

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la
Recherche Scientifique



Université Echahid Hamma Lakhdar d'El-Oued

FACULTE DE TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



Mémoire de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Génie mécanique

Spécialité : Energétique et Énergies renouvelables

Thème

**Instabilité magnétohydrodynamique des
écoulements axisymétriques avec swirl**

Devant le jury composé de :

Présenté par :

Mr. Reda MENECEUR Président

- Brahim DEBBAR

Mr. Fathy LETEYEM Examineur

- Brahim AOUN

Mr. M Hédi ATIYAH Examineur

Dr. Ali BOUKHARI Encadreur

2016-2017

Remerciements

*En premier lieu, nous tenons à remercier Dieu tout
Puissant qui nous a donné la force de continuer et de terminer nos*

Études et ce travail

Nous remercions en première ligne à

*Dr BOUKHARI Ali Maître de conférences à l'Université de Echahi
Hamma Lakhdar d'El-Oued pour encadrer et diriger ce
travail avec patience*

*Nous remercions vivement aux membres de jury
Nous remercions tous les enseignants du département génie mécanique
Pour tout le savoir que nous avons acquis grâce à eux durant notre
formation.*

*Nous remercions nos famille surtout nos parentes et nos frères et proches
amis*

*qui ont été si présents, et n'ont jamais cessé de nous encourager. et nous
souhaitant beaucoup de réussite dans leurs vies et un bon avenir.*

DEBBAR BRAHIM, AOUN BRAHI

Dédicace

Nous dédions ce modeste mémoire à mes parents qui ont su nous soutenir tout au long de nos études, parfois nous reconforter dans les moments difficiles, et qui sans eux nous n'aurions pu effectuer ce travail.

Nous dédions ce modeste travail :

A nos frères, et nos sœurs.

A toutes ma famille.

A tous nos fidèles amis .

A Tous nos professeurs depuis l'enfance à l'université

A tous nos fidèles amis :

A toute la promotion 2017.

Notre dédicace va également à ceux qui ont participer de près ou de loin à l'aboutissement de nos efforts .

DEBBAR BRAHIM, AOUN BRAHIM

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	i
DEDICACE	ii
SOMMAIRE	iii
LISTE DES FIGURES	v
LISTE DES TABLEAUX	vii
INTRODUCTION	01
Chapitre I : RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE	02
I -1-Transfert de chaleur par convection	02
I -1-1-convection naturelle	02
I -1-2-Convection forcée	03
I-2- Procédés de pompage des métaux liquides.....	03
I-2-1- Procédé de Bridgman-Stockbarger.....	03
I-2-2-Procédé de Czochralski	04
I-2-3-Procédé de phase vapeur.....	05
I-3- Observations et applications.....	05
I-3-1- Géophysique.....	05
I-3-2- Astrophysique.....	05
I-3-3- Ingénierie.....	06
I-4- Revue bibliographique.....	06
I-5- Objectif du présent travail.....	11
Chapitre II : MODELE MATHEMATIQUE	12
II-1- Géométrie du problème	12
II-2- Hypothèses simplificatrices.....	13
II-3- Equations de transport	14
II-4- Formes adimensionnelles des équations.....	16
II-5- Les conditions aux limites et initiales	17
II-5-1- Les conditions initiales.....	17
II-5-2- Les conditions aux limites.....	17
II-6 Outils d'analyse de l'écoulement.....	19
II-6-1- La fonction de courant	19

II-6-2- La vorticité	19
II-6-3- Le nombre de Nusselt	19
Chapitre III : SOLUTION NUMERIQUE	20
III-1- Maillage	21
III-2- Discrétisation implicite de l'équation générale de transport	24
III-3- Discrétisation de l'équation du potentiel électrique	26
III-4- Etapes à suivre pour la modélisation numérique par FLUENT	28
III-4-1- Présentation de GAMBIT et de FLUENT	28
III-4-2- GAMBIT	28
III-4-3- FLUENT	31
Chapitre IV : RESULTATS ET DISCUSSIONS	34
IV-1- Effet du maillage	35
IV-2- Validation du code de calcul	36
IV-2-1- Comparaison aux données expérimentales	36
IV-2-2- Comparaison aux résultats numériques	37
IV-3- Présentations et discussion des résultats	38
IV-4- Récapitulations	42
CONCLUSION	44
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	46
RESUME EN ARABE	48
RESUME EN FRANÇAIS	49
RESUME EN ANGLAIS	50
NOMENCLATURE	51

Liste des figures

Figure I.1 : Schéma de principe de la méthode de Bridgman.....	04
Figure I.2 : Schéma de principe de la méthode de Czochralski.....	05
Figure I.3 : Géométrie de problème considéré avec les sondes utilisées dans les Calculs numériques.....	10
Figure I.4 : Configuration d'écoulement et conditions aux limites.....	11
Figure II.1 : Géométrie du problème considéré.....	13
Figure II.2 : Volume de contrôle et mouvement considéré dans le repère de reference.....	14
Figure II.3 : Schématisation des conditions aux limite du problème adimensionnel. Le parois de l'enceinte cylindrique sont électriquement isolantes.....	18
Figure III.1 : Volumes de contrôle typique et notation de maillage utilisée pour un maillage 2D.....	21
Figure III.2 : Volumes de contrôle du maillage entrelacé pour: (a) les quantités scalaires, (b) la composante radiale u , (c) la composante axiale v de vitesse.....	22
Figure III.3 : Maillage utilisé dans les calculs avec raffinement près des parois. ici $n_r \times n_z = 60 \times 120$, nombres de nœuds suivant les directions r et z	23
Figure III.4 : Interface de Gambit.....	29
Figure III.5 : Fenêtre d'outils d'opération	29
Figure III.6 : Construction de la géométrie	30
Figure III.7 : Génération de maillage	30
Figure III.8 : Génération de maillage	30
Figure III.9 interface de démarrer ANSYS FLUENT	32
Figure III.10 : Interface de FLUENT	33
Figure IV.1 : Comparaison des valeurs des nombres de Nusselt locaux pour différentes densités de maillage, (a) disque inférieur (b) disque supérieur tournant. Pour le cas : $Pr = 0.015, \gamma = 2, Re = 800, Ri = 1.0, Ha = 0$	35

Figure IV.2: Distribution axiale de la vitesse azimutale à : (a) $r = 0.60$ (b) $r = 0.90$ comparaison. avec des données expérimentales (Michelson [23]) pour le cas $Re=1800, \gamma=1$	36
Figure IV.3: Comparaison des mêmes entités: (c) , (d) résultant de notre calcul numérique avec les résultats de Iwatsu [24] (a),(b). Ici $Pr = 1.0, Re=3000, Ri = 0, et \gamma=1.0$	37
Figure IV.4: Contours de (a) lignes de courant ($y = Cste$) (b) température Θ (c) vitesse azimutale w (d) vitesse total , pour le cas d'écoulement (régime permanent) où : $Re_{cr} = 2160, Ri=0.1$, $Ha=0$	39
Figure IV.5: Contours de (a) lignes de courant ($y = Cste$) (b) température Θ (c) vitesse azimutale w (d) vitesse total , pour le cas d'écoulement (régime permanent) où : $Re_{cr} = 1240, Ri=0.5$, $Ha=5$	40
Figure IV.6: Contours de (a) lignes de courant ($y = Cste$) (b) température Θ (c) vitesse azimutale w (d) vitesse total , pour le cas d'écoulement (régime permanent) où : $Re_{cr} = 1150, Ri=1.0$, $Ha=30$	41
Figure IV.7: Nombres de Nusselt locaux aux disques d'extrémités du cylindre(froid et chaude) pour $Re = 2160, Ri = 0.1$ et $Ha=0$,	42
Figure IV.8 : Diagramme paramétrique de stabilité ($Re_{cr}-Ha$).....	43

Liste des tableaux

Tableau III.1 Différentes quantités transportées et leurs termes de transport.....	25
Tableau IV.1 : Valeurs critiques des paramètres des écoulements oscillatoires.....	42

INTRODUCTION

INTRODUCTION

L'écoulement d'un fluide visqueux, incompressible, confiné dans une enceinte cylindrique, induit par la rotation d'une ou plusieurs parois du cylindre qui le contient, était étudié intensivement et à plusieurs reprises durant les dernières années, en éclaircissant la voie de comprendre les mécanismes de génération/destruction d'une variété de configurations de panne de tourbillon (en anglais vortex breakdown) et de son contrôle. Ce type d'écoulements décèle une importance qui ne cesse pas d'accroître vue de leurs applications dans plusieurs domaines d'engineering tel que les viscosimètres, les machines centrifuges, le pompage des métaux liquides à hautes températures de fusion, la production des cristaux par le procédé de tirage Czochralski,....etc.

Notre objectif consistera à la détermination des instabilités hydrodynamiques et thermiques qui naissent dans une enceinte cylindrique ayant un rapport de forme (rapport d'aspect, H/R) variable, rempli d'un fluide à faible nombre de Prandtl (le silicone dans notre cas, métal liquide), et ayant le couvercle supérieur en rotation constante par rapport au reste du cylindre. Cette configuration est soumise à un champ magnétique vertical constant. Avec la compréhension qu'elle fournisse cette configuration, et les mécanismes qui contrôlent la physique du mouvement, on essaiera de déterminer la valeur critique du nombre de Reynolds Re_{cr} , pour chaque valeur de Richardson, $Ri = Gr/Re^2 = 0.1, 0.5, 1$, et 2 , où Gr est le nombre de Grashof, et du nombre de Hartmann, $Ha = 0$ (dans le cas d'absence du champ magnétique), et pour $Ha = 5, 10, 20, 30$ (cas de la présence du champ magnétique).

Le mémoire présentant ce travail est organisé en quatre chapitres et une conclusion. Dans ce premier chapitre du mémoire nous avons rappelé l'intérêt pratique du thème, résidant derrière l'importance primordiale d'étudier la stabilité des écoulements tournants confinés avec et sans champ magnétique et l'effet du gradient axial de température sur la formation du vortex breakdown. Ainsi, une étude bibliographique est rapportée sur les instabilités hydrodynamiques et thermiques de convection forcée et mixte des métaux liquides dans des configurations similaires à celle traitée dans notre étude et les écoulements MHD convectifs pendant la croissance cristalline.

Dans le deuxième chapitre, on présentera le modèle mathématique décrivant la physique de la convection mixte des écoulements axisymétriques avec swirl, en régime permanent, et ceci porte dans un système de coordonnées cylindriques, mais dans le plan méridien ($r-z$).

Le troisième chapitre consiste dans la présentation de la méthode numérique des volumes finis pour la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles couplées et non-linéaires. Cette présentation est décrite en conjonction avec le schéma, le maillage, l'algorithme de résolution adoptés et le code de calcul utilisé.

Le code de calcul est validés, et les résultats obtenus sont présentés, commentés et visuellement récapitulés dans le quatrième chapitre, suivi d'une conclusion.

CHAPITRE I :

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

CHAPITRE I

RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

I-1- Transfert de chaleur par convection

La convection désigne l'ensemble des mouvements internes (verticaux ou horizontaux) qui animent un fluide et qui impliquent le transport des propriétés des parcelles de ce fluide au cours de son déplacement. Ce transfert implique l'échange de chaleur entre une surface et un fluide mobile à son contact, ou le déplacement de chaleur au sein d'un fluide par le mouvement d'ensemble de ses molécules d'un point à un autre. La convection constitue, avec la conduction thermique et le transfert radiatif, l'un des trois modes d'échange de chaleur entre deux systèmes, et diffère de ces derniers par la méthode de transfert. Elle a aussi pour effet d'accélérer l'homogénéisation de la composition chimique du fluide, par rapport à la seule diffusion chimique.

Ce phénomène physique très courant se produit dans de nombreux systèmes (casserole, atmosphère, manteau terrestre, étoiles, et même les circuits de chauffages...). Lors du processus de convection, un accroissement de vitesse du fluide favorise aussi les possibilités de transformation d'un écoulement laminaire en écoulement turbulent, générant alors une convection turbulente qui facilite considérablement les échanges de propriétés entre couches voisines du fluide et en particulier la diffusion de la chaleur au sein de celui-ci.

Un exemple de convection est celui de la cuisson de pâtes. Les groupes de particules de fluide proches du fond de la casserole sont chauffés. Ils se dilatent donc, deviennent moins denses (cf. masse volumique) et ces parcelles se mettent en mouvement spontané vers le haut. Ceux de la surface de la casserole sont refroidis par le contact de la surface avec un milieu moins chaud, se contractent et gagnent en densité, puis plongent. Le transfert thermique qu'elle engendre est plus efficace que dans le cas de la conduction thermique ou du transfert radiatif [1].

I-1-1- Convection Naturelle :

La convection naturelle est un phénomène de la mécanique de fluides, qui se produit lorsqu'un gradient induit un mouvement dans le fluide. Le gradient peut concerner différentes grandeurs intensive telles que la température « convection thermique », la concentration d'un soluté « convection solutale » ou la tension superficielle « convection thermo-capillaire ». La masse volumique dépendant de la température (et, le cas échéant, de la concentration), un gradient de température ou de concentration engendre des différences de masse volumique au sein du fluide, d'où résultent des variations latérales de la poussée d'Archimède qui sont à l'origine du mouvement. De tels déplacements s'appellent des mouvements de convection. Ils sont à l'origine de certains phénomènes océanographiques (courants marins), météorologiques (orages), géologiques (remontées de magma) par exemple.

La convection thermique n'est pas le seul moyen de créer des mouvements verticaux dans des fluides. Ceux-ci vont se stratifier selon leur densité, à température uniforme, par l'effet de la gravité. Cette convection gravitationnelle se déroule comme la convection thermique avec les zones du fluide plus denses descendant et les parties moins denses poussées vers le haut. Cependant, il n'y a pas de variation de températures dans ces échanges. On peut citer la diffusion de la salinité dans une couche isotherme ou le déplacement du sel vers le bas dans une terre humide [1].

I-1-2- Convection Forcée :

La convection forcée est provoquée par une circulation artificielle (pompe, turbine) d'un fluide. Le transfert est plus rapide que dans le cas de convection naturelle. Voici quelques exemples de convection forcée dans des appareillages : chauffage central avec accélérateur, chauffages électriques avec soufflerie chauffe-eau solaire et four à convection de cuisinière. Le corps humain a son propre système de convection forcée, la circulation sanguine.

Dans un environnement à microgravité comme dans l'espace, la convection naturelle n'est pas possible puisque la poussée d'Archimède s'exerce par la différence de force gravitationnelle sur des volumes de densités différentes. Ainsi la circulation de la chaleur doit être forcée dans une capsule spatiale. Une flamme aurait également de la difficulté à exister car les gaz de combustion resteraient près de la flamme, la coupant de l'apport d'oxygène. Il faut pour l'entretenir une circulation forcée pour éloigner ces gaz et amener l'oxygène [1].

I-2- Procédés de pompage des métaux liquides

I-2-1- Procédé de Bridgman-Stockbarger:

Le procédé de Bridgman-Stockbarger, ou méthode de Bridgman verticale est un procédé de croissance de cristaux monocristallins. Les matériaux à faire croître sont d'abord mis dans une ampoule scellée. L'ampoule est ensuite chauffée avec un gradient de température vertical, de sorte que les matériaux soient en phase liquide dans le haut de l'ampoule plutôt chaud, et soient sous forme solide dans le bas de l'ampoule, plutôt froid. L'ampoule est ensuite lentement tirée vers le bas, de la zone chaude vers la zone froide, afin de provoquer la cristallisation. L'ampoule est ensuite brisée pour récupérer le cristal.

La maîtrise de cette technique de croissance nécessite de contrôler précisément le gradient de température et la vitesse de tirage, et de les adapter au matériau à faire croître. Pour cela, il faut connaître la nature et l'importance des échanges d'énergie entre les différents éléments du système : le matériau en fusion, le cristal solidifié, l'ampoule, les éléments chauffants, les isolants thermiques, ...etc. Afin de résoudre ce problème thermodynamique plutôt complexe, il est souvent nécessaire d'utiliser des méthodes numériques, telles que la méthode des éléments finis [2].

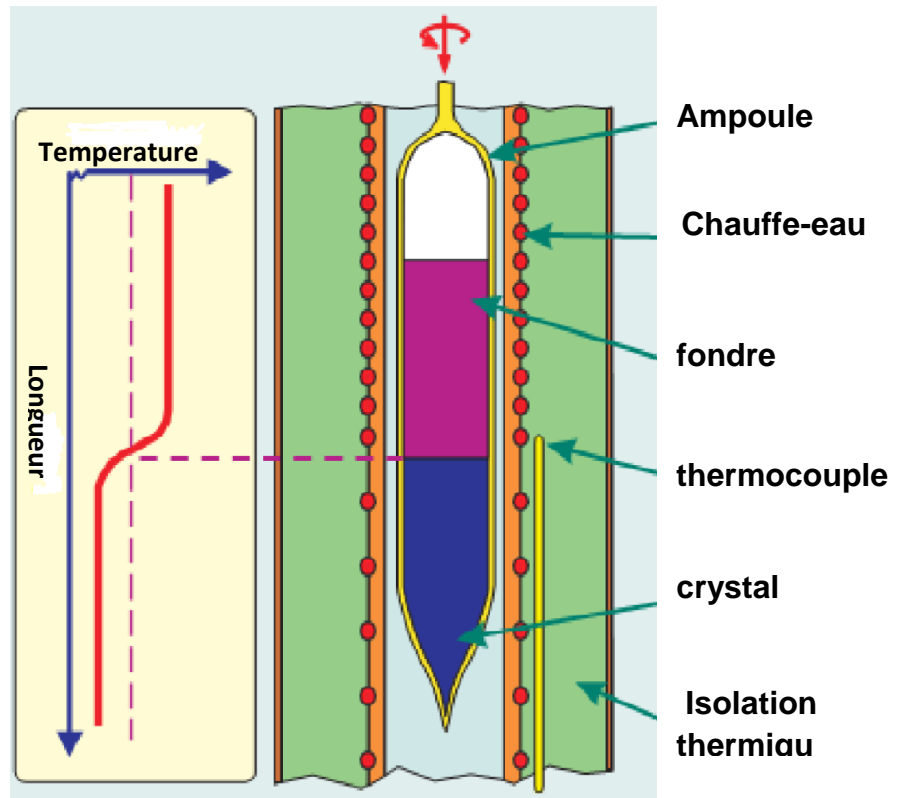


Figure I.1 : Schéma de principe de la méthode de Bridgman [2].

