

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE ECHAHID HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTE DE LA SCIENCES EXACTES

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales et appliquées



Mémoire de fin d'étude

Thème

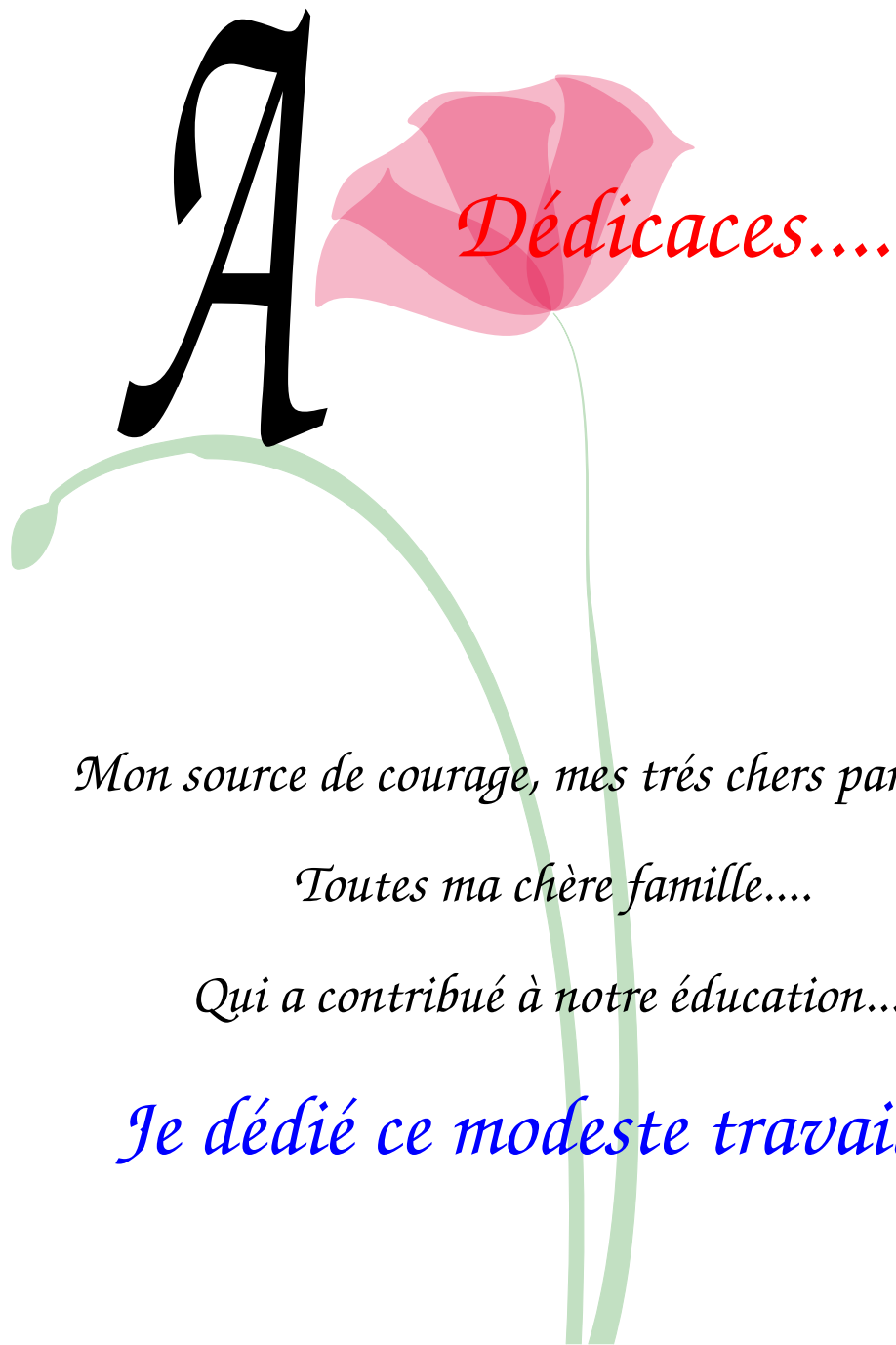
Analyse d'un problème de contact avec adhésion et endommagement en matériaux thermo-électro-viscoélastiques

Présenté par : Saadi Narjess

Devant le jury :

Ben Ali Brahim	MCA	Président	Univ. d'El Oued
Tedjani Hadj Ammar	Prof	Rapporteur	Univ. d'El Oued
Said Amer Meziene	MCB	Examineur	Univ. d'El Oued

2021-2022



Mon source de courage, mes très chers parents....

Toutes ma chère famille....

Qui a contribué à notre éducation....

Je dédié ce modeste travail...

Marje

Remerciements ...

Je remercie ALLAH tout-Puissant de m'avoir permis de mener à bien ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements et ma grande gratitude au l'encadreur de mémoire: Pr.Tedjani.H.Ammar pour sa généreuse acceptation de la supervision de ce travail, et pour les efforts, la direction, les conseils et les conseils qu'il a fournis.

J'adresse également mes sincères remerciements et ma reconnaissance aux membres du comité de discussion, que j'aurai l'honneur d'échanger et d'évaluer pour ce travail. Enfin, à tous ceux qui ont contribué à la réalisation de ce travail, de près ou de loin, je le remercie et l'apprécie grandement.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	ii
Notations générales	v
1 Préliminaires	1
1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact	1
1.1.1 Cadre physique	1
1.1.2 Modèle mathématique	3
1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique	4
1.1.4 Conditions aux limites	6
1.2 Rappels d'analyse	11
1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert	11
1.2.2 Espaces de Sobolev	12
1.2.3 Espaces fonctionnels	13
1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert	17
1.2.5 Lemme de Gronwall	21
1.2.6 Les inégalités de Hölder et de Young	22
2 Analyse d'un problème de contact avec adhésion et endommagement en matériaux thermo-électro-viscoélastiques	23
2.1 Formulation du problème	23
2.2 Formulation variationnelle	29
2.3 Existence et unicité de la solution	38
Conclusion générale	53
Bibliography	54

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le phénomène piézoélectrique représente le couplage entre le comportement mécanique et électrique d'une classe de matériaux, appelés matériaux piézoélectriques. Les matériaux piézoélectriques sont largement utilisés comme interrupteurs et en fait dans de nombreux systèmes d'ingénierie en radioélectronique, électroacoustique et équipements de mesure. La piézoélectricité a été découverte par les frères Curie en 1880 (Jacques et Pierre Curie). Les matériaux piézoélectriques sont généralement physiquement résistants et chimiquement inertes, et ils sont relativement peu coûteux à fabriquer. La composition, la forme et la dimension des éléments céramiques piézoélectriques peuvent être adaptées pour répondre aux exigences d'un objectif spécifique.

Les céramiques fabriquées à partir de formulations de zirconate de plomb/titanate de plomb présentent une plus grande sensibilité et des températures de fonctionnement plus élevées, par rapport aux céramiques d'autres compositions et les matériaux PZT-4 sont les céramiques piézoélectriques les plus largement utilisées. Le couplage entre les champs thermiques/piézoélectriques dans les matériaux piézoélectriques fournit un mécanisme pour détecter les perturbations thermomécaniques à partir de mesures de potentiels électriques induits et pour modifier les réponses structurelles via des champs électriques appliqués.

L'une des applications du matériau thermo-piézoélectrique est de détecter les réponses d'une structure en mesurant la charge électrique, en détectant ou en réduisant les réponses excessives en appliquant des forces électriques supplémentaires ou des forces thermiques d'actionnement. Si la détection et l'actionnement peuvent être intégrés intelligemment, une structure dite intelligente peut être conçue. Les matériaux piézoélectriques sont également souvent utilisés comme résonateurs dont les fréquences doivent être contrôlées avec précision. Du couplage entre les effets thermo-piézoélectrique et pyroélectrique, il est important de nuancer l'effet de la dissipation thermique sur la propagation des ondes à basses et hautes fréquences.

La théorie thermo-piézoélectrique a été proposée pour la première fois par Mindlin [17], plus tard il a dérivé les équations gouvernantes d'une plaque thermo-piézoélectrique [18].

Les lois physiques des matériaux thermo-piézoélectriques ont été discutées par [21]. Chandrasekariah [3] a présenté la théorie généralisée de la thermo-piézoélectricité en prenant en compte la vitesse finie de propagation des perturbations thermiques. Yang et Batra [31] ont étudié l'effet de la conduction thermique sur le décalage des fréquences d'un corps piézoélectrique linéaire vibrant librement à l'aide de méthodes de perturbation.

Sharma et Pal [26] ont discuté de la propagation des ondes de Lamb dans une plaque thermo-piézoélectrique transversalement isotrope. Sharma et al. [27] ont étudié l'analyse des vibrations libres d'un panneau cylindrique thermopiézoélectrique homogène, transversalement isotrope, basé sur un thermopiézoélectrique tridimensionnel. Sharma et Walia [28] ont présenté la propagation d'ondes à crête droites et circulaires dans des matériaux thermo-piézoélectriques généralisés.

Les dommages sont un sujet extrêmement important en ingénierie, car ils affectent directement la durée de vie utile de la structure ou du composant conçu. Il existe une très grande littérature technique à ce sujet. Des modèles prenant en compte l'influence de l'endommagement interne du matériau sur le processus de contact ont été étudiés mathématiquement. Les modèles généraux de dommages ont été dérivés dans [9, 10] du principe de puissance virtuelle. L'analyse mathématique des problèmes unidimensionnels peut être trouvée dans [11]. Le cas tridimensionnel a été étudié dans [13]. Dans tous ces articles l'endommagement du matériau est décrit avec une fonction d'endommagement ξ^ℓ , limité à des valeurs comprises entre zéro et un. Lorsque $\xi^\ell = 1$, il n'y a pas de dommage dans le matériau, lorsque $\xi^\ell = 0$, le matériau est complètement endommagé, lorsque $0 < \xi^\ell < 1$ il y a un endommagement partiel et le système a une capacité de charge réduite.

L'endommagement peut être initié et évoluer dans les deux processus de déformation élastique. En particulier, les dommages dans l'état de déformation élastique sont appelés dommages élastiques. Dans cette mémoire, nous utilisons les dommages causés par les déformations élastiques pour des raisons mécaniques et mathématiques. Mécaniquement, nous utilisons des dommages élastiques car les matériaux fragiles sont plus sensibles aux dommages.

Les problèmes de contact dynamique font l'objet de nombreux articles, par ex. [5, 14]. Les problèmes de contact avec dommages ont été étudiés dans [11, 30]. Un modèle d'endommagement couplé à la température étudié dans [16]. Cependant, le problème mathématique modélisant l'évolution quasistatique de l'endommagement dans les matériaux thermo-viscoplastiques a été étudié dans [15], l'évolution dynamique de l'endommagement dans les matériaux élastiques-thermo-viscoplastiques a été étudiée dans [12].

Le contact adhésif entre des corps déformables, lorsqu'une colle est ajoutée pour empêcher le mouvement relatif des surfaces, a récemment fait l'objet d'une attention accrue dans la littérature mathématique. L'analyse des modèles de contact adhésif peut être trouvée dans [6, 19] et récemment dans les monographies [20, 22]. Dans tous ces articles

le contact adhésif est décrit avec une fonction ς , il décrit la densité fractionnaire ponctuelle d'adhérence des liaisons actives sur la surface de contact, et parfois appelée intensité d'adhérence.

Suivant [7, 8], le champ de liaison satisfait la restriction $0 \leq \varsigma \leq 1$, quand $\varsigma = 1$ en un point de la surface de contact, l'adhérence est complète et toutes les liaisons sont actives, quand $\varsigma = 0$ toutes les liaisons sont inactives, sectionnées, et il n'y a pas d'adhérence, quand $0 < \varsigma < 1$ l'adhérence est partielle et seule une fraction ς des liaisons est active. La nouveauté de ce travail réside dans l'analyse d'un système qui contient des couplages forts dans les conditions son limites multivaluées : à la fois la condition de contact de compliance normale et la condition de contact tangentiel dépendent de l'adhérence.

Dans cette mémoire, nous considérons un problème mathématique de contact entre deux corps thermo-piézoélectrics. Le contact est modélisé avec une compliance normale et adhérence dans des matériaux définies par une loi de comportement thermo-électro-viscoélastique avec endommagement.

Le mémoire comporte deux chapitres et est structurés de la manière suivante :

- **Premier chapitre** : nous présentons le cadre physique et décrivons le problème mécanique, et nous introduisons quelques notations et résultats, quelques théorèmes qui seront d'une grande utilité pour les démonstrations.
- **Deuxième chapitre** : nous écrivons une formulation du problème à étudier, listons les hypothèses sur ses données, dérivez la formulation variationnelle du modèle et nous énonçons notre principal résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible.

NOTATIONS GÉNÉRALES

Notations diverses

\mathbb{N}	Ensemble des entiers naturels,
\mathbb{R}	l'ensemble des nombres réels,
\mathbb{S}^d	l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$,
c	Constante réelle strictement positive,
i.e	C'est à dire,
$\partial_i \psi$	La dérivée partielle de ψ par rapport à la i^{eme} composante $x : \partial_i \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$,
$\nabla \psi$	Gradient de l'application $\psi : \nabla \psi = (\partial_1 \psi, \dots, \partial_d \psi)$,
$\partial \psi$	Sous-différentiel de l'application ψ ,
$\text{Div} \psi$	Divergence de l'application, $\psi : \text{Div} \psi = (\partial_1 \psi + \dots + \partial_d \psi)$,
\cdot	Produit scalaire sur \mathbb{R}^d ou \mathbb{S}^d ,
$ \cdot $	La norme euclidienne sur \mathbb{R}^d ou \mathbb{S}^d ,
(x, y)	Paire d'un espace produit $X \times Y$,
$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de X,
$\ \cdot\ _X$	la norme de X,
$L(X, Y)$	L'espace des applications linéaires et continues de X dans Y,
$\langle \cdot \rangle_{X' \times X}$	Le produit dual entre X' et X,
p.p.	Presque partout,
Ω^ℓ	Ouvert de \mathbb{R}^d , parfois domaine L'hertzien,
$\overline{\Omega^\ell}$	l'adhérence de Ω^ℓ ,
Γ^ℓ	La frontière de $\Omega^\ell : \Gamma^\ell = \partial \Omega^\ell$,
Γ_i^ℓ	Les parties de frontière $\Gamma^\ell, (i = 1, 2, 3)$,
$mes \Gamma_i^\ell$	Mesure de Lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_i^ℓ ,
$d\Gamma_i^\ell$	Mesure superficielle sur Γ_i^ℓ ,

ν^ℓ	la normale unitaire sortante à Γ^ℓ ,
v_ν^ℓ, v_τ^ℓ	les composantes normale et tangentielle du champ vectoriel v^ℓ défini sur $\overline{\Omega^\ell}$,
$C^1(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur Ω^ℓ ,
$\mathcal{D}(\Omega^\ell)$	L'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact,
\mathcal{D}^ℓ	L'espace $\left\{ \phi^\ell = (\phi_i^\ell)_{1 \leq i \leq d}; \phi_i^\ell \in \mathcal{D}(\Omega^\ell); \forall i = 1, \dots, d \right\} = (\mathcal{D}(\Omega^\ell))^d$,
$L^2(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que $\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx < +\infty$,
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega^\ell)}$	La norme de $L^2(\Omega^\ell)$ définie par $\ u^\ell\ _{L^2(\Omega^\ell)} = \left(\int_{\Omega^\ell} u^\ell ^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$,
$L^\infty(\Omega^\ell)$	Espace des fonctions u^ℓ mesurables sur Ω^ℓ telles que, $\exists c > 0 : u^\ell < c$, p.p., sur Ω^ℓ ,
H^ℓ	l'espace $L^2(\Omega^\ell)^d$,
H_1^ℓ	l'espace $H^1(\Omega^\ell)^d$,
\mathcal{H}^ℓ	l'espace $L^2(\Omega^\ell)^{d \times d}$,
\mathcal{H}_1^ℓ	l'espace $\{\tau^\ell = (\tau_{ij}^\ell) \in \mathcal{H}; \operatorname{div} \tau^\ell \in H^\ell\}$,
$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace de Sobolev d'ordre $\frac{1}{2}$ sur Γ^ℓ ,
$H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$	L'espace dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$,
$H^1(\Omega^\ell)$	L'espace de Sobolev d'ordre 1 sur Ω^ℓ ,
H_{Γ^ℓ}	L'espace $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell) \right)^d$,
H'_{Γ^ℓ}	l'espace dual de H_{Γ^ℓ} .
$\gamma : H_1 \rightarrow H_\Gamma$	l'application trace pour les fonctions vectorielles,
W^ℓ	l'espace $\{\psi^\ell \in E_1^\ell \mid \psi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\}$,
\mathcal{W}^ℓ	l'espace $\{D^\ell = (D_i^\ell) \mid D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell), D_{i,i}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\}$,
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}$	Le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$,
$\ \cdot\ _{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}$	La norme de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)$ définie par $\ \psi\ _{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} = \sup_{\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)} \frac{\langle \psi, \phi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}}{\ \phi\ _{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)}}$

