N° d'ordre :
N° de série :

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

Problèmes aux limites à multi-points

Présenté par: Abadi Nadjeh.
Beggat Latifa.

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Touati Brahim Mohammed Said	MAA	Président	Univ. El Oued
Ghendir Aoun Abdellatif	MCB	Rapporteur	Univ. El Oued
Guedda Lamine	MCA	Examinateur	Univ. El Oued

Année universitaire 2019 – 2020

Remerciements

En préambule à cemémoire nous remercier **Allah** le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience d'accomplir ce modeste travail.

En second lieu, nous tenons à remercier mes parents, qui mon encouragé et aidé à arriver à ce stade.

Également, nous tenons à exprimer ici notre vive gratitude, notre immense respect à notre encadreur **Dr.Ghendir Aoun Abdellatif** pour sa patience, sa disponibilité, ses judicieux conseils, ses hautes qualités morales et scientifiques et d'avoir fait le nécessaire pour faciliter autant que possible tout au long de ce travail.

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre recherche en acceptant d'examiner notre travail Et de l'enrichir par leurs propositions.

Enfin, je tiens à remercier toutes les personnes qui nous ont apporté le soutien et l'aide attendu.

Table des matières

Notations

$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
$[a,\, b]$	l'intervalle fermé $a \leqslant x \leqslant b$.
$(a,\, b)$	l'intervalle ouvert $a < x < b$.
$(.)' = \frac{d(.)}{dt}$	la dérivée ordinaire par rapport à t.
i.e.	c'est-à-dire.
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$	ouvert dans $\mathbb{R}^n$.
$\overline{\Omega}$	L'adhérence ou la fermeture de Ω.
$\partial\Omega$	frontiére de Ω.
$C(\overline{\Omega})$	fonctions continues sur Ω.

Dans ce mémoire, nous utilisons spécifiquement les espaces suivants :

• $C([0,\, 1], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues $x : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$, muni de la norme :

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(t)|,\, t \in [0,\, 1]\}.$$

• $C^1([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions $x : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$, de classe C^1 ou une fois continûment dérivable sur $[0,1]$, muni de la norme

$$\|x\| = \max\{\|x\|_\infty, \|x'\|_\infty\}.$$

• On désigne par $L^1([0,\, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions $x : [0,\, 1] \to \mathbb{R}$ Lebesgues intégrables muni de la norme

$$\|x\|_1 := \|x\|_{L^1} = \int_0^1 |x(t)|dt.$$

• l'espace de Sobolev :

$$W^{2,1}(0,\, 1) = \{x : [0,\, 1] \to \mathbb{R};\, x,\, x' \text{ sont absolument continus dans } [0,1],\, x'' \in L^1(0,\, 1)\},$$

muni de la norme

$$\|x\|_{2,1} = \int_0^1 (|x(t)| + |x'(t)| + |x''(t)|)dt.$$

Introduction

L'objectif de ce mémoire est d'étudier quelques problèmes aux limites associés à des équations différentielles posées sur des intervalles bornés et où les conditions aux bords à multi-points.

Les problèmes aux limites pour des équations différentielles ordinaires se posent dans les sciences physiques et les mathématiques appliquées. Dans certains de ces problèmes, les conditions filiales sont imposées aux points de début et de fin. Dans autres cas, les conditions sont imposées à multi-points. Il est parfois préférable d'imposer des conditions à multi-points puisque les mesures nécessaires à une condition à multi-points peuvent être plus précises que la mesure donnée par une condition aux points de début et de fin. Par exemple, le problème classique de Robin est donnée par

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x'(1) = 0. \end{cases}$$

Si la condition $x'(1) = 0$ est remplacé par la condition $x(1) = x(\eta)$ (où $\eta \in (0,1)$), alors le problème

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = x(\eta), \end{cases}$$

est un problème aux limites à trois-points.
Ce travail est subdivisé en quatre chapitres.

- Préliminaires
- Problèmes aux limites du second ordre à trois-points
- Problèmes aux limites du second ordre à m-points
- Problème aux limites à multipoint généralisé.

Plus précisément, nous allons résumé les résultats concernant ces chapitres sont comme suit.
Le premier chapitre sera consacrée aux préliminaires sur des notions générales utilisées dans les différents chapitres du travail, on présente quelques outils de base, comme l'application compacte , le critère de compacité dans $C([a,b],\mathbb{R})$ et le théorème d'Ascoli-Arzéla, enfin on présente un théorème de point fixe qui s'appelle l'alternative non linéaire de Leray-Schauder .
Le deuxième chapitre, est consacré à l'étude quelques résultats d'existence et d'unicité pour le problème aux limites à trois points non linéaire suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = x(\eta), \end{cases}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction L^1-Carathéodory et $\eta \in (0,1)$. En 1992, Gupta [4] tout d'abord étudier l'existence de solutions pour le problème aux limites récente. L'étude de ce type de

problème a été réalisée par de nombreux auteurs dans leurs recherches, voir par exemple, [3], [5], [6], [7] et les références qui y figurent.
Ce problème peut être posé sous la forme d'une équation d'opérateur $Lx = Nx$ où $L : D(L) \subset X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire, et pour $x \in D(L)$, $Lx = x''$, et $N : X \longrightarrow Y$ est un opérateur non linéaire, telle que $(Nx)(t) = f(t, x(t), x'(t))$, $t \in [0, 1]$ avec X, Y sont deux espaces de Banach appropriés où les conditions aux limites sont utilisés pour définir le domaine, $D(L)$, de L. Nous avons utilisé le l'alternative non linéaire de Leray-Schauder. Dans la deuxième section nous avons prouvé des résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0, 1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta), \quad (\alpha \neq 1) \end{cases}$$

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié quelques résultats d'existence et d'unicité pour le type de problème aux limites à m-points suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0, 1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\zeta_i), \end{cases}$$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction L^1-Carathéodory, $a_i \in \mathbb{R}$, $\zeta_i \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, m-2$ avec $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_{m-2} < 1$.
Au quatrième chapitre, nous avons étudié quelques résultats d'existence pour le problème aux limites à multipoint généralisé suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0, 1) \\ x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} c_i x(\zeta_i), \quad x(1) = \sum_{j=1}^{n-2} a_j x(\tau_j), \end{cases}$$

où $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de L^1-Carathéodory, $c_i, a_j \in \mathbb{R}$, $\zeta_i, \tau_j \in (0, 1)$, $i = 1, 2, \ldots, m-2$, $j = 1, 2, \ldots, n-2$ avec $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_{m-2} < 1$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n-2} < 1$.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, on donne quelques défnitions et propriétés que nous utilisons dans la suite de ce travail.

1.1 Quelques outils de base

Définition 1.1
L'application $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est* L^1-*Carathéodory si*

(i) $t \longmapsto f(t,u)$ *est mesurable pour tout* $u \in \mathbb{R}^n$ *;*

(ii) $u \longmapsto f(t,u)$ *est continue pour presque tout* $t \in [0,1]$ *;*

(iii) pour chaque $r > 0$*, il existe* $h_r \in L^1[0,1]$ *telle que*
$|f(t,u)| \leqslant h_r(t)$*, pour presque tout* $t \in [0,1], u \in \mathbb{R}^n$ *avec* $||u|| \leqslant r$.

Théorème 1.1 *(de Rolle)*
Soit f *une application de l'intervalle* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1. f *est continue sur* $[a,b]$.
2. f *est dérivable sur* $]a,b[$.
3. $f(a) = f(b)$.

Alors, il existe $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Théorème 1.2 *(des accroissement finis)*
Soit f *une application de l'intervalle* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *vérifiant les deux condition suivantes :*

1. f *est continue sur* $[a,b]$.
2. f *est dérivable sur* $]a,b[$.

Alors, il existe $c \in]a,b[$ *vérifiant :*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

1.2 Application compacte

Soit X *et* Y *deux espaces de Banach et* $\Omega \subset X$ *un ouvert.*

Définition 1.2

- *f est dite compacte si $f(B)$ est relativement compact dans Y i.e. f transforme (où envoie) tout borné de X en un ensemble relativement compact dans Y.*
- *Soit f un application définie de X à valeurs dans Y. On dit que f est complètement continue si elle est continue et compacte.*

Proposition 1.1
Une application $f : X \to Y$ est compact si et seulement si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X, on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans Y.

1.3 Critère de compacité dans $C([a,b],\mathbb{R})$:

Définition 1.3
On dit que des fonctions d'un sous-ensemble $M \subset C([a,b],\mathbb{R})$ sont uniformément bornées, s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $|x(t)| \leqslant \alpha$ pour tout $x(\cdot)$ de M et quel soit $t \in [a,b]$.

Définition 1.4
On dit que des fonctions d'un sous-ensemble $M \subset C([a,b],\mathbb{R})$ sont équicontinues, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ $(\delta = \delta(\varepsilon))$, tel que pour tout $t_1, t_2 \in [a,b]$ avec $|t_1 - t_2| < \delta$ et pour toute fonction $x(\cdot)$ de M on ait $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$.

Théorème 1.3 *(d'Ascoli-Arzéla, cas générale)[1]*
Soit X un espace métrique compact, Y un espace métrique complet. Un sous-ensemble $M \subset C(X,Y)$ est relativement compact si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1. *Pour tout $t \in X$, l'ensemble $M(t) = \{x(t),\ x(.) \in M\}$ est relativement compact dans Y.*
2. *M est équicontinue.*

Théorème 1.4 *(d'Ascoli-Arzéla, cas particulier)*
$M \subset C([a,b],\mathbb{R})$ est relativement compact si M est uniforément bornée et équicontinue.

1.4 Théorème de point fixe

Nous citerons en particulier l'alternative non linéaire du type Leray-Schauder, utilise dans la résolution des équations différentielles par l'approche du point fixe.

Théorème 1.5 *(L'alternative non linéaire de Leray-Schauder)[2] Soient E un espace de Banach et $C \subset E$ un convexe fermé, Ω un ouvert de C contenant 0 et $T : \overline{\Omega} \longrightarrow C$ un opérateur complètement continu. Alors un des deux énoncés suivants est vérifié*

(a) T admet un point fixe dans $\overline{\Omega}$ i.e. $\exists x \in \overline{\Omega} : x = Tx$

(b) il existe $x \in \partial\Omega$ et $\lambda \in [0,1]$ telle que $x = \lambda Tx$.

Remarque 1.1 *l'énoncé (b) indique que l'ensemble $S = \{x \in \Omega : x = \lambda Tx,\ \lambda \in [0,1]\}$ n'est pas borné.*
Ainsi pour appliquer l'alternative non linéaire de Leray-Schauder, il suffit de montrer que T est complètement continu et vérifiant l'estimation à priori suivante :

$$\exists R > 0, \forall x \in E, \forall \lambda \in [0,1] : (x = \lambda Tx \Rightarrow ||x|| < R),$$

pour dire que T admet au moins un point fixe dans $B(0,R)$.