I-2-2- Procédé de Czochralski:

Le procédé de Czochralski (prononcé « tchokhralski ») est un procédé de croissance de cristaux monocristallins de grande dimension (plusieurs centimètres). Ces monocristaux « géants » sont utilisés dans l'industrie électronique (cristaux semi-conducteurs de silicium dopé), pour les études métallurgiques et pour des applications de pointe. On peut aussi faire croître des gemmes artificielles [3].

La méthode consiste en une solidification dirigée à partir d'un germe monocristallin de petite taille. On part du matériau fondu à une température juste au-dessus du point de fusion, avec un gradient de température contrôlé. Le germe est placé dans une « navette » suspendue au-dessus du liquide par une tige. Le liquide se solidifie sur le germe en gardant la même organisation cristalline (épitaxie) au fur et à mesure que l'on tire le germe vers le haut tout en le faisant tourner (à vitesse très lente). Le monocristal peut ensuite être purifié par la méthode de fusion de zone. L'opération se passe sous atmosphère neutre (argon ou azote) pour éviter l'oxydation [3].

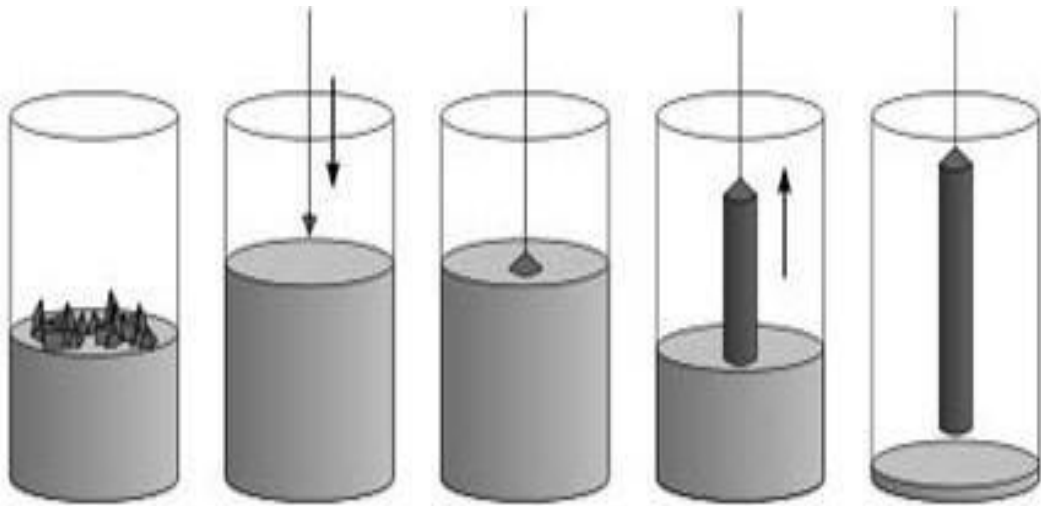


Figure I.2 : Schéma de principe de la méthode de Czochralski [3].

I-2-3- Procédé de phase vapeur:

La CVD est un procédé utilisé pour produire des matériaux solides de haute performance, et de grande pureté. Ce procédé est souvent utilisé dans l'industrie du semi-conducteur pour produire des couches minces. Dans un procédé CVD typique, le substrat est exposé à un ou plusieurs précurseurs en phase gazeuse, qui réagissent et/ou se décomposent à la surface du substrat pour générer le dépôt désiré. Fréquemment, des sous-produits de réactions, eux-mêmes en phase gazeuse, sont produits et évacués par le flux gazeux qui traverse en continu la chambre de réaction.

Les procédés de micro-fabrication utilisent largement la CVD pour déposer des matériaux sous des formes variées : monocristallins, polycristallins, amorphes, épitaxies. Ces matériaux incluent le silicium, la silice, le silicium-germanium, les carbures de silicium, du carbone diamant, les fibres, nanofibres, filaments, nanotubes de carbone, le tungstène, des matériaux à haute permittivité électrique, ...etc [4].

I-3- Observations et applications

I-3-1- Géophysique:

Le noyau fluide de la Terre et d'autres planètes est, selon la théorie en vigueur, une gigantesque dynamo MHD qui génère le champ magnétique terrestre (géomagnétisme). Ce phénomène serait dû aux mouvements de convection du noyau externe métallique et aux courants électriques induits [5].

I-3-2- Astrophysique:

L'astrophysique fut le premier domaine que décrit la MHD. En effet, la matière observable de l'univers est composée de plasma à plus de 99 %, dont les étoiles, les milieux interplanétaire (l'espace entre les planètes d'un système stellaire) et interstellaire (entre les étoiles), les nébuleuses et les jets. Les taches solaires sont causées par le champ magnétique du Soleil, comme l'a théorisé Joseph Larmor en 1919. Le vent solaire est également gouverné par la MHD, tout comme les éruptions solaires (ruptures de

continuité des lignes de champ et éjection de particules et de rayonnements à haute énergie) [5].

I-3-3- Ingénierie:

La MHD intervient dans la conception et la gestion des cuves d'électrolyse pour la production de l'aluminium. Les champs électromagnétiques intenses mettent en mouvement les fluides (aluminium et électrolyte) en créant des vagues imposant une distance minimale entre l'aluminium et les anodes.

La MHD est utilisée de manière théorique dans le confinement des plasmas (stabilisation, expulsion ou compression), notamment les plasmas chauds thermonucléaires dans les machines à fusion par confinement magnétique (comme les tokamaks) ou les dispositifs à striction magnétique (comme la Z machine).

La MHD est aussi directement au cœur d'applications technologiques sous forme de machines électromagnétiques sans pièce mobile, appelées des convertisseurs MHD, qui agissent sur le fluide au moyen de la force électromagnétique (dite force de Lorentz) et qui peuvent être utilisés :

- pour la génération d'électricité (générateur MHD)
- pour l'accélération de fluides (accélérateur MHD) ou leur freinage. Dans le cas particulier d'un plasma créé dans de l'air atmosphérique pour des applications aéronautiques, on parlera alors de magnétoaérodynamique (MAD).

Les réalisations industrielles concrètes, au début du XXI^{ème}, restent expérimentales ou couvertes par le secret militaire. Elles se heurtent à de nombreuses difficultés : production de forts champs magnétiques à l'aide d'électroaimants supraconducteurs, génération de puissances électriques suffisantes, matériaux conducteurs résistant à la corrosion... et spécifiquement à la MHD-gaz : matériaux résistant aux fortes températures et densités de courant, systèmes d'ionisation des gaz performants, maîtrise des aspects théoriques des plasmas froids à paramètre de Hall élevé, ...etc [5].

I-4- Revue bibliographique

Le procédé le plus adapté dans le domaine industriel pour contrôler les écoulements tournants est l'utilisation d'un champ magnétique pour stabiliser l'écoulement du conducteur. En réalité, il a beaucoup d'aspects pour n'importe quel problème de production des cristaux et la compréhension du comportement hydrodynamique et thermique du fluide à faible nombre de Prandtl (métal liquide), et par conséquent, la distribution spatiale des composants était clairement visualisée. Mais, comme la technique de tirage des cristaux de Czochralski est une méthode largement employée dans la production des cristaux, on pourra apprécier la multitude d'ouvrages traitants cette technique et ses relatifs. Toutefois, le régime de l'écoulement peut s'étendre de stable laminaire à instable, périodique laminaire à turbulent. En outre on a su que si l'écoulement n'est pas stable, des défauts dans le cristal formé, apparaissent. Une approche à l'obtention de cristaux de haute qualité est de contrôler la convection dans le fluide. Puisqu'un champ magnétique influence le mouvement d'un fluide électriquement conducteur, il est suggéré que le mouvement du fluide peut être contrôlé en cultivant un cristal en présence d'un champ magnétique.

Les écoulements des fluides conducteurs en présence d'un champ magnétique sont nommés des écoulements magnétohydrodynamiques (MHD). Un tel écoulement peut différer significativement d'un écoulement hydrodynamique ordinaire équivalent. Le mouvement du métal fondu à travers des lignes de champ magnétique produit un courant électrique qui agit réciproquement avec le champ magnétique pour produire une force motrice électromagnétique (EM), qui s'oppose au mouvement du liquide. Même un champ magnétique faible fournit assez de force EM d'amortissement pour éliminer la turbulence et l'instabilité dans la plupart du mouvement concerné, éliminant ainsi beaucoup de micro-défauts dans le cristal. Le taux d'amortissement dépendra en vertu de la force du champ magnétique appliqué aussi bien que son orientation en ce qui concerne la circulation convective [6].

Bessaih et al. [6] ont porté une étude numérique sur l'écoulement MHD laminaire d'un métal liquide contenu dans une enceinte cylindrique, ayant un rapport d'aspect égal à 1, dont la paroi supérieure est en rotation. L'ensemble est soumis à un champ magnétique externe vertical. Un bon accord entre les résultats asymptotiques et numériques est obtenu par les auteurs. Ces derniers ont montré que l'on peut contrôler l'écoulement primaire par un bon choix de la conductivité électrique des parois de l'enceinte en question.

L'écoulement incité par un champ magnétique tournant, d'un métal liquide remplissant une enceinte cylindrique avait sa part dans le champ des études des procédés de stabilisations des écoulements industriels, tel que l'étude entreprise par Marty et al. [7] pour connaître les détails de l'interaction du champ magnétique tournant avec l'écoulement du fluide étudié. Ils ont montré que l'application d'un champ magnétique en rotation très modéré à un mouvement convectif du fluide au commencement instable est capable de reconstituer la stabilité de l'écoulement.

Des travaux expérimentaux et numériques récents soutiennent cette idée comme ceux fait par : Juel et al. [8-9], Bessaih [10] en montrant l'effet d'un champ magnétique orthogonal à la direction principale de l'écoulement du Gallium liquide en convection tridimensionnelle. Une fois le champ magnétique est appliqué, la convection sera réduite, aussi que les oscillations trouvées aux gradients élevés de température peuvent être supprimées, tandis que sans application de champ magnétique, l'écoulement est amené à une structure complexe qui soutient la transition observée à la convection oscillante.

Bessaih et al [11] ont dirigé une étude numérique et analytique de l'écoulement laminaire stable engendré par un disque tournant au sommet d'un cylindre ayant un rapport

d'aspect $H/R = 1$, rempli d'un métal liquide et soumis à un champ magnétique axial, en résolvant les équations régissant l'écoulement par la méthode de volume finis. Ils donnaient différentes formules analytiques de vitesse et avaient montré qu'en présence d'un champ magnétique, les profils analytiques de vitesse proches des disques aux extrémités obtenus pour une valeur élevée du paramètre d'interaction magnétique N , présentant un excellent accord avec ceux obtenus par des simulations numériques. Ainsi, ils ont mis en évidence l'importance de la conductivité électrique des parois du conducteur (les deux disques et la paroi latérale) dans le contrôle de l'écoulement.

La méthode alternative d'amortir la convection en cultivant les cristaux en présence d'un champ magnétique reste largement utilisée et la plus récemment discutée en matière d'expérience et simulations numériques [12-13].

Yu et Gelfgat [14] ont mesuré les vitesses azimutales d'un écoulement RMF (Rotating Magnétique Field) de fluide confiné dans un conteneur cylindrique, par deux expériences différentes pour des rapports d'aspect différents et diverses magnitudes du champ magnétique (différentes valeurs du nombre de Hartmann Ha). Ils avaient expliqué quantitativement la dépendance entre la vitesse angulaire moyenne (normalisée) et le nombre de Hartmann, et même la vitesse moyenne angulaire en fonction du rapport d'aspect. Les résultats expérimentaux annoncés montrent que la rotation moyenne du liquide augmente plus rapidement avec l'augmentation de la hauteur relative de l'enceinte cylindrique ($H/R \geq 1$), au-delà de la valeur $H/R=1$, la croissance est linéaire.

Kharicha et al. [15] ont utilisé le code commercial Fluent V.5 pour avoir une solution numérique du modèle de l'écoulement MHD laminaire, permanent conduit par un disque tournant au sommet d'une cavité cylindrique remplie d'un métal liquide. Les effets du champ magnétique, des conductivités électriques des parois et l'épaisseur pariétale sont examinées. Les paramètres appropriés pour ce type d'écoulements ont été variés comme $Re \geq 100$ et le nombre de Hartmann $0 \leq Ha \leq 100$, ce qui correspond à une gamme de paramètre d'interaction $0 \leq N = Ha^2 / Re \leq 100$. Malgré la supposition d'un très petit nombre de Reynolds magnétique R_m , le champ magnétique incité par ce petit R_m a été tenu en compte dans la formulation de leur problème. Leur étude est destinée à prédire l'influence d'un champ magnétique sur le taux de corrosion d'un métal liquide sur une paroi métallique. Ils ont résolu l'équation de concentration pour le produit de corrosion et ont montré que le transfert de masse évolue avec le Hartmann Ha , et pour une valeur de Ha fixe, le transfert de matière est plus élevé pour des parois électriquement conductrice que des

parois isolantes.

Bessaih et al. [16] ont étudié la stabilité magnétohydrodynamique d'un écoulement tournant dans un cylindre contient du métal liquide ($Pr = 0.015$) ayant un rapport d'aspect égal à 2 et soumis à un gradient vertical de température et un champ magnétique (Fig.I-1). La méthode des volumes finis a été utilisée afin de résoudre les équations de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie et du potentiel électrique. Ils ont trouvé qu'en absence de champ magnétique, le nombre de Reynolds critique est une fonction décroissante du nombre de Richardson (pour les valeurs du nombre de Reynolds critiques $Re_{cr} = 2575, 924, 802$ et 606), correspondant respectivement aux valeurs du nombre de Richardson ($Ri = 0, 0.5, 1.0$ et 2.0). Ils ont trouvé aussi en présence d'un champ magnétique vertical, la stabilité de l'écoulement est conservée pour des valeurs supérieures du nombre de Reynolds. Ils ont établi un diagramme de stabilité d'après les résultats numériques de cette investigation. Ce diagramme met en évidence la dépendance du nombre de Reynolds critique avec l'augmentation du nombre de Hartmann, Ha , pour différentes valeurs du nombre de Richardson. En conclusion, cette étude confirme la possibilité de stabilisation d'un écoulement de métal liquide en convection mixte par application d'un champ magnétique axial.

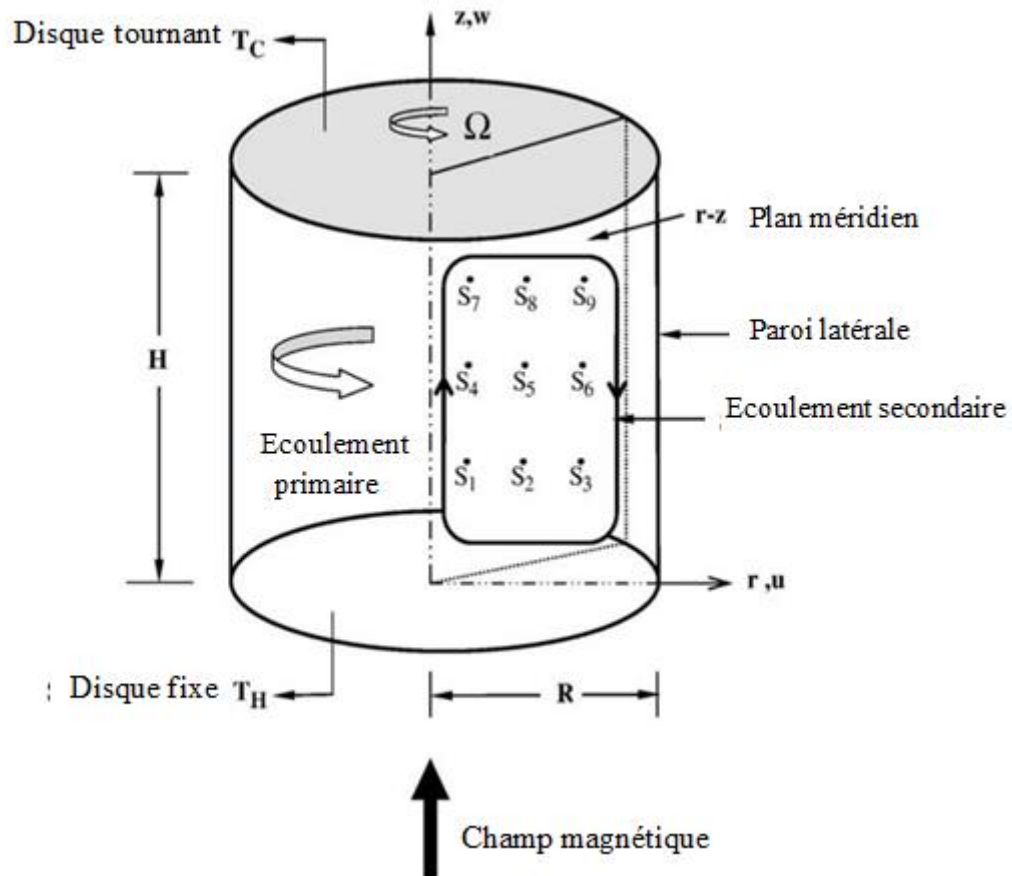


Figure I.3 : Géométrie de problème considéré avec les sondes utilisées dans les Calculs numériques [16].

Kakarantzas et al. [17] ont effectué une série de simulations numériques afin d'étudier la convection naturelle d'un écoulement MHD pour des métaux liquides dans un récipient cylindrique vertical avec un fond tournant et une distribution sinusoïdale de la température à la paroi supérieure, tandis que la paroi latérale est adiabatique, (Fig. I-2). À partir du cas hydrodynamique de bas ils ont évalué l'effet des champs magnétiques verticaux et horizontaux. Ils ont observé des écoulements à l'aide des paramètres (nombres de Rayleigh et Hartmann), ils prouvent que l'augmentation du nombre de Rayleigh favorise le transfert thermique par la convection tandis que l'augmentation du nombre de Hartmann favorise la conduction de la chaleur. Le champ magnétique vertical réduit le nombre de Nusselt davantage qu'horizontal. Les modèles de circulation pour les cas les plus convecteurs sont confinés près du coin supérieur du récipient avec la formation simultanée d'un écoulement secondaire au coin inférieur, alors que pour les cas plus conducteurs seulement un modèle de circulation existe couvrant le domaine entier.