Si de plus $[0, T]$ un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C(0, T; H)$	L'espace des fonctions continues de $[0, T]$ dans H ,
$C^1(0, T; H)$	L'espace des fonctions continûment dérivables sur $[0, T]$ dans H ,
$L^p(0, T; H)$	L'espace des fonctions mesurables sur $[0, T]$ dans H ,
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; H)}$	La norme de $L^p(0, T; H)$,
$W^{k,p}(0, T; H)$	L'espace de Sobolev de paramètres k et p ,
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; H)}$	La norme de $W^{k,p}(0, T; H)$,

Notations élasticité

Ω^1, Ω^2	Les domaines occupés par les corps déformables,
Γ^ℓ	La frontière de $\Omega^\ell : \Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$,
$\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3$	Les parties de $\Gamma^\ell = \overline{\Gamma_1^\ell \cup \Gamma_2^\ell \cup \Gamma_3}$,
$\Gamma_3^1 = \Gamma_3^2 = \Gamma_3$	L'interface de contact entre les corps Ω^1, Ω^2 ,
u^ℓ	Vecteurs des déplacements dans le domaine Ω^ℓ , on écrit u_i^ℓ les composantes du vecteur dans la base canonique,
σ^ℓ	Tenseur des contraintes correspondant au déplacement u^ℓ , on écrit σ_i^ℓ les composantes du tenseur dans la base canonique,
σ_ν^ℓ	normale des contraintes à la frontière du domaine : $\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell$,
σ_τ^ℓ	le composante tangentielle du champ tensoriel σ^ℓ ,
ζ^ℓ	Valeurs des potentiels électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
ς	Vecteurs d'adhésions sur la surface de contact Γ_3 ,
D^ℓ	Vecteurs des déplacements électriques dans le domaine Ω^ℓ ,
$\dot{u}^\ell, \ddot{u}^\ell$	Les dérivées première et seconde de u^ℓ par rapport au temps,
$\varepsilon(u^\ell)$	Tenseur linéarisé des déformations : $\varepsilon(u^\ell)_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j^\ell + \partial_j u_i^\ell)$,
$\sigma^\ell \cdot u^\ell$	Produit tensoriel (matriciel) de u^ℓ par $\sigma^\ell : (\sigma^\ell \cdot u^\ell)_i = \sigma_{ij}^\ell u_j^\ell$,
u_ν^ℓ	Composante normale du déplacement u^ℓ sur le bord du domaine : $u_\nu^\ell = u^\ell \cdot \nu^\ell$,
$u_\nu^\ell \nu^\ell$	Vecteur composante normale du déplacement $u^\ell : (u_\nu^\ell \cdot \nu^\ell)_i = u_\nu^\ell \cdot \nu_i^\ell$,
u_τ^ℓ	Vecteur composante tangentielle du déplacement $u^\ell : u_\tau^\ell = u^\ell - u_\nu^\ell \nu^\ell$.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, on commence par définir le cadre physique utilisés dans cette mémoire, il est destiné à rappeler l'équation de mouvement de Cauchy, à décrire les lois de comportement électro-élastiques, électro-viscoplastique et thermo-électro-viscoélastique. Par ailleurs, nous précisons dans ce section les conditions son limites de déplacement, de traction, ou de électriques, ensuite les conditions son limites de contact.

La second section est consacrée à des rappels l'analyse, nous commençons par présenter les espaces de Hilbert de plus à les espaces fonctionnels, on y introduit des espaces de type Sobolev associés à l'opérateur déformation et à l'opérateur divergence, et les principales notations utilisées. Ensuite nous passons en revue quelques résultats fondamentaux d'analyse non linéaire et particulièrement des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles, les équations d'évolution et les lemmes de Gronwall.

1.1 Formulation mathématique d'un problème de contact

Dans cette section, nous allons introduire suivante :

1.1.1 Cadre physique

Nous considérons deux corps matériels déformables qui occupent des domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$), avec une frontière régulière $\Gamma^\ell = \partial\Omega^\ell$, partitionnée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell$ et Γ_3^ℓ , correspondant aux conditions aux limites mécaniques, d'une part, et en deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , correspondant aux conditions aux limites électriques, d'autre part, telles que $mes(\Gamma_1^\ell) > 0$, $mes(\Gamma_a^\ell) > 0$. On note par ν^ℓ la normale unitaire sortante à Γ^ℓ .

Le corps Ω^ℓ est encastré sur Γ_1^ℓ dans une structure fixe. Sur Γ_2^ℓ agissent des tractions surfaciques de densité f_2^ℓ et agissent des forces volumiques de densité f_0^ℓ et des charges électriques de densité volumiques q_0^ℓ . Nous supposons que f_2^ℓ et f_0^ℓ varient très lentement par rapport au temps. Les corps sont soumis à l'action de potentiel nul sur la partie Γ_a^ℓ de la frontière ainsi qu'à l'action des charges électriques de densité surfacique q_2^ℓ , agissent sur la partie Γ_b^ℓ . Soit $T > 0$ et soit $[0, T]$ l'intervalle de temps en question. Le corps est en contact avec une fondation sur la partie Γ_3 .

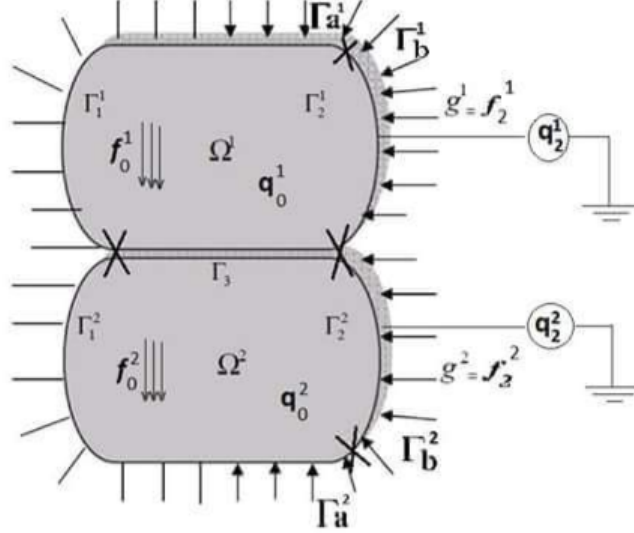


Fig.1 : Contact entre deux corps déformables.

Avant d'obtenir les modèles mathématiques qui correspondent au cadre physique présenté, voici quelques notations et conventions que nous utiliserons tout au long de cette mémoire.

Nous désignons par \mathbb{S}^d l'espace des tenseurs symétriques d'ordre deux sur $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, " \cdot " et $\| \cdot \|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et \mathbb{S}^d . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} u^\ell \cdot v^\ell &= u_i^\ell \cdot v_i^\ell, & \|v^\ell\| &= (v^\ell \cdot v^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall u^\ell, v^\ell \in \mathbb{R}^d, \\ \sigma^\ell \cdot \tau^\ell &= \sigma_{ij}^\ell \cdot \tau_{ij}^\ell, & \|\tau^\ell\| &= (\tau^\ell \cdot \tau^\ell)^{\frac{1}{2}}, & \forall \sigma^\ell, \tau^\ell \in \mathbb{S}^d, \end{aligned}$$

ici et ci-dessous, les indices i et j courent entre 1 et d et la convention de sommation sur les indices répétés est adoptée. Pour chaque élément $v^\ell \in H_1^\ell$, nous notons par v_ν^ℓ et v_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière définies par

$$v_\nu^\ell = v^\ell \cdot \nu^\ell, \quad v_\tau^\ell = v^\ell - v_\nu^\ell \nu^\ell, \quad (1.1)$$

nous désignons par $\sigma^\ell = \sigma^\ell(x, t)$ le champ des contraintes, par $u^\ell = u^\ell(x, t)$ le champ des déplacements sur Ω^ℓ et par $\varepsilon(u^\ell)$ le champ des déformations infinitésimales. Pour

simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \overline{\Omega^\ell}$ et $t \in [0, T]$. Pour un champ des contraintes σ^ℓ nous dénotons par σ_ν^ℓ et σ_τ^ℓ les composantes normale et tangentielle à la frontière données par

$$\sigma_\nu^\ell = (\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell, \quad \sigma_\tau^\ell = \sigma^\ell \nu^\ell - \sigma_\nu^\ell \cdot \nu^\ell, \quad (1.2)$$

en utilisant (1.1) et (1.2), nous obtenons la relation

$$(\sigma^\ell \nu^\ell) \cdot \nu^\ell = \sigma_\nu^\ell \nu_\nu^\ell + \sigma_\tau^\ell \cdot \nu_\tau^\ell,$$

qui va intervenir tout au long de ce mémoire, dans l'établissement de formulation variationnelle de problème mécanique de contact.

1.1.2 Modèle mathématique

Notons que le point au-dessus d'une fonction représente la dérivation par rapport au temps, par exemple

$$\dot{u}^\ell = \frac{du^\ell}{dt} \quad \ddot{u}^\ell = \frac{d^2u^\ell}{dt^2},$$

où \dot{u}^ℓ désigne le champ des vitesses et \ddot{u}^ℓ désigne le champ des accélérations. Pour le champ des vitesses \dot{u}^ℓ les notations \dot{u}_ν^ℓ et \dot{u}_τ^ℓ représentent respectivement les vitesses normale et tangentielle à la frontière, c'est à dire

$$\dot{u}_\nu^\ell = \dot{u}^\ell \cdot \nu^\ell, \quad \dot{u}_\tau^\ell = \dot{u}^\ell - \dot{u}_\nu^\ell \cdot \nu^\ell.$$

Les fonctions inconnues du problème sont les champs des déplacements $u^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et les champs des contraintes $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, $\ell = 1, 2$. Notons la densité de la masse par $\rho^\ell : \Omega^\ell \rightarrow \mathbb{R}_+$ et la densité des forces volumiques par $f_0^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps est décrite par l'équation du mouvement de Cauchy

$$\text{Div} \sigma^\ell + f_0^\ell = \rho^\ell \ddot{u}^\ell \quad \text{dans} \quad \Omega^\ell \times (0, T).$$

Les processus d'évolution modélés par l'équation précédente s'appellent **processus dynamiques**. Dans certaines situation, cette équation peut encore se simplifier : par exemple dans le cas où $\dot{u}^\ell = 0$, il s'agit d'un problème d'équilibre (**processus statiques**), ou bien dans le cas où le champ des vitesse \dot{u}^ℓ varie très lentement par rapport au temps, c'est-à-dire que le terme $\rho^\ell \ddot{u}^\ell$ peut être négligé (**processus quasi statiques**). Dans ces deux cas l'équation du mouvement devient

$$\text{Div} \sigma^\ell + f_0^\ell = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega^\ell \times (0, T).$$

L'équation équivaut à de relations scalaires, et mathématiquement cette équation ne suffit pas à modéliser le problème d'équilibre du corps car, par exemple les d composantes u_i^ℓ du champ de déplacement ne figurent pas dans cette équation.

A celles-ci se rajoutent les inconnues électriques du problème, à savoir le champ de déplacement électrique, les potentiels électriques $\zeta^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ et les champs des déplacements électriques $D^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$. L'évolution du corps piézoélectrique est décrite par l'équation d'équilibre pour le champ de déplacements électriques

$$\operatorname{div} D^\ell = q_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T),$$

où "div" est l'opérateur de divergence pour les vecteurs, $\operatorname{div} D^\ell = (D_{i,i}^\ell)$ et q_0^ℓ représente la densité des charges électriques volumiques sur Ω^ℓ .

1.1.3 Loi de comportement piézoélectrique

Nous considérons deux corps piézoélectriques qui occupent deux domaines bornés $\Omega^\ell \subset \mathbb{R}^d$ ($\ell = 1, 2; d = 2, 3$) avec une surface frontière régulière Γ^ℓ subdivisée en trois parties mesurables $\Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3^\ell$ d'une part et de deux parties mesurables Γ_a^ℓ et Γ_b^ℓ , telles que $\operatorname{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, et $\operatorname{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$.

Soit $T > 0$ nous étudions l'évolution du corps due à l'application de force de volume et de tractions de surfaces dans l'intervalle de temps $[0, T]$. Dans ce qui suit, pour simplifier les notations, nous n'indiquons pas explicitement la dépendance des fonctions par rapport à $x \in \Omega^\ell \cup \Gamma^\ell$, et $t \in [0, T]$.

Les lois de comportement sont des relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations et leurs dérivées. C'est toute une série d'essais qu'il faut imaginer et réaliser pour établir une loi de comportement. Les expériences physiques pour les matériaux unidimensionnels constituent le point de départ dans l'établissement des lois de comportement.

Dans la description des phénomènes purement électro-mécanique, par loi de comportement nous comprenons dans la suite une relation entre le tenseur des contraintes σ^ℓ , le tenseur des déformations infinitésimales ε^ℓ et leurs dérivées temporelles $\dot{\sigma}^\ell$ et $\dot{\varepsilon}^\ell$. Cette définition se modifie légèrement dans la description des phénomènes électro-mécaniques, car ici nous devons aussi prendre en considération le champ de déplacement électrique $D^\ell = (D_i^\ell)$ ainsi que le champ électrique $E^\ell = -\nabla \zeta^\ell$.

Nous présentons par la suite lois de comportement pour les matériaux : électro-élastiques, électro-viscoélastiques et thermo-électro-viscoélastiques. Ces lois sont utilisées dans de nombreux ouvrages portant notamment sur l'étude mathématique des problèmes de contact.

I-Loi de comportement des matériaux électro-élastiques

Nous considérons ici une catégorie de matériaux où le tenseur des contraintes σ^ℓ et le vecteur des déplacements électriques D^ℓ sont reliés par la loi de comportement :

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(u^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* E(\zeta^\ell), \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell (E^\ell(\zeta^\ell)), \end{cases} \quad (1.3)$$

où $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ est l'opérateur de d'élasticité non linéaire, $E(\zeta^\ell) = -\nabla \zeta^\ell$ où $\nabla \zeta^\ell = (\zeta_{,i}^\ell)$ représente le champ électrique, $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell)$ est le tenseur piézoélectrique qui traduit la proportionnalité entre la charge et la déformation à champ constant ou nul et $\mathcal{G}^\ell = (\mathcal{G}_{ij}^\ell)$ est le tenseur diélectrique à déformation nulle qui constitue un tenseur symétrique défini positif. Par ailleurs $(\mathcal{E}^\ell)^* = (e_{ijk}^{\ell,*})$ où $e_{ijk}^{\ell,*} = e_{kij}^\ell$, dénote le transposé du tenseur \mathcal{E}^ℓ tel que :

$$\mathcal{E}^\ell \sigma^\ell \cdot v^\ell = \sigma^\ell \cdot (\mathcal{E}^\ell)^* v^\ell, \quad \forall \sigma^\ell \in \mathbb{S}^d, v^\ell \in \mathbb{R}^d.$$

II-Loi de comportement électro-élastiques avec mémoire longue

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \int_0^t \mathcal{Q}^\ell (t-s, \varepsilon(u^\ell(s))) ds - (\mathcal{E}^\ell)^* E(\zeta^\ell), \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) + \mathcal{G}^\ell (E^\ell(\zeta^\ell)), \end{cases} \quad (1.4)$$

où $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_{ij})$ est un tenseur de relaxation. Si $\mathcal{Q} = 0$, on retrouve la loi électro-élastiques donnée par (1.3).

III-Loi de comportement des matériaux électro-viscoélastiques

Un matériau est dit électro-viscoélastique si sa loi de comportement est de la forme :

$$\begin{cases} \sigma^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell (\varepsilon(\dot{u}^\ell(t))) + \mathcal{B}^\ell (\varepsilon(u^\ell(t))) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\zeta^\ell), \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - \mathcal{B}^\ell \nabla \zeta^\ell, \end{cases} \quad (1.5)$$

dans laquelle interviennent l'opérateur de viscosité \mathcal{A}^ℓ , l'opérateur d'élasticité \mathcal{B}^ℓ , non linéaires.