Chapitre 2

Problèmes aux limites du second order à trois points

Nous considérons le problèmes aux limites du second ordre à trois points :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = x(\eta) \end{cases} \tag{I}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction donnée,* $\eta \in (0,1)$.
On peut poser le problème (I) *sous la forme d'une équation d'opérateur*

$$Lx = Nx$$

où $L : D(L) \subset X \longrightarrow Y$ *est un opérateur linéaire avec*

$$D(L) = \{x \in W^{2,1}(0,1), x(0) = 0, x(1) = x(\eta)\}$$

et pour

$$x \in D(L), \; Lx = x''.$$

$N : X \longrightarrow Y$ *est un opérateur non linéaire tel que*

$$(Nx)(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in [0,1]$$

avec

- $X = \mathcal{C}^1[0,1], \; ||x||_X = max\,\{||x||_\infty, ||x'||_\infty\}$ *tel que* $||x||_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t)|$
- $Y = L^1([0,1]), \; ||x||_1 = \displaystyle\int_0^1 |x(t)|dt$ *et l'espace de Sobolev,*
- $W^{2,1} = \{x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \; x, \, x'$ *sont absolument contiues dans* $[0,1]$ *et* $x'' \in L^1[0,1]\}$ *muni de la norme :*

$$||x||_{2,1} = \int_0^1 (|x(t)| + |x'(t)| + |x''(t)|)dt$$

Lemme 2.1 *Soit* $h \in Y$ *et* $x \in X$ *de telle sorte que*

$$\begin{cases} x''(t) = h(t), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = x(\eta). \end{cases}$$

Alors
$x(t)=\int_0^t (t-s)h(s)ds-\frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds+\frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds$

Démonstration.De $x''(t)=h(t)$ *on a*, $x'(t)=x'(0)+\int_0^t h(s)ds$
ce qui implique que

$$x(t)=x'(0)t+\int_0^t (t-s)h(s)ds$$

et de $x(1)=x(\eta)$, *nous avons*

$$x'(0)=-\frac{1}{1-\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds+\frac{1}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds.$$

Alors

$$x(t)=\int_0^t (t-s)h(s)ds-\frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds+\frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds.$$

■

Lemme 2.2 *Pour tout* $x\in W^{2,1}(0,1)$ *avec* $x(0)=0$, $x(1)=x(\eta)$ *il existe* $\zeta\in(\eta,1)$ *telle que* $x'(\zeta)=0$ *et*

$$||x||_\infty\leqslant||x'||_\infty\leqslant||x''||_1.$$

Démonstration.De $x\in W^{2,1}(0,1)$ *et d'aprés le théorème de Rolle, il existe* $\zeta\in(\eta,1)$ *telle que* $x'(\zeta)=0$. *Comme*

$$\int_0^t x'(s)ds=x(t)-x(0)=x(t).$$

Alors,

$$\forall t\in[0,1],\ |x(t)|=\left|\int_0^t x'(s)ds\right|\leqslant\int_0^1 |x'(s)|ds$$

ce que implique que

$$||x||_\infty\leqslant||x'||_\infty.$$

D'autre part, on a

$$\forall t\in[0,1],\ ||x''||_1=\int_0^1 |x''(s)|ds\geqslant\int_\zeta^t x''(s)ds=x'(t)$$

ce qui implique que

$$||x'||_\infty\leqslant||x''||_1.$$

■

Théorème 2.1 *[3] Soit* $f:[0,1]\times\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *est une fonction* L^1-*Carathéodory.*
Supposer qu'il existe des fonctions p,q,r *dans* $L^1(0,1)$ *telles que*
$|f(t,u,v)|\leqslant p(t)|u|+q(t)|v|+r(t)$, *pour tous* $t\in[0,1],(u,v)\in\mathbb{R}^2$.
Alors , le problème (I) admet au moins une solution dans $C^1[0,1]$ *a condition que*

$$||p||_1+||q||_1<1.$$

Démonstration.On suppose l'opérateur $K:Y\longrightarrow X$ *défini, pour* $y\in Y$, *par*

$$(Ky)(t)=\int_0^t (t-s)y(s)ds-\frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (1-s)y(s)ds+\frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta-s)y(s)ds.$$

On a, pour $y \in Y$, $Ky \in D(L)$ et $LKy = (Ky)'' = x'' = y$, et pour $x \in D(L)$, $KLx = Kx'' = Ky = x$ ce qui implique que $L^{-1} = K$. Sachant que
$x \in C^1[0,1]$ est une solution de (I) ssi x est une solution d'équation opérationelle $Lx = Nx$, ce qui équivalent à l'équation $x = KNx$.
Nous appliquons l'alternative de Leray-Shauder pour obtenir l'existence de solution de l'équation $x = KNx$.
Pour ce faire, il suffit de vérifier que l'ensemble de toutes les solutions possibles de la famille des équations

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = x(\eta) \end{cases} \tag{2.1}$$

est bornée dans X par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$.
Au début, nous montrons que KN est complètement continu.

- *KN est borné : Nous avons, pour tout $t \in [0,1]$*

$$\begin{aligned} |KNx(t)| \leqslant &\int_0^t (t-s)|f(s,x(s),x'(s))|ds + \frac{t}{1-\eta}\int_0^1 (1-s)|f(s,x(s),x'(s))|ds \\ &+ \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta (\eta - s)|f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant & t\int_0^t |f(s,x(s),x'(s))|ds + \frac{t}{1-\eta}\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds + \frac{t}{1-\eta}\int_0^\eta |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant &(t + \frac{2t}{1-\eta})\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant &(t + \frac{2t}{1-\eta})\int_0^1 |h_r(s)|ds \\ \leqslant &(1 + \frac{2}{1-\eta})\int_0^1 |h_r(s)|ds. \end{aligned}$$

Ainsi

$$||KN||_\infty \leqslant (1 + \frac{2}{1-\eta})||h_r||_1.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |(KN)'x(t)| \leqslant &\int_0^t |f(s,x(s),x'(s))|ds + \frac{1}{1-\eta}\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds + \frac{1}{1-\eta}\int_0^\eta |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant &(1 + \frac{2}{1-\eta})\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant &(1 + \frac{2}{1-\eta})\int_0^1 |h_r(s)|ds. \end{aligned}$$

Ainsi

$$||(KN)'||_\infty \leqslant (1 + \frac{2}{1-\eta})||h_r||_1.$$

Donc

$$||KN||_X \leqslant (1+\frac{2}{1-\eta})||h_r||_1.$$

Ce qui prouve que KN *est borné.*
Soit $\Omega = \{x \in X, ||x||_X < \rho\}$, $(\rho > 0)$ *une boule ouvert de rayon* ρ *dans* X.

- KN *est continu dans* $\overline{\Omega}$ *:*
  Soit $(x_n) \in \overline{\Omega}, x_n \longrightarrow x$ *et démontrer que* $(KN)x_n \longrightarrow (KN)x$.
  Nous avons

$$|(KN)x_n(t) - (KN)x(t)| \leqslant (1+\frac{2}{1-\eta})\int_0^1 |f(s, x_n(s), x_n'(s)) - f(s, x(s), x'(s))|ds$$

  et aussi

$$|(KN)'x_n(t) - (KN)'x(t)| \leqslant (1+\frac{2}{1-\eta})\int_0^1 |f(s, x_n(s), x_n'(s)) - f(s, x(s), x'(s))|ds.$$

  On utilisant la continuité de f *par rapport à deuxieme variable,nous obtenons*

  $|f(s, x_n(s), x_n'(s)) - f(s, x(s), x'(s))| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$

  ce qui implique que $|(KN)x_n(t) - (KN)x(t)| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$ *et*
  $|(KN)'x_n(t) - (KN)'x(t)| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$.

  Alors, $||KNx_n - KNx||_X \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$,

  donc $KN : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ *est continu.*
- KN *est compact :*
  Selon ce qui précède KN *est uniformément borné.*
  Maintenant demontrer que KN *est équicontinu : pour* $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $(t_1 \geqslant t_2)$ *avec* $|t_1 - t_2| \longrightarrow 0$,

on a

$$\begin{aligned}
|KNx(t_1) - KNx(t_2)| =& \Big|\int_0^{t_1}(t_1 - s)f(s,x(s),x'(s))ds - \frac{t_1}{1-\eta}\int_0^1(1-s)f(s,x(s),x'(s))ds \\
&+ \frac{t_1}{1-\eta}\int_0^{\eta}(\eta - s)f(s,x(s),x'(s))ds - \int_0^{t_2}(t_2-s)f(s,x(s),x'(s))ds \\
&+ \frac{t_2}{1-\eta}\int_0^1(1-s)f(s,x(s),x'(s))ds - \frac{t_2}{1-\eta}\int_0^{\eta}(\eta-s)f(s,x(s),x'(s))ds\Big| \\
=& \Big|\int_0^{t_2}(t_1-s)f(s,x(s),x'(s))ds + \int_{t_2}^{t_1}(t_1-s)f(s,x(s),x'(s))ds \\
&- \int_0^{t_2}(t_2-s)f(s,x(s),x'(s))ds + \frac{t_2-t_1}{1-\eta}\int_0^1(1-s)f(s,x(s),x'(s))ds \\
&+ \frac{t_1-t_2}{1-\eta}\int_0^{\eta}(\eta-s)f(s,x(s),x'(s))ds\Big| \\
\leqslant& |t_1-t_2|\int_0^{t_2}|f(s,x(s),x'(s))|ds + \int_{t_2}^{t_1}(t_1-s)|f(s,x(s),x'(s))|ds \\
&+ \frac{|t_1-t_2|}{1-\eta}\int_0^1(1-s)|f(s,x(s),x'(s))|ds \\
&+ \frac{|t_1-t_2|}{1-\eta}\int_0^{\eta}(\eta-s)|f(s,x(s),x'(s))|ds \\
\leqslant& |t_1-t_2|\int_0^{t_2}|h_r(s)|ds + t_1\int_{t_2}^{t_1}|h_r(s)|ds + \frac{|t_1-t_2|}{1-\eta}\int_0^1|h_r(s)|ds \\
&+ \eta\frac{|t_1-t_2|}{1-\eta}\int_0^{\eta}|h_r(s)|ds.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|KNx(t_1) - KNx(t_2)| \longrightarrow 0.$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
|(KN)'x(t_1) - (KN)'x(t_2)| =& \Big|\int_0^{t_1} f(s,x(s),x'(s))ds - \int_0^{t_2} f(s,x(s),x'(s))ds\Big| \\
\leqslant& \int_{t_2}^{t_1}|f(s,x(s),x'(s))|ds \\
\leqslant& \int_{t_2}^{t_1}|h_r(s)|ds.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|(KN)'x(t_1) - (KN)'x(t_2)| \longrightarrow 0.$$

Donc KN est équicontinu.
Alors, KN est compact, on conclut KN est complètement continu.

Maintenant, soit x est une solution de (2.1) pour certain $\lambda \in [0,1]$, et d'aprés le lemme 2.2, nous avons

$$\begin{aligned} ||x''||_1 =& \lambda ||f||_1 \\ \leqslant& ||f||_1 \\ \leqslant& ||p||_1||x||_\infty + ||q||_1||x'||_\infty + ||r||_1 \\ \leqslant& ||p||_1||x''||_1 + ||q||_1||x''||_1 + ||r||_1 \\ \leqslant& (||p||_1 + ||q||_1)||x''||_1 + ||r||_1 \end{aligned}$$

donc

$$(1-(||p||_1+||q||_1))||x''||_1 \leqslant ||r||_1$$

ensuite

$$||x''||_1 \leqslant \frac{1}{1-(||p||_1+||q||_1)}||r||_1 = C \quad (constant)$$

on a $||p||_1+||q||_1 < 1$ donc $1-(||p||_1+||q||_1) > 0$
alors $\frac{1}{1-(||p||_1+||q||_1)}||r||_1 > 0$ donc C est strictement positive,
Ce qui implique que $||x||_\infty \leqslant C$ et $||x'||_\infty \leqslant C$ donc $||x||_X \leqslant C$.

■

De plus, nous étudions plus généralement le problème aux limites de second ordre à trois points suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t,x(t),x'(t)), & t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta), & (\alpha \neq 1) \end{cases} \tag{2.2}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée, $\eta \in (0,1)$. Avant de donner les résultats d'existence et l'unicité des solutions de problème (2.2), nous offrons des lemmes préliminaires.

Lemme 2.3 *Soit $h \in L^1[0,1]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\eta \neq 1$ avec $\eta \in (0,1)$ et $x \in X$ de telle sort que soit*

$$\begin{cases} x''(t) = h(t), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \alpha x(\eta). \end{cases}$$

Alors,

$$x(t) = \int_0^t (t-s)h(s)ds + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds - \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

Démonstration.De $x''(t) = h(t)$ on a, $x'(t) = x'(0) + \int_0^t h(s)ds$
ce qui implique que
$x(t) = x'(0)t + \int_0^t (t-s)h(s)ds$ et de $x(1) = \alpha x(\eta)$ nous avons

$$x'(0) = \frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds - \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

Alors

$$x(t) = \int_0^t (t-s)h(s)ds + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta-s)h(s)ds - \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

■

Lemme 2.4 *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\eta \neq 1$ *avec* $\eta \in (0,1)$ *et* $x \in W^{2,1}(0,1)$.

- *Si* $\alpha \leqslant 1$, *alors* $||x||_\infty \leqslant ||x'||_\infty \leqslant ||x''||_1$.
- *Si* $1 < \alpha < \frac{1}{\eta}$, *alors* $||x||_\infty \leqslant ||x'||_\infty \leqslant \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}||x''||_1$.

Démonstration.