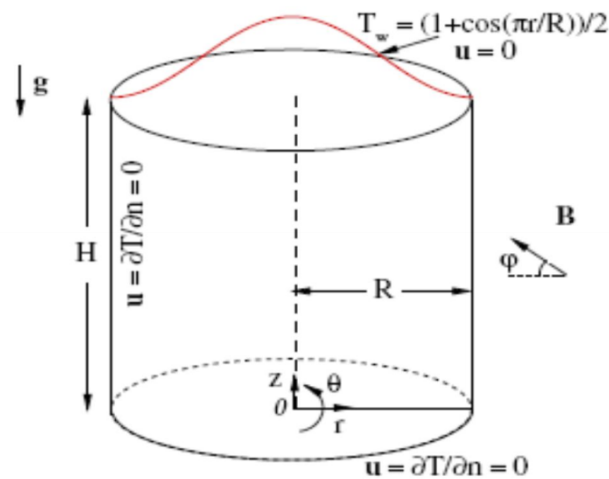


Figure I.4 : Configuration d'écoulement et conditions aux limites [17].

I-4- Objectif du présent travail

L'objectif de notre travail est d'investiguer numériquement la convection mixte dans l'écoulement laminaire d'un métal liquide qui est la silicone dans ce cas, confiné dans une enceinte cylindrique et ayant le couvercle supérieur en rotation tandis que la paroi inférieure est fixe. En présence d'un chauffage différentiel et un éventuel champ magnétique orienté dans la direction axiale.

CHAPITRE II:

MODELE MATHEMATIQUE

CHAPITRE II

MODELE MATHEMATIQUE

Dans ce chapitre, nous présentons la géométrie de la configuration considérée, ainsi que les équations modélisant le problème traité dans ce mémoire. Ces équations mettent en évidence le comportement des fluides conducteurs (tel le cas des métaux liquides) en convection laminaire mixte (naturelle et forcée). Elles sont fondées selon les lois physiques de conservation de masse (continuité), de quantité de mouvement (Navier-Stokes), et d'énergie. Mais en présence d'un champ magnétique, l'apparition d'une nouvelle force (force de Lorentz) au sein du liquide (écoulement MHD), ajoute une autre équation pour compléter le système. Les démonstrations nécessaires à l'obtention des équations susmentionnées décrivant la dynamique de l'écoulement de fluide laminaire avec transfert de chaleur sont bien expliquées, et illustrées dans beaucoup d'ouvrages de mécanique des fluides et de transferts thermiques (exemple la référence [18]).

II-1- Géométrie du problème

Le système physique considéré (Fig. II.1) est une enceinte cylindrique de rayon R et de hauteur H , dont le rapport d'aspect fixe ($\gamma = H/R = 2$). L'enceinte contient du silicium liquide caractérisé par un faible nombre de Prandtl ($Pr = 0.01$). Le couvercle (disque supérieur) est en rotation à la vitesse angulaire constante Ω , et maintenu à la température T_c , tandis que l'inférieur est fixe et maintenu à la température T_h ($T_h > T_c$). La paroi latérale rigide est adiabatique. L'ensemble peut être soumis à un champ magnétique B de magnitude constante, uniforme et orienté verticalement vers le haut. Les parois de l'enceinte cylindrique sont électriquement isolées.

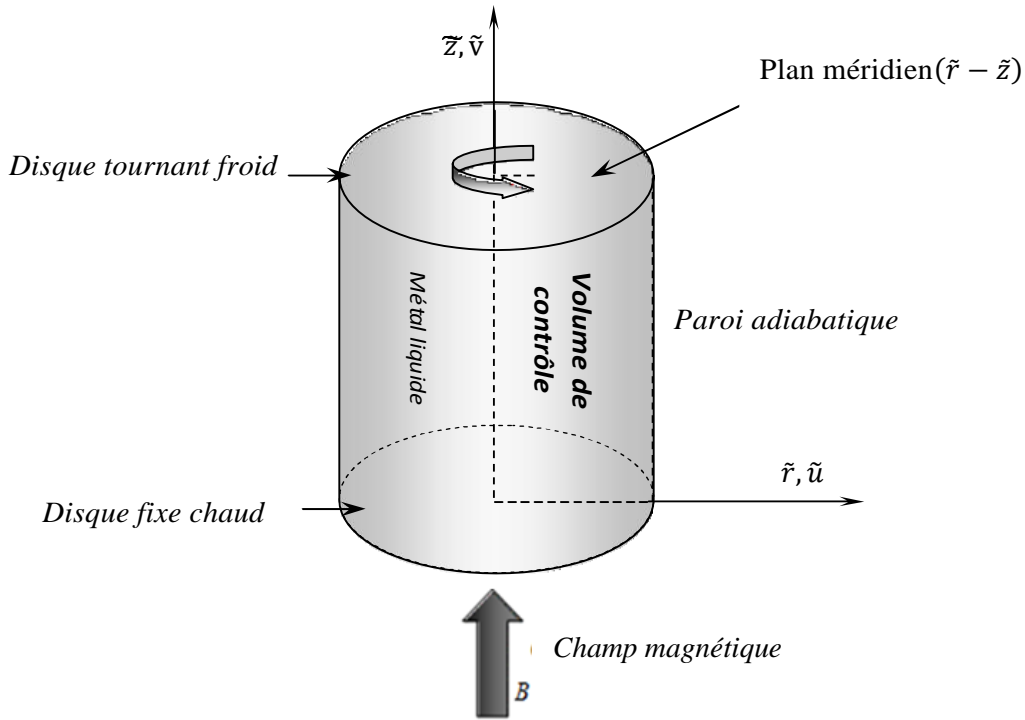


Figure II.1 : Géométrie du problème étudié.

II-2- Hypothèses simplificatrices

Afin d'aborder la résolution des équations régissant la convection mixte MHD d'un métal liquide, relatif à la géométrie déjà montrée, on va adopter les hypothèses de simplifications suivantes:

- L'écoulement avec tourbillon (swirl), laminaire et axisymétrique.
- Le métal liquide est incompressible ($\rho = Cste$) et Newtonien.
- L'effet Joule est négligeable.
- La dissipation visqueuse est négligeable.
- Le métal liquide est non-magnétisé puis que la perméabilité magnétique $\mu_m = 1$.
- L'écoulement n'affecte pas le champ magnétique, c.-à-d. le nombre de Reynolds magnétique est très petit ($R_m = \mu_0 \sigma \Omega R \ll 1$).
- Les propriétés physiques du métal liquide (σ, λ, α et ν) sont supposées constantes.
- L'approximation de Boussinesq est valide : Si la variation de densité n'est pas large, on peut considérer la densité comme constante dans les termes transitoire et convectif, et la traiter comme variable seulement dans le terme gravitationnel suivant \tilde{z} , en sachant qu'elle est exprimée par la formule [19]:

$$(\rho - \rho_0)g = -\rho_0 g \beta (T - T_0)$$

où ρ_0 est la masse volumique de référence, et β est le coefficient d'expansion thermique à pression constante.

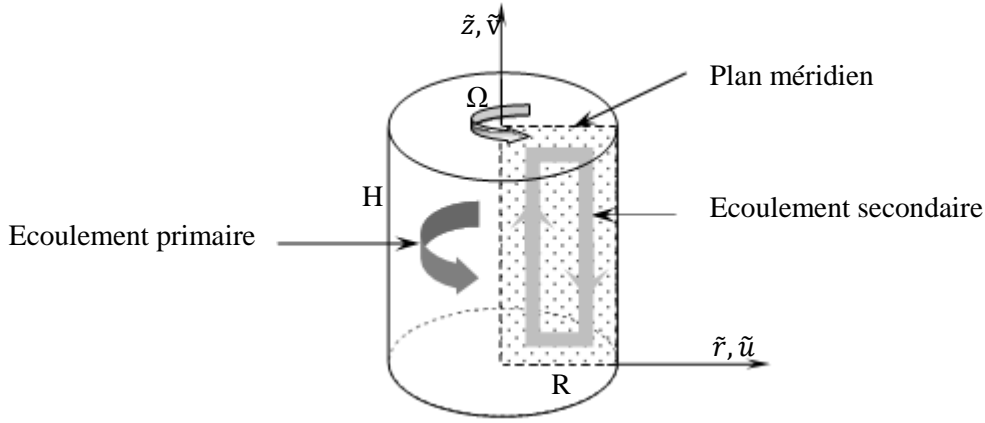


Figure II.2 : Volume de contrôle et mouvement considéré dans le repère de référence

II-3- Equations de transport

Après l'application des hypothèses de simplification susmentionnées, les équations générales régissant l'écoulement secondaire du métal liquide (Fig. II.2) dans le plan méridien, en considérant les forces de buoyancy (phénomène de convection mixte). Ces équations rapportées à $(\tilde{r}, \tilde{z}, \theta)$ sont données selon la description Eulérienne par:

- **Equation de Continuité :**

$$\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial(\tilde{r}\tilde{u})}{\partial\tilde{r}} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{z}} = 0 \quad (\text{II.1})$$

- **Equation de quantité de mouvement radiale :**

$$\rho \left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{r}} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{z}} - \frac{\tilde{w}^2}{\tilde{r}} \right) = \frac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{r}} + \mu \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial\tilde{z}^2} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} \right) + \tilde{f}_{lr} \quad (\text{II.2})$$

- **Equation de quantité de mouvement axiale :**

$$\rho \left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{r}} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{z}} \right) = \frac{\partial\tilde{P}}{\partial\tilde{z}} + \mu \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial\tilde{z}^2} \right) + \rho g \beta (T - T_c) + \tilde{f}_{lz} \quad (\text{II.3})$$

- **Equation de quantité de mouvement azimutale (Equation de swirl) :**

$$\rho \left(\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{r}} + \tilde{v} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{z}} - \frac{\tilde{u}\tilde{w}}{\tilde{r}} \right) = \mu \left(\frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial\tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial\tilde{w}}{\partial\tilde{r}} \right) + \frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial\tilde{z}^2} \right) + \tilde{f}_{l\theta} \quad (\text{II.4})$$

où $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ représentent respectivement les composantes de la vitesse radiale, axiale et azimutale, g est l'accélération de la pesanteur, ρ est la masse volumique du fluide et $\tilde{f}_{lr}, \tilde{f}_{lz}, \tilde{f}_{l\theta}$ sont respectivement les composantes de la force électromagnétique de Lorentz radiale, axiale et azimutale, cette force EM est donnée par la formule [12]:

$$\vec{\tilde{f}}_l = \vec{j} \wedge \vec{e} \quad (\text{II.5})$$

On note que pour l'écoulement secondaire (Fig. II.2), la situation est purement bidimensionnelle (conséquence de l'axisymétrie), par suite la composante azimutale \tilde{w} de la vitesse est une grandeur scalaire, introduite dans ce système d'équation seulement pour avoir une information de plus sur le champ de vitesse, et pour le potentiel électrique.

- **Equation de l'énergie :**

$$\tilde{u} \frac{\partial T}{\partial r} + \tilde{v} \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{II.6})$$

où $\alpha = \lambda / \rho C_p$ est la diffusivité thermique du liquide, λ est sa conductivité thermique et C_p sa chaleur spécifique à pression constante.

- **Equation du potentiel électrique:**

Cette équation est introduite au système d'équations gouvernant, lors de la présence du champ magnétique axial pour compléter ce système vis-à-vis l'apparition d'une nouvelle force de volume (Force de Lorentz), dont les composantes sont les termes \tilde{f}_{lr} , \tilde{f}_{lz} , \tilde{f}_{l0} ajoutés aux équations de Navier-Stokes (Eqs. (II.2-II.4))

En supposant que la conductivité électrique σ du fluide est isotrope, la loi d'Ohm sera:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II.7})$$

où \vec{j} est la densité volumique de courant et \vec{E} le champ électrique local. Suivons dans son mouvement un élément fluide; dans un repère absolu, la dernière équation s'écrit :

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (\text{II.8})$$

où $V = \tilde{u} \vec{e}_r + \tilde{v} \vec{e}_z + \tilde{w} \vec{e}_0$ désigne le vecteur vitesse dans le plan méridien et $\vec{B} = B \vec{e}_z$ le vecteur du champ magnétique, tandis que \vec{e}_r , \vec{e}_z , \vec{e}_0 sont les vecteurs unitaires respectivement des directions radiale, axiale et azimutale dans le repère absolu. Aussi puisque, le courant électrique est conservé :

$$\text{Rot} \vec{E} = \vec{0} \quad \leftrightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi \quad (\text{II.9})$$

et

$$\text{div} \vec{j} = 0 \quad (\text{II.10})$$

c.-à-d. le courant électrique dérive d'un potentiel électrique φ .

En substituant les équations (II.9) et (II.10) dans l'équation (II.8), on obtient :

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} \varphi + \vec{V} \wedge \vec{B}) = 0 \quad (\text{II.11})$$

Ce qui donne : $\Delta \varphi = \vec{V} \wedge \vec{B}$ Et explicitement en coordonnées cylindriques, l'équation du potentiel électrique $\vec{\varphi}$ (II.11) s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\tilde{w}}{r} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial r} \quad (\text{II.12})$$

Mis dans les équations de quantité de mouvement, en sachant que les composantes du vecteur densité de courant électrique soient, d'après les équations (II.8) et (II.9):

$$\vec{j}_r = \sigma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \tilde{w} B \right) \quad (\text{II.13a})$$

$$\vec{j}_z = \sigma \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \quad (\text{II.13b})$$

$$\vec{j}_0 = \sigma (-\tilde{u} B) \quad (\text{II.13c})$$

Les composantes de la force EM \tilde{f}_{lr} , \tilde{f}_{lz} , \tilde{f}_{l0} peuvent être exprimées comme suit :

$$\tilde{f}_{lr} = \sigma \tilde{u} B^2 \quad (\text{II.14a})$$

$$\tilde{f}_{lz} = 0 \quad (\text{II.14b})$$

$$\tilde{f}_{l0} = \sigma B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} - \tilde{w} B \right) \quad (\text{II.14c})$$

II-4- Formes adimensionnelles des équations

Les études expérimentales des écoulements sont souvent effectuées sur des modèles et les résultats sont montrés dans une forme sans dimensions, permettant ainsi des mesures échelonnées vers les conditions réelles des écoulements. La même approche peut être aussi entreprise dans des études numériques. Les équations gouvernant peuvent être transformées à la forme sans dimensions en employant la normalisation appropriée.

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes respectivement pour le temps, la longueur, la vitesse, la pression, la température et le potentiel électrique:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{t}{(1/\Omega)}, \\ r &= \frac{\tilde{r}}{R}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{R}, \\ u &= \frac{\tilde{u}}{(\Omega R)}, \quad v = \frac{\tilde{v}}{(\Omega R)}, \quad w = \frac{\tilde{w}}{(\Omega R)}, \\ P &= \frac{\tilde{P}}{\rho(\Omega R)^2}, \quad \Theta = \frac{T-T_c}{T_h-T_c}, \quad \Phi = \frac{\varphi}{(\Omega R^2 B)},\end{aligned}$$

Les équations adimensionnelles gouvernant le système s'écrivent alors:

- **Equation de continuité:**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.15})$$

- **Equation de quantité de mouvement radiale:**

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2} \right) + Nf_{lr} \quad (\text{II.16})$$

- **Equation de quantité de mouvement axiale:**

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \text{Ri} \cdot \Theta \quad (\text{II.17})$$

- **Equation de quantité de mouvement azimutale (Equation de swirl) :**

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{uw}{r} = \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{w}{r^2} \right) + Nf_{l0} \quad (\text{II.18})$$

- **Equation de l'énergie:**

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \Theta}{\partial r} + v \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{Re.Pr} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) \right) \quad (\text{II.19})$$

- **Equation du potentiel électrique:**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (\text{II.20})$$

avec: $P_r = \frac{\nu}{\alpha}$, Le nombre de Prandtl,

$Re = \frac{\Omega R^2}{\nu}$, Le nombre de Reynolds ,

$Ri = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{\beta g (T_h - T_c)}{\Omega^2 R}$ Le nombre de Richardson, où $Gr = \frac{\beta (T_h - T_c) g R^3}{\nu^2}$ est le nombre

de Grashof, qui exprime le rapport des forces de buoyancy aux forces de viscosité.

$N = \frac{Ha^2}{Re} = \frac{\sigma B^2}{\rho \Omega}$ Le paramètre d'interaction, qui représente le ratio entre les forces électromagnétiques et celles d'inertie, et $Ha = BR\sqrt{\sigma/\rho\nu}$ est le nombre de Hartmann, qui définit le rapport des forces électromagnétiques aux forces de viscosité.

Dans les équations de quantité de mouvement (Eqs. (II.16-II.18)), $\tilde{f}_{lr}, \tilde{f}_{lz}, \tilde{f}_{l\theta}$ sont respectivement les forces de Lorentz adimensionnelles dans les directions radiale, axiale et azimutale, dont les expressions sont obtenues après normalisation des composantes dimensionnelles $\tilde{f}_{lr}, \tilde{f}_{lz}, \tilde{f}_{l\theta}$ (Eqs. (II.14a-II.14c)) :

$$F_{lr} = -u \quad (\text{II.21a})$$

$$F_{lz} = 0 \quad (\text{II.21b})$$

$$F_{l\theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} - w \quad (\text{II.21c})$$

Les courants électriques adimensionnels dans les directions r, z et θ sont respectivement:

$$J_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} + w \quad (\text{II.22a})$$

$$J_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (\text{II.22b})$$

$$J_\theta = -u \quad (\text{II.22c})$$

II-5- Les conditions aux limites et initiales

II-5-1- Les conditions initiales:

Les conditions initiales sont prises pour chaque lancement de calculs comme étant la solution obtenue par le calcul antécédent (les répartitions de u, v, w, P, Φ ; et Θ dans le fluide). Toutefois, pour la première exécution, on a supposé que le liquide soit au repos et la répartition de température soit nulle, ainsi qu'un champ de potentiel électrique partout nul dans le volume de contrôle. Alors à $\tau = 0$ on aura:

$$u = 0, v = 0, w = 0, \theta = 0, \Phi = 0 \quad (0 < r < 1, 0 < z < \gamma) \quad (\text{II.23})$$

II-5-2- Les conditions aux limites :

Les conditions aux limites des quantités adimensionnelles pour l'écoulement de swirl avec transfert de chaleur et un champ magnétique sont, pour un instant $\tau=0$, Sur l'axe de symétrie:

$$u = 0, \frac{\partial v}{\partial r} = 0, w = 0, \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (r = 0, 0 \leq z \leq \gamma) \quad (\text{II.24a})$$

A la paroi latérale adiabatique et électriquement isolée :

$$u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \quad (r = 1, 0 \leq z \leq \gamma) \quad (\text{II.24b})$$

Au disque supérieur froid, en rotation :

$$u = 0, v = 0, w = r, \theta = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (r = \gamma, 0 \leq r \leq 1) \quad (\text{II.24c})$$

Au disque inférieur chaud et fixe :

$$u = 0, v = 0, w = 0, \theta = 1, \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (z = \gamma, 0 \leq r \leq 1) \quad (\text{II.24d})$$

En récapitulation, ces conditions aux limites sont visualisées schématiquement sur la figure II.3.