IV-Loi de comportement thermo-électro-viscoélastiques avec endommagement

Dans ce cas la loi de comportement est donnée par :

$$\begin{cases} \sigma^\ell(t) = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\dot{u}^\ell(t))) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell, \xi^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\zeta^\ell), \\ D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - B^\ell \nabla \zeta^\ell, \end{cases} \quad (1.6)$$

où \mathcal{A}^ℓ et \mathcal{B}^ℓ sont des opérateurs non linéaires décrivant respectivement les propriétés purement viscosité et élasticité du matériau.

La température τ^ℓ est défini par une équation parabolique, qui représente la conservation de l'énergie comme suit

$$\dot{\tau}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \tau^\ell = \Theta^\ell(\varepsilon(u^\ell), \tau^\ell, \xi^\ell) + \chi^\ell,$$

où Θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur engendrée par les forces intérieures. Ici et ci-dessous κ_0^ℓ est une constante strictement positive et χ^ℓ une donnée, qui représente la source de chaleur du volume.

L'endommagement ξ^ℓ est une variable internes d'état définie dans $\Omega^\ell \times [0, T]$, avec $0 \leq \xi^\ell \leq 1$, L'évolution du champ d'endommagement utilisée au deuxième chapitre est modélisée par l'inclusion du type parabolique donnée par la relation

$$\dot{\xi}^\ell - \kappa^\ell \Delta \xi^\ell + \partial \varphi_{K^\ell}(\xi^\ell) \ni \Psi^\ell(\varepsilon(u^\ell), \tau^\ell, \xi^\ell),$$

où κ^ℓ est une constante positive, Ψ^ℓ est la fonction source de l'endommagement, $\partial \varphi_{K^\ell}$ est le sous-différentiel de la fonction indicatrice φ_{K^ℓ} et K^ℓ est l'ensemble des endommagements admissibles défini par

$$K^\ell = \{\xi \in H^1(\Omega^\ell); 0 \leq \xi \leq 1, \text{ p.p. dans } \Omega^\ell\}.$$

Nous utilisons la loi de comportement des matériaux thermo-électro-viscoélastiques avec endommagement dans le deuxième chapitre, nous passons maintenant aux conditions son limites utilisées dans celle-ci.

1.1.4 Conditions son limites

Définissons maintenant les conditions son limites sur chacune des trois parties de Γ^ℓ .

A-La condition à la limites de déplacement

Le corps est encastré dans une position fixe sur la partie $\Gamma_1^\ell \times [0, T]$, le champ des déplacements u^ℓ est par conséquent nul

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times [0, T].$$

B-La condition à la limites de traction

Une traction surfacique de densité f_2^ℓ agit sur $\Gamma_2^\ell \times [0, T]$ et par conséquent le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma^\ell \nu^\ell$ satisfait

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times [0, T].$$

C-Les conditions son limites électriques

Ces conditions sont déterminées à partir des deux équations

$$\zeta^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times [0, T],$$

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times [0, T].$$

D-Conditions continues son limites de contact

On définit le déplacement normal par

$$[u_\nu] = u_\nu^1 + u_\nu^2,$$

et le déplacement tangent par

$$[u_\tau] = u_\tau^1 - u_\tau^2.$$

La continuité des contraintes sur l'interfaces Γ_3 se traduit par

$$\sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \quad \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau \quad \text{sur } \Gamma_3.$$

E-Lois de contact avec compliance normale

Dans ce cas, les corps est supposée déformable et la zone de contact n'est pas connue à priori. La contrainte normale σ_ν^ℓ satisfait la condition dite de compliance normale

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ -\sigma_\nu = p_\nu([u_\nu] - g), \end{cases} \quad (1.7)$$

où $[u_\nu]$ est le déplacement normal, g représente l'interstice entre les corps et p_ν est une fonction positive donnée, appelée fonction de compliance normale. Cette condition indique que la fondation exerce une action sur le corps en fonction de sa pénétration $[u_\nu] - g$.

Précisons que dans le deuxième chapitre du mémoire nous considérons le cas où le corps repose sur la fondation, c'est-à-dire, l'interstice est nul, $g = 0$.

Comme exemple de la fonction p_ν nous pouvons considérer

$$p_\nu(r) = c_\nu r_+,$$

où c_ν est une constante positive et $r_+ = \max\{0, r\}$. Un deuxième exemple est donné par

$$p_\nu(r) = \begin{cases} c_\nu r_+ & \text{si } r \leq \alpha, \\ c_\nu \alpha & \text{si } r > \alpha, \end{cases}$$

où α est un coefficient positif lié à l'usure et à la dureté de la surface. Dans ce cas, la condition de contact (1.7) signifie que lorsque la pénétration est trop profonde, i.e. quand elle dépasse α , la fondation se désintègre et n'offre plus de résistance à la pénétration.

F-Les conditions de contact avec compliance normale et adhésion

On va décrire la condition de contact avec compliance normale et adhésion sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, on introduit une variable interne d'état définie sur $\Gamma_3 \times [0, T]$, qui représente l'intensité d'adhésion sur la surface de contact, telle que $0 \leq \varsigma \leq 1$. Quand $\varsigma = 1$ à un point $x \in \Gamma_3$, l'adhésion est complète et tous les liens sont actifs, quand $\varsigma = 0$ tous les liens sont désactivés et il n'y a pas d'adhésion, et quand $0 < \varsigma < 1$ c'est le cas d'une adhésion partielle et mesure la fraction des liens. Pour plus détails sur ce section, on renvoie par exemple [37].

On suppose que la contrainte normale satisfait la condition de compliance normale avec adhésion

$$\sigma_\nu = -p_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2) + \gamma_\nu \varsigma^2 R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times [0, T], \quad (1.8)$$

où σ_ν est le déplacement normal, γ_ν est un coefficient positif, $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction donnée appelée fonction de compliance normale, il attribue une traction ou pression normale réactive qui dépend de l'interpénétration des aspérités entre deux corps, p_ν est une fonction prescrite non négative qui s'annule pour un argument négatif. En effet, lorsque $u_\nu^1 + u_\nu^2 < 0$ il n'y a pas de contact et la pression normale s'annule, lorsqu'il y a contact, $u_\nu^1 + u_\nu^2$ est positif et mesure l'interpénétration des aspérités.

La contribution de l'adhésif à la traction normale est représentée par le terme

$\gamma_\nu \varsigma^2 R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2)$, et la fonction $R_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est l'opérateur de troncature donné par

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0, \end{cases} \quad (1.9)$$

ici $L > 0$ est longueur caractéristique des liens.

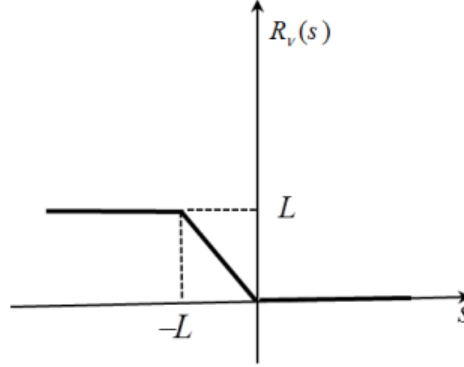


Fig.2 : Représentation graphique de l'opérateur de troncature R_ν .

La condition (1.8) indique que chaque corps exerce une action sur l'autre corps en fonction de sa pénétration $[u]$, où le deuxième terme de l'égalité est la contribution de l'adhésion à la tension de surface. Notons que la condition de compliande normale avec adhésion (1.8) a été déjà utilisée dans [38, 41].

Quand le champ d'adhésion ς est nul, (1.8) devient

$$\sigma_\nu = -p_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

ce qui représente la condition de compliande normale sans adhésion.

La conformité normale à la condition de contact d'adhésion (1.8) est étudiée dans de nombreuses publications, (voir, par exemple [4, 12, 24, 30]), et les références qui s'y trouvent.

La diversité des matériaux a conduit les chercheurs à utiliser le collage des composites comme étant un moyen universel d'assemblage de matériaux de natures différentes. Pour modéliser les phénomènes d'adhésion, il est nécessaire d'ajouter le processus d'adhésion à la description du contact.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme

$$\dot{\varsigma} = H_{ad}(\varsigma, \hat{\varsigma}, R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2), R_\tau(|u_\tau^1 - u_\tau^2|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

H_{ad} est une fonction générale qui s'annule quand le premier de ses variables s'annule. Un exemple d'une telle fonction, utilisée dans [36]. Ensuite, la fonction de taux d'adhésion a été supposée dépendre, en plus de ς , $\hat{\varsigma}$, $R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2)$ et $R_\tau(|u_\tau^1 - u_\tau^2|)$.

On considère la possibilité d'une diminution de l'efficacité de collage quand les cycles de collage et de décollage continuent. Par conséquent, le processus est supposé dépendre de l'histoire d'adhésion qu'on note par

$$\hat{\varsigma}(x, t) = \int_0^t \varsigma(x, s) ds \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T).$$

Nous l'utilisons dans H_{ad} , car généralement, lorsque la colle est étirée au-delà de la limite L , elle ne contribue pas davantage à la force de liaison. Un exemple d'une telle fonction, utilisée dans [4], on donne quelques exemples de ce genre de fonctions

$$H_{ad}(\varsigma, \hat{\varsigma}, R_1, R_2) = -\varsigma_+ \gamma_n R_1^2,$$

où γ_n est le coefficient de vitesse normale et $\gamma_n L$ est la traction normale de traction maximale que l'adhésif peut fournir et $\varsigma_+ = \max(0, \varsigma)$. Nous notons que dans ce cas, seule la déconnexion est autorisée, tel que la fonction $R : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une troncature définie par

$$R(s) = \begin{cases} L & \text{si } s \geq L, \\ s & \text{si } |s| \leq L, \\ -L & \text{si } s \leq -L, \end{cases}$$

une équation de taux différentielle pour l'évolution du champ de collage est

$$H_{ad}(\varsigma, \hat{\varsigma}, R_1, R_2) = -(\varsigma(\gamma_n R_1^2 + \gamma_t |R_2|^2) - \varepsilon_a)_+,$$

$$\varsigma(0) = \varsigma_0 \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

(voir, par exemple [5, 12]), ici, γ_t est le coefficient de vitesse tangentielle, qui peut également être interprété comme le coefficient de rigidité tangentielle de l'interface lorsque l'adhérence est terminée ($\varsigma = 1$).

Un autre exemple, dans lequel H_{ad} dépend de ses trois variables est

$$H_{ad}(\varsigma, \hat{\varsigma}, R_1, R_2) = -\gamma_n \varsigma_+ R_1^2 - \gamma_t \varsigma_+ |R_2|^2 + \gamma_r \frac{\varsigma_+(1 - \varsigma)_+}{1 + \hat{\varsigma}^2},$$

où γ_r est le coefficient tangentielle de collage. Cependant, la liaison ne peut pas dépasser $\varsigma = 1$ et de plus, la réassociation devient plus faible au fur et à mesure du processus, ce qui est représenté par le facteur $1 + \hat{\varsigma}^2$ dans le dénominateur et ς_0 l'adhésion initiale tel que

$$0 \leq \varsigma_0 \leq 1, \text{ p.p. sur } \Gamma_3.$$

G-Condition dans le plan tangent

Aux points de Γ_3 , la rigidité tangentielle générée par la colle est supposée dépendante de l'adhésion ς et des déplacements tangentiels

$$-\sigma_\tau = p_\tau(\varsigma)R_\tau(|u_\tau^1 - u_\tau^2|) \quad \text{sur} \quad \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.10)$$

où $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de contact tangentielle, et la fonction $R_\tau : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+^d$ est l'opérateur de troncation défini par

$$R_\tau(v) = \begin{cases} v & \text{si} \quad \|v\| \leq M, \\ M \frac{v}{\|v\|} & \text{si} \quad \|v\| > M, \end{cases} \quad (1.11)$$

ici $M > 0$ est la longueur caractéristique des liens, cette condition montre que le cisaillement sur la surface de contact dépend du champ de liaison et du déplacement tangentiel, mais tant qu'il ne dépasse pas la longueur de lien M .

Alors, $p_\tau(\varsigma)$ agit comme une constante de ressort, qui croit avec ς , la traction est en direction opposé au déplacement. Le module maximum de la traction tangentielle dans (1.10) est $p_\tau(1)M$. La traction de frottement tangentielle est supposée être beaucoup plus petite que l'adhésion et donc elle est omise.

1.2 Rappels d'analyse

1.2.1 Rappels sur les espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel réel et $(\cdot, \cdot)_H$ un produit scalaire sur H c'est-à-dire $(\cdot, \cdot)_H : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ est une application bilinéaire symétrique et définie positive.

On note par $\|\cdot\|_H$ l'application de $H \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\|u\|_H = (u, u)_H^{\frac{1}{2}}, \quad (1.12)$$

et on rappelle que $\|\cdot\|_H$ est une norme sur H qui vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$|(u, v)_H| \leq \|u\|_H \|v\|_H, \quad \forall u, v \in H,$$

on dit que H est un espace de Hilbert si H est complet pour la norme défini par (1.12). Soit H' l'espace dual de H i.e l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur H muni de la norme

$$\|\eta\|_{H'} = \sup_{v \in H - \{0\}} \frac{\langle \eta, v \rangle_{H' \times H}}{\|v\|_H},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H' \times H}$ représente la dualité entre H' et H .

Théorème 1.2.1. (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)

Soit H un espace de Hilbert et soit H' son espace dual, alors pour tout $\phi \in H'$ il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \phi, v \rangle_{H' \times H} = (f, v)_H \quad \forall v \in H,$$

de plus

$$\| \phi \|_{H'} = \| f \|_H .$$

L'importance de ce théorème est que toute forme linéaire continue sur H peut se représenter à l'aide du produit scalaire. L'application $\phi \mapsto f$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H' .

1.2.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles sans réponse jusque là.

On commence par un bref rappel de quelques résultats sur les espaces de Sobolev $H^1(\Omega)$ défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \partial_i u \in L^2(\Omega) \ i = 1, \dots, d \right\},$$

on note par ∇u le vecteur de composante $\partial_i u$, on a $\nabla u \in L^2(\Omega)^d$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on sait que $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme associée

$$\| u \|_{H^1(\Omega)} = (u, u)_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \text{ et on écrit } \| u \|_{H^1(\Omega)}^2 = \| u \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)^d}^2,$$

on a les résultats suivants

$$C^1(\overline{\Omega}) \text{ est dense dans } H^1(\Omega).$$

Théorème 1.2.2. (Rellich)

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \text{ avec injection compacte.}$$

Théorème 1.2.3. (trace de Sobolev)

Il existe une application linéaire et continue $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ telle que $\delta u = u|_\Gamma$ pour tout $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Remarque 1.2.1. L'espace $L^2(\Gamma)$ ci-dessus représente l'espace de fonctions réelles sur Γ qui sont L^2 pour la mesure superficielle $d\Gamma$.

L'application δ s'appelle application de trace, elle est définie comme le prolongement par densité de l'application $u \rightarrow u|_\Gamma$ définie pour $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Remarque 1.2.2. On note que l'application de trace $\delta : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ est un opérateur compacte.

Définition 1.2.1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $p \in [1, +\infty]$, nous définissons l'espace de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ par

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid \forall \alpha, |\alpha| \leq k; \exists v_\alpha \in L^p(\Omega), \text{ tel que } v_\alpha = D^\alpha u \right\}.$$

Remarque 1.2.3. Nous ferons très souvent l'abus d'écriture qui consiste à identifier $D^\alpha u$ et v_α .

La norme sur l'espace $W^{k,p}(\Omega)$ est donnée par

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

pour $p = 2$, on note par $H^k(\Omega)$ l'espace $W^{k,2}(\Omega)$ et la norme précédente provient d'un produit scalaire.

Théorème 1.2.4. Les espaces de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$, munis de la norme $\| \cdot \|$, sont des espaces de Banach.

De plus, les espaces $H^k(\Omega)$, pour tout k entier, sont des espaces de Hilbert.

Pour des détails supplémentaires sur les espaces de Sobolev nous renvoyons le [\[35\]](#).

1.2.3 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section les espaces de type Sobolev utilisés en mécanique et associés aux opérateurs divergence et déformation, on montre leurs principales propriétés, notamment les théorèmes de trace, aussi quelques espaces de fonctions définies sur un intervalle réel et à valeurs dans l'espace de Hilbert.