- *Si* $\alpha \leqslant 1$, *de* $x(t) = \displaystyle\int_0^t x'(s)ds$ *on a* $||x||_\infty \leqslant t||x'||_\infty \leqslant ||x'||_\infty$.
  D'autre part, si $x \in W^{2,1}(0,1)$ *avec* $x(0) = 0$, $x(1) = \alpha x(\eta)$, *alors il existe* $\zeta \in (0,1)$ *telle que* $x'(\zeta) = 0$.
  En effet, par contraduction.
  Si $x'(t) > 0$ *pour chaque* $t \in (0,1)$, *donc* x *est strictement croissante sur* $[0,1]$, *alors* $x(t) > 0$ *pour chaque* $t \in (0,1)$, *donc* $x(1) > x(\eta)$ *ce qui implique que* $\alpha > 1$, *ceci contredit l'hypothèse.*
  La même chose, si $x'(t) < 0$ *pour chaque* $t \in (0,1)$, *donc* x *est strictement décroissante sur* $[0,1]$, *alors* $x(t) < 0$ *pour chaque* $t \in (0,1)$, *donc* $x(1) < x(\eta)$ *ce qui implique que* $\alpha > 1$, *ceci est contredit.*
  Ainsi, $\forall t \in [0,1]$: $|x'(t)| = |\int_\zeta^t x''(s)ds| \leqslant \int_0^1 |x''(s)|ds = ||x''||_1$, *ensuit*
  $$||x'||_\infty \leqslant ||x''||_1.$$
- *Si* $1 < \alpha < \frac{1}{\eta}$, *alors pour* $x \in W^{2,1}(0,1)$ *avec* $x(0) = 0$, $x(1) = \alpha x(\eta)$. *D'aprés le théorème des accroissement finis, il existe* $\tau \in (\eta,1)$ *telle que* $x(1) - x(\eta) = x'(\tau)(1-\eta)$, *i.e,* $x'(\tau) = \frac{\alpha-1}{1-\eta}x(\eta)$. *En plus, nous avons*
  $$\begin{aligned} ||x''||_1 &\geqslant \int_\tau^t |x''(s)|ds \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad t \in [0,1] \\ &\geqslant \left|\int_\tau^t x''(s)ds\right| \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad t \in [0,1] \\ &\geqslant |x'(t)| - |x'(\tau)| \quad \textit{pour} \quad \textit{tout} \quad t \in [0,1]. \\ \textit{Donc,} \qquad ||x''||_1 &\geqslant ||x'||_\infty - \frac{\alpha-1}{1-\eta}|x(\eta)| \\ &\geqslant ||x'||_\infty - \frac{\alpha-1}{1-\eta}\frac{1}{\alpha}||x'||_1 \\ &\geqslant ||x'||_\infty - \frac{\alpha-1}{\alpha(1-\eta)}||x'||_\infty \\ &\geqslant \frac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}||x'||_\infty, \end{aligned}$$

  alors, $||x'||_\infty \leqslant \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}||x''||_1$, *et selon le cas précédent* $||x||_\infty \leqslant ||x'||_\infty$.

  Nous concluons que
  $$||x||_\infty \leqslant ||x'||_\infty \leqslant \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}||x''||_1.$$

■

Théorème 2.2 *[4] Soit* $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction* L^1-*Carathéodory. Supposer qu'il existe des fonctions* p, q, r *dans* $L^1[0,1]$ *tels que*
$$|f(t,u,v)| \leqslant p(t)|u| + q(t)|v| + r(t),$$

pour tous $t \in [0,1]$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ *et soit* $\alpha \in \mathbb{R}, \eta \in (0,1)$ *données. Alors, le problème* (2.2) *admet une solution dans* $C^1[0,1]$ *pourvu que*

$$\begin{cases} ||p||_1 + ||q||_1 < 1, & si \quad \alpha \leqslant 1 \\ ||p||_1 + ||q||_1 < \frac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}, & si \quad 1 < \alpha < \frac{1}{\eta}. \end{cases}$$

Démonstration.Soit $X = C^1[0,1]$, $Y = L^1[0,1]$.
On définit l'application linéaire $L : D(L) \subset X \longrightarrow Y$ *avec*

$$D(L) = \left\{x \in W^{2,1}(0,1) : x(0) = 0,\ x(1) = \alpha x(\eta)\right\},$$

et pour $x \in D(L)$, $Lx = x''$.
Aussi définir l'application non linéaire $N : X \longrightarrow Y$ *avec*

$$(Nx)(t) = f(t, x(t), x'(t)),\ t \in [0,1].$$

Après, on introduit l'opérateur linéaire $K : Y \longrightarrow X$, *défini pour* $y \in Y$ *par*

$$(Ky)(t) = \int_0^t (t-s)y(s)ds + \frac{\alpha t}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta (\eta - s)y(s)ds - \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 (1-s)y(s)ds.$$

Au début,nous montrons que KN *est complètement continu (compact et continu).*

- KN *est borné : Nous avons, pour tout* $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |KNx(t)| \leqslant & t\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds + \frac{\alpha\eta t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds + \frac{t}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant & \frac{2}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant & \frac{2}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |h_r(s)|ds. \end{aligned}$$

Ainsi

$$||KN||_\infty \leqslant \frac{2}{1-\alpha\eta}||h_r||_1.$$

D'autre part, pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} |(KN)'x(t)| \leqslant & \frac{\alpha\eta}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds + \frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds + \int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant & \frac{2}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant & \frac{2}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |h_r(s)|ds. \end{aligned}$$

Ainsi

$$||(KN)'||_\infty \leqslant \frac{2}{1-\alpha\eta}||h_r||_1.$$

Donc

$$||KN||_X \leqslant \frac{2}{1-\alpha\eta}||h_r||_1.$$

Ce qui prouve que KN *est borné.*
Soit $\Omega = \{x \in X, ||x||_X < \rho\}$, $(\rho > 0)$ *une boule ouvert de rayon* ρ *dans* X.

- KN *est continu dans* $\overline{\Omega}$ *:*
Soit $(x_n) \in \overline{\Omega}, x_n \longrightarrow x$ *et démontrer que* $(KN)x_n \longrightarrow (KN)x$.
Nous avons

$$|(KN)x_n(t) - (KN)x(t)| \leqslant \frac{2}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |f(s, x_n(s), x_n'(s)) - f(s, x(s), x'(s))|ds$$

et aussi

$$|(KN)'x_n(t) - (KN)'x(t)| \leqslant \frac{2}{1-\alpha\eta}\int_0^1 |f(s, x_n(s), x_n'(s)) - f(s, x(s), x'(s))|ds.$$

On utilisant la continuité de f *par rapport à deuxieme variable,nous obtenons*

$|f(s, x_n(s), x_n'(s)) - f(s, x(s), x'(s))| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$

ce qui implique que $|(KN)x_n(t) - (KN)x(t)| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$ *et*
$|(KN)'x_n(t) - (KN)'x(t)| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$.

Alors, $||KNx_n - KNx||_X \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$,

donc $KN : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ *est continu.*

- KN *et compact :*
Selon ce qui précède KN *est uniformément borné.*
Maintenant demontrer que KN *est équicontinu : pour* $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $(t_1 \geqslant t_2)$ *avec* $|t_1 - t_2| \longrightarrow 0$,

on a

$$\begin{aligned}
|KNx(t_1)-KNx(t_2)| =& |\frac{\alpha t_1}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,x(s),x'(s))ds-\frac{t_1}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)f(s,x(s),x'(s))ds\\
&+\int_0^{t_1}(t_1-s)f(s,x(s),x'(s))ds-\frac{\alpha t_2}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,x(s),x'(s))ds\\
&+\frac{t_2}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)f(s,x(s),x'(s))ds-\int_0^{t_2}(t_2-s)f(s,x(s),x'(s))ds|\\
=&|\frac{\alpha(t_1-t_2)}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,x(s),x'(s))ds-\frac{t_1-t_2}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)f(s,x(s),x'(s))ds\\
&+\int_0^{t_2}(t_1-t_2)f(s,x(s),x'(s))ds+\int_{t_2}^{t_1}(t_1-s)f(s,x(s),x'(s))ds|\\
\leqslant&\frac{\alpha|t_1-t_2|}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta(\eta-s)|f(s,x(s),x'(s))|ds\\
&+\frac{|t_1-t_2|}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)|f(s,x(s),x'(s))|ds\\
&+|t_1-t_2|\int_0^{t_2}|f(s,x(s),x'(s))|ds+\int_{t_2}^{t_1}(t_1-s)|f(s,x(s),x'(s))|ds\\
\leqslant&\frac{\alpha\eta|t_1-t_2|}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta|h_r(s)|ds+\frac{|t_1-t_2|}{1-\alpha\eta}\int_0^1|h_r(s)|ds+|t_1-t_2|\int_0^{t_2}|h_r(s)|ds\\
&+t_1\int_{t_2}^{t_1}|h_r(s)|ds.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|(KNx)(t_1)-(KNx)(t_2)|\longrightarrow 0.$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
|(KN)'x(t_1)-(KN)'x(t_2)| =&|\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,x(s),x'(s))ds\\
&-\frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)f(s,x(s),x'(s))ds\\
&+\int_0^{t_1}f(s,x(s),x'(s))ds-\frac{\alpha}{1-\alpha\eta}\int_0^\eta(\eta-s)f(s,x(s),x'(s))ds\\
&+\frac{1}{1-\alpha\eta}\int_0^1(1-s)f(s,x(s),x'(s))ds-\int_0^{t_2}f(s,x(s),x'(s))ds|\\
=&|\int_0^{t_1}f(s,x(s),x'(s))ds-\int_0^{t_2}f(s,x(s),x'(s))ds|\\
=&|\int_{t_2}^{t_1}f(s,x(s),x'(s))ds|\\
\leqslant&\int_{t_2}^{t_1}|h_r(s)|ds.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|(KN)'x(t_1)-(KN)'x(t_2)|\longrightarrow 0.$$

Nous concluons que KN est équicontinu.
Alors, KN est compact, ce qui résulte KN est complètement continu.
Nous appliquons l'alternative de Leray-Schauder pour obtenir l'existence de solution de l'équation $x = KNx$.
Pour ce faire, il suffit de vérifier que l'ensemble de toutes les solutions possibles de la famille des équations

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)), & t \in (0,1) \\ x(0) = 0, & x(1) = \alpha x(\eta) \end{cases} \tag{2.3}$$

est bornée dans X par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$.
Soit x est une solution de (2.3) pour certain $\lambda \in [0,1]$, et d'apérs le lemme 2.4, nous avons

- *Si $\alpha \leqslant 1$, on a $||x||_\infty \leqslant ||x'||_\infty \leqslant ||x''||_1$.*
  Alors,

$$\begin{aligned} ||x''||_1 &\leqslant ||p||_1 ||x||_\infty + ||q||_1 ||x'||_\infty + ||r||_1 \\ &\leqslant ||p||_1 ||x''||_1 + ||q||_1 ||x''||_1 + ||r||_1 \end{aligned}$$

  donc

$$(1 - (||p||_1 + ||q||_1))\, ||x''||_1 \leqslant ||r||_1$$

  alors

$$||x''||_1 \leqslant \frac{1}{1 - (||p||_1 + ||q||_1)} ||r||_1.$$

  Il s'ensuit qu'il ya une constante C , indépendante de $\lambda \in [0,1]$ avec $(C = \frac{1}{1-(||p||_1+||q||_1)}||r||_1)$, on a $||p||_1 + ||q||_1 < 1$ donc $1 - (||p||_1 + ||q||_1) > 0$ alors $\frac{1}{1-(||p||_1+||q||_1)}||r||_1 > 0$ C est strictement positive,

  telle que $||x''||_1 \leqslant C$, ce qui implique que $||x||_\infty \leqslant C$ et $||x'||_\infty \leqslant C$, donc

$$||x||_X \leqslant C.$$

- *Si $1 < \alpha < \frac{1}{\eta}$, on a $||x||_\infty \leqslant ||x'||_\infty \leqslant \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}||x''||_1$ et d'autre part,*

$$\begin{aligned} ||x''||_1 &\leqslant ||p||_1 ||x||_\infty + ||q||_1 ||x'||_\infty + ||r||_1 \\ &\leqslant \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}(||p||_1 + ||q||_1)||x''||_1 + ||r||_1 \end{aligned}$$

  donc

$$(1 - \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}(||p||_1 + ||q||_1))||x''||_1 \leqslant ||r||_1$$

  alors

$$||x''||_1 \leqslant \frac{1}{1 - \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}(||p||_1 + ||q||_1)} ||r||_1.$$

Lorsque on pose, $C' = \frac{1}{1-\frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}(||p||_1+||q||_1)}||r||_1$
on a $||p||_1 + ||q||_1 < \frac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}$ donc $\frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}(||p||_1 + ||q||_1) < 1$ et $1 - \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}(||p||_1 + ||q||_1) > 0$ alors $\frac{1}{1-\frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}(||p||_1+||q||_1)}||r||_1 > 0$ i.e. C' est strictement positive,

ce qui implique que

$$||x||_\infty \leqslant C' \quad et \quad ||x'||_\infty \leqslant C'$$

donc nous obtenons,

$$||x||_X \leqslant C'.$$

Il résulte que l'ensemble de toutes les solutions de la famille des équations (2.3) est borné en $C^1[0,1]$ par une constante indépendant de $\lambda \in [0,1]$, d'où le résultat.