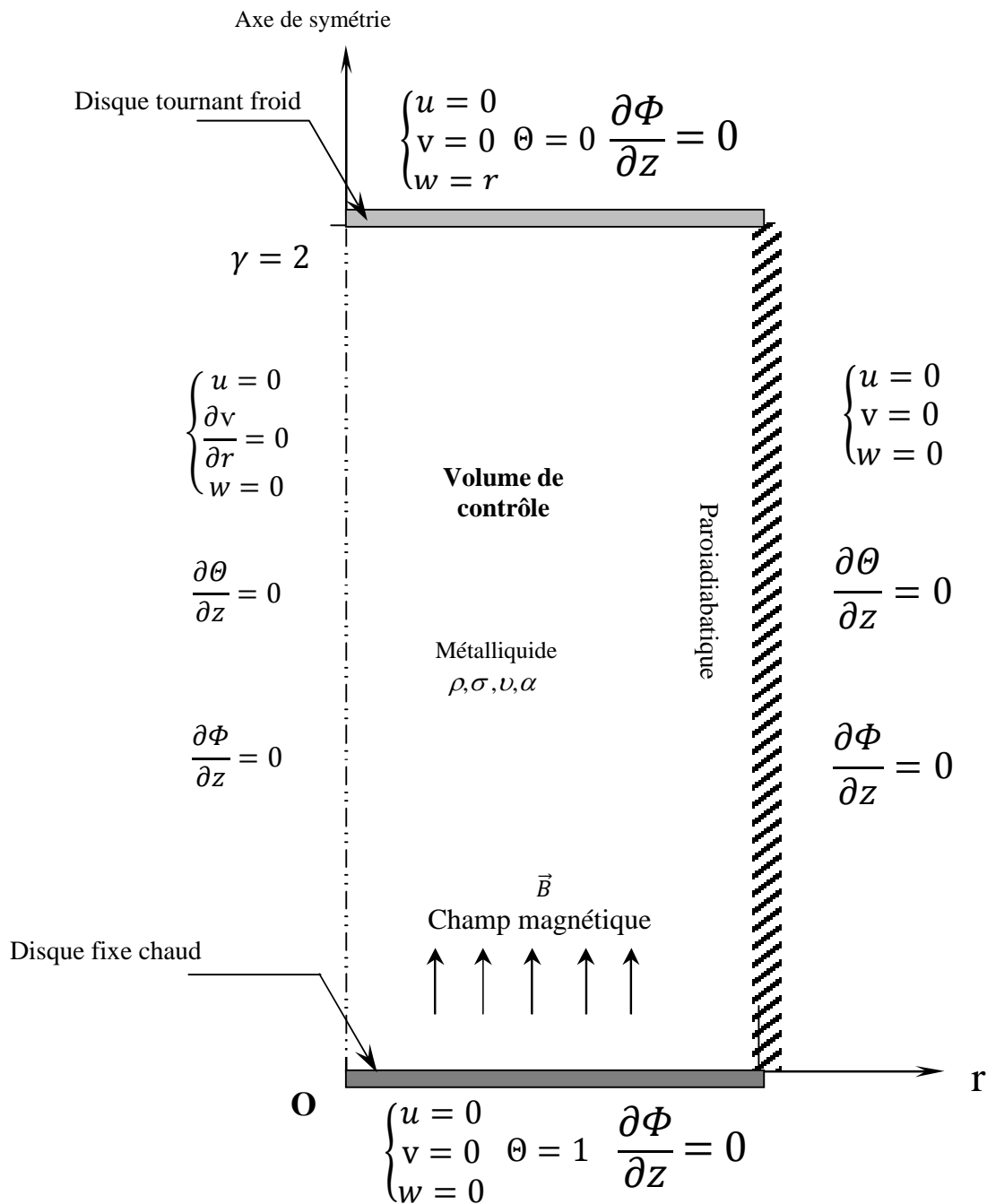


Figure II.3 : Schématisation des conditions aux limites du problème adimensionnel. Les parois de l'enceinte cylindrique sont électriquement isolantes.

II-6- Outils d'analyse de l'écoulement

Après la résolution des équations régissant la convection mixte de la cavité cylindrique remplie du métal liquide considéré, les six inconnues u, v, w, P, Φ et θ donnent quantitativement une vue sur le phénomène étudié mais, ils existent d'autres paramètres qui peuvent attribuer aux solutions plus de clarté et substantialité quantitativement et qualitativement, et facilitent l'analyse du phénomène étudié. Quelques paramètres dont la nature peut différer (critère adimensionnel, fonction mathématique, ...etc.), sont utilisés dans ce travail pour éclaircir la vision physique du problème.

II-6-1- La fonction de courant:

Nous utilisons cet intelligent dispositif seulement pour identifier les lignes de courant hydrodynamique, et les débits d'écoulement. La fonction de courant ψ (dite de Stokes) est définie en coordonnées cylindriques pour un écoulement incompressible, axisymétrique (c.-à-d. sans variation azimutale $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$) par:

$$u = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad v = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (\text{II.25})$$

ici les lignes $\psi(r, z) = \text{Cste}$ sont les lignes de courant, et le débit entre deux lignes de courant est : $Q_{1 \rightarrow 2} = 2\pi(\psi_2 - \psi_1)$ (II.26)

II-6-2- La vorticité :

Un autre outil, la vorticité qui est associée au vecteur vitesse local $\vec{V} = (u, v, w)$, est définie par :

$$\omega = \overrightarrow{\text{Rot}} \vec{V} \quad (\text{II.27})$$

Mais dans les calculs on s'intéresse seulement à la composante azimutale de la vorticité, en la nommant vorticité elle-même :

$$\omega = \omega_\theta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r} \quad (\text{II.28})$$

II-6-3- Le nombre de Nusselt :

Cet outil est un nombre adimensionnel, aide à analyser les transferts thermiques par convection aux frontières, puisque il est inversement proportionnel à l'épaisseur δ_t de la couche limite thermique, et défini localement comme [19]:

$$Nu(r) = \frac{\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \Big|_{z=0}}{\lambda \frac{T_h - T_c}{H}} = -\gamma \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \quad (\text{II.29})$$

Aussi, nous utilisons le nombre de Nusselt moyen calculé pour chaque disque d'extrémité de l'enceinte cylindrique:

$$\overline{Nu} = 2 \int_0^1 Nu(r) r dr \quad (\text{II.30})$$

CHAPITRE III:

SOLUTION NUMERIQUE

CHAPITRE III

SOLUTION NUMERIQUE

Comme nous avons exposé au précédent chapitre, les équations régissant le phénomène étudié sont des équations aux dérivées partielles (EDP) non-linéaires, dont la résolution analytique ne peut être possible au moyen des outils d'analyse mathématique contemporain. Mais une solution numérique peut être possible en transformant ces équations différentielles en systèmes d'équations algébriques linéaires par une méthode de discrétisation avant de résoudre ce système par des méthodes directes ou par itérations. Pour notre présente étude, nous avons choisi la méthode des volumes finis pour discrétiser les équations du modèle mathématique.

La méthode des volumes finis (VF) emploie la forme intégrale des équations de transport comme son point de départ. Le domaine de solution est subdivisé en un nombre fini de volumes de contrôle (VC) contigus et les équations de conservation sont appliquées à chaque volume de contrôle. Au centre de chaque VC se trouve un nœud au quel les quantités variables doivent être calculées. L'interpolation est employée pour exprimer des valeurs variables à la surface du volume en termes des valeurs nodales au centre du VC. Les intégrales de surface et de volume sont approchées en employant des formules de quadrature appropriées. En conséquence, on obtient une équation algébrique pour chaque VC, dans laquelle quelques valeurs nodales voisines apparaissent.

La méthode VF peut accommoder n'importe quel type de maillage, même pour les géométries complexes. Le maillage définit seulement les frontières de volume de contrôle et n'a pas besoin d'être rapporté à un système de coordonnées. L'approche par VF est peut-être la plus simple à comprendre et à programmer. Tous les termes qui doivent être approchés ont la signification physique c'est pourquoi cette méthode est choisie.

III-1- Maillage

Le domaine physique est divisé en un certain nombre de volumes finis. Sur la figure III.1, on montre un ensemble de volumes de contrôle typiques 2D avec la notation que nous emploierons. La surface de VC consiste en quatre plans, notés par des lettres minuscules correspondant à leur direction (e , w , n et s) en ce qui concerne le nœud central (P). E, W, N et S sont les centres des volumes de contrôles adjacents situés respectivement à l'Est, Ouest, Nord et Sud de celui contenant P. Il est typique d'employer un réseau entrelacé comme indiqué dans la figure III.2. L'idée est d'évaluer les quantités scalaires: composante de vitesse azimutale w , pression p , température Θ et potentiel électrique φ stockées aux centres des volumes finis, mais calculer les deux composantes de la vitesse u et v sur un réseau entrelacé centré autour des faces du volume. La motivation dans l'utilisation d'un tel réseau est d'éviter l'instabilité bien connue «*checkerboard*» [20] dans lequel des cellules de réseau supplémentaires montrent des solutions complètement différentes.

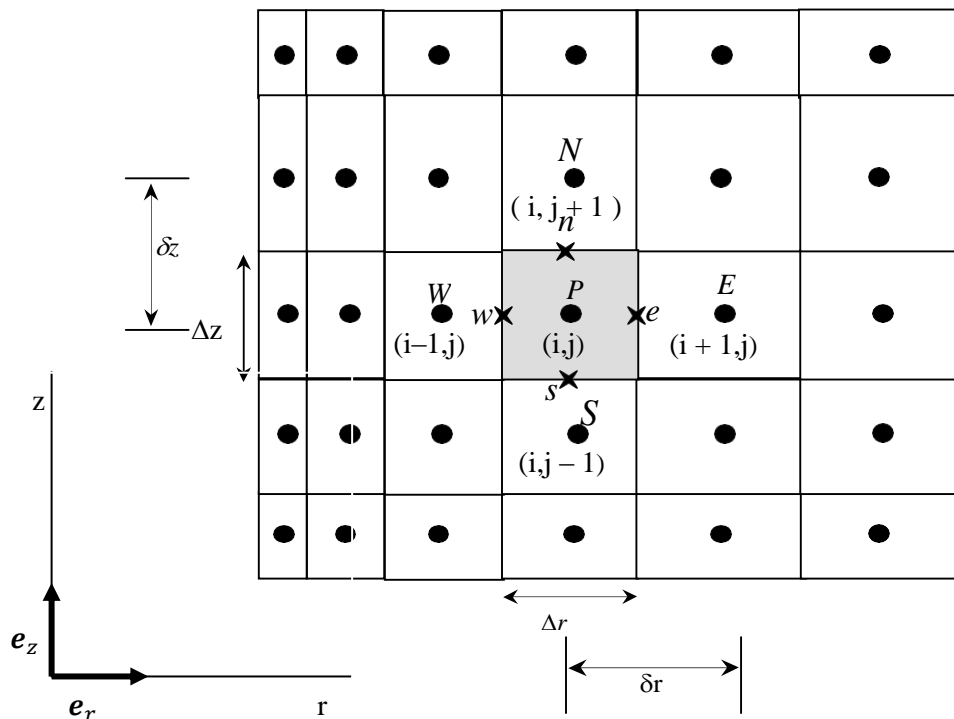


Figure III.1 : Volumes de contrôle typique et notation de maillage utilisée pour un maillage 2D.

Dans les écoulements MHD, les couches limites de Hartmann se développent et diffèrent de celles ordinaires présentes en situation purement hydrodynamique. Aux parois perpendiculaires au champ magnétique, les couches limites de Hartmann sont caractérisées par une décroissance exponentielle de la vitesse vers la paroi [11-19] et [21]. Aux parois parallèles au champ magnétique, une couche appelée couche parallèle existe, et cela engendre d'importants gradients de vitesse et de température. Dans l'optique de comprendre ce qu'il est produit aux couches de Hartmann et parallèles, et en prenant en considération la loi de variation de leurs épaisseurs, on a raffiné le réseau de maillage près des parois selon une progression géométrique de raison 1.05 dans la direction r et 1.07 dans la direction z (Fig. III.3).

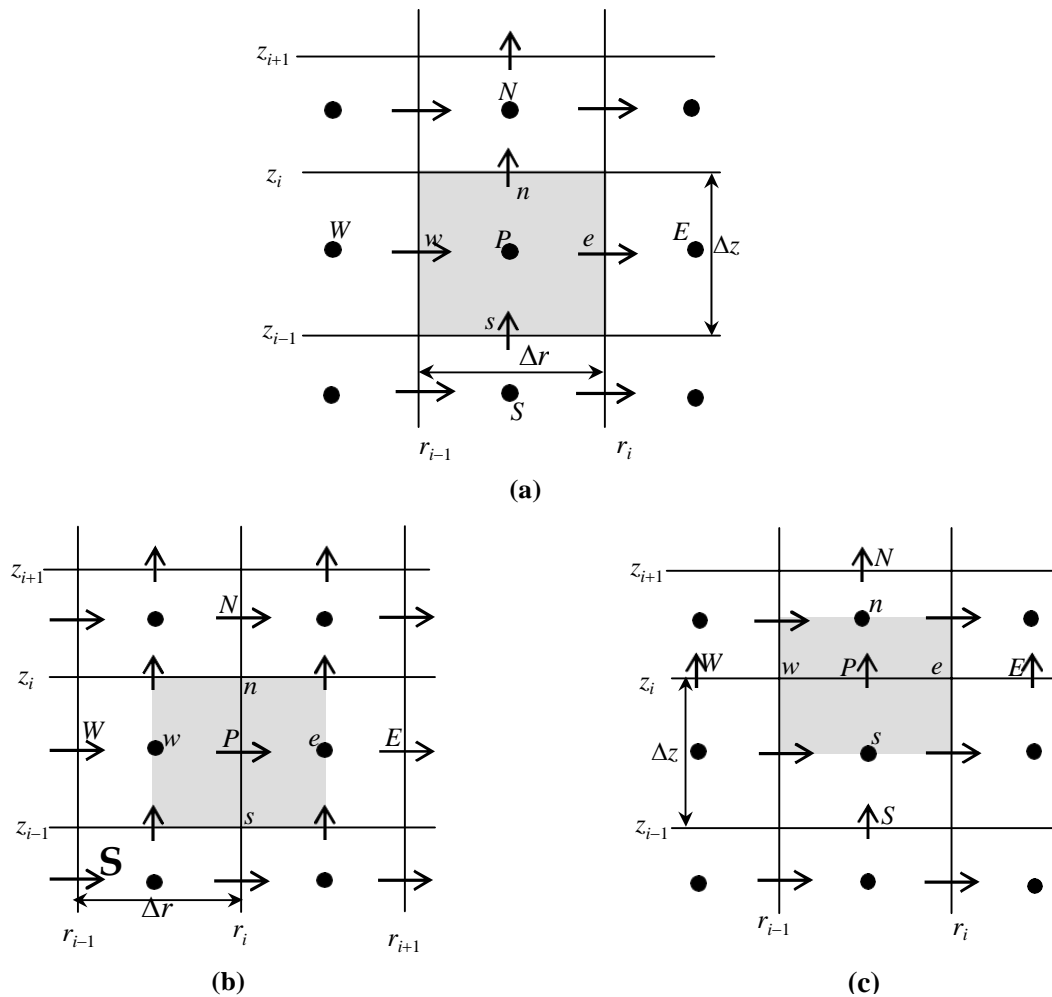


Figure III.2 : Volumes de contrôle du maillage entrelacé pour: **(a)** les quantités scalaires, **(b)** la composante radiale u , **(c)** la composante axiale v de vitesse.

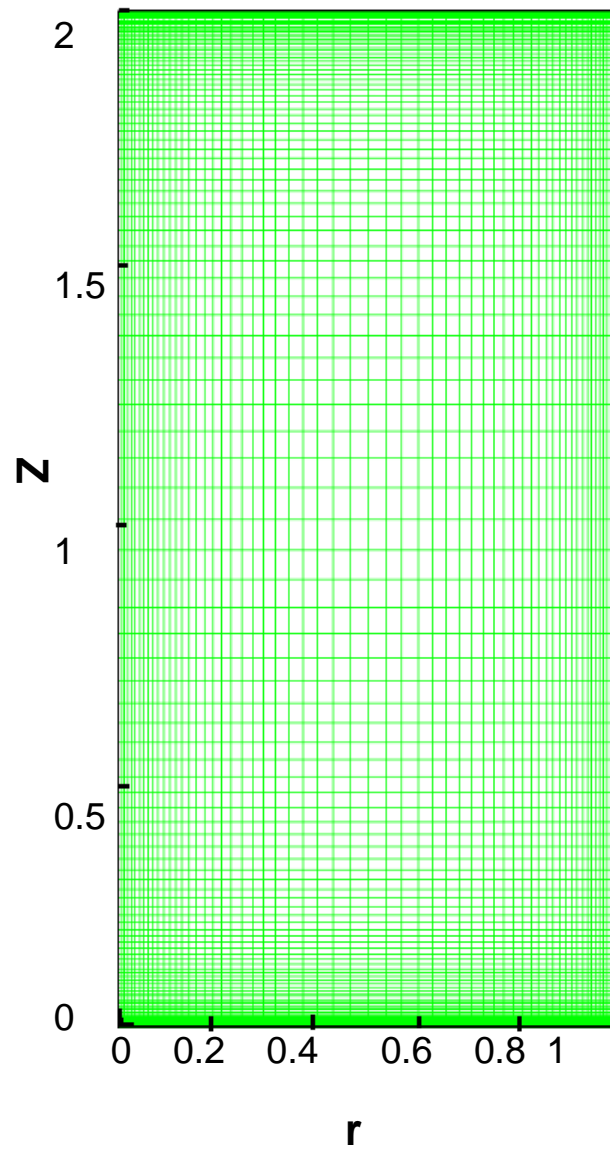


Figure III.3 : Maillage utilisé dans les calculs avec raffinement près des parois. Ici $n_r \times n_z = 60 \times 120$, nombres de nœuds suivant les directions r et z .

III-2- Discrétisation implicite de l'équation générale de transport:

Les équations locales instantanées régissant l'écoulement en question peuvent s'écrire selon la suivante forme de l'équation généralisée de transport d'une variable dépendante ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial(u\phi)}{\partial r} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial z} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right) + S_{\phi} \quad (\text{III.1})$$

Où :

$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$: représente le terme transitoire.