Maintenant, pour procéder à la formulation variationnelle, nous avons besoin des espaces de Hilbert suivants, associés aux inconnues mécaniques v^ℓ et τ^ℓ :

$$\begin{cases} H^\ell = \{v^\ell = (v_i^\ell); v_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L^2(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}^\ell = \{\tau^\ell = (\tau_{ij}^\ell); \tau_{ij}^\ell = \tau_{ji}^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\} = (L^2(\Omega^\ell))_s^{d \times d}, \\ H_1^\ell = \{v^\ell = (v_i^\ell); v_i^\ell \in H^1(\Omega^\ell)\} = (H^1(\Omega^\ell))^d, \\ \mathcal{H}_1^\ell = \{\tau^\ell = (\tau_{ij}^\ell) \in \mathcal{H}^\ell; \text{Div} \tau^\ell \in H^\ell\} = (H^1(\Omega^\ell))_s^{d \times d}, \end{cases}$$

les espaces $H^\ell, \mathcal{H}^\ell, H_1^\ell$ et \mathcal{H}_1^ℓ sont des espaces réels de Hilbert munis des produits scalaires respectivement, donnés par

$$\begin{cases} (u^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} u_i^\ell \cdot v_i^\ell dx, \\ (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \sigma_{ij}^\ell \cdot \tau_{ij}^\ell dx, \\ (u^\ell, v^\ell)_{H_1^\ell} = (u^\ell, v^\ell)_{H^\ell} + (\varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \\ (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}_1^\ell} = (\sigma^\ell, \tau^\ell)_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \sigma^\ell, \text{Div} \tau^\ell)_{H^\ell}, \end{cases}$$

où $\varepsilon : H_1^\ell \rightarrow \mathcal{H}^\ell$ et $\text{Div} : \mathcal{H}_1^\ell \rightarrow H^\ell$ sont respectivement les opérateurs de déformation et de divergence, définis par

$$\begin{aligned} (\varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} &= \int_{\Omega^\ell} \nabla u^\ell \cdot \nabla v^\ell dx, \\ (\text{Div} \sigma^\ell, \text{Div} \tau^\ell)_{H^\ell} &= \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \sigma^\ell \cdot \text{Div} \tau^\ell dx, \end{aligned}$$

tels que

$$\begin{aligned} \nabla u^\ell &= (u_{i,j}^\ell), \quad \varepsilon(u^\ell) = (\varepsilon_{i,j}(u^\ell)), \quad \varepsilon_{i,j}(u^\ell) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^\ell + u_{j,i}^\ell); \quad \forall u^\ell \in H_1^\ell. \\ \text{Div} \sigma^\ell &= (\sigma_{ij,j}^\ell), \quad \forall \sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell. \end{aligned}$$

Les normes sur les espaces $H^\ell, \mathcal{H}^\ell, H_1^\ell, \mathcal{H}_1^\ell$, sont notées par $\|\cdot\|_{H^\ell}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}^\ell}, \|\cdot\|_{H_1^\ell}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1^\ell}$, respectivement.

Puisque la frontière Γ^ℓ est Lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν^ℓ à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteur $v^\ell \in H_1^\ell$ nous utilisons la notation v^ℓ pour désigner la trace de v^ℓ sur Γ^ℓ . Désignons par H'_{Γ^ℓ} le dual de $H_{\Gamma^\ell} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma^\ell)^d$ et $(\cdot, \cdot)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell}$ le produit de dualité entre H'_{Γ^ℓ} et H_{Γ^ℓ} .

Pour τ^ℓ assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$(\Delta\tau^\ell, \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + \int_{\Omega^\ell} \nabla\tau^\ell \cdot \nabla\delta^\ell da = \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial^\ell\tau^\ell}{\partial\nu^\ell} \delta^\ell da, \quad \forall \delta^\ell \in \mathbb{L}_1^\ell.$$

Pour D^ℓ assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$(D^\ell, \nabla\Psi^\ell)_{H^\ell} + (\operatorname{div}D^\ell, \Psi^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} D^\ell\nu^\ell \cdot \Psi^\ell da, \quad \forall \Psi^\ell \in H_1^\ell.$$

Pour tout $\sigma^\ell \in \mathcal{H}_1^\ell$, il existe un élément $\sigma^\ell\nu^\ell \in H'_{\Gamma^\ell}$ tel que

$$(\sigma^\ell\nu^\ell, v^\ell)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell} = (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{Div}\sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell} \quad \forall v^\ell \in H_1^\ell,$$

en outre, si σ^ℓ est continûment différentiable sur $\Omega^\ell \cup \Gamma^\ell$, tel que

$$(\sigma^\ell\nu^\ell, v^\ell)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell\nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in H_1^\ell,$$

donc, pour σ^ℓ assez régulier nous avons la formule de Green suivante

$$(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\operatorname{Div}\sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell\nu^\ell \cdot v^\ell da \quad \forall v^\ell \in H_1^\ell,$$

où da est un élément de mesure de surface.

Pour une fonction scalaire ς , qui représente le champ d'adhésion sur la surface Γ_3 du contact, nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{Z} = \{\theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3)) ; 0 \leq \theta(t) \leq 1, \forall t \in [0, T], p.p, \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

L'espace des déplacements admissibles V^ℓ est un sous-espace fermé de H_1^ℓ défini par

$$V^\ell = \{v^\ell \in H_1^\ell; v^\ell = 0 \text{ p.p, sur } \Gamma_1^\ell\}.$$

Puisque $\operatorname{mes}(\Gamma_1^\ell) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V^ℓ il existe une constante $c_k > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_1^ℓ (voir [20], p.79), telle que

$$\|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell} \geq c_k \|v^\ell\|_{H_1^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (1.13)$$

Sur l'espace V^ℓ nous considérons le produit scalaire et la norme associée donnée par

$$(u^\ell, v^\ell)_{V^\ell} = (\varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \|v^\ell\|_{V^\ell} = \|\varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}, \quad \forall u^\ell, v^\ell \in V^\ell. \quad (1.14)$$

Par l'inégalité de Korn (1.13), il vient que $\|\cdot\|_{H_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{V^\ell}$ sont des normes équivalentes sur V^ℓ et ainsi $(V^\ell, \|\cdot\|_{V^\ell})$ est un espace de Hilbert réel.

En outre, par le théorème de trace de Sobolev et (1.14), il existe une constante $c_0 > 0$, dépendant uniquement de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell$ et Γ_3 telle que

$$\|v^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v^\ell\|_{V^\ell}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell. \quad (1.15)$$

Pour le potentiel électrique et le champ de déplacement électrique nous utilisons les espaces suivants respectivement

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_0^\ell &= L^2(\Omega^\ell), & \mathbb{L}_1^\ell &= H^1(\Omega^\ell), \\ W^\ell &= \{\Psi^\ell \in \mathbb{L}_1^\ell; \Psi^\ell = 0 \text{ sur } \Gamma_a^\ell\}, \\ \mathcal{W}^\ell &= \{D^\ell = (D_i^\ell); D_i^\ell \in L^2(\Omega^\ell); \operatorname{div} D^\ell \in L^2(\Omega^\ell)\}, \end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{mes}(\Gamma_a^\ell) > 0$, l'inégalité de Friedrichs-Poincaré montre qu'il existe une constante $c_F > 0$ dépendant uniquement de Ω^ℓ et Γ_a^ℓ telle que

$$\|\nabla \psi^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)^d} \geq c_F \|\psi^\ell\|_{H^\ell(\Omega^\ell)}, \quad \forall \psi^\ell \in W^\ell, \quad (1.16)$$

une démonstration de l'inégalité de Friedrichs-Poincaré peut être trouvée dans [39].

Sur l'espace W^ℓ nous considérons le produit scalaire donné par

$$(\zeta^\ell, \Psi^\ell)_{W^\ell} = (\nabla \zeta^\ell, \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Omega^\ell} \nabla \zeta^\ell \cdot \nabla \Psi^\ell dx,$$

et soit $\|\cdot\|_{W^\ell}$ la norme associée, i.e

$$\|\phi^\ell\|_{W^\ell} = \|\nabla \phi^\ell\|_{H^\ell}.$$

En utilisant (1.16) on peut vérifier que $\|\cdot\|_{\mathbb{L}_1^\ell}$ et $\|\cdot\|_{W^\ell}$ sont deux normes équivalentes sur W^ℓ . Il en résulte que $(W^\ell, \|\cdot\|_{W^\ell})$ est un espace de Hilbert réel.

De plus, par le Sobolev trace théorème, il existe une constante c_0^ℓ , ne dépendant que de $\Omega^\ell, \Gamma_a^\ell$ et Γ_3 telle que

$$\|\xi^\ell\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c_0^\ell \|\xi^\ell\|_{W^\ell}, \quad \forall \xi^\ell \in W^\ell.$$

L'espace \mathcal{W}^ℓ est un espace de Hilbert réel avec le produit scalaire

$$(D^\ell, \varphi^\ell)_{\mathcal{W}^\ell} = (D^\ell, \varphi^\ell)_{H^\ell} + (\operatorname{div} D^\ell, \operatorname{div} \varphi^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \varphi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} D^\ell \cdot \operatorname{div} \varphi^\ell dx,$$

où la norme associée $\|\cdot\|_{\mathcal{W}^\ell}$, i.e

$$\|D^\ell\|_{\mathcal{W}^\ell}^2 = \|D^\ell\|_{H^\ell}^2 + \|\operatorname{div} D^\ell\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2.$$

Afin de simplifier les notations, nous définissons les espaces produits

$$V = V^1 \times V^2, \quad H = H^1 \times H^2,$$

$$H_1 = H_1^1 \times H_1^2, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \times \mathcal{H}^2, \quad \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^1 \times \mathcal{H}_1^2,$$

$$\mathbb{L}_0 = \mathbb{L}_0^1 \times \mathbb{L}_0^2, \quad \mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_1^1 \times \mathbb{L}_1^2, \quad W = W^1 \times W^2, \quad \mathcal{W} = \mathcal{W}^1 \times \mathcal{W}^2,$$

les espaces V, \mathbb{L}_1, W et \mathcal{W} sont des espaces de Hilbert réel dotés des produits scalaires canoniques notée $(\cdot, \cdot)_V, (\cdot, \cdot)_{\mathbb{L}_1}, (\cdot, \cdot)_W, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}}$, les normes associés seront désignés par $\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_{\mathbb{L}_1}, \|\cdot\|_W$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{W}}$, respectivement.

Enfin, soit $0 < T < \infty$ et soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel, nous utilisons la classique notation pour les espaces $L^p(0, T; X), W^{k,p}(0, T; X)$, où $1 \leq p \leq \infty, k \geq 1$.

Nous notons par $C(0, T; X)$ et $C^1(0, T; X)$ les espaces des fonctions continues et continûment différentiables sur $[0, T]$ avec valeur sur X , respectivement, avec les normes

$$\|f\|_{C(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X,$$

$$\|f\|_{C^1(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_X + \max_{t \in [0,T]} \|\dot{f}(t)\|_X.$$

respectivement. De plus, nous utilisons le point ci-dessus pour indiquer la dérivée par rapport à la variable de temps.

Nous notons par $C_c(0, T; X)$ l'ensemble des fonctions continues à support compact dans $[0, T]$ à valeurs dans X .

Définition 1.2.2. Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite mesurable s'il existe un sous ensemble $E \subset [0, T]$ de mesure nulle et une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions appartenant à $C_c(0, T; X)$ telle que $\|f_n(t) - f(t)\|_X \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $t \in [0, T] \setminus E$.

1.2.4 Rappels d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques éléments d'analyse non linéaire dans les espaces de Hilbert et quelques résultats concernant les équations et les inéquations variationnelles d'évolution qui interviennent dans l'étude des problèmes mécaniques.

I-Opérateur fortement monotone

Nous commençons ici par un bref rappel sur les opérateurs frottements monotones et de Lipschitz. Pour cela, on considère un espace de Hilbert X munit du produit scalaire $(\cdot, \cdot)_X$ et de la norme associé $\|\cdot\|_X$.

Définition 1.2.3. Soient $A : X \rightarrow X$ un opérateur non linéaire, l'opérateur A est dit

1. monotone si

$$(Au - Av, u - v)_X \geq 0, \quad \forall u, v \in X,$$

2. fortement monotone s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m\|u - v\|_X^2, \quad \forall u, v \in X,$$

3. Lipschitz s'il existe $L > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq L\|u - v\|_X, \quad \forall u, v \in X,$$

4. hémicontinu si

$$\forall u, v \in X, \text{ l'application } : \mathbb{R} \rightarrow X' \quad t \mapsto A(u + tv) \text{ est continue.}$$

Théorème 1.2.5. (Théorème de point fixe de Banach)

Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda : K \rightarrow K$ est une contraction, c'est à dire il existe $c \in]0, 1[$ telle que

$$\|\Lambda(u) - \Lambda(v)\|_X \leq c \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in K.$$

Alors, il existe un unique élément $u \in K$ tel que $\Lambda(u) = u$, i.e, possède un point fixe unique dans K .

Pour l'opérateur $\Lambda^m : K \rightarrow K$ défini par la relation

$$\Lambda^m = \Lambda(\Lambda^{m-1}) \quad m \geq 2,$$

nous avons la version suivante du théorème de point fixe.

Théorème 1.2.6. Soit K un sous ensemble fermé et non vide de l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$. Supposons que $\Lambda^m : K \rightarrow K$ est une contraction pour m un entier positif. Alors Λ admet un point fixe unique dans K .

Définition 1.2.4. Une forme bilinéaire $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue s'il existe un réel $M > 0$ tel que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

Définition 1.2.5. Une forme bilinéaire $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite coercive s'il existe une constante $m > 0$ telle que

$$a(u, u) \geq m \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

Théorème 1.2.7. (Théorème du Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive.

Soit $l : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors, il existe une solution unique $u \in H$ qui satisfait

$$a(u, v) = l(v), \quad \forall v \in H.$$

De plus, si $a(., .)$ est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$\frac{1}{2}a(u, u) - \langle u, u \rangle_X \leq \frac{1}{2}a(v, v) - \langle v, v \rangle_X, \quad \forall v \in X.$$

Théorème 1.2.8. (Théorème de point fixe de Krasnoselskii)

Soit E une partie non vide, convexe et fermée d'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$. On suppose que $A, B : E \rightarrow X$ sont deux applications satisfaisant

1. $Ax + By \in E, \quad \forall x, y \in E,$
2. A est continue et AE est contenu dans un ensemble compact,
3. B est une contraction de constante $\alpha < 1$.

Alors $\exists x^* \in E, Ax^* + Bx^* = x^*$.

Remarque 1.2.4. Si $A = 0$ alors ce théorème coïncide avec le principe de l'application contractante de Banach et si $B = 0$ il coïncide avec le théorème de Schauder.

II- Sous différentiabilité

Nous considérons dans tout ce paragraphe que X est un espace de Hilbert et K un sous ensemble de l'espace X .

Définition 1.2.6. On appelle fonction indicatrice de K , la fonction Ψ_K définie par

$$\Psi_K = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in K, \\ +\infty & \text{si } u \notin K. \end{cases}$$

Définition 1.2.7. Soit une fonction $j : X \rightarrow \mathbb{R}$ et u un élément de l'espace X tel que $j(u) \neq \pm\infty$. Le sous-différentiel de la fonction j en u , noté $\partial j(u)$ est l'ensemble défini par

$$\partial j(u) = \{u' \in X' \mid j(v) \geq j(u) + (u', v - u), \forall v \in K\}.$$

Le crochet (\cdot, \cdot) désignant la dualité entre X' et X .

Tout élément u' de l'ensemble $\partial j(u)$ est appelé sous-gradient de la fonction j en u . La fonction j est dite sous-différentiable en u si $\partial j(u) \neq \emptyset$. Elle est dite sous-différentiable si elle l'est en tout point u de l'espace X .

Nous pouvons caractériser le sous-différentiel $\partial \Psi_K$ d'une fonction indicatrice Ψ_K d'un ensemble convexe non vide

$$\partial \Psi_K = \{u' \in X' \mid (u', v - u) \leq 0, \forall v \in K\}. \quad (1.17)$$

III- Équation différentielle ordinaire

Théorème 1.2.9. (Cauchy-Lipschitz)

Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $[0, T]$, qui satisfait les propriétés suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ Il existe } L_F > 0 \text{ tel que} \\ \|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, \text{ p.p. } t \in [0, T], \\ (b) \text{ Il existe } 1 \leq p \leq \infty \text{ tel que } F(\cdot, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X. \end{array} \right.$$

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ tel que

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t)), \quad \text{p.p. } t \in [0, T],$$

$$x(0) = x_0.$$

Définition 1.2.8. S'il est l'inclusion de $(V, \|\cdot\|_V)$ dans $(H, \|\cdot\|_H)$ est continue et V est dense dans H , le triplet

$$V \subset H \subset V',$$

s'appelle le triplet de Gelfand, où V' l'espace dual de V .