■

En ce qui concerne l'unicité de solution du problème (2.2), nous avons le résultat suivant.

Théorème 2.3 *[5] Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction L^1-Carathéodory. Supposons qu'il existe des fonctions p, q, r dans $L^1[0,1]$ tel que*
$|f(t,u,v)| \leqslant p(t)|u| + q(t)|v| + r(t)$, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,

et

$$|f(t,u_1,v_1) - f(t,u_2,v_2)| \leqslant p(t)|u_1 - u_2| + q(t)|v_1 - v_2|,$$

pour tous $t \in [0,1]$ et (u_1,v_1), $(u_2,v_2) \in \mathbb{R}^2$, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\eta \in (0,1)$ sont données.
Alors, le problème (2.2) admet une seule solution dans $C^1[0,1]$ pourvu que

$$\begin{cases} ||p||_1 + ||q||_1 < 1, & si \quad \alpha \leqslant 1 \\ ||p||_1 + ||q||_1 < \frac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}, & si \quad 1 < \alpha < \frac{1}{\eta}. \end{cases}$$

Démonstration.Selon ce qui précède, on a l'existence de solution du problème (2.2) d'après le théorème précédent.
Pour montrer l'unicité, nous avons l'argument suivant.
Soit x_1, x_2 sont deux solutions pour le problème (2.2), et en posant $z = x_1 - x_2$, alors nous avons

$$\begin{cases} z''(t) = f(t,x_1,x_1') - f(t,x_2,x_2'), & t \in (0,1) \\ z(0) = 0, \quad z(1) = \alpha z(\eta). \end{cases} \tag{2.4}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} ||z''||_1 =& ||f(t,x_1,x_1') - f(t,x_2,x_2')||_1 \\ \leqslant& ||p||_1 ||x_1 - x_2||_\infty + ||q||_1 ||x_1' - x_2'||_\infty \\ \leqslant& ||p||_1 ||z||_\infty + ||q||_1 ||z'||_\infty. \end{aligned}$$

- *Si $\alpha \leqslant 1$, d'aprés lemme 2.4, on a $||z||_\infty \leqslant ||z'||_\infty \leqslant ||z''||_1$,*
  donc $||z''||_1 \leqslant (||p||_1 + ||q||_1)||z''||_1$ et comme $||p||_1 + ||q||_1 < 1$ on a $||z''||_1 = 0$, ce qui implique que $x_1 = x_2$.

- *Si $1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{\eta}$, d'aprés lemme 2.4, on a $||z''||_1 \leqslant \frac{\alpha(1-\eta)}{1-\alpha\eta}(||p||_1 + ||q||_1)||z''||_1$ et comme $||p||_1 + ||q||_1 < \frac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\alpha\eta)}$, on a $||z''||_1 = 0$, donc $||z||_\infty = 0$, ce qui implique que $x_1 = x_2$, d'où le résultat.*

■

Exemple 2.1
Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} x''(t) = \frac{t}{9}x + \frac{1}{7}x' + \cos(x'), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{1}{4}x(\frac{1}{5}). \end{cases} \tag{2.5}$$

Dans ce cas, nous choisisons $f(t,u,v) = \frac{t}{9}u + \frac{1}{7}v + \cos(v)$, *on a* $|f(t,u,v)| \leqslant \frac{t}{9}|u| + \frac{1}{7}|v| + 1$, *ainsi on pose,* $p(t) = \frac{t}{9}$, $q(t) = \frac{1}{7}$, $r(t) = 1$ *dans* $L^1(0,1)$, *alors* $||p||_1 + ||q||_1 = \frac{1}{18} + \frac{1}{7} = \frac{25}{126}$ *et comme* $\alpha = \frac{1}{4}$, ($\alpha \leqslant 1$) *on a donc* $||p||_1 + ||q||_1 < 1$, ($\frac{25}{126} < 1$).
Nous avons les conditions de théorème 2.2 ont été atteints, ce qui implique qu'il existe une solution $x \in C^1[0,1]$ *de problème (2.5).*

Exemple 2.2
Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} x''(t) = \frac{t}{3}x + \frac{1}{4}x' + 1, \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{4}{3}x(\frac{1}{6}). \end{cases} \tag{2.6}$$

- *L'existence :*
  Ici, nous choisisons $f(t,u,v) = \frac{t}{3}u + \frac{1}{4}v + 1$, *on a* $|f(t,u,v)| \leqslant \frac{t}{3}|u| + \frac{1}{4}|v| + 1$, *dans ce cas on pose,* $p(t) = \frac{t}{3}$, $q(t) = \frac{1}{4}$, $r(t) = 1$ *dans* $L^1(0,1)$, *alors* $||p||_1 + ||q||_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ *et comme* $\alpha = \frac{4}{3}$, ($1 < \alpha < 6$) *on a* $||p||_1 + ||q||_1 < \frac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}$, $(\frac{5}{12} < \frac{7}{10})$.
  Nous avons les conditions de théorème 2.2 ont été atteints, ce qui implique qu'il existe une solution $x \in C^1[0,1]$ *de problème (2.6).*

- *L'unicité :*
  Dans ce cas, on a $|f(t,u_1,v_1) - f(t,u_2,v_2)| \leqslant \frac{t}{3}|u_1 - u_2| + \frac{1}{4}|v_1 - v_2|$, *ainsi on pose,* $p(t) = \frac{t}{3}$, $q(t) = \frac{1}{4}$, $r(t) = 1$ *dans* $L^1(0,1)$, *alors* $||p||_1 + ||q||_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ *avec* $||p||_1 + ||q||_1 < \frac{1-\alpha\eta}{\alpha(1-\eta)}$.
  Nous avons les conditions de théorème 2.3 ont été atteints, ce qui implique qu'il existe une seule solution $x \in C^1[0,1]$ *de problème (2.6).*

Chapitre 3

Problèmes aux limites du second ordre à m-points

On considère le problème aux limites à m-points suivant comme modèle :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\zeta_i) \end{cases} \tag{3.1}$$

où $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction continue ou* L^1-*Carathéodory,* $a_i \in \mathbb{R}$, $\zeta_i \in (0,1)$, $i = 1, 2, \ldots, m-2$ *avec* $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_{m-2} < 1$.
Une fois les a_i*'s ont le même signe, une autre fois les* a_i*'s n'ont pas le même signe.*

3.1 Problèmes aux limites du second ordre à m-points rèduction à trois points

Dans ce cas nous prenons toutes les a_i*'s ont le même signe avec* $\alpha = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \neq 0$.
Ici on peut réduire cette problème à un problème à trois points.
En effet, pour chaque solution du problème (3.1), notons

$$A = \min_{t \in [\zeta_1, \zeta_{m-2}]} x(t), \; B = \max_{t \in [\zeta_1, \zeta_{m-2}]} x(t).$$

- *Si* $a_i \in [0, +\infty)$, *alors* $a_i A \leqslant a_i x(\zeta_i) \leqslant a_i B$, $i \in \{1, 2, \ldots, m-2\}$.
- *Si* $a_i \in (-\infty, 0]$, *alors* $a_i A \geqslant a_i x(\zeta_i) \geqslant a_i B$, $i \in \{1, 2, \ldots, m-2\}$.

Dans les deux cas, nous avons

$$A \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\zeta_i)}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i} \leqslant B.$$

Il s'ensuit qu'il existe $\eta \in [\zeta_1, \zeta_{m-2}]$ *telle que* $x(\eta) = \frac{x(1)}{\alpha}$, *ce qui implique que* x *est aussi une solution de problème* (2.2).

3.2 Cas générale

Maintenant, on considère le problème (3.2) *avec les* a_i*'s n'ont pas le même signe.*

Lemme 3.1 *Soit* $h \in L^1[0,1]$ *et* $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \ldots, m-2\}$ *avec* $\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i \neq 1$ *et* $x \in C^1[0,1]$, *de telle sort que soit*

$$\begin{cases} x''(t) = h(t), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\zeta_i). \end{cases}$$

Alors

$$x(t) = \int_0^t (t-s)h(s)ds + \frac{t}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\zeta_i} (\zeta_i - s)h(s)ds - \frac{t}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

Démonstration.De $x''(t) = h(t)$, *on a* $x(t) = x'(0)t + \int_0^t (t-s)h(s)ds$

ensuite, nous avons $x(1) = x'(0) + \int_0^1 (1-s)h(s)ds$

et $\sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\zeta_i) = x'(0) \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i + \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\zeta_i} (\zeta_i - s)h(s)ds.$

Comme $x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\zeta_i)$, *on a*

$$x'(0)\left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i\right) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\zeta_i} (\zeta_i - s)h(s)ds - \int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

Alors

$$x(t) = \int_0^t (t-s)h(s)ds + \frac{t}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\zeta_i} (\zeta_i - s)h(s)ds - \frac{t}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \int_0^1 (1-s)h(s)ds.$$

∎

Lemme 3.2 *Soit* $a_i \in \mathbb{R}$, $\zeta_i \in (0,1)$, $i = 0, 1, \ldots, m-2$, $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_{m-2} < 1$ *avec* $\alpha = \sum_{i=1}^{m-2} a_i > 1$, $\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i \neq 1$. *Soit aussi* $x \in W^{2,1}(0,1)$ *tels que* $x(0) = 0$, $x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\zeta_i)$.
Alors

- *Si* $0 < \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i < 1$ *alors,* $||x||_\infty \leqslant ||x'||_\infty \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)}{1 - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} ||x''||_1$.

- *Si* $\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i > 1$ *alors,* $||x||_\infty \leqslant ||x'||_\infty \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i - 1}||x''||_1$.

Démonstration.

- *Soit* $0 < \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i < 1$.

  De $x(t) = \int_0^t x'(s)ds$ *on a* $||x||_\infty \leqslant ||x'||_\infty$.

  D'aprés le théorème des accroissement finis, il existe $\eta_i \in (\zeta_i, 1)$*, pour tout* $i = 1, 2, \ldots, m-2$ *telle que* $x'(\eta_i) = \frac{x(1)-x(\zeta_i)}{1-\zeta_i}$.

  Depuis, pour tout $i = 1, 2, \ldots, m-2$, $x'(t) = x'(\eta_i) + \int_{\eta_i}^t x''(s)ds$*, nous avons*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)x'(t) &= \sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)x'(\eta_i) + \sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)\int_{\eta_i}^t x''(s)ds \\ &= \sum_{i=1}^{m-2} a_i(x(1)-x(\zeta_i)) + \sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)\int_{\eta_i}^t x''(s)ds \\ &=(\alpha-1)x(1) + \sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)\int_{\eta_i}^t x''(s)ds.\end{aligned}$$

  Comme $\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i = \alpha - \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i$*, nous obtenons*

$$\begin{aligned}||x'||_\infty \leqslant& \frac{\alpha-1}{\alpha-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}|x(1)| + ||x''||_1 \\ \leqslant& \frac{\alpha-1}{\alpha-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}||x||_\infty + ||x''||_1 \\ \leqslant& \frac{\alpha-1}{\alpha-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}||x'||_\infty + ||x''||_1.\end{aligned}$$

  Depuis $0 < \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i < 1$*, nous avons* $\frac{\alpha-1}{\alpha-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} < 1$.

  Donc, $||x'||_\infty \leqslant \frac{\alpha-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}||x''||_1$*, i.e,* $||x'||_\infty \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}||x''||_1$.

- *Soit mainténant* $\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i > 1$.

  D'aprés le théorème des accroissement finis, il existe $\tau_i \in (0, \zeta_i)$*, pour tout* $i = 1, 2, \ldots, m-2$ *telle que* $x'(\tau_i) = \frac{x(\zeta_i)-x(0)}{\zeta_i - 0} = \frac{x(\zeta_i)}{\zeta_i}$.

Depuis, pour tout $i = 1, 2, \dots, m-2$, $x'(t) = x'(\tau_i) + \int_{\tau_i}^{t} x''(s)ds$, *nous avons*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i x'(t) &= \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i x'(\tau_i) + \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i \int_{\tau_i}^{t} x''(s)ds \\ &= \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\zeta_i) + \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i \int_{\tau_i}^{t} x''(s)ds \\ &= x(1) + \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i \int_{\tau_i}^{t} x''(s)ds,\end{aligned}$$

ensuit $||x'||_\infty \leqslant \frac{1}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}|x(1)| + ||x''||_1$.

Comme $\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i > 1$, *nous obtenons* $\frac{1}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} < 1$.

Donc $||x'||_\infty \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i - 1}||x''||_1$.