$\frac{\partial(u\phi)}{\partial r} + \frac{\partial(v\phi)}{\partial z}$: représente le transport par convection de ϕ .

$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right)$: représente la diffusion de ϕ .

S_{ϕ} : représente le terme source.

Le tableau suivant rassemble les expressions de la variable dépendante ϕ , du coefficient de diffusion Γ_{ϕ} et du terme source S_{ϕ} concernant les équations adimensionnelles citées au précédent chapitre (Eqs. (II.15-II.19)). Toutefois, pour l'équation du potentiel électrique (Eq. II.20), elle est du type Poisson bien connu, et représente la loi de comportement pour la quantité Φ en régime stationnaire, et nous faisons abstraction des termes transitoire et de convection pour l'écrire sous la forme de transport générale (Eq. III.1).

Tableau III.1 Différentes quantités transportées et leurs termes de transport

Equation de	ϕ	Γ_ϕ	S_ϕ
Continuité	1	0	$-u/r$
Quantité de mouvement radiale	u	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{1}{Re} \cdot \frac{u}{r^2} - \frac{Ha^2}{Re} u + \frac{w^2}{r}$
Quantité de mouvement axiale	v	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial z} + Ri \cdot \Theta$
Quantité de mouvement azimutale	w		$-\frac{1}{Re} \cdot \frac{w}{r^2} + \frac{Ha^2}{Re} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} - w \right) - \frac{uw}{r}$
L'énergie	Θ	$\frac{1}{Re Pr}$	0
Potentiel électrique	Φ	1	$-\frac{w}{r} - \frac{\partial w}{\partial r}$

Pour obtenir l'équation de discrétisation de la variable dépendante ϕ , on intègre l'équation générale de transport (III.1) sur un volume fini de contrôle typique de dimensions $\Delta r \times \Delta z$, son volume par unité de profondeur est $\Delta V = r \Delta r \cdot \Delta z$, et on obtient:

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b \quad (III.2)$$

Les coefficients multiplicatifs ($A_i ; i = P, E, W, N, S$) de la variable dépendante

ϕ ainsi que le terme b de l'équation (III.2) sont décrits en détail dans Patankar [20], et sont rappelés ci- dessous:

$$A_E = D_e A(|P_e|) + \max[-F_e, 0] \quad (III.3a)$$

$$A_W = D_w A(|P_w|) + \max[F_w, 0] \quad (III.3b)$$

$$A_N = D_n A(|P_n|) + \max[-F_n, 0] \quad (III.3c)$$

$$A_S = D_s A(|P_s|) + \max[F_s, 0] \quad (III.3d)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + A_{P^0} \quad (III.3e)$$

$$b = \left(\overline{S_\phi} + \frac{\phi^0}{\Delta \tau} \right) r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta z \quad (III.3f)$$

Avec A_P, A_E, A_W, A_N et A_S sont respectivement les coefficients correspondants aux noeuds central (point P), Est, Ouest, Nord et Sud du volume fini de contrôle et A_{P^0} est le coefficient de la variable générale ϕ , à calculer au point P en un instant précédent par :

$$A_{P^0} = \frac{r_P \cdot \Delta r \cdot \Delta z}{\Delta \tau} \quad (III.3g)$$

Et b : appelé terme source, qui englobe tous les termes supposés être constants dans le volume de contrôle. D_e, D_w, D_n, D_s et F_e, F_w, F_n, F_s sont respectivement les termes diffusifs et convectifs aux faces Est, Ouest, Nord et Sud. Leurs expressions sont :

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta r_e} r_e \Delta z \quad (\text{III.4a})$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta z_w} r_w \Delta r \quad (\text{III.4b})$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{\delta z_n} r_n \Delta r \quad (\text{III.4c})$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{\delta z_s} r_s \Delta r \quad (\text{III.4d})$$

$$F_e = u_e \cdot r_e \Delta z \quad (\text{III.4e})$$

$$F_w = u_w \cdot r_w \Delta z \quad (\text{III.4f})$$

$$F_n = v_n \cdot r_p \Delta r \quad (\text{III.4g})$$

$$F_s = v_s \cdot r_p \Delta r \quad (\text{III.4h})$$

$$\text{Et } P_e, P_w, P_n, P_s \text{ sont: } P_i = F_i / D_i ; i=e,w,n,s \quad (\text{III.5})$$

Ces nombres appelés nombres du Peclet, désignent les rapports des flux convectifs aux flux diffusifs aux différentes faces du volume fini de contrôle. Les coefficients A_p, A_e, A_w, A_n et A_s dépendent du schéma numérique choisi et du nombre de Peclet.

Dans tous nos calculs, on a utilisé le schéma UPWIND du second ordre (SOUS) [20]. Ce choix est motivé par le fait que ce schéma soit le plus usuellement utilisé dans la littérature pour découvrir les instabilités physiques. Ce schéma est donné par la fonction suivante:

$$A(|P_i|) = 1 - 0.5|P_i|; i = e, w, n, s \quad (\text{III.6})$$

Cependant la résolution de l'équation (III.2) fait apparaître deux difficultés :

- les coefficients des équations discrètes dépendent des valeurs des variables, le système n'est donc pas linéaire.
- Les termes source des équations de quantité de mouvement font intervenir le gradient de pression.

III-3- Discrétisation de l'équation du potentiel électrique

On intègre l'équation du potentiel électrique (Eq. II.20) sur un VC typique de dimensions $\Delta r \times \Delta z$ par unité de profondeur, on obtient :

$$\iint_{s w}^n \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) r dr dz + \iint_{s w}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} r dr dz = \iint_{s w}^n \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) r dr dz \quad (\text{III.7})$$

Explicitons chaque terme :

$$\iint_{s\ w}^{n\ e} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) r dr dz = \int_s^n \left[r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right]_w^e dz = \left[\left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_e - \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_w \right] \Delta z \quad (\text{III. 8})$$

$$\iint_{s\ w}^{n\ e} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} r dr dz = \int_w^e \left[r \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right]_s^n r dr = \left[\left(r \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_n - \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_s \right] r_p \Delta r \quad (\text{III. 9})$$

Pour le terme de source, on prend sa valeur moyenne, en supposant que la quantité w ne pas sur le VC fini (c.-à-d. $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$):

$$\begin{aligned} \iint_{s\ w}^{n\ e} \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) r dr dz &= \iint_{s\ w}^{n\ e} \left(\frac{w}{r} \right) r dr dz \\ \iint_{s\ w}^{n\ e} \left(\frac{w}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) r dr dz &= \int_s^n [w \cdot r]_w^e dz = [(rw)_e - (rw)_w] \Delta z \end{aligned} \quad (\text{III. 10})$$

On obtient l'équation linéaire générale, liant la valeur du potentiel électrique Φ au centre P du VC avec les valeurs nodales des VC finis voisins :

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + b \quad (\text{III.11})$$

où ces coefficients sont :

$$A_E = \frac{r_e \Delta z}{\delta r_e} \quad (\text{III. 12})$$

$$A_W = \frac{r_w \Delta z}{\delta r_w} \quad (\text{III. 13})$$

$$A_N = \frac{r_n \Delta r}{\delta r_n} \quad (\text{III. 14})$$

$$A_S = \frac{r_s \Delta r}{\delta r_s} \quad (\text{III. 15})$$

$$A_p = A_E + A_W + A_N + A_S \quad (\text{III.16})$$

Et le terme source constant:

$$b = (r_w \cdot w_w - r_e \cdot w_e) \Delta z \quad (\text{III.17})$$

III-4- Etapes à suivre pour la modélisation numérique par FLUENT

Les principales étapes à suivre lors du travail sur le logiciel de simulation numérique des écoulements ANSYS FLUENT nécessitent la connaissance de certaines notions théoriques de base. Ces notions, concernent notamment, les définitions des principales équations régissant l'écoulement.

La résolution numérique par Fluent d'une manière générale, suit les étapes suivantes :

- 1) Création de la géométrie sous le Logiciel GAMBIT ;
- 2) Choix de la stratégie de maillage et création de plusieurs grilles ;
- 3) Définition des conditions aux limites dans GAMBIT ;
- 4) Définition du problème sous le logiciel FLUENT, étude des différentes grilles de maillage et sélection du maillage retenue ;
- 5) Calcul avec FLUENT pour les différents cas retenus ;
- 6) Analyse des résultats obtenus.

III-5- Présentation de GAMBIT et de FLUENT

La résolution par le logiciel de simulation numérique des écoulements ANSYS FLUENT nécessite la présentation de logiciel GAMBIT.

III-5-1- GAMBIT :

GAMBIT est un logiciel de DAO (Dessin Assisté par Ordinateur) et de génération de maillage. Gambit est un logiciel qui permet de réaliser des géométries en 2D ou 3D et de construire le maillage. Largement répandus dans l'industrie (automobile, aéronautique, spatiale, ...etc.) en raison de son interface graphique puissante, il permet aussi de réaliser tout type de géométries complexes (fixes ou mobiles) associées à des maillages fixes ou adaptatifs.

Gambit possède une interface facile à manipuler et qui est constituée de plusieurs fenêtres d'outils d'opération destinées à construire le modèle, générer le maillage et incorporer les conditions aux limites, figures ...

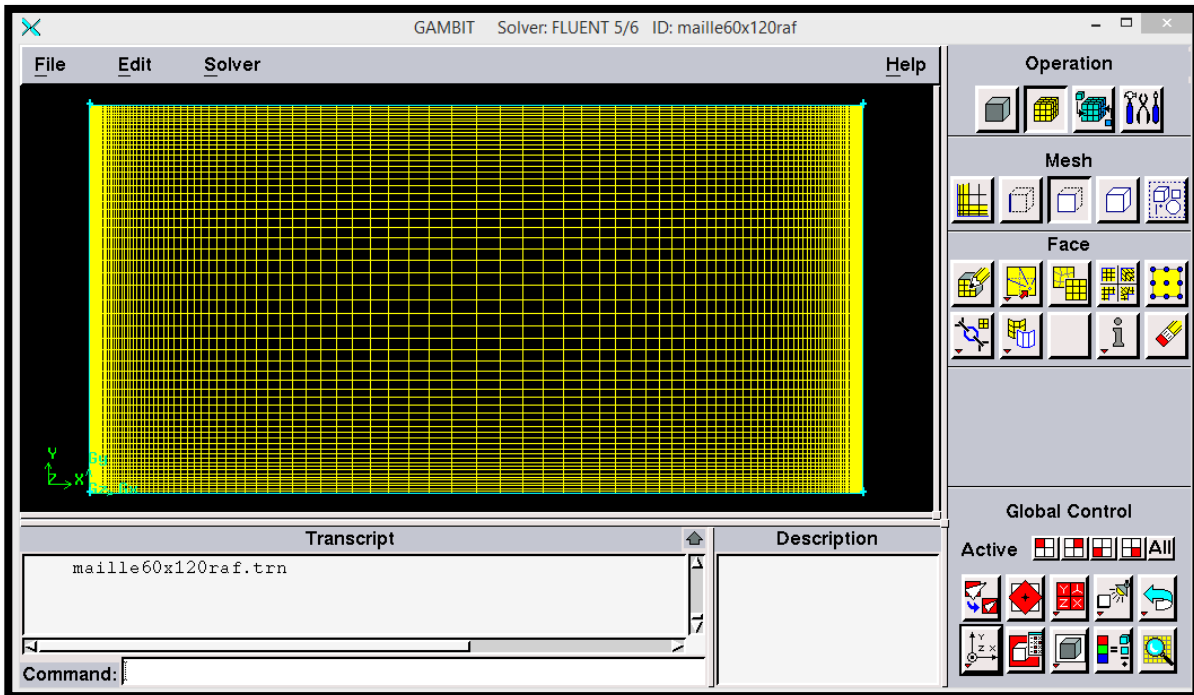


Figure III.4: Interface de Gambit

a. Fenêtre d'outils d'opération :

Chaque bouton de cette fenêtre correspond à une fonction bien définie (Figure III.5).



Figure III.5 Fenêtre d'outils d'opération

b. Construction de la géométrie :

Elle est créée à partir de points, de côtés, de surfaces, de volumes ou d'un groupe de tous ces éléments. On peut effectuer des opérations d'union, d'intersection, de séparation d'effacement de décomposition (Figure III.6).

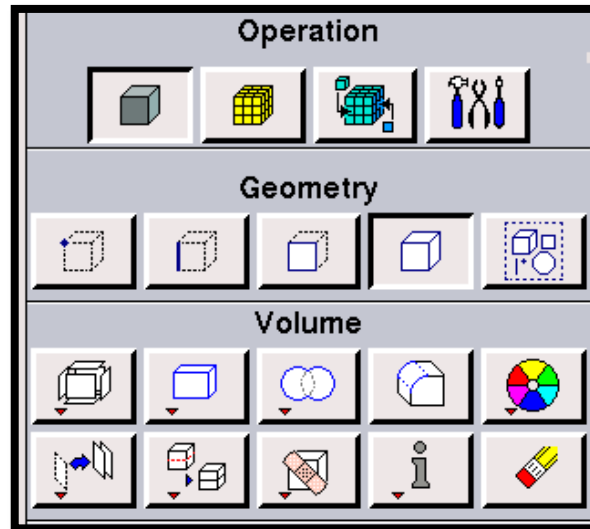


Figure III.6 Construction de la géométrie

c. Génération de maillage :

Cette fonction permet la génération de tous types de maillage, la manipulation du maillage généré et même la création d'une couche limite s'il y a lieu (Figure III.7).

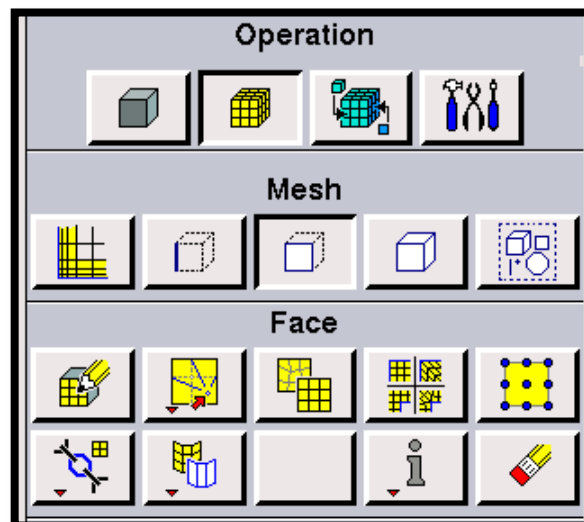


Figure III.7 Génération de maillage

d. Incorporation des conditions aux limites :

Plusieurs types de conditions aux limites sont disponibles selon le problème traité. A noter que l'espace maillé est pris par défaut comme étant fluide (Figure III.8).

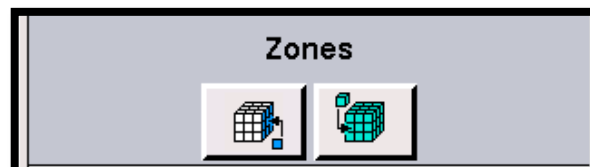


Figure III.8 Génération de maillage

III-5-2- FLUENT

FLUENT est un code de calcul pour modéliser les écoulements des fluides et les transferts thermiques dans des géométries complexes. Il peut résoudre des problèmes d'écoulement avec des mailles non structurées, qui peuvent être produites pour des géométries complexes, avec une relative facilité. Les types de mailles supportées sont :

- Des mailles en 2D, triangulaires ou quadrilatérales;
- Des mailles en 3D tétraédriques/hexaédriques/pyramidales ;
- Des mailles (hybrides) mixtes ;

FLUENT est écrit en langage de programmation C et utilise pleinement la flexibilité et la puissance offerte par ce langage (par exemple allocation de la mémoire dynamique). En outre, il utilise une architecture qui lui permet d'exécuter plusieurs processus simultanément sur le même poste de travail ou sur des postes séparés pour une exécution plus efficace.

FLUENT s'utilise à travers une interface graphique, l'utilisateur avancé peut adapter ou augmenter aux besoins l'interface en écrivant des macros et des fonctions de menu, afin d'automatiser certaines procédures.

Ainsi, à titre non exhaustif, FLUENT permet les capacités de modélisation suivantes [22]:

- Ecoulements dans des géométries 2D ou 3D en utilisant des maillages adaptifs non structuré ;
- Ecoulement stationnaire ou instationnaire ;
- Ecoulements incompressibles ou compressibles (subsoniques, transsoniques, supersoniques ou hypersoniques) ;
- Ecoulements non visqueux, laminaires ou turbulents ;
- Fluide Newtonien ou non ;
- Transfert de chaleur forcé, par conduction, par convection ou les deux (conjugue) ou radiatif ;
- Ecoulements avec changements de phases ;
- Ecoulements en milieu poreux;
- Repères de référence inertiels (stationnaire) ou non-inertiels (en rotation) ;
- Multiples repères de référence en mouvement, incluant des interfaces glissantes et des plans de mélange ;
- Mélange et réaction d'espèces chimique, incluant des modèles de combustion et des réactions de surface ;
- Sources volumiques arbitraires de chaleur, masse, quantité du mouvement, turbulence, et espèces chimiques ;
- Calculs de trajectoires lagrangiennes pour une phase dispersée de particules/ gouttes/ bulles, incluant le couplage avec la phase continue ;
- Ecoulement à travers les matériaux poreux ;
- Modèles pour turbine 1D/ échangeur de chaleur ;
- Ecoulements diphasiques, incluant la cavitation ;
- Ecoulement à surface libre avec surfaces complexes ;

Fluent emploie la méthode des volumes finis comme procédé de discrétisation des équations qui gouvernent l'écoulement, telle que l'équation de continuité, l'équation quantité de mouvement, l'équation de l'énergie et l'équation de potentiel électrique. En utilisant cette technique basée sur l'intégration des équations sur un volume de contrôle, Fluent passe par les étapes suivantes:

- Division du domaine en volumes de contrôle discrets en utilisant une grille (maillage).
- Intégration des équations gouvernantes sur les volumes de contrôle individuels, afin de construire les équations algébriques pour les variables discrètes dépendantes, les inconnues telles que : vitesses, pressions et températures.
- Linéarisation des équations discrétisées et solution du système d'équations linéaires résultant, pour tenir compte des effets turbulents, le logiciel de calcul offre la possibilité de choisir un des modèles de turbulence suivants :
 - Le modèle à une équation de Spalart-Allmaras;
 - Le modèle à deux équations $k-\epsilon$;
 - Le modèle à deux équations $k-\omega$;
 - La modèle de contrainte de Reynolds (Reynolds stress model).