IV- Équation aux dérivées partielles d'évolution

Théorème 1.2.10. *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand. Soit $A : V \rightarrow V'$ un opérateur hemicontinu et monotone qui satisfait*

$$(Av, v)_{V' \times V} \geq w \|v\|_V^2 + \lambda, \quad \forall v \in V,$$

$$\|Av\|_{V'} \leq C_1(\|v\|_V + 1), \quad \forall v \in V.$$

Pour des constantes $w > 0$, $C_1 > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, étant donnée $u_0 \in H$ et $f \in L^2(0, T; V')$, alors il existe une fonction unique u satisfait

$$u \in L^2(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \dot{u} \in L^2(0, T; V'),$$

$$\dot{u}(t) + Au(t) = f(t) \text{ p.p.t } \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

Le démonstration cette théorème peuve être trouvée par exemple dans [\[33, 34\]](#).

V- Inégalités variationnelles paraboliques

Théorème 1.2.11. *Soit $V \subset H \subset V'$ un triplet de Gelfand, K est un sous-ensemble non vide fermé et convexe de V , et supposons que $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire, continue et symétrique telle que*

$$\exists \alpha > 0 \text{ et } c_0 \quad a(v, v) + c_0 \|v\|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V.$$

Alors, pour tout $u_0 \in K$ et $f \in L^2(0, T; H)$, il existe une unique fonction u qui satisfait

$$u \in H^1(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad u(t) \in K, \quad \forall t \in [0, T],$$

$$\langle \dot{u}(t), v - u(t) \rangle_{V' \times V} + a(u(t), v - u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_H \quad \forall v \in K, \text{ p.p.t } \in [0, T],$$

$$u(0) = u_0.$$

1.2.5 Lemme de Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de contact, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.2.1. *Soient $m, n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ et $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante et $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$*

(1) Si

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s)ds \right) \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\int_0^t \psi(s)ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s)ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Pour le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient.

Corollaire 1.2.1. Soit $n \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$ et soit $a \geq 0$, si $\psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\psi(t) \leq a + \int_0^t n(s)\psi(s)ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\psi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t n(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

1.2.6 Les inégalités de Hölder et de Young

Lemme 1.2.2. (Inégalité de Young)

Soient $a, b \geq 0$ et $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Lemme 1.2.3. (Inégalité de Hölder)

Soient $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, alors $f \cdot g \in L^1$ et on a

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

CHAPITRE 2

ANALYSE D'UN PROBLÈME DE CONTACT AVEC ADHÉSION ET ENDOMMAGEMENT EN MATÉRIAUX THERMO-ÉLECTRO-VISCOÉLASTIQUES

Dans ce chapitre, nous étudions d'un problème de contact entre deux corps thermo-électro-viscoélastique avec endommagement, le contact est modélisé par les conditions de compliance normale couplées avec l'adhésion. Notre intérêt est de décrire un processus dynamique, et démontrer que le modèle résultant se ramène à un problème mathématique bien posé.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans la première section, nous posons et décrivons le problème mécanique puis nous indiquons les hypothèses sur les données, dans la deuxième section, en utilisant les formules de Green, on propose une formulation variationnelle au problème, et dans la troisième section, on démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible.

Les démonstrations sont basées sur les résultats d'équations d'évolution non linéaires avec la théorie des opérateurs monotones, un résultat classique d'existence et d'unicité sur les arguments du point fixe des inéquations.

2.1 Formulation du problème

Le modèle mécanique que l'on étudie peut se formuler de la manière suivante :

Problème \mathcal{P} . Pour $\ell = 1, 2$, trouver les champs des déplacements $u^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, les champs des contraintes $\sigma^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{S}^d$, les champs des potentiels électriques $\zeta^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, les champs des températures $\tau^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, le champ

d'endommagement $\xi^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, un champ d'adhésion $\varsigma : \Gamma_3 \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$, et les champs des déplacements électriques $D^\ell : \Omega^\ell \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ tels que :

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell (\varepsilon(\dot{u}^\ell)) + \mathcal{B}^\ell (\varepsilon(u^\ell), \tau^\ell, \xi^\ell) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\zeta^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.1)$$

$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - B^\ell \nabla \zeta^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.2)$$

$$\dot{\tau}^\ell - \kappa_0^\ell \Delta \tau^\ell = \Theta^\ell (\varepsilon(u^\ell), \tau^\ell, \xi^\ell) + \chi^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.3)$$

$$\dot{\xi}^\ell - \kappa^\ell \Delta \xi^\ell + \partial \varphi_{K^\ell}(\xi^\ell) \ni \Psi^\ell (\varepsilon(u^\ell), \tau^\ell, \xi^\ell) \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.4)$$

$$\rho^\ell \ddot{u}^\ell = \text{Div } \sigma^\ell + f_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.5)$$

$$\text{div } D^\ell - q_0^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.6)$$

$$u^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1^\ell \times (0, T), \quad (2.7)$$

$$\sigma^\ell \nu^\ell = f_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_2^\ell \times (0, T), \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \sigma_\nu^1 = \sigma_\nu^2 \equiv \sigma_\nu, \\ -\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2) - \gamma_\nu \varsigma^2 R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \sigma_\tau^1 = -\sigma_\tau^2 \equiv \sigma_\tau, \\ -\sigma_\tau = p_\tau(\varsigma) R_\tau(|u_\tau^1 - u_\tau^2|) \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.10)$$

$$\dot{\varsigma} = H_{ad}(\varsigma, \hat{\varsigma}, R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2), R_\tau(|u_\tau^1 - u_\tau^2|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.11)$$

$$\kappa_0^\ell \frac{\partial^\ell \tau^\ell}{\partial \nu^\ell} + \lambda_0^\ell \tau^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T), \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \xi^\ell}{\partial \nu^\ell} = 0 \quad \text{sur } \Gamma^\ell \times (0, T), \quad (2.13)$$

$$\zeta^\ell = 0 \quad \text{sur } \Gamma_a^\ell \times (0, T), \quad (2.14)$$

$$D^\ell \cdot \nu^\ell = q_2^\ell \quad \text{sur } \Gamma_b^\ell \times (0, T), \quad (2.15)$$

$$u^\ell(0) = u_0^\ell, \quad \dot{u}^\ell(0) = v_0^\ell, \quad \xi^\ell(0) = \xi_0^\ell, \quad \tau^\ell(0) = \tau_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell, \quad (2.16)$$

$$\varsigma(0) = \varsigma_0 \quad \text{sur } \Gamma_3. \quad (2.17)$$

Dans ce qui suit, nous fournissons quelques commentaires sur les égalités et les conditions limites (2.1)- (2.17).

Premièrement, les équations (2.1) et (2.2) représentent la loi de constitutive thermo-électro-viscoélastique avec endommagement du matériau dans laquelle $\varepsilon(u^\ell)$ représente le tenseur linéarisé de contrainte, \mathcal{A}^ℓ et \mathcal{B}^ℓ sont des opérateurs non linéaires décrivant respectivement les propriétés purement viscosité et thermo-élasticité avec endommagement, où $E(\zeta^\ell) = -\nabla\zeta^\ell$ est le champ électrique, $\mathcal{E}^\ell = (e_{i,j,k})$ représente le tenseur piézoélectrique du troisième ordre, $(\mathcal{E}^\ell)^*$ est sa transposée et B^ℓ désigne le tenseur de permittivité électrique.

L'équation (2.3) représente la conservation de l'énergie où Θ^ℓ est une fonction constitutive non linéaire qui représente la chaleur générée par le travail des forces internes et χ^ℓ est une source de chaleur volumique donnée. L'évolution du champ d'endommagement est régie par l'inclusion de type parabolique donnée par la relation (2.4). Les équations (2.5) et (2.6) sont les équations d'équilibre pour les champs de contrainte et de déplacement électrique, respectivement. Ensuite, les équations (2.7) et (2.8) représentent respectivement la condition aux limites de déplacement et de traction.

La condition (2.9) représente les conditions normales de compliance avec adhérence où p_ν est la fonction de compliance normale, γ_ν est un coefficient d'adhérence donné et R_ν est l'opérateur de troncature (voir (1.9) et figure (1.1.4)). La condition (2.10) représente la condition de contact adhésif sur le plan tangentiel, dans laquelle p_τ est une fonction donnée et R_τ est l'opérateur de troncature (voir (1.11)).

Ensuite, l'équation (2.11) représente l'équation différentielle ordinaire qui décrit l'évolution du champ d'adhésion et elle a déjà été utilisée dans [4, 29]. La relation (2.12) représentent une condition aux limites de Fourier pour la température sur Γ^ℓ . La condition aux limites (2.13) décrit une condition aux limites de Neumann homogène où $\frac{\partial \xi^\ell}{\partial \nu^\ell}$ est la dérivée normale de ξ^ℓ . (2.14) et (2.15) représentent les conditions aux limites électriques. Enfin, (2.16) et (2.17) représente les conditions initiales.

Dans l'étude du problème \mathcal{P} , nous considérons les hypothèses suivantes :

L'opérateur de viscosité $\mathcal{A}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } C_{\mathcal{A}^\ell}^1, C_{\mathcal{A}^\ell}^2 > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{A}^\ell(x, \epsilon)| \leq C_{\mathcal{A}^\ell}^1 |\epsilon| + C_{\mathcal{A}^\ell}^2, \quad \forall \epsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) Il existe } m_{\mathcal{A}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad (\mathcal{A}^\ell(x, \epsilon_1) - \mathcal{A}^\ell(x, \epsilon_2)) \cdot (\epsilon_1 - \epsilon_2) \geq m_{\mathcal{A}^\ell} |\epsilon_1 - \epsilon_2|^2 \\ \quad \forall \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \mathcal{A}^\ell(x, \epsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \\ \quad \text{pour toute } \epsilon \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(d) L'application } \epsilon \mapsto \mathcal{A}^\ell(x, \epsilon) \text{ est continue sur } \mathbb{S}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

L'opérateur d'élasticité $\mathcal{B}^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } M_{\mathcal{B}^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\mathcal{B}^\ell(x, \epsilon_1, r_1, d_1) - \mathcal{B}^\ell(x, \epsilon_2, r_2, d_2)| \\ \quad \leq M_{\mathcal{B}^\ell} (|\epsilon_1 - \epsilon_2| + |r_1 - r_2| + |d_1 - d_2|) \\ \quad \forall \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) L'application } x \rightarrow \mathcal{B}^\ell(x, \epsilon, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \\ \quad \text{pour toute } \epsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } r, d \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \mathcal{B}^\ell(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } \mathcal{H}^\ell. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

L'opérateur de permittivité électrique $B^\ell = (B_{ij}^\ell) : \Omega^\ell \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } B_{ij}^\ell = B_{ji}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), 1 \leq i, j \leq d. \\ \text{(b) Il existe une constante } M_{B^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad B^\ell \pi \cdot \pi \geq M_{B^\ell} |\pi|^2, \quad \forall \pi = (\pi_i) \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

L'opérateur piézoélectrique $\mathcal{E}^\ell = (e_{ijk}^\ell) : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$e_{ijk}^\ell = e_{ikj}^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), 1 \leq i, j, k \leq d. \quad (2.21)$$

La fonction énergétique $\Theta^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_{\Theta^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\Theta^\ell(x, \epsilon_1, r_1, d_1) - \Theta^\ell(x, \epsilon_2, r_2, d_2)| \\ \quad \leq L_{\Theta^\ell} (|\epsilon_1 - \epsilon_2| + |r_1 - r_2| + |d_1 - d_2|) \\ \quad \text{pour tous } \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tous } r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \\ \quad \text{pour tous } d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) L'application } x \mapsto \Theta^\ell(x, \epsilon, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell, \\ \quad \text{pour tous } \epsilon \in \mathbb{S}^d, \text{ pour tous } r, d \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \Theta^\ell(x, 0, 0, 0) \in L^2(\Omega^\ell). \end{array} \right. \quad (2.22)$$

La fonction source d'endommagement $\Psi^\ell : \Omega^\ell \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } M_{\Psi^\ell} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |\Psi^\ell(x, \epsilon_1, r_1, d_1) - \Psi^\ell(x, \epsilon_2, r_2, d_2)| \\ \quad \leq M_{\Psi^\ell} (|\epsilon_1 - \epsilon_2| + |r_1 - r_2| + |d_1 - d_2|) \\ \quad \forall \epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{S}^d, \forall r_1, r_2, d_1, d_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell. \\ \text{(b) } \forall \epsilon \in \mathbb{S}^d \text{ et } r, d \in \mathbb{R}, \Psi^\ell(\cdot, \epsilon, r, d) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega^\ell. \\ \text{(c) L'application } x \mapsto \Psi^\ell(x, 0, 0, 0) \text{ appartient à } L^2(\Omega^\ell). \end{array} \right. \quad (2.23)$$

La fonction de compliance normale $p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) } p_\nu(\cdot, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \text{ pour toute } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } p_\nu(x, r) = 0 \quad \forall r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

La fonction de contact tangentiel $p_\tau : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe une constante } L_\tau > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\tau(x, r_1) - p_\tau(x, r_2)| \leq L_\tau |r_1 - r_2| \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) Il existe une constante } M_\tau > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\tau(x, r)| \leq M_\tau \quad \forall r \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(c) } p_\tau(\cdot, r) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) L'application } x \mapsto p_\tau(x, 0) \text{ appartient à } L^2(\Gamma_3). \end{array} \right. \quad (2.25)$$

La fonction de taux d'adhésion $H_{ad} : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) Il existe } L_{ad} > 0 \text{ tel que} \\ \quad |H_{ad}(x, r_1, d_1, s_1, \lambda_1) - H_{ad}(x, r_2, d_2, s_2, \lambda_2)| \\ \quad \leq L_{ad} |r_1 - r_2| + |d_1 - d_2| + |s_1 - s_2| + |\lambda_1 - \lambda_2| \\ \quad \forall r_1, r_2, d_1, d_2, s_1, s_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(b) L'application } x \mapsto H_{ad}(x, r, d, s, \lambda) \text{ est mesurable sur } \Gamma_3, \\ \quad \text{pour toute } r, d, s \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^{d-1}. \\ \text{(c) L'application } (r, d, s, \lambda) \mapsto H_{ad}(x, r, d, s, \lambda) \text{ est continue sur} \\ \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ \text{(d) } H_{ad}(x, 0, d, s, \lambda) = 0, \quad \forall d, s \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \\ \text{(e) } H_{ad}(x, r, d, s, \lambda) \geq 0, \quad \forall r \leq 0, d, s \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3, \text{ et} \\ \quad H_{ad}(x, r, d, s, \lambda) \leq 0, \quad \forall r \geq 1, d, s \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}^{d-1}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Dans ce paragraphe, nous supposons que la masse volumique ρ^ℓ satisfait :

$$\rho^\ell \in L^\infty(\Omega^\ell), \text{ il existe } \rho^* > 0 \text{ tels que } \rho^\ell \geq \rho^* \text{ p.p. } x \in \Omega^\ell, \ell = 1, 2. \quad (2.27)$$

Nous supposons aussi que les forces volumiques f_0^ℓ , les tractions f_2^ℓ , et les charges électriques volumiques q_0^ℓ et surfaciques q_2^ℓ ont les régularités

$$f_0^\ell \in L^2(0, T; L^2(\Omega^\ell)^d), \quad f_2^\ell \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_2^\ell)^d), \quad (2.28)$$

$$q_0^\ell \in C(0, T; L^2(\Omega^\ell)), \quad q_2^\ell \in C(0, T; L^2(\Gamma_b^\ell)), \quad (2.29)$$

$$q_2^\ell(t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.30)$$

Le coefficient d'adhésion γ_ν satisfait :

$$\gamma_\nu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu \geq 0, \quad \text{p.p. sur } \Gamma_3. \quad (2.31)$$

Le coefficient d'énergie κ_0^ℓ et le coefficient de diffusion de microfissures κ^ℓ vérifient :

$$\kappa_0^\ell > 0, \quad \kappa^\ell > 0. \quad (2.32)$$

Finalement, les conditions initiales satisfont :

$$u_0^\ell \in V^\ell, \quad v_0^\ell \in H^\ell, \quad \tau_0^\ell \in \mathbb{L}_1^\ell, \quad \xi_0^\ell \in K^\ell, \quad \text{p.p. } x \in \Omega^\ell, \quad (2.33)$$

$$\varsigma_0 \in L^2(\Gamma_3), \quad 0 \leq \varsigma_0 \leq 1, \quad \text{p.p. } x \in \Gamma_3. \quad (2.34)$$