■

Théorème 3.1 *Soit* $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction* L^1-*Carathéodory.*
Suppose qu'il existe des fonctions p, q, r *dans* $L^1[0,1]$ *telle que*

$$|f(t,u,v)| \leqslant p(t)|u| + q(t)|v| + r(t),$$

pour tous $t \in [0,1]$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. *Soit* $a_i \in \mathbb{R}$, $\zeta_i \in (0,1)$, $i = 1, 2, \dots, m-2$, $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \zeta_{m-2} < 1$ *avec* $\alpha = \sum_{i=1}^{m-2} a_i > 1$, $\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i \neq 1$.
Alors

1. *Si* $0 < \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i < 1$, *le problème* (3.1) *admet au mois une solution dans* $C^1([0,1])$ *à condition que* $||p||_1 + ||q||_1 < \frac{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)}$.

2. *Si* $\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i > 1$, *le problème* (3.1) *admet au mois une solution dans* $C^1([0,1])$ *à condition que* $||p||_1 + ||q||_1 < \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i - 1}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}$.

Démonstration.Soit $X = C^1[0,1]$, $Y = L^1[0,1]$.
On définit l'application linéaire $L : D(L) \subset X \longrightarrow Y$ *avec*

$$D(L) = \left\{ x \in W^{2,1}(0,1) : x(0) = 0,\ x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\zeta_i) \right\},$$

et pour $x \in D(L)$, $Lx = x''$.
Aussi définir l'application non linéaire $N : X \longrightarrow Y$ *avec*

$$(Nx)(t) = f(t, x(t), x'(t)),\ t \in [0,1].$$

Après, on introduit l'opérateur linéaire $K : Y \longrightarrow X$, défini pour $y \in Y$ par

$$(Ky)(t) = \int_0^t (t-s)y(s)ds + \frac{t}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \sum_{i=1}^{m-2} a_i \int_0^{\zeta_i} (\zeta_i - s)y(s)ds - \frac{t}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \int_0^1 (1-s)y(s)ds.$$

Au début, nous montrons que KN est complètement continu.

- *KN est borné :*
  Nous avons, pour tout $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}|(KNx)(t)| \leqslant & t\int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds + \frac{t}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i \int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ & + \frac{t}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant & \frac{2}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant & \frac{2}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \int_0^1 |h_r(s)|ds,\end{aligned}$$

ce qui implique

$$||KN||_\infty \leqslant \frac{2}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} ||h_r||_1.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}|(KN)'x(t)| \leqslant & \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds + \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ & + \int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant & \frac{2}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \int_0^1 |f(s,x(s),x'(s))|ds \\ \leqslant & \frac{2}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \int_0^1 |h_r(s)|ds,\end{aligned}$$

ensuit

$$||(KN)'||_\infty \leqslant \frac{2}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} ||h_r||_1.$$

Donc

$$||KN||_X \leqslant \frac{2}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} ||h_r||_1.$$

Ce qui prouve que KN est borné.
Soit $\Omega = \{x \in X, ||x||_X < \rho\}$, $(\rho > 0)$ une boule ouvert de rayon ρ dans X.

- *KN est continu dans $\overline{\Omega}$:*
  Soit $(x_n) \in \overline{\Omega}, x_n \longrightarrow x$ et démontrer que $(KN)x_n \longrightarrow (KN)x$.
  Nous avons
  $$|(KN)x_n(t) - (KN)x(t)| \leqslant \frac{2}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \int_0^1 |f(s,x_n(s),x_n'(s)) - f(s,x(s),x'(s))|ds$$
  et aussi
  $$|(KN)'x_n(t) - (KN)'x(t)| \leqslant \frac{2}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i} \int_0^1 |f(s,x_n(s),x_n'(s)) - f(s,x(s),x'(s))|ds.$$
  On utilisant la continuité de f par rapport à deuxieme variable,nous obtenons

  $|f(s,x_n(s),x_n'(s)) - f(s,x(s),x'(s))| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$

  ce qui implique que $|(KN)x_n(t) - (KN)x(t)| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$ *et*
  $|(KN)'x_n(t) - (KN)'x(t)| \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$.

  Alors, $||KNx_n - KNx||_X \longrightarrow 0$ *lorsque* $n \longrightarrow +\infty$,

  donc $KN : \overline{\Omega} \longrightarrow X$ *est continu.*
- *KN et compact :*
  Selon ce qui précède KN est uniformément borné.
  Maintenant demontrer que KN est équicontinu :
  pour $t_1,\ t_2 \in [0,1]$, $(t_1 \geqslant t_2)$ avec $|t_1 - t_2| \longrightarrow 0$, on a
  $$\begin{aligned}
  |KNx(t_1) - KNx(t_2)| &= |\frac{t_1\sum_{i=1}^{m-2} a_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i - s)f(s,x(s),x'(s))ds \\
  &- \frac{t_1}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^1(1-s)f(s,x(s),x'(s))ds + \int_0^{t_1}(t_1 - s)f(s,x(s),x'(s))ds \\
  &- \frac{t_2\sum_{i=1}^{m-2} a_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i - s)f(s,x(s),x'(s))ds + \frac{t_2}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^1(1-s)f(s,x(s),x'(s))ds \\
  &- \int_0^{t_2}(t_2 - s)f(s,x(s),x'(s))ds| \\
  &=|\frac{(t_1-t_2)\sum_{i=1}^{m-2} a_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i - s)f(s,x(s),x'(s))ds - \frac{t_1-t_2}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^1(1-s)f(s,x(s),x'(s))ds \\
  &+ \int_0^{t_2}(t_1-t_2)f(s,x(s),x'(s))ds + \int_{t_2}^{t_1}(t_1 - s)f(s,x(s),x'(s))ds| \\
  &\leqslant \frac{|t_1-t_2|\sum_{i=1}^{m-2} a_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i - s)|f(s,x(s),x'(s))|ds + \frac{|t_1-t_2|}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^1(1-s)|f(s,x(s),x'(s))|ds \\
  &+ |t_1-t_2|\int_0^{t_2}|f(s,x(s),x'(s))|ds + \int_{t_2}^{t_1}(t_1 - s)|f(s,x(s),x'(s))|ds \\
  &\leqslant \frac{|t_1-t_2|\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^{\zeta_i}|h_r(s)|ds + \frac{|t_1-t_2|}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^1|h_r(s)|ds + |t_1-t_2|\int_0^{t_2}|h_r(s)|ds \\
  &+ t_1\int_{t_2}^{t_1}|h_r(s)|ds.
  \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|(KNx)(t_1)-(KNx)(t_2)| \longrightarrow 0.$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
&|(KN)'x(t_1)-(KN)'x(t_2)| = |\frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i - s)f(s,x(s),x'(s))ds + \int_0^{t_1} f(s,x(s),x'(s))ds \\
&-\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^1 (1-s)f(s,x(s),x'(s))ds - \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i - s)f(s,x(s),x'(s))ds \\
&+\frac{1}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}\int_0^1 (1-s)f(s,x(s),x'(s))ds - \int_0^{t_2} f(s,x(s),x'(s))ds| \\
&=|\int_0^{t_1} f(s,x(s),x'(s))ds - \int_0^{t_2} f(s,x(s),x'(s))ds| \\
&=|\int_{t_2}^{t_1} f(s,x(s),x'(s))ds| \\
&\leqslant \int_{t_2}^{t_1} |h_r(s)|ds.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$|(KN)'x(t_1)-(KN)'x(t_2)| \longrightarrow 0.$$

Cela signifie que KN est équicontinu.
Alors, KN est compact, donc KN est complètement continu.
Nous appliquons le théorème d'alternative de Leray-Schauder pour obtenir l'existence de solution de l'équation $x = KNx$.
Pour ce faire, il suffit de vérifier que l'ensemble de toutes les solutions possibles de la famille des équations

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda f(t,x(t),x'(t)), \quad t\in(0,1) \\ x(0)=0, \quad x(1)=\sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\zeta_i) \end{cases} \tag{3.2}$$

est bornée dans X par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$.
Soit x est une solution de (3.2) pour certain $\lambda\in[0,1]$, et d'apérs le lemme 3.2, nous avons

- *Si $0 < \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i < 1$, on a $||x||_\infty \leqslant ||x'||_\infty \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}||x''||_1$.*
  Alors

$$\begin{aligned}
||x''||_1 &= \lambda||f(t,x(t),x'(t))||_1 \\
&\leqslant ||p||_1||x||_\infty + ||q||_1||x'||_\infty + ||r||_1 \\
&\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}(||p||_1+||q||_1)||x''||_1 + ||r||_1,
\end{aligned}$$

  donc

$$\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}(||p||_1+||q||_1)\right)||x''||_1 \leqslant ||r||_1,$$

ce qui implique

$$||x''||_1 \leqslant \frac{1}{1-\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i(1-\zeta_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}(||p||_1+||q||_1)}||r||_1.$$

Il s'ensuit qu'il ya une constante C*, indépendante de* $\lambda\in[0,1]$
avec $(C=\frac{1}{1-\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i(1-\zeta_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}(||p||_1+||q||_1)}||r||_1)$ *on a* $||p||_1+||q||_1<\frac{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i(1-\zeta_i)}$
donc $\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i(1-\zeta_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}(||p||_1+||q||_1)<1$ *et* $1-\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i(1-\zeta_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}(||p||_1+||q||_1)>0$
alors $\frac{1}{1-\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i(1-\zeta_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}(||p||_1+||q||_1)}||r||_1>0$ *i.e.* C *est strictement positive,*
telle que $||x''||_1\leqslant C$*, alors* $||x||_\infty\leqslant C$ *et* $||x'||_\infty\leqslant C$*, donc*

$$||x||_X\leqslant C.$$

- *Si* $\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i>1$*, on a* $||x||_\infty\leqslant||x'||_\infty\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}||x''||_1$.
  Alors

$$\begin{aligned}||x''||_1=&\lambda||f(t,x(t),x'(t))||_1\\ \leqslant&||p||_1||x||_\infty+||q||_1||x'||_\infty+||r||_1\\ \leqslant&\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}(||p||_1+||q||_1)||x''||_1+||r||_1,\end{aligned}$$

donc

$$(1-\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}(||p||_1+||q||_1))||x''||_1\leqslant||r||_1,$$

alors

$$||x''||_1\leqslant\frac{1}{1-\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}(||p||_1+||q||_1)}||r||_1.$$

Lorsque on pose, $C'=\frac{1}{1-\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}(||p||_1+||q||_1)}||r||_1$
on a $||p||_1+||q||_1<\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}$
donc $\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}(||p||_1+||q||_1)<1$ *et* $1-\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}(||p||_1+||q||_1)>0$
alors $\frac{1}{1-\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}(||p||_1+||q||_1)}||r||_1>0$ *i.e.* C' *est strictement positive,*

nous trouvons

$$||x||_\infty\leqslant C' \quad et \quad ||x'||_\infty\leqslant C',$$

donc, nous obtenons

$$||x||_X\leqslant C'.$$

Il résulte que l'ensemble de toutes les solutions de la famille des équations (3.2) *est borné en* $C^1[0,1]$ *par une constante, indépendant de* $\lambda\in[0,1]$*. d'où le résultat.*

■

Lemme 3.3 *Soit* $a_i \in \mathbb{R}$, $\zeta_i(0,1)$, $i = 1,2,\dots,m-2$, $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \dots < \zeta_{m-2} < 1$ *avec* $\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i \neq 1$, $\alpha = \sum_{i=1}^{m-2} a_i$, *soit aussi* $x \in W^{2,1}(0,1)$ *tels que* $x(0) = 0$, $x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\zeta_i)$.
Suppose que

$$M = \min\left\{\frac{|\alpha-1|}{|\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)|}, \frac{1}{|\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i|}\right\} < 1$$

et

$$S = \max\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m-2}|a_i(1-\zeta_i)|}{|\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)|}, \frac{\sum_{i=1}^{m-2}|a_i\zeta_i|}{|\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i|}\right\}.$$

Alors,

$$||x||_\infty \leqslant ||x'||_\infty \leqslant \frac{S}{1-M}||x''||_1.$$

Démonstration.La démonstration est similaire à la démonstration du lemme 3.2, rester dans les inégalités en utilisant la valeur absolue.
Nous avons va ci-dessus,

$$\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)x'(t) = (\alpha-1)x(1) + \sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)\int_{\eta_i}^{t} x''(s)ds$$

donc

$$|\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)||x'(t)| \leqslant |\alpha-1|||x'||_\infty + \sum_{i=1}^{m-2}|a_i(1-\zeta_i)|||x''||_1$$

ce qui donne,

$$||x'||_\infty \leqslant \frac{|\alpha-1|}{|\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)|}||x'||_\infty + \frac{\sum_{i=1}^{m-2}|a_i(1-\zeta_i)|}{|\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)|}||x''||_1. \tag{1}$$