Le choix entre ces modèles se base principalement sur les résultats que donne chacun des modèles suivant les conditions aux limites prédéfinies. Il est vrai qu'un modèle peut donner de meilleurs résultats par rapport à un autre, mais ceci est dû principalement à la nature des cas étudiés et à la correspondance du modèle de turbulence avec les conditions aux limites.

III-5-3- Interface du code FLUENT :

On peut démarrer 4 versions de Fluent 2D et 3D ayant la même interface (Figure III.9).

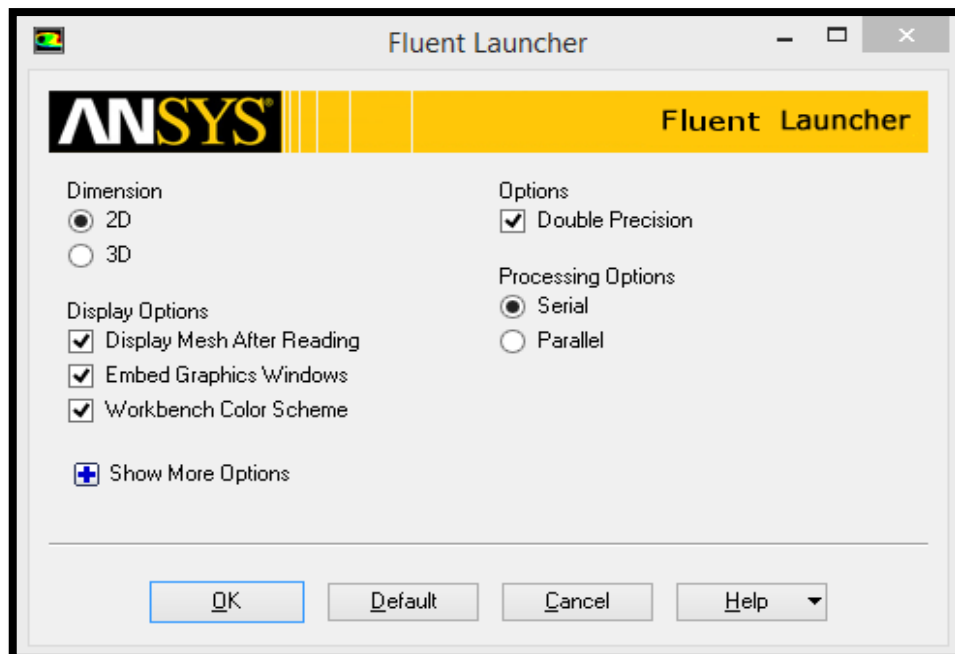


Figure III.9 Interface de démarrage de ANSYS FLUENT.

- Dimensions (2D ou 3D)
- Options (Double Précision)
- Processing Options (Serial, Parallel)
- Display Options

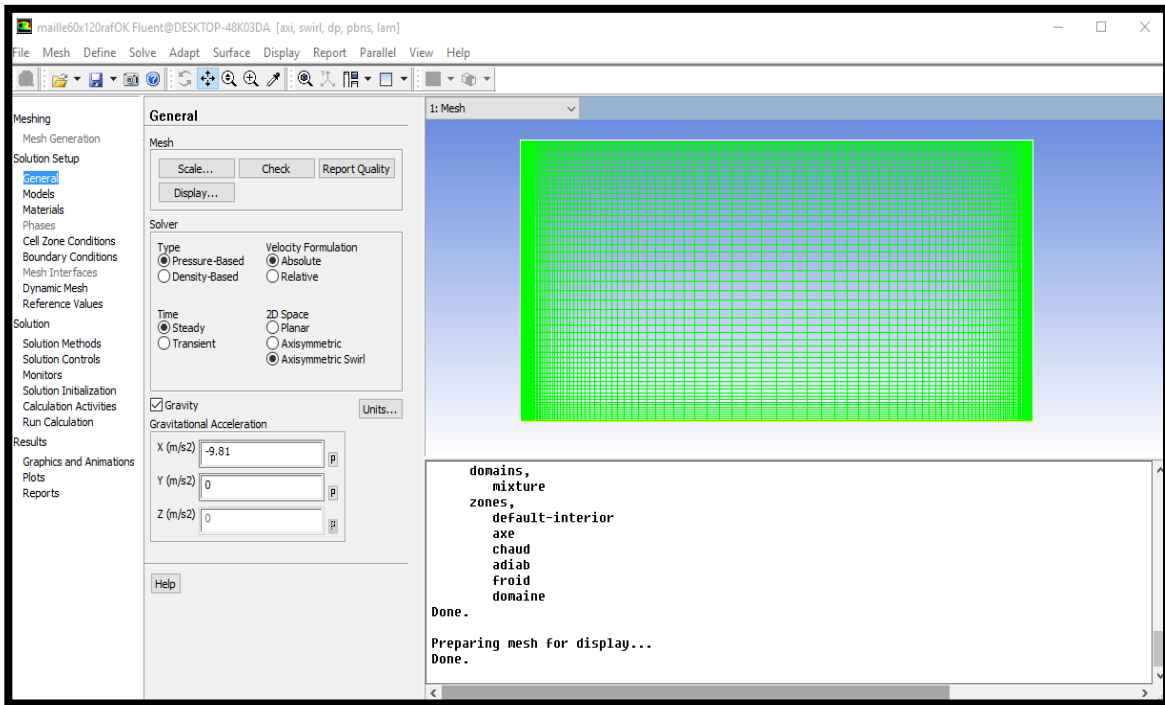


Figure III.10 Interface d'utilisation de FLUENT

Les fonctions (Figure III.10) disponibles pour la procédure numérique sont :

File : pour les opérations concernant les fichiers : lecture, sauvegarde, importation... etc.

Mesh : pour la vérification et la manipulation du maillage et de la géométrie.

Define : pour définir les phénomènes physiques, les matériaux et les conditions aux limites.

Solve : pour choisir les équations à résoudre, les schémas de discrétisations, les facteurs de sous relaxation, les critères de convergence et pour initialiser et procéder au calcul.

Adapt : pour l'adaptation du maillage selon plusieurs paramètres.

Surface : pour créer des points, des lignes et des plans nécessaires à l'affichage des résultats.

Display et plot : pour l'exploitation des résultats.

Report : pour afficher des rapports contenant les détails du problème traité.

Parallel : pour le calcul parallèle.

Help : pour l'exploitation du contenu du code.

CHAPITRE IV:

RESULTATS ET DISCUSSION

CHAPITRE IV

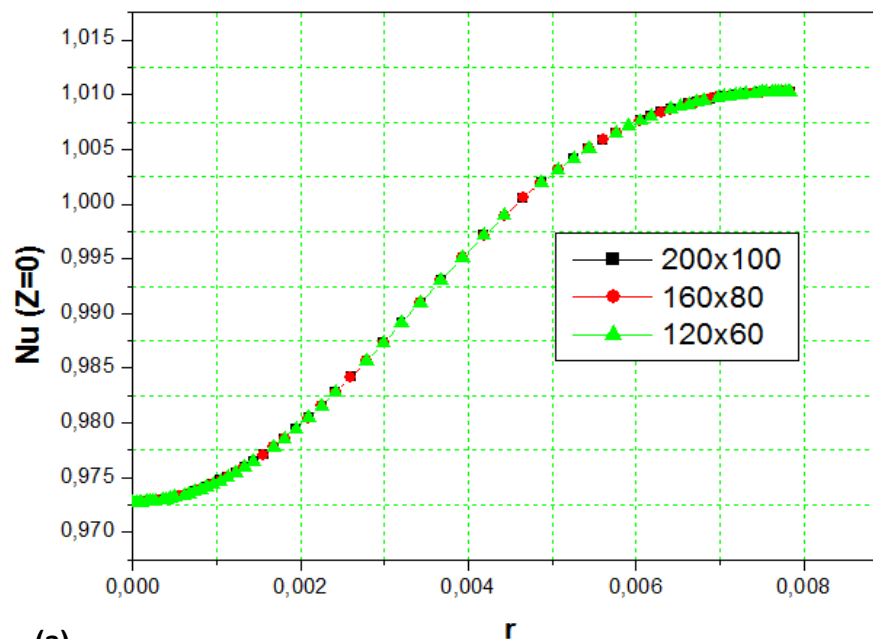
RESULTATS ET DISCUSSION

Nous nous intéressons dans ce chapitre aux présentations et discussion des résultats obtenus en simulant numériquement l'écoulement tournant confiné dans la cavité cylindrique, de convection mixte sans et avec présence de champ magnétique, dont l'importance dans les applications industrielles a été présentée au chapitre premier. Les résultats figurant dans ce qui suit, sont tous obtenus pour un rapport d'aspect $\gamma=2$ et $Pr=0.01$ (c'est le cas du silicium fondu), et sont visualisés graphiquement sous plusieurs formes appropriées pour chaque paramètre (des lignes de courant, iso-valeurs des vitesses, des isothermes, potentiel et courant électriques, ...etc.). Ce chapitre se divise en deux parties:

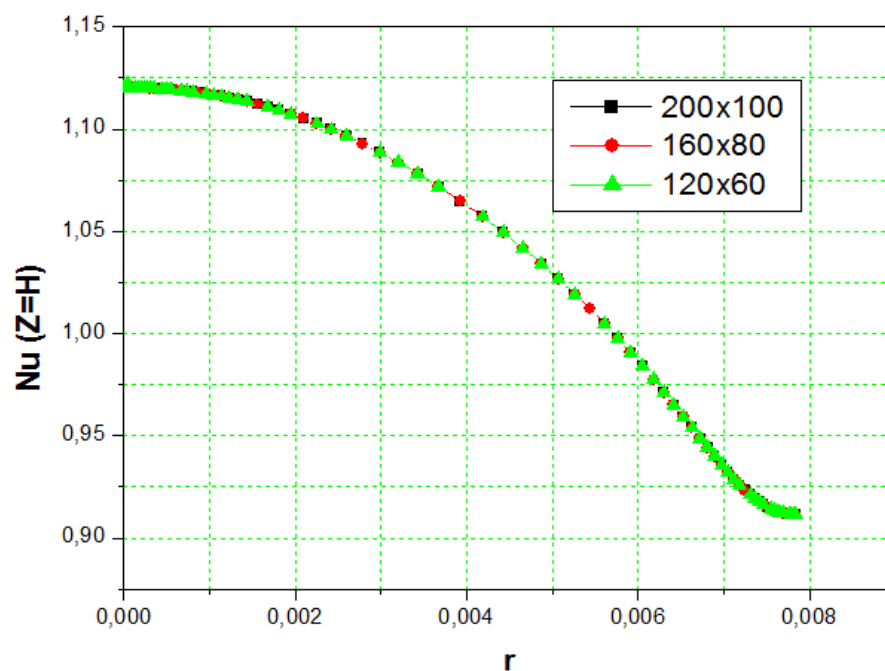
La première partie concerne la situation de la convection mixte en absence du champ magnétique, et la deuxième partie présente le comportement de l'écoulement avec l'application d'un champ magnétique axial de diverses intensités via la variation du nombre de Hartmann Ha . Toutefois, dans les deux parties l'ultime objectif est la détermination des nombres de Reynolds critiques Re_{cr} pour différentes valeurs du nombre de Richardson Ri , et cela pour la même configuration décrite au chapitre II. En essayant de mettre en évidence l'effet d'un champ magnétique sur la stabilité hydrodynamique et thermique en régime transitoire pour ce type d'écoulement, dont l'importance industrielle est explicitée au chapitre premier.

Au commencement, on examinera l'effet du maillage sur de la solution numérique, et déduire la qualité de l'approximation, puis on validera le code utilisé dans les calculs en comparant les résultats que produisait avec d'autres données expérimentales et numériques trouvées dans la littérature.

IV-1- Effet du maillage



(a)



(b)

Figure IV.1 : Comparaison des valeurs des nombres de Nusselt locaux pour différentes densités de maillage, (a) disque inférieur (b) disque supérieur tournant. Pour le cas : $Pr=0.01$, $\gamma=2$, $Re=800$, $Ri=1.0$, $Ha=0$.

D'après les courbes montrées sur la figure (IV.1a et IV.1b) on peut constater que la solution numérique est indépendante des maillages testés dans cette étude. Donc on peut prendre la grille de maillage convenable selon le seul critère qui est le temps des calculs (à savoir 120×60).

IV-2- Validation du code de calcul

IV-2-1- Comparaison aux données expérimentales :

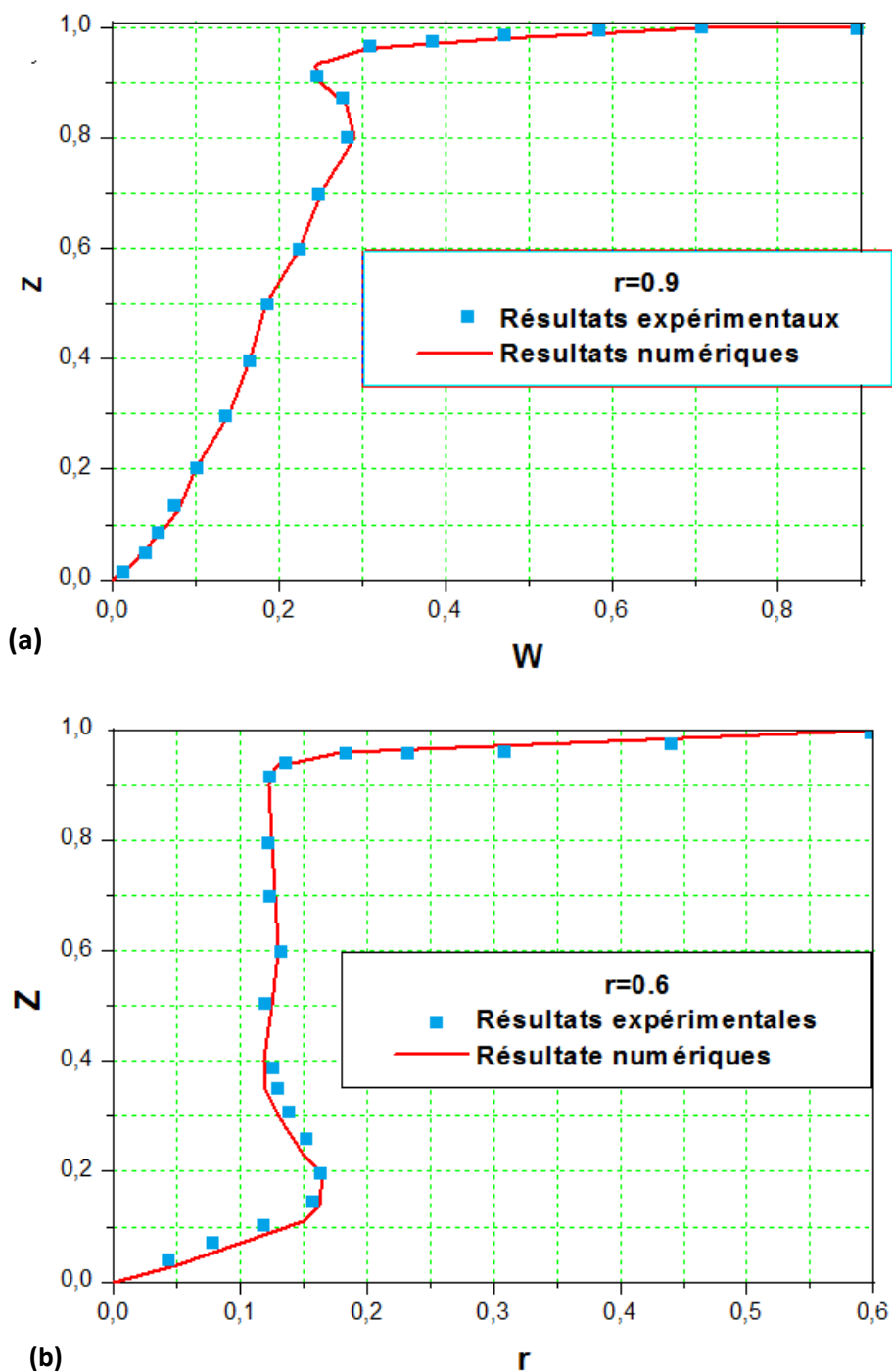


Figure IV.2: Distribution axiale de la vitesse azimutale à :(a) $r = 0.90$ (b) $r = 0.60$. Comparaison avec des données expérimentales (Michelson [23]) pour le cas $Re=1800$, $\gamma=1$.

La figure IV.2 (a et b) met en évidence le bon accord entre les résultats numériques et ceux expérimentaux obtenues par Michelson [23].

IV-2-2- Comparaison aux résultats numériques :

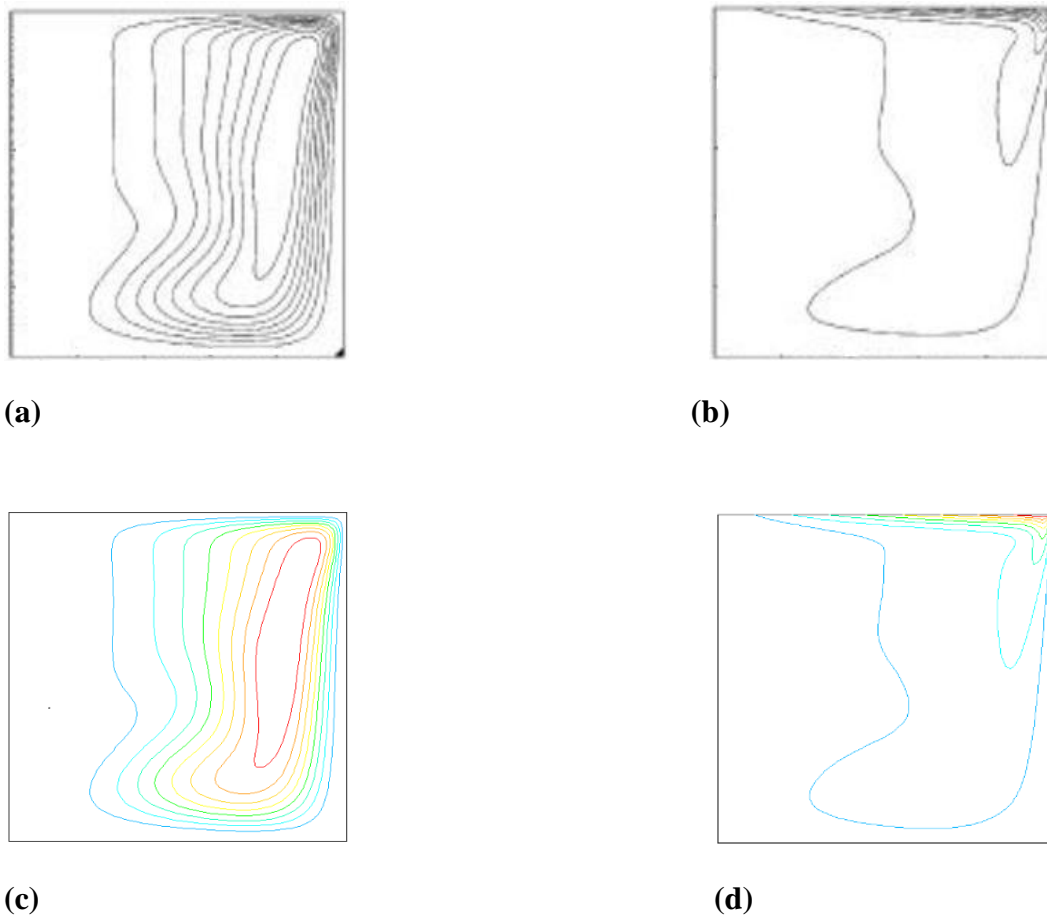


Figure IV.3: Comparaison des mêmes entités: (c) Fonction du courant, (d) vorticité résultant de notre calcul numérique avec les résultats de Iwatsu [24] (a) Fonction du courant, (b) vorticité. Ici $Pr = 1.0$, $Re = 3000$, $Ri = 0$, et $\gamma = 1.0$.