Nous allons utiliser un produit scalaire modifié sur l'espace de Hilbert, défini par

$$((u, v))_H = \sum_{\ell=1}^2 (\rho^\ell u^\ell, v^\ell)_{H^\ell}, \quad \forall u, v \in H. \quad (2.35)$$

Soit $||| \cdot |||_H$ la norme associée donnée par

$$||| v |||_H = ((v, v))_H^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v \in H. \quad (2.36)$$

Il découle de l'hypothèse (2.27) que $||| \cdot |||_H$ et $\| \cdot \|_H$ sont des normes équivalentes sur H , et aussi l'application d'inclusion de $(V, \| \cdot \|_V)$ dans $(H, \| \cdot \|_H)$ est continue et dense. On note V' l'espace dual de V . En identifiant H avec son propre dual, on peut écrire le triplet de Gelfand

$$V \subset H \subset V'.$$

Nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{V' \times V}$ pour représenter l'appariement de dualité entre V' et V , rappeler que

$$(u, v)_{V' \times V} = ((u, v))_H, \quad \forall u \in H, \forall v \in V. \quad (2.37)$$

On définit la fonction $f = (f^1, f^2) : [0, T] \rightarrow V'$ par

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot v^\ell da, \quad \forall v \in V, t \in (0, T), \quad (2.38)$$

et, la fonction $q = (q^1, q^2) : [0, T] \rightarrow W$ par

$$(q(t), \Psi)_W = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell(t) \cdot \Psi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell(t) \cdot \Psi^\ell da, \quad \forall \Psi \in W, t \in (0, T), \quad (2.39)$$

notons que les définitions de f et q sont basées sur le théorème de représentation de Riesz; de plus, les conditions (2.28) et (2.29) impliquent

$$f \in L^2(0, T; V'), \quad q \in C(0, T; W). \quad (2.40)$$

Nous introduisons les fonctions continues suivantes $a : \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $a_0 : \mathbb{L}_1 \times \mathbb{L}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, par

$$a_0(\xi, \zeta) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \xi^\ell \cdot \nabla \zeta^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \xi^\ell \zeta^\ell da, \quad (2.41)$$

$$a(\xi, \zeta) = \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \xi^\ell \cdot \nabla \zeta^\ell dx. \quad (2.42)$$

On définit aussi la fonctionnelle d'adhésion comme suit $j_{ad} : L^\infty(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{ad}(\varsigma, u, v) = \int_{\Gamma_3} (-\gamma_\nu \varsigma^2 R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2)[v_\nu] + p_\tau(\varsigma) R_\tau(|u_\tau^1 - u_\tau^2|)[v_\tau]) da, \quad (2.43)$$

et, la fonctionnelle de compliance normale $j_{vc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$j_{vc}(u, v) = \int_{\Gamma_3} p_\nu (u_\nu^1 + u_\nu^2) [v_\nu] da. \quad (2.44)$$

Il découle des hypothèses (2.24), (2.25) et (2.28)-(2.31) que les intégrales dans (2.38), (2.39) et (2.41)-(2.44) sont bien définies.

2.2 Formulation variationnelle

A l'aide des formules de Green on voit directement que si u , σ et ς sont des fonctions suffisamment régulières qui satisfont (2.5), (2.7), (2.9) et (2.10) avec (2.43), (2.44) pour tout $t \in [0, T]$, on déduit que

$$(\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\text{Div} \sigma^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in H_1^\ell,$$

on a

$$\int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(v^\ell) dx + \int_{\Omega^\ell} \text{Div} \sigma^\ell \cdot v^\ell dx = \int_{\Gamma_1^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da + \int_{\Gamma_2^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da + \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \\ \forall v^\ell \in V^\ell,$$

de la définition de l'espace V^ℓ avec (2.5) et (2.7)-(2.8), on obtient

$$\int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(v^\ell) dx + \int_{\Omega^\ell} \rho^\ell \ddot{u}^\ell \cdot v^\ell dx - \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot v^\ell dx = \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot v^\ell da + \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell,$$

la formule de Green pour $\ell = 1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^1} \sigma^1 \varepsilon(v^1) dx + \int_{\Omega^1} \rho^1 \ddot{u}^1 \cdot v^1 dx - \int_{\Omega^1} f_0^1 \cdot v^1 dx &= \int_{\Gamma_2^1} f_2^1 \cdot v^1 da \\ &+ \int_{\Gamma_3^1} \sigma^1 \nu^1 \cdot v^1 da, \quad \forall v^1 \in V^1, \end{aligned} \quad (2.45)$$

la formule de Green pour $\ell = 2$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^2} \sigma^2 \varepsilon(v^2) dx + \int_{\Omega^2} \rho^2 \ddot{u}^2 \cdot v^2 dx - \int_{\Omega^2} f_0^2 \cdot v^2 dx &= \int_{\Gamma_2^2} f_2^2 \cdot v^2 da \\ &+ \int_{\Gamma_3^2} \sigma^2 \nu^2 \cdot v^2 da, \quad \forall v^2 \in V^2, \end{aligned} \quad (2.46)$$

à addition (2.45) et (2.46)

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \sigma^\ell \varepsilon(v^\ell) dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} \rho^\ell \ddot{u}^\ell \cdot v^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot v^\ell dx &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot v^\ell da \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 (\rho^\ell \ddot{u}^\ell, v^\ell)_{H^\ell} &= \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot v^\ell da \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell, \end{aligned}$$

d'après les définition de produit scalaire

$$\sum_{\ell=1}^2 (\rho^\ell \ddot{u}^\ell, v^\ell)_{H^\ell} = ((\ddot{u}, v))_{H^\ell} = (\ddot{u}, v)_{V' \times V}, \quad \forall \ddot{u} \in H, \forall v \in V,$$

on a

$$\sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\ddot{u}, v)_{V' \times V} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell \cdot v^\ell da$$

$$+ \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3^\ell} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell,$$

d'après (2.38)

$$(f(t), v)_{V' \times V} = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} f_0^\ell(t) \cdot v^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_2^\ell} f_2^\ell(t) \cdot v^\ell da, \quad \forall v \in V, t \in (0, T),$$

en suite

$$\sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da, \quad \forall v^\ell \in V^\ell.$$

On calcule $\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da = ? :$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da &= \int_{\Gamma_3} \sigma^1 \nu^1 \cdot v^1 da + \int_{\Gamma_3} \sigma^2 \nu^2 \cdot v^2 da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu^1 v_\nu^1 da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu^2 v_\nu^2 da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau^1 v_\tau^1 da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau^2 v_\tau^2 da \\ &= \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu (v_\nu^1 + v_\nu^2) da + \int_{\Gamma_3} \sigma_\tau (v_\tau^1 - v_\tau^2) da \\ &= \int_{\Gamma_3} (-p_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2) + \gamma_\nu \varsigma^2 R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2)) (v_\nu^1 + v_\nu^2) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (-p_\tau(\varsigma) R_\tau(|u_\tau^1 - u_\tau^2|)) (v_\tau^1 - v_\tau^2) da, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_3} \sigma^\ell \nu^\ell \cdot v^\ell da &= \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \varsigma^2 R_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2) [v_\nu] da - \int_{\Gamma_3} p_\tau(\varsigma) R_\tau(|u_\tau^1 - u_\tau^2|) [v_\tau] da \\ &\quad - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu^1 + u_\nu^2) [v_\nu] da. \end{aligned}$$

D'après (2.43)-(2.44), on a

$$\sum_{\ell=1}^2 (\sigma^\ell, \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} = (f(t), v)_{V' \times V} - j_{ad}(\varsigma(t), u(t), v) - j_{\nu c}(u(t), v),$$

$$\forall v^\ell \in V^\ell,$$

d'après (2.1), on a

$$\begin{aligned}
 & (\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\
 & + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell (\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta^\ell(t), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\
 & + j_{ad}(\varsigma(t), u(t), v) + j_{vc}(u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V}, \quad \forall v^\ell \in V^\ell, t \in (0, T).
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

Maintenant, pour tout $t \in [0, T]$ et de (2.3), on obtient

$$\begin{aligned}
 (\dot{\tau}^\ell(t) - \chi^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} - (\kappa_0^\ell \Delta \tau^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} &= (\Theta^\ell (\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t)), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \\
 \forall \delta^\ell \in \mathbb{L}_1^\ell,
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

en utilisant la formule de Green, on a

$$-\kappa_0^\ell (\Delta \tau^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell(t) \cdot \nabla \delta^\ell dx - \kappa_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial^\ell \tau^\ell(t)}{\partial \nu^\ell} \delta^\ell dx, \quad \forall \delta^\ell \in \mathbb{L}_1^\ell,$$

on a d'après (2.12)

$$-\kappa_0^\ell (\Delta \tau^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} = \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell(t) \cdot \nabla \delta^\ell dx + \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \tau^\ell(t) \delta^\ell dx, \quad \forall \delta^\ell \in \mathbb{L}_1^\ell, \tag{2.49}$$

nous utilisons l'égalité (2.48) et (2.49), on trouve

$$\begin{aligned}
 & (\dot{\tau}^\ell(t) - \chi^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell(t) \cdot \nabla \delta^\ell dx + \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \tau^\ell(t) \delta^\ell dx \\
 & = (\Theta^\ell (\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t)), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \delta^\ell \in \mathbb{L}_1^\ell,
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}^\ell(t) - \chi^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa_0^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \tau^\ell(t) \cdot \nabla \delta^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \lambda_0^\ell \int_{\Gamma^\ell} \tau^\ell(t) \delta^\ell dx \\
 & = \sum_{\ell=1}^2 (\Theta^\ell (\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t)), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \delta^\ell \in \mathbb{L}_1^\ell,
 \end{aligned}$$

d'après (2.41), on obtient

$$\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}^\ell(t) - \chi^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\tau(t), \delta) = \sum_{\ell=1}^2 (\Theta^\ell (\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t)), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)},$$

$$\forall \delta^\ell \in \mathbb{L}_1^\ell. \quad (2.50)$$

Soit $\xi^\ell(t) \in K^\ell$ et pour tout $t \in [0, T]$, de la définition (1.17) de $\partial\psi_{K^\ell}(\xi^\ell)$ et de (2.4), on obtient

$$\left(\Psi^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t)) - \dot{\xi}^\ell(t) + \kappa^\ell \Delta \xi^\ell(t), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} \leq 0, \quad \forall \delta^\ell \in K^\ell,$$

donc

$$\begin{aligned} & \left(\Psi^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t)), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} \\ & \leq \left(\dot{\xi}^\ell(t), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} - \kappa^\ell \left(\Delta \xi^\ell(t), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \end{aligned}$$

en utilisant la formule de Green, on a

$$\left(\Delta \xi^\ell(t), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + \left(\nabla \xi^\ell(t), \nabla(\delta^\ell - \xi^\ell(t)) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} = \int_{\Gamma^\ell} \frac{\partial \xi^\ell(t)}{\partial \nu} \cdot (\delta^\ell - \xi^\ell(t)) da,$$

d'après (2.13), on obtient

$$\left(\Delta \xi^\ell(t), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} = - \int_{\Omega^\ell} \nabla \xi^\ell(t) \cdot \nabla(\delta^\ell - \xi^\ell(t)) dx,$$

en suite

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\xi}^\ell(t), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \xi^\ell(t) \cdot \nabla(\delta^\ell - \xi^\ell(t)) dx \\ & \geq \left(\Psi^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t)), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\xi}^\ell(t), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + \sum_{\ell=1}^2 \kappa^\ell \int_{\Omega^\ell} \nabla \xi^\ell(t) \cdot \nabla(\delta^\ell - \xi^\ell(t)) dx \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t)), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \delta^\ell \in K^\ell, \end{aligned}$$

d'après (2.42), on trouve

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\xi}^\ell(t), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\xi(t), \delta - \xi(t)) \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t)), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)}, \quad \forall \delta^\ell \in K^\ell. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Enfin, en utilise la formule de Green pour les inconnues électrique du problème ainsi que les conditions (2.6), (2.14) et la définition (2.39), on a

$$(D^\ell, \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} + (\operatorname{div} D^\ell, \Psi^\ell)_{H^\ell} = \int_{\Gamma^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \Psi^\ell da, \quad \forall \Psi^\ell \in H_1^\ell,$$

d'où

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \Psi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} D^\ell \cdot \Psi^\ell dx = \int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \Psi^\ell da + \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \Psi^\ell da, \\ \forall \Psi^\ell \in H_1^\ell,$$

pour $\ell = 1, 2$, on a d'après (2.14)

$$\int_{\Gamma_a^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \Psi^\ell da = 0,$$

alors

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \Psi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} \operatorname{div} D^\ell \cdot \Psi^\ell dx = \int_{\Gamma_b^\ell} D^\ell \nu^\ell \cdot \Psi^\ell da, \quad \forall \Psi^\ell \in H_1^\ell,$$

on a d'après (2.6) et (2.15)

$$\int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \Psi^\ell dx + \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \Psi^\ell dx = \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \Psi^\ell da, \quad \forall \Psi^\ell \in H_1^\ell,$$

la formule de Green pour $\ell = 1$

$$\int_{\Omega^1} D^1 \cdot \nabla \Psi^1 dx + \int_{\Omega^1} q_0^1 \cdot \Psi^1 dx = \int_{\Gamma_b^1} q_2^1 \cdot \Psi^1 da, \quad \forall \Psi^1 \in H_1^1, \quad (2.52)$$

la formule de Green pour $\ell = 2$

$$\int_{\Omega^2} D^2 \cdot \nabla \Psi^2 dx + \int_{\Omega^2} q_0^2 \cdot \Psi^2 dx = \int_{\Gamma_b^2} q_2^2 \cdot \Psi^2 da, \quad \forall \Psi^2 \in H_1^2, \quad (2.53)$$

à addition (2.52) et (2.53), on a

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} D^\ell \cdot \nabla \Psi^\ell dx + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \Psi^\ell dx = \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \Psi^\ell da,$$

alors

$$\sum_{\ell=1}^2 (D^\ell, \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \Psi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \Psi^\ell da = 0,$$

on a d'après (2.39)

$$\sum_{\ell=1}^2 \int_{\Omega^\ell} q_0^\ell \cdot \Psi^\ell dx - \sum_{\ell=1}^2 \int_{\Gamma_b^\ell} q_2^\ell \cdot \Psi^\ell da = (q(t), \Psi)_W,$$

on a

$$\sum_{\ell=1}^2 (D^\ell, \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} + (q(t), \Psi)_W = 0,$$

donc

$$-\sum_{\ell=1}^2 (D^\ell, \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \Psi)_W,$$

de (2.2), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (B^\ell \nabla \zeta^\ell(t), \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)), \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} &= (q(t), \Psi)_W, \\ \forall \Psi \in W, t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.54)$$

De (2.1), (2.2), (2.47), (2.50), (2.51), (2.54), (2.11), (2.16) et (2.17), on obtient la formulation variationnelle du problème \mathcal{P} .