D'autre part nous avons vu aussi,

$$\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i x'(t) = x(1) + \sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i\int_{\eta_i}^{t} x''(s)ds,$$

donc

$$|\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i||x'(t)| \leqslant ||x'||_\infty + \sum_{i=1}^{m-2}|a_i\zeta_i|||x''||_1,$$

ce qui donne,

$$||x'||_\infty \leqslant \frac{1}{|\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i|}||x'||_\infty + \frac{\sum_{i=1}^{m-2}|a_i\zeta_i|}{|\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i|}||x''||_1. \tag{2}$$

De (1) *et* (2), *on a*

$$||x'||_\infty \leqslant M||x'||_\infty + S||x''||_1,$$

donc

$$||x||_\infty \leqslant ||x'||_\infty \leqslant \frac{S}{1-M}||x''||_1.$$

■

Théorème 3.2 *Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction L^1-Carathéodory.*
Suppose qu'il existe des fonctions p, q, r dans $L^1[0,1]$ telle que $|f(t,u,v)| \leqslant p(t)|u| + q(t)|v| + r(t)$, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $a_i \in \mathbb{R}$, $\zeta_i \in (0,1)$, $i = 1,2,\ldots,m-2$, $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_{m-2} < 1$ avec $\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i \neq 1$, $\alpha = \sum_{i=1}^{m-2} a_i$. Suppose que

$$M = \min\left\{\frac{|\alpha - 1|}{|\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)|}, \frac{1}{|\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i|}\right\} < 1$$

et

$$S = \max\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m-2}|a_i(1-\zeta_i)|}{|\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)|}, \frac{\sum_{i=1}^{m-2}|a_i\zeta_i|}{|\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i|}\right\}.$$

Alors, le problème (3.1) admet au mois une solution dans $C^1([0,1])$ à condition que

$$||p||_1 + ||q||_1 < \frac{1-M}{S}.$$

Démonstration.Selon la démonstration du théorème 3.1 précédente KN est complètement continu.
Aprés, nous appliquons le théorème d'alternative de Leray-Schauder pour obtenir l'existence de solution de l'équation $x = KNx$.
Pour ce faire, il suffit de vérifier que l'ensemble de toutes les solution possibles de la famille des équations

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\zeta_i) \end{cases} \tag{3.3}$$

est bornée dans X par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$.
Soit x est une solution de (3.3) pour certain $\lambda \in [0,1]$, et d'apérs le lemme 3.3, nous avons

$$\begin{aligned} ||x''||_1 =& \lambda||f(t,x(t),x'(t))||_1 \\ \leqslant& ||p||_1||x||_\infty + ||q||_1||x'||_\infty + ||r||_1 \\ \leqslant& \frac{S}{1-M}(||p||_1 + ||q||_1)||x''||_1 + ||r||_1, \end{aligned}$$

donc

$$(1 - \frac{S}{1-M}(||p||_1 + ||q||_1))||x''||_1 \leqslant ||r||_1.$$

Alors,

$$||x''||_1 \leqslant \frac{1}{1 - \frac{S}{1-M}(||p||_1 + ||q||_1)}||r||_1.$$

Il s'ensuit qu'il ya une constante C, indépendante de $\lambda \in [0,1]$ avec $(C = \frac{1}{1-\frac{S}{1-M}(||p||_1+||q||_1)}||r||_1)$ on a $||p||_1 + ||q||_1 < \frac{1-M}{S}$ donc $\frac{S}{1-M}(||p||_1 + ||q||_1) < 1$ et $1 - \frac{S}{1-M}(||p||_1 + ||q||_1) > 0$ alors $\frac{1}{1-\frac{S}{1-M}(||p||_1+||q||_1)}||r||_1 > 0$ i.e. C est strictement positive,

telle que $||x''||_1 \leqslant C$, ce qui implique que $||x||_\infty \leqslant C$ et $||x'||_\infty \leqslant C$, donc

$$||x||_X \leqslant C.$$

Il résulte que l'ensemble de toutes les solutions de la famille des équations (3.3) est borné en $C^1[0,1]$ *par une constante, indépendante de* $\lambda \in [0,1]$*, d'où le résultat.*

■

En ce qui concerne l'unicité de solution du problème (3.1), nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.3 *Soit* $f : [0,1]\times\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction* L^1-*Carathéodory. Suppose qu'il existe des fonctions* p,q,r *dans* $L^1[0,1]$ *telle que* $|f(t,u,v)| \leqslant p(t)|u| + q(t)|v| + r(t)$*,*
pour tout $t\in[0,1]$ *et tout* $(u,v)\in\mathbb{R}^2$*,*
et

$$|f(t,u_1,v_1) - f(t,u_2,v_2)| \leqslant p(t)|u_1-u_2| + q(t)|v_1-v_2|,$$

pour tous $t\in[0,1]$ *et* (u_1,v_1)*,* $(u_2,v_2)\in\mathbb{R}^2$*. Soit* $a_i\in\mathbb{R}$*,* $\zeta_i\in(0,1)$*,* $i=1,2,\dots,m-2$*,* $0<\zeta_1<\zeta_2<\ldots<\zeta_{m-2}<1$ *avec* $\alpha=\sum_{i=1}^{m-2}a_i>1$*,* $\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i\neq 1$*.*
Alors, le problème (3.1) admet une seule solution dans $C^1[0,1]$ *pourvu que*

$$\begin{cases} ||p||_1+||q||_1 < \frac{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i(1-\zeta_i)}, & si \quad \sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i\leqslant 1\\ ||p||_1+||q||_1 < \frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}, & si \quad \sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i > 1.\end{cases}$$

Démonstration.Selon ce qui précède, on a l'existence de solution du problème (3.1) est comme le théorème précédent.
Pour montrer l'unicité, nous avons l'argument suivant .
Soit x_1*,* x_2 *sont deux solutions pour le problème (3.1), et en posant* $z=x_1-x_2$*, alors nous avons*

$$\begin{cases} z''(t) = f(t,x_1(t),x_1'(t)) - f(t,x_2(t),x_2'(t)), \quad t\in(0,1)\\ z(0)=0, \quad z(1)=\sum_{i=1}^{m-2}a_iz(\zeta_i).\end{cases} \tag{3.4}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} ||z''||_1 =& ||f(t,x_1(t),x_1'(t)) - f(t,x_2(t),x_2'(t))||_1\\ \leqslant& ||p||_1||x_1-x_2||_\infty + ||q||_1||x_1'-x_2'||_\infty\\ \leqslant& ||p||_1||z||_\infty + ||q||_1||z'||_\infty.\end{aligned}$$

- *Si* $0<\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i<1$*, d'aprés lemme 3.2, on a* $||z||_\infty\leqslant||z'||_\infty\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i(1-\zeta_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}||z''||_1$*.*

  Donc $||z''||_1\leqslant(||p||_1+||q||_1)\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i(1-\zeta_i)}{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}||z''||_1$ *et comme* $||p||_1+||q||_1<\frac{1-\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i(1-\zeta_i)}$ *on a* $||z''||_1=0$*, donc* $||z||_\infty=0$ *ce qui implique que* $x_1=x_2$*.*

- *Si* $\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i>1$*, d'aprés lemme 3.2, on a* $||z||_\infty\leqslant||z'||_\infty\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}||z''||_1$*,*

  donc $||z''||_1\leqslant(||p||_1+||q||_1)\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}||z''||_1$ *et comme* $||p||_1+||q||_1<\frac{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i-1}{\sum_{i=1}^{m-2}a_i\zeta_i}$*, on a*

  $||z''||_1=0$*, donc* $||z||_\infty=0$*, ce qui implique que* $x_1=x_2$*, d'où le résultat.*

■

Exemple 3.1
Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} x''(t) = \frac{t}{16}x + \frac{1}{7}x' + \sin(x'), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = 0, \quad x(1) = \frac{9}{10}x(\frac{1}{9}) + \frac{1}{2}x(\frac{1}{6}) - \frac{1}{8}x(\frac{1}{2}). \end{cases} \tag{3.5}$$

Dans ce cas, nous choisisons $f(t,u,v) = \frac{t}{16}u + \frac{1}{7}v + \sin(v)$, *on a* $|f(t,u,v)| \leqslant \frac{t}{16}|u| + \frac{1}{7}|v| + 1$, *donc, on pose* $p(t) = \frac{t}{16}$, $q(t) = \frac{1}{7}$, $r(t) = 1$ *dans* $L^1(0,1)$ *avec* $||p||_1 = \frac{1}{16}\int_0^1 sds = \frac{1}{32}$, $||q||_1 = \frac{1}{7}$.
Alors, nous avons $||p||_1 + ||q||_1 = \frac{1}{32} + \frac{1}{7} = \frac{39}{224}$ *et comme* $\alpha = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{9}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{51}{40} > 1$ *et on a* $\zeta_1 = \frac{1}{9}$, $\zeta_2 = \frac{1}{6}$, $\zeta_3 = \frac{1}{2}$, *donc* $a_1\zeta_1 + a_2\zeta_2 + a_3\zeta_3 = \frac{29}{240} < 1$ *et* $||p||_1 + ||q||_1 < \frac{1-\sum_{i=1}^{m-2} a_i\zeta_i}{\sum_{i=1}^{m-2} a_i(1-\zeta_i)} = \frac{211}{277}$, $(\frac{39}{224} < \frac{211}{277})$.
Nous notons que toutes les conditions de théorème 3.1 *sont satisfaits, donc il existe une solution* $x \in C^1[0,1]$ *de problème* (3.5).

Chapitre 4

Problème aux limites à multipoint généralisé

Nous présentons un résultat d'existence pour le problème aux limites a multipoint suivant :

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} c_i x(\zeta_i), \quad x(1) = \sum_{j=1}^{n-2} a_j x(\tau_j). \end{cases} \tag{4.1}$$

Avant ça nous avons besoin des lemmes suivants

4.1 Lemmes auxiliaires

Lemme 4.1 *Soit $h \in L^1[0,1]$ et soit c_i, $a_j \in \mathbb{R}$, ζ_i, $\tau_j \in (0,1)$, $i = 1, 2, \ldots, m-2$, $j = 1, 2, \ldots, n-2$, $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_{m-2} < 1$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n-2} < 1$. Nous supposons que*

$$\left(\sum_{i=1}^{m-2} c_i \zeta_i\right)\left(1 - \sum_{j=1}^{n-2} a_j\right) \neq \left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m-2} a_j \tau_j - 1\right)$$

et $x \in C^1[0,1]$, de telle sorte que soit

$$\begin{cases} x''(t) = h(t), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} c_i x(\zeta_i), \quad x(1) = \sum_{j=1}^{n-2} a_j x(\tau_j). \end{cases}$$

Alors,

$$x(t) = \int_0^1 (t-s)h(s)ds + At + B$$

où

$$\begin{aligned} &A\left(\left(\sum_{i=1}^{m-2} c_i \zeta_i\right)\left(1 - \sum_{j=1}^{n-2} a_j\right) - \left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_j \tau_j - 1\right)\right) \\ &= -\left(1 - \sum_{j=1}^{n-2} a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{m-2} c_i \int_0^{\zeta_i} (\zeta_i - s)h(s)ds\right) \\ &+ \left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_j \int_0^{\tau_j} (\tau_j - s)h(s)ds - \int_0^1 (1-s)h(s)ds\right), \end{aligned}$$

$$B\left(\left(\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i\right)\left(1-\sum_{j=1}^{n-2}a_j\right)-\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2}a_j\tau_j-1\right)\right)$$
$$=\left(1-\sum_{j=1}^{n-2}a_j\tau_j\right)\left(\sum_{i=1}^{m-2}c_i\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i-s)h(s)ds\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2}a_j\int_0^{\tau_j}(\tau_j-s)h(s)ds-\int_0^1(1-s)h(s)ds\right).$$

Démonstration.De $x''(t)=h(t)$ *on a* $x(t)=x'(0)t+x(0)+\displaystyle\int_0^t(t-s)h(s)ds$
ensuite nous avons
$\sum_{i=1}^{m-2}c_ix(\zeta_i)=x'(0)\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i+x(0)\sum_{i=1}^{m-2}c_i+\sum_{i=1}^{m-2}c_i\displaystyle\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i-s)h(s)ds.$
Comme $x(0)=\sum_{i=1}^{m-2}c_ix(\zeta_i)$, *on a*
$x(0)(1-\sum_{i=1}^{m-2}c_i)=x'(0)\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i+\sum_{i=1}^{m-2}c_i\displaystyle\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i-s)h(s)ds,$
donc

$$x(0)\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\right)\left(1-\sum_{j=1}^{n-2}a_j\right)=x'(0)\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i\left(1-\sum_{j=1}^{n-2}a_j\right)+\sum_{i=1}^{m-2}c_i\left(1-\sum_{j=1}^{n-2}a_j\right)\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i-s)h(s)ds. \tag{1}$$