Du même la comparaison qualitative des résultats numériques obtenues par Iwatsu [24] face à nos résultats numériques issues des simulations, montre l'excellent accord entre eux selon la figure (IV.3 a-b). Ce qui nous confirme la consistance des résultats tirés et des calculs effectués.

IV-3- Présentations et discussion des résultats

Dans ce mémoire on a essayé de déterminer les instabilités physiques naissant au sein de l'écoulement de convection mixte d'un métal liquide qui est le silicium fondu ($Pr=0.01$) contenu dans une cavité cylindrique de rapport de forme $\gamma=2$ avec le disque au sommet en rotation à vitesse angulaire constante, cet écoulement est soumis à un champ magnétique vertical. Alors la détermination des instabilités physiques se réduit à la détermination d'un nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement sous-jacent, à partir duquel l'écoulement devient instable (ne présente pas des solutions unique quand les temps accroissent).

De point de vue des systèmes dynamiques, quand un système rentre dans l'instabilité il présente au début un caractère oscillatoire ou périodique, puis en raison du phénomène de bifurcation ce système deviendra apériodique, et en fin il rentre dans le chaos (ou la turbulence). Les nombres de Reynolds caractérisant les écoulements périodiques sont des nombres critiques.

Numériquement parlant, pour détecter les instabilités physiques on effectuera une succession de calculs numériques, en augmentant le nombre de Reynolds dans des intervalles prédéterminés. Pour les valeurs du nombre de Hartmann Ha comprises dans l'intervalle (0, 5, 10, 20, 30), et chaque rapport de Richardson Ri dans (0.1, 0.5, 1.0, 2.0), on va découvrir le nombre de Reynolds critique Re_{cr} marquant le début des instabilités

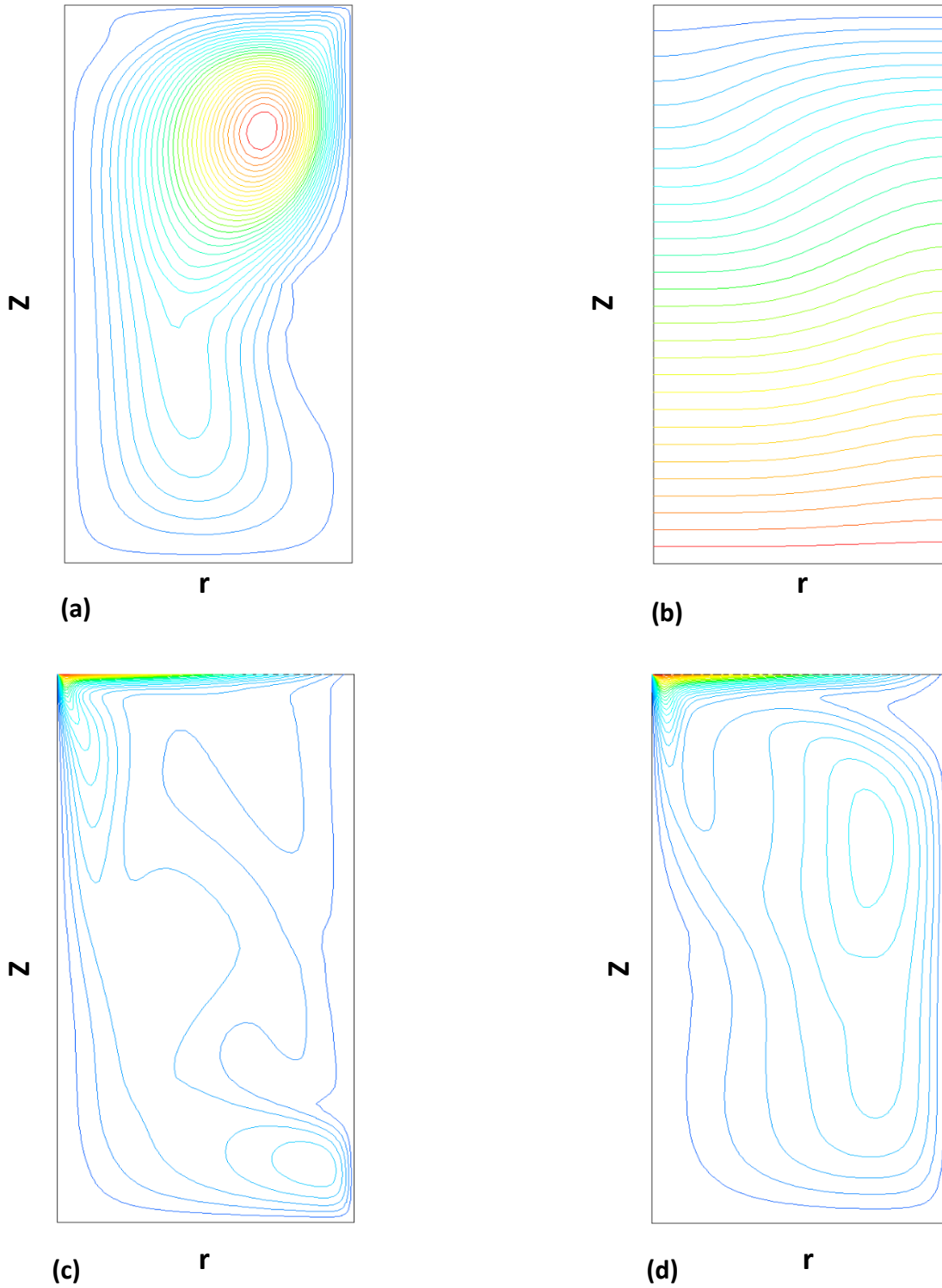


Figure IV.4: Contours de (a) lignes de courant ($\psi = Cste$) (b) température Θ (c) vitesse azimutale w (d) magnitude de la vitesse, pour le cas d'écoulement (régime permanent) où $Re_{cr}=2160$, $Ri=0.1$, $Ha=0$.

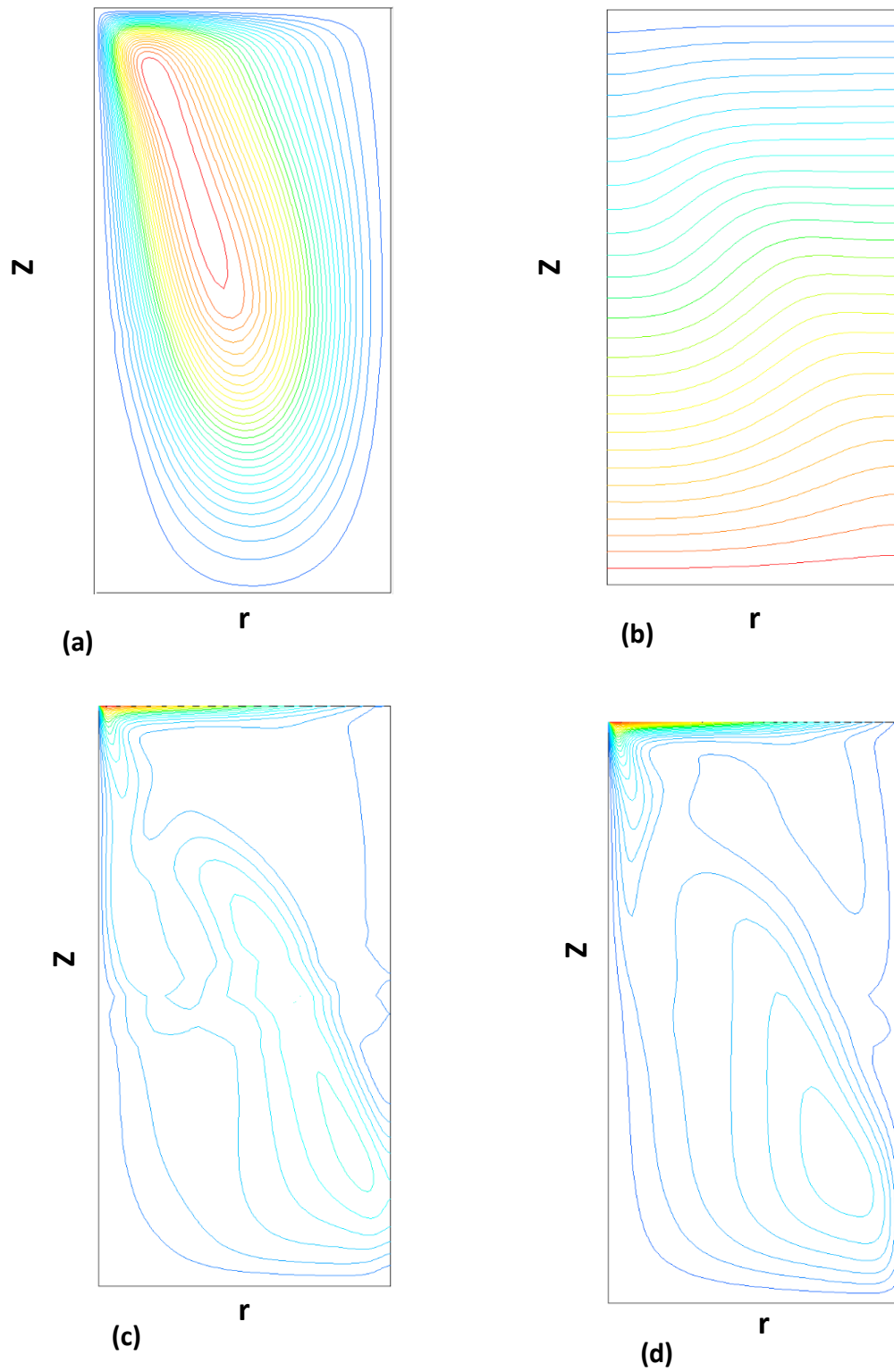


Figure IV.5: Contours de (a) lignes de courant ($\psi = Cste$) (b) température Θ (c) vitesse azimutale w (d) magnitude de la vitesse, pour le cas d'écoulement (régime permanent) où ; $Re_{cr} = 1240$, $Ri = 0.5$, $Ha = 5$.

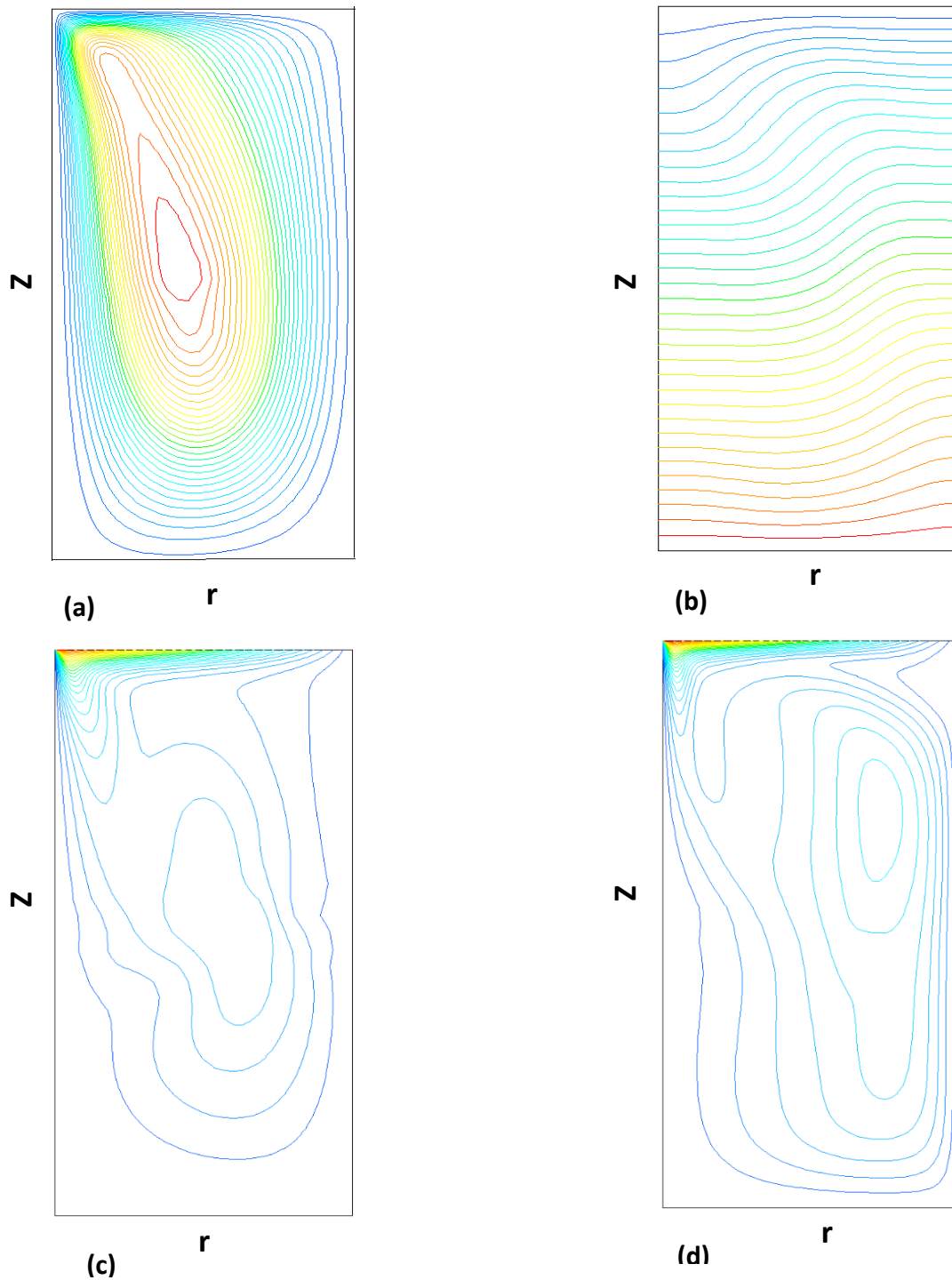


Figure IV.6: Contours de (a) lignes de courant ($\psi = Cste$) (b) température Θ (c) vitesse azimutale w (d) magnitude de la vitesse, pour le cas d'écoulement (régime permanent) où ; $Re_{cr} = 1150$, $Ri = 1.0$, $Ha = 30$.

Toutes ces courbes des iso-valeurs différentes (figures IV.4-6) mènent à la constatation que le champ de température se déforme suite à l'apparition des instabilités, en présentant des distorsions plus ou moins aigues selon l'intensité de la convection forcée et du champ magnétique appliqué.

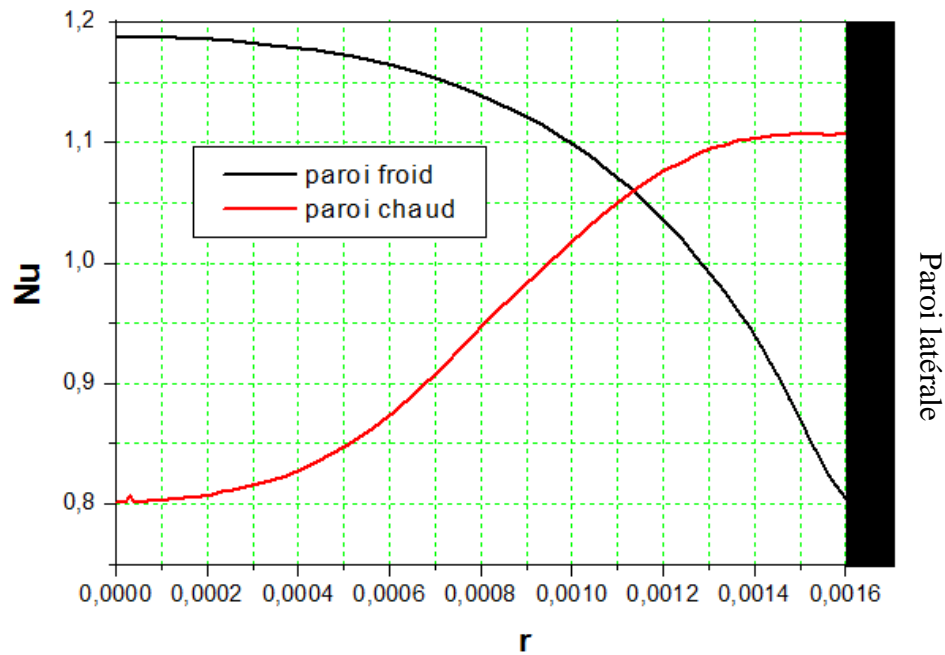


Figure IV.7: Nombres de Nusselt locaux aux disques d’extrémités du cylindre (froid et chaud) pour $Re = 2160$, $Ri = 0.1$ et $Ha=0$.

L’inspection des valeurs locales des nombres de Nusselt relatifs aux disques chaud ($Nu_h = \partial\theta/\partial z|_{z=0}$) et froid ($Nu_c = \partial\theta/\partial z|_{z=\gamma}$) respectivement, illustrées graphiquement sur la figure IV.7, conduit à la conclusion que les échanges convectifs sont les prédominants près de la paroi adiabatique latérale, tandis qu’ils s’affaiblissent en avançant vers l’axe de symétrie (du conteneur cylindrique), où domine la conduction, et vice-versa pour le disque supérieur en rotation.

IV-4- Récapitulations

Le tableau suivant résume les différents cas simulés de l’écoulement MHD en convection mixte pour le métal liquide considéré (le silicium fondu). Par conséquent, le diagramme de stabilité final visualise les différentes valeurs numériques obtenues en fonction des divers paramètres de l’écoulement.