Problème \mathcal{PV} . Trouver les champs des déplacements $u = (u^1, u^2) : [0, T] \rightarrow V$, les champs des contraintes $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$, et les champs des déplacements électriques $D = (D^1, D^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{W}$, un champ de potentiel électrique $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) : [0, T] \rightarrow W$, les champs des températures $\tau = (\tau^1, \tau^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{L}_1$, les champs d'endommagements $\xi = (\xi^1, \xi^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{L}_1$, et un champ d'adhésion $\varsigma : [0, T] \rightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tels que :

$$\sigma^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\dot{u}^\ell)) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell), \tau^\ell, \xi^\ell) + (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.55)$$

$$D^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell) - B^\ell \nabla \zeta^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell \times (0, T), \quad (2.56)$$

$$\left. \begin{aligned} &(\ddot{u}(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta^\ell(t), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &+ j_{ad}(\varsigma(t), u(t), v) + j_{vc}(u(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, t \in (0, T), \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (\tilde{\tau}^\ell(t) - \chi^\ell(t), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} + a_0(\tau(t), \delta) &= \sum_{\ell=1}^2 (\Theta^\ell(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t)), \delta^\ell)_{L^2(\Omega^\ell)} \\ \forall \delta \in \mathbb{L}_1, \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned}
 \xi(t) \in K, \quad & \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\xi}^\ell(t), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} + a(\xi(t), \delta - \xi(t)) \\
 & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\Psi^\ell \left(\varepsilon(u^\ell(t)), \tau^\ell(t), \xi^\ell(t) \right), \delta^\ell - \xi^\ell(t) \right)_{L^2(\Omega^\ell)} \\
 & \quad \forall \delta \in K, \quad t \in (0, T),
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{\ell=1}^2 \left(B^\ell \nabla \zeta^\ell(t), \nabla \Psi^\ell \right)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 \left(\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u^\ell(t)), \nabla \Psi^\ell \right)_{H^\ell} = (q(t), \Psi)_W \\
 \quad \forall \Psi \in W, \quad t \in (0, T),
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\dot{\zeta}(t) = H_{ad} \left(\zeta(t), \hat{\zeta}(t), R_\nu(u_\nu^1(t) + u_\nu^2(t)), R_\tau(|u_\tau^1(t) - u_\tau^2(t)|) \right) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \tag{2.61}$$

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0, \quad \tau(0) = \tau_0, \quad \xi(0) = \xi_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0. \tag{2.62}$$

Remarque 2.2.1. On note que, dans le Problème \mathcal{P} et dans le problème variationnel \mathcal{PV} nous n'avons pas besoin d'imposer explicitement la restriction $0 \leq \zeta \leq 1$.

De l'équation (2.61) on obtient que $\zeta(x, t) \leq \zeta_0(x)$ et c'est pourquoi l'hypothèse (2.34) montre que $\zeta(x, t) \leq 1$ pour $t \geq 0$, p.p. $x \in \Gamma_3$.

D'autre part, si $\zeta(x, t_0) = 0$ à l'instant t_0 , alors il s'ensuit de (2.61) que $\dot{\zeta}(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$ et ainsi $\zeta(x, t) = 0$ pour tout $t \geq t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$.

Nous concluons que $0 \leq \zeta(x, t) \leq 1$ pour tout $t \in [0; T]$, p.p. $x \in \Gamma_3$.

Dans le reste de cette section, nous présentons quelques inégalités comprenant les fonctionnelles j_{ad} et $j_{\nu c}$ qui seront utilisées dans les sections suivantes.

Ci-dessous dans cette section, $\varsigma, \varsigma_1, \varsigma_2$ dénotent les éléments de $L^2(\Gamma_3)$ tel que $0 \leq \varsigma, \varsigma_1, \varsigma_2 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , $u_1, u_2, v_1, v_2, u^\ell$ et v^ℓ représentent des éléments de V^ℓ , et C est une constante générique positive qui peut dépendre de $\Omega^\ell, \Gamma_3, \gamma_\tau, \gamma_\nu, p_\nu, p_\tau, L$ et M , dont sa valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

Pour la raison de simplicité, nous supprimons dans ce qui suit la dépendance explicite aux fonctions diverses sur $x \in \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Gamma_3$.

D'abord nous faisons remarquer que les fonctionnelles j_{ad} et $j_{\nu c}$ sont linéaires par rapport au dernier argument et donc

$$\begin{cases} j_{ad}(\varsigma, u, -v) & = -j_{ad}(\varsigma, u, v), \\ j_{\nu c}(u, -v) & = -j_{\nu c}(u, v). \end{cases}$$

Ensuite, en utilisant (2.43) et les inégalités $|R_\nu| \leq L$, $|R_\tau| \leq M$, $0 \leq \varsigma_1, \varsigma_2 \leq 1$, nous

déduisons que

$$j_{ad}(\varsigma_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\varsigma_2, u_2, u_1 - u_2) \leq C \int_{\Gamma_3} |\varsigma_1 - \varsigma_2| \|u_1 - u_2\| da,$$

en combinant cette inégalité avec (1.15), nous obtenons

$$j_{ad}(\varsigma_1, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\varsigma_2, u_2, u_1 - u_2) \leq C \|\varsigma_1 - \varsigma_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V, \quad (2.63)$$

en choisissant $\varsigma_1 = \varsigma_2 = \varsigma$ dans (2.63), nous trouvons

$$j_{ad}(\varsigma, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\varsigma, u_2, u_1 - u_2) \leq 0, \quad (2.64)$$

des manipulations semblables, basées sur la Lipschitzialité des opérateurs R_ν et R_τ montrent que

$$|j_{ad}(\varsigma, u_1, v) - j_{ad}(\varsigma, u_2, v)| \leq C \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V,$$

aussi, nous prenons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (2.64) ensuite nous utilisons les égalités $R_\nu(0) = 0, R_\tau(0) = 0$ et (2.63) pour obtenir

$$j_{ad}(\varsigma, u, v) \geq 0.$$

Maintenant, nous utilisons (2.44) pour voir que

$$j_{\nu c}(u_1, v) + j_{\nu c}(u_2, v) \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])| |[v_\nu]| da,$$

ensuite, (2.24)(b) et (1.15) impliquent

$$|j_{\nu c}(u_1, v) + j_{\nu c}(u_2, v)| \leq C \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V,$$

nous utilisons encore une fois (2.44) pour obtenir

$$j_{\nu c}(u_1, u_2 - u_1) + j_{\nu c}(u_2, u_1 - u_2) = - \int_{\Gamma_3} (p_\nu([u_{1\nu}]) - p_\nu([u_{2\nu}])) ([u_{1\nu}] - [u_{2\nu}]) da,$$

et alors, (2.24)(c) implique

$$j_{\nu c}(u_1, u_2) - j_{\nu c}(u_1, u_1) + j_{\nu c}(u_2, u_1) - j_{\nu c}(u_2, u_2) \leq 0, \quad (2.65)$$

aussi, nous prenons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans l'inégalité (2.24)(c) et (2.65) pour obtenir

$$j_{\nu c}(v, v) \geq 0.$$

2.3 Existence et unicité de la solution

Notre intérêt principal dans cette section est d'obtenir un résultat d'existence et d'unicité pour le problème variationnel **Problème \mathcal{PV}** .

Théorème 2.3.1. *Sous les hypothèses (2.18)-(2.34), le problème variationnel \mathcal{PV} admet une solution unique $\{u, \zeta, \tau, \sigma, \xi, \varsigma, D\}$ ayant la régularité suivante :*

$$u \in W^{1,2}(0, T; V) \cap C^1(0, T; H), \quad \ddot{u} \in L^2(0, T; V'), \quad (2.66)$$

$$\zeta \in C(0, T; W), \quad (2.67)$$

$$\tau \in L^2(0, T; \mathbb{L}_1) \cap H^1(0, T; \mathbb{L}_0), \quad (2.68)$$

$$\sigma \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad (\text{Div } \sigma^1, \text{Div } \sigma^2) \in L^2(0, T; V'), \quad (2.69)$$

$$\xi \in H^1(0, T; \mathbb{L}_0) \cap L^2(0, T; \mathbb{L}_1), \quad (2.70)$$

$$\varsigma \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}, \quad (2.71)$$

$$D \in C(0, T; \mathcal{W}). \quad (2.72)$$

Un jeu de fonctions $\{u, \zeta, \tau, \sigma, \xi, \varsigma, D\}$ qui satisfait (2.55)-(2.62) est appelé solution faible du Problème de contact \mathcal{P} .

Nous concluons que sous les hypothèses (2.18)-(2.34), le problème mécanique (2.1)-(2.17) a une solution faible unique qui satisfait (2.66)-(2.72).

Passons maintenant à la démonstration du théorème (2.3.1) qui s'effectue en plusieurs étapes que nous prouvons dans ce qui suit :

Démonstration du Théorème 2.3.1

Nous supposons dans la suite que les hypothèses (2.18)-(2.34) sont vérifiées. En outre, partout dans cette section, C représentera une constante positive générique qui peut dépendre de $\Omega^\ell, \Gamma_1^\ell, \Gamma_2^\ell, \Gamma_3, p_\nu, p_\tau, \gamma_\nu, \mathcal{A}^\ell, \mathcal{B}^\ell, \varepsilon^\ell, B^\ell, H_{ad}, \Theta^\ell, \Psi^\ell, k^\ell, L$ et M , dont la valeur peut changer d'un endroit à l'autre.

Première étape : Soit $\eta = (\eta^1, \eta^2) \in L^2(0, T; V')$ donné, et nous considérons le problème variationnel suivant :

Problème \mathcal{PV}_η^u . Trouver les champs des déplacements $u_\eta = (u_\eta^1, u_\eta^2) : [0, T] \rightarrow V$ tels que :

$$(\ddot{u}_\eta(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_\eta^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\eta(t), v)_{V' \times V} \quad (2.73)$$

$$= (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in (0, T),$$

$$u_\eta^\ell(0) = u_0^\ell, \quad \dot{u}_\eta^\ell(0) = v_0^\ell \quad \text{dans } \Omega^\ell.$$

Pour l'étude de ce problème on a le résultat suivant d'existence et d'unicité.

Lemme 2.3.1. *Le problème \mathcal{PV}_η^u possède une solution unique qui satisfait la régularité (2.66).*

Démonstration. On définit l'opérateur $A : V \rightarrow V'$ par

$$(Au, v)_{V' \times V} = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u^\ell), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad \forall u, v \in V, \quad (2.74)$$

en utilisant (1.14), (2.18) et (2.74), il s'ensuit que

$$\|Au - Av\|_{V'}^2 \leq \sum_{\ell=1}^2 \|\mathcal{A}^\ell \varepsilon(u^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(v^\ell)\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \quad \forall u, v \in V,$$

et en gardant à l'esprit le théorème de Krasnoselski (1.2.8) (voir [23], p.60), on en déduit que $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur continu et donc semi-continu.

Maintenant, par (1.14), (2.18) (b) et (2.74), on trouve

$$(Au - Av, u - v)_{V' \times V} \geq \min \{m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}\} \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V, \quad (2.75)$$

où $m = \min \{m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}\}$, i.e. $A : V \rightarrow V'$ est un opérateur monotone. On prend $v = 0$ dans (2.75) et on obtient

$$\begin{aligned} (Au, u)_{V' \times V} &\geq m \|u\|_V^2 - \|Ao\|_{V'} \|u\|_V \\ &\geq \frac{1}{2} m \|u\|_V^2 - \frac{1}{2m} \|Ao\|_{V'}^2 \quad \forall u \in V, \end{aligned}$$

de plus, à l'aide de (2.18) (a) et (2.74) nous déduisons que

$$\|Au\|_{V'} \leq C^1 \|u\|_V + C^2 \quad \forall u \in V,$$

où $C^1 = \max \{C_{\mathcal{A}^1}^1, C_{\mathcal{A}^2}^1\}$ et $C^2 = \max \{C_{\mathcal{A}^1}^2, C_{\mathcal{A}^2}^2\}$.

Enfin, nous rappelons que par (2.40) nous avons $f - \eta \in L^2(0, T; V')$ et $v_0 \in H$.

Il vient du Théorème (1.2.10) qu'il existe une unique fonction v_η qui satisfait

$$v_\eta \in L^2(0, T; V) \cap C(0, T; H), \quad \dot{v}_\eta \in L^2(0, T; V'), \quad (2.76)$$

$$\dot{v}_\eta(t) + Av_\eta(t) + \eta(t) = f(t), \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (2.77)$$

$$v_\eta(0) = v_0. \quad (2.78)$$

Soit $u_\eta : [0, T] \rightarrow V$ une fonction définie par

$$u_\eta(t) = \int_0^t v_\eta(s) ds + u_0 \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.79)$$

On déduit de (2.74) et (2.76)-(2.79) que u_η est la solution unique du problème variationnel \mathcal{PV}_η^u et qu'elle satisfait la régularité exprimée en (2.66). ■

Deuxième étape : Soit $\eta \in L^2(0, T; V')$, nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu au lemme (2.3.1) et nous considérons le problème variationnel suivant :

Problème \mathcal{PV}_η^ζ . Trouver le potentiel électrique $\zeta_\eta = (\zeta_\eta^1, \zeta_\eta^2) : [0, T] \rightarrow W$ tel que :

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^2 (B^\ell \nabla \zeta_\eta^\ell(t), \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} \\ = (q(t), \Psi)_W \quad \forall \Psi \in W, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.2.

1. Le problème \mathcal{PV}_η^ζ possède une solution unique qui satisfait la régularité (2.67).
2. si ζ_i représente la solution du Problème \mathcal{PV}_η^ζ correspondant à u_i , $i = 1, 2$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_W \leq C \|u_1(t) - u_2(t)\|_V \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.81)$$

Démonstration. Soit $b(., .) : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par

$$b(\zeta, \Psi) = \sum_{\ell=1}^2 (B^\ell \nabla \zeta^\ell, \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \zeta, \Psi \in W,$$

nous utilisons (1.16) et (2.20) pour déduire que $b(., .)$ est continue, symétrique et coercitive sur W .

En outre, nous appliquons le théorème de représentation de Riesz (1.2.1) pour définir la fonction $L_\eta : [0, T] \rightarrow W$ tel que

$$(L_\eta(t), \Psi)_W = (q(t), \Psi)_W + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} \quad \forall \Psi \in W, \quad t \in (0, T),$$

en appliquant le théorème de Lax - Milgram (1.2.7) on obtient l'existence et l'unicité $\zeta_\eta(t) \in W$ tel que

$$b(\zeta_\eta(t), \Psi) = (L_\eta(t), \Psi)_W \quad \forall \Psi \in W,$$

nous concluons que $\zeta_\eta(t)$ est une solution du Problème \mathcal{PV}_η^ζ .

Pour $t_1, t_2 \in [0, T]$, en utilisant des arguments basés sur (1.16), (2.20), (2.21) et (2.80) nous trouvons

$$\|\zeta_\eta(t_1) - \zeta_\eta(t_2)\|_W \leq C (\|u_\eta(t_1) - u_\eta(t_2)\|_V + \|q(t_1) - q(t_2)\|_W), \quad (2.82)$$

comme $u_\eta \in C(0, T; V)$ et $q \in C(0, T; W)$ nous déduisons de l'inégalité (2.82) que $\zeta_\eta \in C(0, T; W)$.

Finalement, l'inégalité (2.81) est obtenue par des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de l'inégalité précédente, ce qui conclut la preuve. ■

Troisième étape : Soit $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2) \in L^2(0, T; \mathbb{L}_0)$, et considérons le problème auxiliaire :

Problème $\mathcal{PV}_\lambda^\tau$. Trouver le champ de température $\tau_\lambda = (\tau_\lambda^1, \tau_\lambda^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{L}_0$, tel que :

$$\sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}_\lambda^\ell(t) - \lambda^\ell(t) - \chi^\ell(t), \delta^\ell)_{\mathbb{L}_0^\ell} + a_0(\tau_\lambda(t), \delta) = 0 \quad \forall \delta \in \mathbb{L}_0, \quad (2.83)$$

$$\tau_\lambda(0) = \tau_0.$$

Nous avons le résultat suivant pour le problème.

Lemme 2.3.3. *Il existe une solution unique τ_λ au problème auxiliaire $\mathcal{PV}_\lambda^\tau$ vérifiant (2.68).*

Démonstration. De plus, par application de l'inégalité de Poincaré-Friedrichs (1.16), on peut trouver une constante $c_0 > 0$ telle que

$$\int_{\Omega^\ell} |\nabla \delta^\ell|^2 dx + \frac{\lambda_0^\ell}{\kappa_0^\ell} \int_{\Gamma^\ell} |\delta^\ell|^2 da \geq c_0 \int_{\Omega^\ell} |\delta^\ell|^2 dx \quad \forall \delta^\ell \in \mathbb{L}_1^\ell, \quad \ell = 1, 2.$$

Ainsi, on obtient

$$a_0(\delta, \delta) \geq c_1 \|\delta\|_{\mathbb{L}_1}^2 \quad \forall \delta = (\delta^1, \delta^2) \in \mathbb{L}_1,$$

où $c_1 = \min(1, c_0, \kappa_0^1, \kappa_0^2) / 2$, ce qui implique que a_0 est \mathbb{L}_1 -elliptique.