D'autre part, on a $x(1)=x'(0)+x(0)+\displaystyle\int_0^1(1-s)h(s)ds,$
et $\sum_{j=1}^{n-2}a_jx(\tau_j)=x'(0)\sum_{j=1}^{n-2}a_j\tau_j+x(0)\sum_{j=1}^{n-2}a_j+\sum_{j=1}^{n-2}a_j\displaystyle\int_0^{\tau_j}(\tau_j-s)h(s)ds.$
Comme $x(1)=\sum_{j=1}^{n-2}a_jx(\tau_j)$,
$x(0)(1-\sum_{j=1}^{n-2}a_j)=x'(0)(\sum_{j=1}^{n-2}a_j\tau_j-1)+\sum_{j=1}^{n-2}a_j\displaystyle\int_0^{\tau_j}(\tau_j-s)h(s)ds-\int_0^1(1-s)h(s)ds.$
Donc,

$$x(0)\left(1-\sum_{j=1}^{n-2}a_j\right)\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\right)=x'(0)\left(\sum_{j=1}^{n-2}a_j\tau_j-1\right)\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\right) \tag{2}$$
$$+\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n-2}a_j\int_0^{\tau_j}(\tau_j-s)h(s)ds-\int_0^1(1-s)h(s)ds\right).$$

De (1) *et* (2) *on a*

$$x'(0)\left(\left(\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i\right)\left(1-\sum_{j=1}^{n-2}a_j\right)-\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2}a_j\tau_j-1\right)\right)$$
$$=-\left(1-\sum_{j=1}^{n-2}a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{m-2}c_i\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i-s)h(s)ds\right)$$
$$+\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2}a_j\int_0^{\tau_j}(\tau_j-s)h(s)ds-\int_0^1(1-s)h(s)ds\right).$$

D'autre part on a

$$x(0)\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n-2}a_j\tau_j-1\right)=x'(0)\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i\left(\sum_{j=1}^{n-2}a_j\tau_j-1\right)+\sum_{i=1}^{m-2}c_i\left(\sum_{j=1}^{n-2}a_j\tau_j-1\right)\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i-s)h(s)ds, \tag{3}$$

et

$$x(0)\left(1-\sum_{j=1}^{n-2}a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i\right)=x'(0)\left(\sum_{j=1}^{n-2}a_j\tau_j-1\right)\left(\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i\right) \tag{4}$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n-2}a_j\int_0^{\tau_j}(\tau_j-s)h(s)ds-\int_0^1(1-s)h(s)ds\right).$$

De (3) *et* (4) *on a*

$$x(0)\left(\left(\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i\right)\left(1-\sum_{j=1}^{n-2}a_j\right)-\left(1-\sum_{i=1}^{m-2}c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2}a_j\tau_j-1\right)\right)$$
$$=\left(1-\sum_{j=1}^{n-2}a_j\tau_j\right)\left(\sum_{i=1}^{m-2}c_i\int_0^{\zeta_i}(\zeta_i-s)h(s)ds\right)$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2}a_j\int_0^{\tau_j}(\tau_j-s)h(s)ds-\int_0^1(1-s)h(s)ds\right).$$

Nous notons $x'(0)=A$ *et* $x(0)=B$.
Alors

$$x(t)=\int_0^1(t-s)h(s)ds+At+B.$$

■

Lemme 4.2 *Soit* $c_i,\, a_j \in \mathbb{R},\, \zeta_i,\, \tau_j \in (0,1),\; i = 1,2,\ldots,m-2,\; j = 1,2,\ldots,n-2,$ $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_{m-2} < 1,\; 0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n-2} < 1$ *avec*

$$\left(\sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i\right)\left(1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j\right) \neq \left(1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m-2} a_j\tau_j - 1\right).$$

Soit $x(t) \in W^{2,1}(0,1)$ *telles que* $x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} c_i x(\zeta_i)$, $x(1) = \sum_{j=1}^{n-2} a_j x(\tau_j)$*. Alors*

$$||x||_\infty \leqslant M||x'||_\infty$$

où

$$M = min\left\{\frac{1}{|\sum_{i=1}^{m-2} c_i|}\left(\sum_{i=1}^{m-2} \mid c_i \mid \lambda_i + \frac{\sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|}{|1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i|}\right),\right.$$
$$\frac{1}{|\sum_{i=1}^{n-2} a_j|}\left(\sum_{j=1}^{n-2} \mid a_j \mid \mu_j + \frac{\sum_{j=1}^{n-2}|a_j(1-\tau_j)|}{|1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j|}\right),$$
$$\left. 1+\frac{\sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|}{|1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i|}, 1+\frac{\sum_{j=1}^{n-2}|a_j(1-\tau_j)|}{|1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j|}\right\},$$

avec $\lambda_i = \max\{\zeta_i, 1-\zeta_i\}$, $i = 1,2,\ldots,m-2$, $\mu_j = \max\{\tau_j, 1-\tau_j\}$, $j = 1,2,\ldots,n-2.$
Démonstration.

D'aprés l'hypothése

$$\left(\sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i\right)\left(1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j\right) \neq \left(1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_j\tau_j - 1\right),$$

nous observons que chacun de $\left(1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i\right)$, $\left(1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j\right)$ *est non nulle, en conséquence* $M < \infty$.
Après on a $x(\zeta_i) - x(0) = \int_0^{\zeta_i} x'(s)ds$, *pour* $i = 1,2,...,m-2$, *et comme* $x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} c_i x(\zeta_i)$ *on obtient* $\left(1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i\right)x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} c_i \int_0^{\zeta_i} x'(s)ds$, *alors*

$$|x(0)| \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|}{|1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i|}\|x'\|_\infty.$$

Aussi, comme $x(t) = x(\zeta_i) + \int_{\zeta_i}^t x'(s)ds$, *on a*

$$\begin{aligned}(\sum_{i=1}^{m-2} c_i)x(t) &= \sum_{i=1}^{m-2} c_i x(\xi_i) + \sum_{i=1}^{m-2} c_i \int_{\zeta_i}^t x'(s)ds \\ &= x(0) + \sum_{i=1}^{m-2} c_i \int_{\zeta_i}^t x'(s)ds,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textit{donc}\quad \left|\sum_{i=1}^{m-2} c_i\right| |x(t)| &\leqslant |x(0)| + \sum_{i=1}^{m-2} |c_i| \left|\int_{\zeta_i}^t x'(s)ds\right| \\ &\leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|}{|1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i|} + \sum_{i=1}^{m-2} \mid c_i \mid \lambda_i\right)\|x'\|_\infty,\end{aligned}$$

qui implique

$$\|x\|_\infty \leqslant \frac{1}{|\sum_{i=1}^{m-2} c_i|}\left(\frac{\sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|}{|1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i|}+\sum_{i=1}^{m-2} \mid c_i \mid \lambda_i\right)\|x'\|_\infty.$$

De même, à partir de $x(1)=x(\tau_j)+\int_{\tau_j}^1 x'(s)ds$, *pour* $j=1,2,...,n-2$, *et comme* $x(1)=\sum_{j=1}^{n-2} a_j x(\tau_j)$, *on obtient* $(1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j)x(1)=\sum_{j=1}^{n-2} a_j\int_{\tau_j}^1 x'(s)ds$, *alors*

$$|x(1)| \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{n-2}|a_j(1-\tau_j)|}{|1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j|}\|x'\|_\infty.$$

Aussi, comme $x(t)=x(\tau_j)+\int_{\tau_j}^t x'(s)ds$, *on a* $(\sum_{j=1}^{n-2} a_j)x(t)=\sum_{j=1}^{n-2} a_j x(\tau_j)+\sum_{j=1}^{n-2} a_j\int_{\tau_j}^t x'(s)ds$ *ou* $(\sum_{j=1}^{n-2} a_j)x(t)=x(1)+\sum_{j=1}^{n-2} a_j\int_{\tau_j}^t x'(s)ds$, *donc*

$$\begin{aligned}\left|\sum_{j=1}^{n-2} a_j\right||x(t)| &\leqslant |x(1)|+\sum_{j=1}^{n-2}|a_j|\left|\int_{\tau_j}^t x'(s)ds\right|\\ &\leqslant \left(\frac{\sum_{j=1}^{n-2}|a_j(1-\tau_j)|}{|1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j|}+\sum_{j=1}^{n-2}\mid a_j\mid \mu_j\right)\|x'\|_\infty,\end{aligned}$$

qui implique

$$\|x\|_\infty \leqslant \frac{1}{|\sum_{j=1}^{n-2} a_j|}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n-2}|a_j(1-\tau_j)|}{|1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j|}+\sum_{j=1}^{n-2}\mid a_j\mid \mu_j\right)\|x'\|_\infty.$$

Comme $x(t)=x(0)+\int_0^t x'(s)ds$, *on a*

$$\|x\|_\infty \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|}{|1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i|}+1\right)\|x'\|_\infty.$$

Aussi à partir de $x(t)=x(1)-\int_t^1 x'(s)ds$, *on obtient*

$$\|x\|_\infty \leqslant \left(\frac{\sum_{j=1}^{n-2}|a_j(1-\tau_j)|}{|1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j|}+1\right)\|x'\|_\infty.$$

Conclusion

$$\|x\|_\infty \leqslant M\|x'\|_\infty,$$

où

$$\begin{aligned}M = min\Bigg\{&\frac{1}{|\sum_{i=1}^{m-2} c_i|}\left(\sum_{i=1}^{m-2}\mid c_i\mid\lambda_i+\frac{\sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|}{|1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i|}\right),\\ &\frac{1}{|\sum_{i=1}^{n-2} a_j|}\left(\sum_{j=1}^{n-2}\mid a_j\mid\mu_j+\frac{\sum_{j=1}^{n-2}|a_j(1-\tau_j)|}{|1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j|}\right),\\ &1+\frac{\sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|}{|1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i|},1+\frac{\sum_{j=1}^{n-2}|a_j(1-\tau_j)|}{|1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j|}\Bigg\}.\end{aligned}$$

■

Lemme 4.3 *Soit* $c_i,\ a_j \in \mathbb{R},\ \zeta_i,\ \tau_j \in (0,1),\ i=1,2,...,m-2,\ j=1,2,...,n-2,$ $0<\zeta_1<\zeta_2<...<\zeta_{m-2}<1,\ 0<\tau_1<\tau_2<...<\tau_{n-2}<1,$ *avec*

$$\left(\sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i\right)\left(1-\sum_{j=1}^{n-2} a_j\right) \neq \left(1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_j\tau_j - 1\right).$$

Soit $x(t) \in W^{2,1}(0,1)$ *telles que* $x(0)=\sum_{i=1}^{m-2} c_i x(\zeta_i),\ x(1)=\sum_{j=1}^{n-2} a_j x(\tau_j).$
Supposons que M *comme dans le lemme précedent telle que*

$$\left|\sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i\right| > M\left|1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i\right|, \quad \left|\sum_{j=1}^{n-2} a_j(1-\tau_j)\right| > M\left|\sum_{j=1}^{n-2} a_j - 1\right|.$$

Alors

$$\|x'\|_\infty \leqslant Q\|x''\|_1,$$

où

$$Q=\min\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|}{|\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i| - M|1-\sum_{i=1}^{m-2}c_i|}, \frac{\sum_{j=1}^{n-2}|a_j(1-\tau_j)|}{|\sum_{j=1}^{n-2}a_j(1-\tau_j)| - M|\sum_{j=1}^{n-2}a_j-1|}\right\}.$$

Démonstration.Nous notons d'abord que, pour chaque $i=1,2,...,m-2,$
il existe $\eta_i \in (0,\ \zeta_i)$ *telle que* $x(\zeta_i)-x(0)=\zeta_i x'(\eta_i)$*, qui implique que*

$$\sum_{i=1}^{m-2} c_i x(\zeta_i) - \sum_{i=1}^{m-2} c_i x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i x'(\eta_i),$$

donc

$$\sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i x'(\eta_i) = \left(1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i\right)x(0).$$

Nous le voyons dans l'équation, $x'(t)=x'(\eta_i)+\int_{\eta_i}^t x''(s)ds$*, que*