Tableau IV.1 : Valeurs critiques des paramètres des écoulements oscillatoires

		Ri			
		0.1	0.5	1.0	2.0
Ha=0	Re_{cr}	2160	1107	318	142
Ha=5	Re_{cr}	2301	1240	398	197
Ha=10	Re_{cr}	2566	1475	473	239
Ha=20	Re_{cr}	2994	1861	715	301
Ha=30	Re_{cr}	3320	2300	1150	385

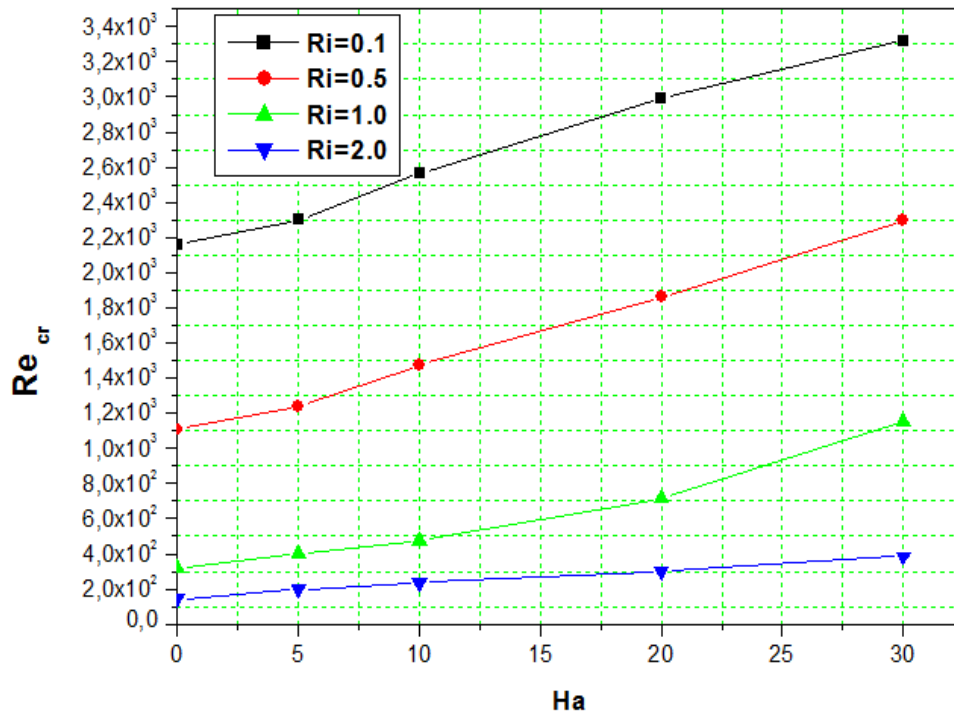


Figure IV.8 : Diagramme paramétrique de stabilité ($Re_{cr} - Ha$).

Le diagramme de stabilité de l'écoulement magnétohydrodynamique du silicium liquide met en évidence la dépendance entre le nombre de Reynolds critique Re_{cr} , le nombre de Hartmann Ha , et le nombre de Richardson Ri , pour les gammes de valeurs investiguées. Il est clair que l'augmentation de l'intensité du champ magnétique axial (nombre de Hartmann) cause un retardement de l'apparition des instabilités MHD dans l'écoulement considéré. Cette dépendance peut être corrélée par l'expression suivante, tirée d'après un ajustement des données numériques ;

$$Re_{cr} = 945.1(Ha^{1.201} + 89.65)(Ri^{-0.007643} - 0.9875) - 545.7 \quad (IV.1)$$

dont l'intervalle de validité est $0 \leq Ha \leq 30$, et $0.1 \leq Ri \leq 2.0$, avec un coefficient de corrélation (de détermination) $R^2 = 0.9646$.

D'après ce qui précède on peut conclure que le contrôle de l'écoulement du silicium fondu (liquide) par l'application d'un champ magnétique axial, pourra être une technique fiable pour les procédés industriels impliquant ce type d'écoulements, surtout pour la fabrication des matériaux semi-conducteurs de haute qualité.

CONCLUSION

CONCLUSION

Une étude numérique de la convection mixte dans une enceinte cylindrique remplie d'un métal liquide qui le silicium ($Pr=0.01$), soumise à un champ magnétique orienté verticalement, a été faite. Le code commercial ANSYS FLUENT et la méthode des volumes finis a été utilisée pour résoudre numériquement les équations de transports gouvernants le phénomène étudié.

Dans le but de donner plus de confiance aux résultats produits par le modèle adopté, une validation des celui-ci a été faite, par comparaisons de ces résultats avec des mesures expérimentales et des données numériques présentes dans la littérature. De même, un excellent accord est apprécié entre les mesures expérimentales et numériques et les résultats des calculs. Les résultats obtenus pour le cas d'écoulement stable ont montré la domination du régime conductif du transfert de chaleur.

Nos simulations numériques ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Hartmann ($Ha = 0, 5, 10, 20$ et 30) et différentes valeurs du nombre de Richardson ($Ri = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$), afin de voir leurs effets sur la valeur du nombre de Reynolds critique, Re_{cr} .

Les résultats obtenus montrent qu'en absence du champ magnétique ($Ha = 0$), les instabilités oscillatoires apparaissent pour les valeurs du nombre de Reynolds critiques ($Re_{cr} = 2160, 1107, 318$ et 142), pour ($Ri=0., 0.5, 1.0$ et 2.0) et l'écoulement rentre dans un régime multicellulaire oscillant. Toutefois, en présence du champ magnétique dans la direction axiale le fluide continue son écoulement stable jusqu'aux valeurs de nombre de Reynolds plus grandes que celles prévisibles d'avoir des instabilités oscillatoires, bien que l'application d'un champ magnétique provoque un changement remarquable de la structure du champ d'écoulement et du transfert de chaleur, et l'écoulement présente une zone stationnaire de recirculation située sous le disque tournant le long de l'axe du cylindre. Cette zone s'élargit avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique. Les résultats obtenus dans cette étude mettent en évidence la fiabilité de la technique de stabiliser les écoulements industriels de convection mixte, par l'application d'un champ magnétique verticale. En outre, ces

résultats permettront aux expérimentateurs et industriels de connaître les régimes oscillatoires naissant durant les écoulements des métaux liquides, afin d'améliorer la qualité des semi-conducteurs obtenus.

Il est intéressant d'étudier les instabilités de l'écoulement en configuration tridimensionnelle, en utilisant la théorie de la stabilité linéaire et déterminer les modes propres des perturbations avec une discrétisation d'ordre 2 des termes transitoires et des termes convectifs selon le schéma numérique Upwind de second ordre [25]. Ceci est un point à recommander dans les futurs travaux.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1]- Site web disponible à : <https://fr.wikipedia.org/wiki/Convection> , dernier accès à 12/03/2017.
- [2]- Site web disponible à : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Procédé de Bridgman Stockbarger](https://fr.wikipedia.org/wiki/Procédé_de_Bridgman_Stockbarger), dernier accès à 12/03/2017.
- [3]- Site web disponible a : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Procédé de Czochralski](https://fr.wikipedia.org/wiki/Procédé_de_Czochralski), dernier accès à 12/03/2017.
- [4]-Site web disponible a:[https://fr.wikipedia.org/wiki/Dépôt chimique en phase_vapeur](https://fr.wikipedia.org/wiki/Dépôt_chimique_en_phase_vapeur), dernier accès à 12/03/2017.
- [5]- Site web disponible à :[https://fr.wikipedia.org/wiki/Magnétohydrodynamique #Observations et Applications](https://fr.wikipedia.org/wiki/Magnétohydrodynamique#Observations_et_Applications) , dernier accès à 22/02/2017.
- [6]- R. Bessaih, Ph. Marty et M. Kadja, "Numerical study of disk driven rotating MHD flow of a liquid metal in a cylindrical enclosure", *ActaMechanica*, vol. 135, pp. 153-167,1999.
- [7]-Ph.Marty, L.M.Witkowski, P.Trombetta et T.Tomasino, "OnTheStabilityof RotatingMHDFlows", *TransferPhenomenainMagnetohydrodynamicandElectroconductingFlows*,pp.327-343,1999.
- [8]- A.Juel, T.Mullin, H.BenHadid et D.Henry. "Magnetohydrodynamicconvection in molten gallium" ,*Journal of Fluid Mechanics*. Vol. 378, pp.97-118,1999.
- [9]- A. Juel, T. Mullin, H. Ben Hadidet D. Henry, "Three-dimensional free convection in molten gallium", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 436, pp. 267-281,2001.
- [10]-R.Bessaih, "Etude de la convection naturelle laminaire et turbulente dans des enceintes", Thèse de doctorat d'état, Université Mentouri–Constantine, 2000.
- [11]-R.Bessaih, M.Kadja,K. Eckert et Ph.Marty, "Numerical and analytical study of rotatingflowinanenclosedcylinderunderanaxialmagneticfield",*ActaMechanica*,vol.164,pp.175-188,2003.
- [12]- B. Hof, A. Jueland T. Mullin, "Magnetohydrodynamic damping of convective flows in molten gallium", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 482, pp. 163–179,2003.

- [13]-S. Yesilyurt, S. Motakef, R.Grugel, et K.Mazuruk, “The effect of the traveling magnetic field (TMF) on the buoyancy-induced convection in the vertical Bridgman growth of semiconductors,” *Journal of Crystal Growth*, vol.263, pp.80-89,2004.
- [14]-Yu. M. Gelfgat et A.Yu. Gelfgat, “experimental and numerical study of rotating magneticfield driven flowin cylindrical enclosures with different aspect ratios”, *Magnetohydrodynamics*, vol. 40, No. 2, pp. 147–160,2004.
- [15]-A.Kharicha,A.Alemaný et D.Bornas,“Influenceofthemagneticfieldandthe conductanceratioonthemasstransferrotatingliddrivenflow”,*InternationalJournalof HeatandMassTransfer*,vol.47,pp.1997–2014,2004.
- [16]-R. Bessaïh, A. Boukhari et Ph.Marty" Magnetohydrodynamics stability of a rotating flow with heat transfer" *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol 36, pp. 893-901,2009.
- [17]-S.C. Kakarantzas et I.E. Sarris, A.P. Grecos et N.S. Vlachos "Magnetohydrodynamic natural convection in a vertical cylindrical cavity with sinusoidal upper wall temperature", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 52, pp.250–259,2009
- [18]- J. H. Lienhard IV and J. H. Lienhard V, *A Heat Transfer Textbook*, 3rd Ed., Cambridge, MA: Phlogiston Press, c2005.
- [19]- R. Bessaïh, Ph. Marty and M. Kadja, "Hydrodynamics and heat transfer in disk driven rotating flow under axial magnetic field", *International Journal of Transport Phenomena*, vol. 5, pp. 259-278, 2003.
- [20]- S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, 1980.
- [21]- A. Kharicha, A. Alemaný, and D. Bornas, "Hydrodynamic study of a rotating MHD flow in a cylindrical cavity by ultrasound Doppler shift method", *International Journal of Engineering Science*, vol. 43, pp. 589–615, 2005.
- [22] - Fluent Inc., *Fluent 6.2 User's Guide*. 2006.
- [23]-J. A. Michelson,"Modeling of laminar incompressible rotating fluid flow", AFM 86-05, Ph. D. Dissertation. Dept of Fluid Mechanics, Tech. Univ. of Denmark, 1986.
- [24]- R. Iwatsu,"Flow pattern and heat transfer of swirling flows in cylindrical container with rotating top and stable temperature gradient", *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol. 47, pp. 2755–2767, 2004.
- [25] - F. Sotiropoulos and Y. Ventikos,"The three-dimensional structure of confined swirling flows with vortex breakdown", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 426, pp. 155-175, 2001.

دراسة عدم الاستقرار الهيدروديناميكا مغناطيسي في السريانات الدوارة

ملخص

تم في هذا العمل دراسة سريان مع الحمل الحراري المزدوج للمعادن السائلة مثل السيليكون ($P=0.01$)، والمتضمنة في حاويات أسطوانية ذات نسبة الارتفاع إلى نصف القطر مساوية لـ 2 من أجل قيم عدد رينولدس الحرج. ($Re_{cr} = 2301, 1240, 398, 197$) الموافقة على التوالي لقيم من عدد ريتشاردسون، مع وجود وعدم وجود مجال مغناطيسي. تم استعمال طريقة الحجم المنتهية لحل معادلات: الاستمرارية، كمية الحركة (نافي-ستوكس)، الطاقة و الكمون الكهربائي النتائج العددية المتحصل عليها مع عدم وجود المجال المغناطيسي تبين ظهور الاهتزازات اللاإستقرارية من أجل قيم عدد رينولدس الحرج الموافقة على التوالي لقيم من عدد ريتشاردسون ($Ri = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$) غيرانه في وجود المجال المغناطيسي العمودي فان السائل يستمر في سريانه حتى قيم من عدد رينولدس أكبر من تلك المتوقعة كغير مستقرة. مخططات توازن وسيطية تم إنشاؤها انطلاقاً من النتائج العددية في هذا العمل، هذه المخططات تبين العلاقة بين عدد رينولدس الحرج والتزايد في قيم عدد هارتمان من أجل عدة قيم لعدد ريتشاردسون. ينتج أن استعمال الحقل المغناطيسي لجعل السريان مستقر في حالة أنصاف النواقل يعتبر حلاً فعالاً.

كلمات مفتاحية: حمل حراري مزدوج، حاويات أسطوانية، مجال مغناطيسي، عدم استقرار.

Instabilité magnétohydrodynamique des écoulements axisymétriques avec swirl

RÉSUMÉ

Dans le présent travail, une étude de l'écoulement de convection mixte de métal liquide (Silicium fondu, $Pr=0.01$) confiné dans une enceinte cylindrique ayant un rapport de forme égal à 2, avec et sans champs magnétique, a été considérée. La méthode des volumes finis a été utilisée afin de résoudre les équations de continuité, de quantité de mouvement (Navier-Stokes), d'énergie et de potentiel électrique. En absence du champ magnétique, les résultats numériques obtenus montrent l'apparition des instabilités oscillatoires pour les valeurs du nombre de Reynolds critiques ($Re_{cr}= 2301, 1240, 398$ et 197) correspondant respectivement aux valeurs du nombre de Richardson ($Ri=0.1, 0.5, 1.0$ et 2.0). Toutefois, en présence du champ magnétique vertical, le fluide continue son écoulement stable jusqu'aux valeurs de nombre de Reynolds plus grandes que celles prévisibles d'avoir des instabilités oscillatoires. Des diagrammes de stabilité ont été établis d'après les résultats numériques de cette investigation. Ces diagrammes mettent en évidence la dépendance du nombre de Reynolds critique et la fréquence critique d'oscillations avec l'augmentation du nombre de Hartmann pour différentes valeurs du nombre de Richardson. En conclusion, la technique de stabilisation d'écoulement de convection mixte des fluides à faible nombre de Prandtl (semi-conducteurs) par l'application d'un champ magnétique extérieur, est pratiquement fiable.

Mots clés : Convection mixte, Enceinte cylindrique, Champ magnétique, Instabilité.

Magnetohydrodynamic Instability of Axisymmetric Flows with Swirl

ABSTRACT

In the present work, a study of the flow of mixed liquid metal convection (molten silicon, $Pr = 0.01$) confined in a cylindrical enclosure with an aspect ratio of 2, with and without magnetic fields was considered. The finite volume method was used to solve the equations of continuity, momentum (Navier-Stokes), energy and electrical potential. In the absence of the magnetic field, the numerical results obtained show the occurrence of oscillatory instabilities for the critical Reynolds number values ($Re_{cr} = 2301, 1240, 398$ and 197) corresponding respectively to the Richardson number values ($Ri = 0.1, 0.5, 1.0$ and 2.0). However, in the presence of the vertical magnetic field, the fluid continues its stable flow up to Reynolds number values larger than those predicted to have oscillatory instabilities. Stability diagrams were derived from the numerical results of this investigation. These diagrams show the dependence of the critical Reynolds number and the critical frequency of oscillations with the increase of the Hartmann number for different values of the Richardson number. In conclusion, the technique of stabilizing mixed convection flow of molten silicon (for semiconductors manufacturing) by the application of an external magnetic field is practically reliable.

Keywords: Mixed convection, Cylindrical enclosure, Magnetic field, Instability.

NOMENCLATURE

B Champ magnétique, *Tesla*

F_L Force de Lorentz adimensionnelle [-]

g Accélération de la pesanteur, m^2s^{-1}

H Hauteur du cylindre, m

$Ha = BR \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}$ Nombre de Hartmann [-]

J Densité du courant électrique, $A.m^{-2}$

$N = \frac{\sigma B^2}{\sigma\Omega}$ Paramètre d'interaction [-]

Nu Nombre de Nusselt local [-]

\overline{Nu} Nombre de Nusselt moyen [-]

P Pression adimensionnelle [-]

$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$ Nombre de Prandtl [-]

R Rayon du cylindre, m

r, z Coordonnées méridiennes adimensionnelles [-]

$Re = \frac{\Omega R^2}{\nu}$ Nombre de Reynolds [-]

$Ri = \frac{\beta g (T_h - T_c)}{\Omega^2 R}$ Nombre de Richardson [-]

R_m Nombre de Reynolds magnétique [-]

t Temps dimensionnel, s

T Température, K

u, v, w Composantes de la vitesse adimensionnelles [-]

Symboles grecs

α Diffusivité thermique, $m^2 s^{-1}$

β Coefficient d'expansion thermique, K^{-1}

γ Rapport d'aspect [-]

$\Delta r, \Delta z$ Incrément de grille dans les directions radiale et axiale [-]

ν Viscosité cinématique, $m^2 s^{-1}$

λ Conductivité thermique, $W . m^{-1} K^{-1}$

θ Température adimensionnelle [-]

ρ_0 Masse volumique, $kg . m^{-3}$

Φ Potentiel électrique adimensionnel [-]

ψ Fonction de courant de Stokes [-]

σ Conductivité électrique, $\Omega . m^{-1}$

Ω Vitesse angulaire, $rad . s^{-1}$

Indices et exposants

cr Valeur critique

\sim Grandeur dimensionnelle

c Froide

h Chaude

r, z, θ Directions radiale, axiale et azimutale

Abréviations utilisées

MHD Magnétohydrodynamique.

EM Electromagnétique.

RMF Champ magnétique tournant (Rotating Magnetic field).

VF Volume fini.

VC Volume de contrôle.