. (2011). *An introduction to metric spaces and fixed point theory* (Vol. 53). John Wiley and Sons.
- [9] Kannan, R.: Some results on fixed points. *Am. Math. Monthly* 76, 405– 408 (1969)
- [10] N. El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*, Z.I des hautes, no. dition 54692, Rue fond des Fourches 21, juillet 2011
- [11] Q. Liu ; CHATTERJEA TYPE FIXED POINT IN PARTIAL b-METRIC SPACES *Math. Anal. Appl.* 146(2), 301305 (1990)
- [12] ] R. P. Agarwal, M. Meehan, D. O'regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge Tracts in Mathematics, Vol. 141, Cambridge University Press (2001).
- [13] S. Banach, *Sur les opérateurs dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, *Fund. Math.* 3(1922), 133-181.
- [14] S. Willard, *General topology*, Adison Wesley(1970).

## Bibliography

---

- [15] S. Banach, Sur les operations dans les ensembles abstrait et leur application aux equations, *Integrals. Fundam. Math.*, 3 (1922), 133–181.
- [16] S. Reich, Some remarks concerning contraction mappings, *Can. Math. Bull.*, 14 (1971), 121–124
- [17] S. G. Matthews ; Partial metric topology, in : *Proceedings of the 8th Summer Conference on Topology and its Applications*, *Ann. New York Acad. Sci.* 728 (1994) 183–197.
- [18] S. Shukla ; Partial b-Metric Spaces and Fixed Point Theorems, *Mediterr. J. Math.* (2014) 11: 703–711.
- [19] S. Shukla, Partial b-metric spaces and fixed point theorems, *Mediterr. J. Math.*, (2) 11 (2014), 703–711.
- [20] Satish Shukla ; Partial b-Metric Spaces and Fixed Point Theorems ; *Mediterr. J. Math.* 11 (2014), 703–711
- [21] University of Leeds, School of Mathematics juin 20, 2015
- [22] Y. Sonntag, *Topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, Paris 1998.