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i\right)x'(t) &= \sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i x'(\eta_i) + \sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i\int_{\eta_i}^t x''(s)ds \\ &= \left(1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i\right)x(0) + \sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i\int_{\eta_i}^t x''(s)ds.\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i\right|\|x'\|_\infty &\leqslant \left|1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i\right||x(0)| + \sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|\left|\int_{\eta_i}^t x''(s)ds\right| \\ &\leqslant \left|1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i\right|\|x\|_\infty + \sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|\|x''\|_1 \\ &\leqslant M\left|1-\sum_{i=1}^{m-2} c_i\right|\|x'\|_\infty + \sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|\|x''\|_1,\end{aligned}$$

qui implique que,

$$\|x'\|_\infty \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{m-2}|c_i\zeta_i|}{|\sum_{i=1}^{m-2}c_i\zeta_i| - M|1-\sum_{i=1}^{m-2}c_i|}\|x''\|_1.$$

De la même façon, pour chaque $j = 1, 2, ..., n-2$, il existe $\zeta_j \in (\tau_j,\ 1)$ telle que $x(1) - x(\tau_j) = (1-\tau_j)x'(\zeta_j)$, qui implique que

$$\sum_{j=1}^{n-2} a_j x(1) - \sum_{j=1}^{n-2} a_j x(\tau_j) = \sum_{j=1}^{n-2} a_j (1-\tau_j)x'(\zeta_j),$$

donc

$$\sum_{j=1}^{n-2} a_j (1-\tau_j)x'(\zeta_j) = \left(\sum_{j=1}^{n-2} a_j - 1\right) x(1).$$

Nous le voyons dans l'équation, $x'(1) = x'(\zeta_j) + \int_{\zeta_j}^{1} x''(s)ds$, que

$$(1-\tau_j)x'(1) = (1-\tau_j)x'(\zeta_j) + (1-\tau_j)\int_{\zeta_j}^{1} x''(s)ds$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n-2} a_j(1-\tau_j)x'(1) &= \sum_{j=1}^{n-2} a_j(1-\tau_j)x'(\zeta_j) + \sum_{j=1}^{n-2} a_j(1-\tau_j)\int_{\zeta_j}^{1} x''(s)ds \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n-2} a_j - 1\right) x(1) + \sum_{j=1}^{n-2} a_j(1-\tau_j)\int_{\zeta_j}^{1} x''(s)ds.
\end{aligned}$$

En conséquence,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n-2} a_j(1-\tau_j)\right| \|x'\|_\infty &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n-2} a_j - 1\right| \|x\|_\infty + \sum_{j=1}^{n-2} |a_j(1-\tau_j)| \left|\int_{\zeta_j}^{1} x''(s)ds\right| \\
&\leqslant M\left|\sum_{j=1}^{n-2} a_j - 1\right| \|x'\|_\infty + \sum_{j=1}^{n-2} |a_j(1-\tau_j)| \|x''\|_1,
\end{aligned}$$

qui implique que,

$$\|x'\|_\infty \leqslant \frac{\sum_{j=1}^{n-2} |a_j(1-\tau_j)|}{\left|\sum_{j=1}^{n-2} a_j(1-\tau_j)\right| - M\left|\sum_{j=1}^{n-2} a_j - 1\right|} \|x''\|_1.$$

Conclusion

$$\|x'\|_\infty \leqslant Q\|x''\|_1$$

où

$$Q = \min\left\{\frac{\sum_{i=1}^{m-2} |c_i\zeta_i|}{|\sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i| - M|1 - \sum_{i=1}^{m-2} c_i|}, \frac{\sum_{j=1}^{n-2} |a_j(1-\tau_j)|}{|\sum_{j=1}^{n-2} a_j(1-\tau_j)| - M|\sum_{j=1}^{n-2} a_j - 1|}\right\}.$$

■

Remarque 4.1 *Nous n'avons pas besoin de supposer que les deux conditions*

$$\left|\sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i\right| > M\left|1 - \sum_{i=1}^{m-2} c_i\right|, \qquad \left|\sum_{j=1}^{n-2} a_j(1-\tau_j)\right| > M\left|\sum_{j=1}^{n-2} a_j - 1\right|$$

dans le lemme précedent, il suffit que l'une des conditions pour obtenir une estimation de la même resultat

$$||x'||_\infty \leqslant Q||x''||_1.$$

4.2 Résultat d'existence

Théorème 4.1 *Soit $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction L^1-carathéodory.*
Supposons qu'il existe des fonctions p, q, r dans $L^1[0,1]$ telle que,

$$|f(t,u,v)| \leqslant p(t)|u| + q(t)|v| + r(t),$$

pour tous $t \in [0,1]$ et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, et soit c_i, $a_j \in \mathbb{R}$, ζ_i, $\tau_j \in (0,1)$, $i = 1,2,\ldots,m-2$, $j = 1,2,\ldots,n-2$, $0 < \zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_{m-2} < 1$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_{n-2} < 1$. Nous supposons que

$$\left(\sum_{i=1}^{m-2} c_i\zeta_i\right)\left(1 - \sum_{j=1}^{n-2} a_j\right) \neq \left(1 - \sum_{i=1}^{m-2} c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n-2} a_j\tau_j - 1\right).$$

Alors le problème (4.1) admet une solution dans $C^1[0,1]$ à condition que

$$Q(M||p||_1 + ||q||_1) < 1,$$

où M et Q définies dans le lemme 4.2 et 4.3

Démonstration.Posons $X = C^1[0,1]$, $Y = L^1[0,1]$.
On définit l'application linéaire $L : D(L) \subset X \longrightarrow Y$ avec

$$D(L) = \left\{ x \in W^{2,1}(0,1) : x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} c_i x(\zeta_i),\ x(1) = \sum_{j=1}^{n-2} a_j x(\tau_j) \right\},$$

et pour $x \in D(L), Lx = x''$.
Aussi définir l'application non linéaire $N : X \longrightarrow Y$ avec

$$(Nx)(t) = f(t, x(t), x'(t)), t \in [0,1].$$

Après, on introduit l'opérateur linéaire $K : Y \longrightarrow X$, défini pour $y \in Y$ par

$$(Ky)(t) = \int_0^t (t-s)y(s)ds + At + B,$$

où A et B définies dans le lemme 4.1

Selon ce qui précède KN est complètement continu.

Nous appliquons le théorème d'alternative de Leray-Schauder pour obtenir l'existence de solution de l'équation $x = KNx$.
Pour ce faire, il suffit de vérifier que l'ensemble de toutes les solution possibles de la famille des équations

$$\begin{cases} x''(t) = \lambda f(t, x(t), x'(t)), \quad t \in (0,1) \\ x(0) = \sum_{i=1}^{m-2} c_i x(\zeta_i), \quad x(1) = \sum_{j=1}^{n-2} a_j x(\tau_j) \end{cases} \tag{4.2}$$

est bornée dans X par une constante indépendante de $\lambda \in [0,1]$.
Soit x est une solution de (4.2) pour certain $\lambda \in [0,1]$, et d'aprés lemme 4.2 et lemme 4.3, nous avons les inégalités

$$\|x\|_\infty \leqslant M\|x'\|_\infty, \qquad \|x'\|_\infty \leqslant Q\|x''\|_1.$$

Alors,

$$\begin{aligned}||x''||_1 =&\lambda||f(t,x(t),x'(t))||_1\\ \leqslant&||p||_1||x||_\infty+||q||_1||x'||_\infty+||r||_1\\ \leqslant&M||p||_1||x'||_\infty+Q||q||_1||x''||_1+||r||_1\\ \leqslant&QM||p||_1||x''||_1+Q||q||_1||x''||_1+||r||_1\\ \leqslant&Q(M||p||_1+||q||_1)||x''||_1+||r||_1,\end{aligned}$$

donc

$$(1-Q(M||p||_1+||q||_1))\,||x''||_1\leqslant||r||_1.$$

Comme $Q\left(M\|p\|_1+\|q\|_1\right)<1$,

$$||x''||_1\leqslant\frac{1}{1-Q(M||p||_1+||q||_1)}||r||_1.$$

il existe une constante C *est strictement positive,* ($C=\frac{1}{1-Q(M||p||_1+||q||_1)}||r||_1$) *indépendante de* $\lambda\in[0,\,1]$, *telle que*

$$\|x''\|_1\leqslant C,$$

ce qui implique que $||x||_\infty\leqslant C$ *et* $||x'||_\infty\leqslant C$, *donc*

$$||x||_X\leqslant C.$$

Il résulte que l'ensemble de toutes les solutions de la famille des équations (4.2) *est bornée en* $C^1[0,1]$ *par une constante indépendante de* $\lambda\in[0,1]$, *d'où le résultat.*

■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons présenté des résultats d'existence et d'unicité des solutions a d'équation différentielle non linéaire du second ordre posée sur un intervalle borné associé à des conditions aux limites à multi-points. Cettes résultats sont prouvés en utilisant l'alternative non linéaire de Leray-Schauder de point fixe.

Cette étude se compose en quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous avons consacrée aux préliminaires sur des notions générales utilisées dans les différents chapitres du travail, on présente la notion de quelques outils de base.

Nous avons commencé notre travail au deuxième chapitre par une étude d'existence et d'unicité pour le problème aux limites à trois points non linéaire.

Dans le troisième chapitre, nous avons étudié quelques résultats d'existence et d'unicité pour de ce type de problème aux limites à m-points.

Au quatrième chapitre, nous avons étudié quelques résultats d'existence pour le problème aux limites de multipoint généralisé.

La méthodologie pour prouver les théories de l'existence dépend de la conversion des problèmes proposés en équation opérationnelle, en plus d'utiliser le critère de compacité pour appliquer le théorème d'Ascoli-Arzéla avec insérer le théorème de l'alternative non linéaire de Leray-Schauder de point fixe pour obtenir les résultats appropriés.

Bibliographie

[1] K.Deimling, Nonlinear Functional Analysis, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1985.

[2] A.Granas and J.Dugundji, Fixed Point Theory, Springer-verlag, New-York, 2003.

[3] C. Gupta, A note on a second order three-point boundary value problem, J. Math. Anal. Appl. 186 (1994), $277 - 281$.

[4] C. Gupta, Solvability of a three-point nonlinear boundary value problem for second order ordinary differential equations, J. Math. Anal. Appl. 168(1992), $540 - 551$.

[5] C. Gupta, A generalized multi-point boundary value problem for second order ordinary differential equations, Appl. Math. Comput. 89(1998), $133 - 146$.

[6] C. Gupta, A Dirichlet type multi-point boundary value problem for second order ordinary differential equations, Int. J. Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl. 26(1996), $925 - 931$.

[7] R. Ma, A survey on nonlocal boundary value problems, Applied Mathematics E-Notes. 7(2007), $257 - 279$.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié quelques problèmes aux limites associés à des équations différentielles ordinaires et pour lesquels les conditions aux bords à multi-points. En premièr chapitre, nous avons présenté la formulation mathématique de contact et rappel d'analyse. Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié un problème aux limites de second ordre à trois points. En troisième chapitre, nous avons discuté l'existence et l'unicité de solutions pour un problème aux limites de second ordre à m-points. Nous avons consacré le quatrième chapitre de ce mémoire pour la question d'existence des solutions de problème aux limites de second ordre de multi-point dans le cas général.

Mots clés: Critère de compacité, existence, unicité, Carathéodory, le théorème d'Ascoli-Arzéla,le théorème d'alternative non linéaire de Leray-Schauder, le point fixe.

Abstract

In this dissertation, we have studied some boundary problems associated with ordinary differential equations and for which boundary conditions at multi-points. In the first chapter, we presented the mathematical formulation of contact and recall of analysis. In the second chapter, we studied problem with second order three-point boundary. In the third chapter, we discussed the existence and the uniqueness of solutions for a second order boundary problem at m-points. We have dedicated the fourth chapter of this dissertation for the quetion of existence of the solutions of second order multi-points boundary problem in the general case.

Key words: Compactness criterion, existence, Caratheodory, uniqueness, the Ascoli-Arzéla theorem, the non linear alternative of Leray-Schauder theorem, fixed point.

الملخص

في هذه المذكرة درسنا بعض المسائل الحدية المرتبطة بالمعادلات التفاضلية العادية والتي من اجلها الشروط على الحواف متعددة النقط. في الفصل الأول قدمنا بعض الوسائل الرياضية اللازمة في هذه المذكرة. أما في الفصل الثاني درسنا مسألة حدية من الدرجة الثانية عند ثلاث نقط. أما الفصل الثالث ناقشنا وجود و وحدانية حلول لمسألة حدية من الدرجةالثانية عند m نقطة. ولقد كرسنا الفصل الرابع من هذه المذكرة في مسألة وجود حل مسألة حدية من الدرجة الثانية متعددة النقط في الحالة العامة .

كلمات مفتاحية: كارثودوري، معيار التراص، الوجود، الوحدانية، نظرية أسكولي-أرزيلا، النظرية البديل غير الخطي ليراي شاودر، النقطة الثابتة.