Par conséquent, sur la base des arguments classiques de l'analyse fonctionnelle concernant les équations paraboliques [2], l'équation variationnelle (2.83) a une solution unique τ_λ vérifiant $\tau_\lambda(0) = \tau_0$ et la régularité (2.68). ■

Quatrième étape : On donne $\mu = (\mu^1, \mu^2) \in L^2(0, T; \mathbb{L}_0)$, et on considère le problème variationnel suivant pour le champ d'endommagement :

Problème \mathcal{PV}_μ^ξ . Trouver le champ d'endommagement $\xi_\mu = (\xi_\mu^1, \xi_\mu^2) : [0, T] \rightarrow \mathbb{L}_0$

tel que :

$$\begin{aligned}
 \xi_\mu(t) \in K, \quad & \sum_{\ell=1}^2 \left(\xi_\mu^\ell(t), \delta^\ell - \xi_\mu^\ell \right)_{\mathbb{L}_0^\ell} + a(\xi_\mu(t), \delta - \xi_\mu(t)) \\
 & \geq \sum_{\ell=1}^2 \left(\mu^\ell(t), \delta^\ell - \xi_\mu^\ell(t) \right)_{\mathbb{L}_0^\ell} \quad \forall \delta \in K, \text{ p.p. } t \in (0, T), \\
 & \xi_\mu(0) = \xi_0,
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

où $K = K^1 \times K^2$.

Le résultat abstrait suivant pour les inégalités variationnelles paraboliques.

Lemme 2.3.4. *Pour tout $\mu \in L^2(0, T; \mathbb{L}_0)$, Le problème auxiliaire \mathcal{PV}_μ^ξ admet une solution unique ξ_μ qui satisfait (2.70).*

Démonstration. L'application d'inclusion de $(\mathbb{L}_1, \|\cdot\|_{\mathbb{L}_1})$ dans $(\mathbb{L}_0, \|\cdot\|_{\mathbb{L}_0})$ est continue et à image dense. Notant par \mathbb{L}'_1 l'espace dual de \mathbb{L}_1 et identifiant le dual de \mathbb{L}_1 avec lui-même, nous pouvons écrire le triplet de Gelfand

$$\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_0 = \mathbb{L}'_0 \subset \mathbb{L}'_1,$$

nous utilisons la notation $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{L}'_1 \times \mathbb{L}_1}$ pour désigner le produit de dualité entre \mathbb{L}'_1 et \mathbb{L}_1 , nous avons

$$(\xi, \varphi)_{\mathbb{L}'_1 \times \mathbb{L}_1} = (\xi, \varphi)_{\mathbb{L}_0} \quad \forall \xi \in \mathbb{L}_0, \varphi \in \mathbb{L}_1,$$

on sait que l'ensemble des endommagements admissibles K est un sous-ensemble non vide, fermé et convexe dans \mathbb{L}_1 . Ainsi, le champ d'endommagement initial $\xi_0 \in K$. Maintenant, en utilisant la définition (2.42) de la forme bilinéaire ξ , pour tout $\delta, \phi \in \mathbb{L}_1$, on a

$$a(\delta, \phi) = a(\phi, \delta),$$

et

$$\begin{aligned}
 |a(\delta, \phi)| & \leq 3k \|\nabla \delta\|_{\mathbb{H}} \|\nabla \phi\|_{\mathbb{H}} \\
 & \leq c \|\delta\|_{\mathbb{H}^1} \|\phi\|_{\mathbb{H}^1},
 \end{aligned}$$

donc, a est continue et symétrique. Ainsi, pour tout $\delta \in \mathbb{L}_1$, nous avons

$$a(\delta, \delta) = k \|\nabla \delta\|_{\mathbb{H}}^2,$$

alors

$$a(\delta, \delta) + (k + 1) \|\delta\|_{\mathbb{L}_0}^2 \geq k (\|\nabla \delta\|_{\mathbb{H}}^2 + \|\delta\|_{\mathbb{L}_0}^2),$$

et d'où

$$a(\delta, \delta) + c_2 \|\delta\|_{\mathbb{L}_0}^2 \geq \beta \|\delta\|_{\mathbb{L}_1}^2 \quad c_2 = k + 1 \text{ et } \beta = k.$$

Nous remarquons que toutes les conditions du théorème (1.2.11) sont vérifiées, implique que (2.84) a une solution unique ξ_μ ayant la régularité (2.70). ■

Cinquième étape : Nous utilisons le champ de déplacement u_η obtenu dans le lemme (2.3.1) et nous considérons le problème aux valeurs initiales suivant :

Problème \mathcal{PV}_η^s . Trouver le champ d'adhésion $\varsigma_\eta = (\varsigma_\eta^1, \varsigma_\eta^2) : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que :

$$\dot{\varsigma}_\eta = H_{ad}(\varsigma_\eta, \hat{\varsigma}_\eta, R_\nu(u_{\eta\nu}^1 + u_{\eta\nu}^2), R_\tau(|u_{\eta\tau}^1 - u_{\eta\tau}^2|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.85)$$

$$\varsigma_\eta(0) = \varsigma_0 \quad \text{dans } \Omega^\ell. \quad (2.86)$$

On a le résultat suivant.

Lemme 2.3.5.

1. Il existe une solution unique $\varsigma_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}$ du problème \mathcal{PV}_η^s .
2. si u_i représente la solution du problème \mathcal{PV}_η^u pour $\eta_i \in L^2(0, T; V')$, $i = 1, 2$, alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.87)$$

Démonstration. Pour la simplicité, nous supprimons la dépendance de diverses fonctions sur Γ_3 , et notons que les égalités et inégalités ci-dessous sont valables p.p. sur Γ_3 .

Considérons l'application $G_\eta : [0, T] \times L^2(\Gamma_3) \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ défini par

$$G_\eta(t, \varsigma) = H_{ad}(\varsigma_\eta, \hat{\varsigma}_\eta, R_\nu(u_{\eta\nu}^1 + u_{\eta\nu}^2), R_\tau(|u_{\eta\tau}^1 - u_{\eta\tau}^2|)),$$

pour $t \in [0, T]$ et $\varsigma \in L^2(\Gamma_3)$, d'après les propriétés des opérateurs de troncation R_ν et R_τ , il résulte que G_η est Lipschitz continue par rapport au deuxième argument et cela uniformément dans le temps. D'ailleurs, pour n'importe quel $\varsigma \in L^2(\Gamma_3)$, l'application $t \rightarrow G_\eta(t, \varsigma)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Gamma_3))$.

De plus, en utilisant le Théorème du Cauchy-Lipschitz (1.2.9), nous constatons qu'il existe une fonction unique $\varsigma_\eta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ solution du Problème \mathcal{PV}_η^s .

Aussi, d'après les arguments utilisés dans la Remarque (2.2.1) nous déduisons que

$0 \leq \varsigma_\eta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p sur Γ_3 .

Par conséquent, à partir de la définition de l'ensemble \mathcal{Z} , nous montrons que $\varsigma_\eta \in \mathcal{Z}$.

A partir du problème de Cauchy (2.85)-(2.86), on peut écrire

$$\varsigma_i(t) = \varsigma_0 - \int_0^t H_{ad}(\varsigma_i(s), \hat{\varsigma}_i(s), R_\nu(u_{i\nu}^1 + u_{i\nu}^2)(s), R_\tau(|u_{i\tau}^1 - u_{i\tau}^2|)(s)) ds,$$

et alors

$$\begin{aligned} \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} &\leq C \int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ &\quad + C \int_0^t \|R_\nu(u_{1\nu}^1(s) + u_{1\nu}^2(s)) - R_\nu(u_{2\nu}^1(s) + u_{2\nu}^2(s))\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \\ &\quad + C \int_0^t \|R_\tau(|u_{1\tau}^1(s) - u_{1\tau}^2(s)|) - R_\tau(|u_{2\tau}^1(s) - u_{2\tau}^2(s)|)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds, \end{aligned}$$

en utilisant la définition de R_ν et R_τ et en écrivant $\varsigma_1 = \varsigma_1 - \varsigma_2 + \varsigma_2$, on a

$$\|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \left(\int_0^t \|\varsigma_1(s) - \varsigma_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds \right),$$

ensuite, on applique l'inégalité de Gronwall pour en déduire

$$\|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)^d} ds,$$

et de la relation (1.15), on obtient

$$\|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq C \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds.$$

Ce qui conclut la preuve du lemme (2.3.5). ■

Dans la prochaine étape : en conséquence de ces résultats et en utilisant les propriétés de l'opérateur \mathcal{B}^ℓ , l'opérateur \mathcal{E}^ℓ , la fonctionnelle j et les fonctions Ψ^ℓ et Θ^ℓ , pour $t \in [0, T]$, on considère l'opérateur

$$\Pi : L^2(0, T; V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0) \rightarrow L^2(0, T; V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)$$

tel que

$$\Pi(\eta, \lambda, \mu)(t) = (\Pi^1(\eta, \lambda, \mu)(t), \Pi^2(\eta, \lambda, \mu)(t), \Pi^3(\eta, \lambda, \mu)(t)) \in V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0, \quad (2.88)$$

défini par les équations

$$\begin{aligned} (\Pi^1(\eta, \lambda, \mu)(t), v)_{V' \times V} &= \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_\eta^\ell(t)), \tau_\lambda^\ell(t), \xi_\mu^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta_\eta^\ell(t), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\varsigma_\eta(t), u_\eta(t), v) + j_{vc}(u_\eta(t), v) \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$\Pi^2(\eta, \lambda, \mu)(t) = (\Theta^1(\varepsilon(u_\eta^1(t)), \tau_\lambda^1(t), \xi_\mu^1(t)), \Theta^2(\varepsilon(u_\eta^2(t)), \tau_\lambda^2(t), \xi_\mu^2(t))), \quad (2.90)$$

$$\Pi^3(\eta, \lambda, \mu)(t) = (\Psi^1(\varepsilon(u_\eta^1(t)), \tau_\lambda^1(t), \xi_\mu^1(t)), \Psi^2(\varepsilon(u_\eta^2(t)), \tau_\lambda^2(t), \xi_\mu^2(t))). \quad (2.91)$$

Ici, pour tout $(\eta, \lambda, \mu) \in L^2(0, T; V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)$, nous utilisons $u_\eta, \zeta_\eta, \tau_\lambda, \xi_\mu$ et ς_η représentent le champ de déplacement, le potentiel électrique, le champ de température, le champ d'endommagement et le champ d'adhésion obtenus les lemmes (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4) et (2.3.5) respectivement, nous avons le résultat suivant.

Lemme 2.3.6. *L'opérateur Π admet un point fixe unique*

$$\Pi(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = (\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0).$$

Démonstration. Nous montrons que pour un nombre entier positif m , la puissance m ième de l'opérateur Π , notée Π^m , est une contraction dans $L^2(0, T; V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)$.

Soient $t \in [0, T]$ et $(\eta_1, \lambda_1, \mu_1), (\eta_2, \lambda_2, \mu_2) \in L^2(0, T; V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)$ et par simplicité, nous utilisons les notations $u_{\eta_i} = u_i, \dot{u}_{\eta_i} = \dot{u}_i, \ddot{u}_{\eta_i} = \ddot{u}_i, \varsigma_{\eta_i} = \varsigma_i, \zeta_{\eta_i} = \zeta_i, \tau_{\lambda_i} = \tau_i$ et $\xi_{\mu_i} = \xi_i$, pour $i = 1, 2$.

Commençons par utiliser les hypothèses (2.19), (2.21), (2.24), (2.25), (2.43), (2.44) et la Remarque (2.2.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} &\|\Pi^1(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Pi^1(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t))\|_{V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}^2 \\ &\leq \sum_{\ell=1}^2 \|\mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_1^\ell(t)), \tau_1^\ell(t), \xi_1^\ell(t)) - \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_2^\ell(t)), \tau_2^\ell(t), \xi_2^\ell(t))\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \\ &+ \sum_{\ell=1}^2 \left\| (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta_1^\ell(t) - (\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta_2^\ell(t) \right\|_{\mathcal{H}^\ell}^2 \\ &+ c \|p_\nu(u_{1\eta\nu}^1 + u_{1\eta\nu}^2) - p_\nu(u_{2\eta\nu}^1 + u_{2\eta\nu}^2)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &+ c \|\varsigma_1^2(t) R_\nu(u_{1\eta\nu}^1 + u_{1\eta\nu}^2) - \varsigma_2^2(t) R_\nu(u_{2\eta\nu}^1 + u_{2\eta\nu}^2)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\ &+ c \|p_\tau(\varsigma_1(t)) R_\tau(|u_{1\eta\tau}^1 - u_{1\eta\tau}^2|) - p_\tau(\varsigma_2(t)) R_\tau(|u_{2\eta\tau}^1 - u_{2\eta\tau}^2|)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2, \end{aligned}$$

en utilisant (2.19)(a) et (2.21)

$$\begin{aligned}
 & \left\| \Pi^1(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Pi^1(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t)) \right\|_{V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}^2 \\
 & \leq \sum_{\ell=1}^2 M_{\mathcal{B}^\ell} \left(\|u_1^\ell(t) - u_2^\ell(t)\|_{V^\ell}^2 + \|\tau_1^\ell(t) - \tau_2^\ell(t)\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \|\xi_1^\ell(t) - \xi_2^\ell(t)\|_{L^2(\Omega^\ell)}^2 \right) + \sum_{\ell=1}^2 \|(\mathcal{E}^\ell)^*\|_{L^\infty(\Omega^\ell)}^2 \|\nabla \zeta_1^\ell(t) - \nabla \zeta_2^\ell(t)\|_{H^\ell}^2 \\
 & \quad + c \|p_\nu(u_{1\nu}^1 + u_{1\nu}^2) - p_\nu(u_{2\nu}^1 + u_{2\nu}^2)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\
 & \quad + c \|\zeta_1^2(t) R_\nu(u_{1\nu}^1 + u_{1\nu}^2) - \zeta_2^2(t) R_\nu(u_{2\nu}^1 + u_{2\nu}^2)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \\
 & \quad + c \|p_\tau(\varsigma_1(t)) R_\tau(|u_{1\tau}^1 - u_{1\tau}^2|) - p_\tau(\varsigma_2(t)) R_\tau(|u_{2\tau}^1 - u_{2\tau}^2|)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2,
 \end{aligned}$$

et en utilisant la définition de R_ν, R_τ , on peut récrire

$$\begin{aligned}
 & \left\| \Pi^1(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Pi^1(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t)) \right\|_{V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}^2 \\
 & \leq C \left(\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 + \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 \right. \\
 & \quad + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 + \|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_W^2 \\
 & \quad \left. + \|\varsigma_1(t) - \varsigma_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}^2 \right) \quad \text{p.p. } t \in (0, T),
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

où $C = \max(M_{\mathcal{B}^\ell}, \|(\mathcal{E}^*)\|_{L^\infty(\Omega)}^2, c)$.

D'autre part, puisque $u_i(t) = u_0 + \int_0^t \dot{u}_i(s) ds$, on sait que pour p.p. $t \in [0, T]$

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V ds, \tag{2.93}$$

on utilise (2.20), (2.21) et (2.80), pour obtenir

$$\|\zeta_1(t) - \zeta_2(t)\|_W^2 \leq C \|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2, \tag{2.94}$$

en appliquant l'inégalité de Young, (2.92) devient, via (2.87), (2.93) et (2.94)

$$\begin{aligned}
 & \left\| \Pi^1(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Pi^1(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t)) \right\|_{V'}^2 \\
 & \leq C \left(\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 + \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V^2 + \|u_1(s) - u_2(s)\|_V^2 ds \right) \quad \text{p.p. } t \in (0, T).
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

De plus, on trouve en prenant la substitution $\eta = \eta_1, \eta = \eta_2$ dans (2.73) et en choisissant

$v = \dot{u}_1 - \dot{u}_2$ comme fonction de test

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_1 - \ddot{u}_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_1^\ell) - \mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_2^\ell), \varepsilon(\dot{u}_1^\ell - \dot{u}_2^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + (\eta_1 - \eta_2, \dot{u}_1 - \dot{u}_2)_{V' \times V} = 0 \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

en vertu de (1.14), (2.18)(b) et (2.27), en utilisant (2.35)-(2.37) cette équation devient

$$\begin{aligned} & \frac{(\rho^*)^2}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_H^2 + \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2}) \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V^2 \\ & \leq \|\eta_2(t) - \eta_1(t)\|_{V'} \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_V, \end{aligned}$$

on prend $m_{\mathcal{A}} = \min(m_{\mathcal{A}^1}, m_{\mathcal{A}^2})$, et en intégrant cette inégalité sur la variable de temps d'intervalle $(0, t)$, l'inégalité de Young conduit à

$$\begin{aligned} & (\rho^*)^2 \|\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)\|_H^2 + m_{\mathcal{A}} \int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V^2 ds \\ & \leq \frac{2}{m_{\mathcal{A}}} \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds, \end{aligned}$$

en conséquence

$$\int_0^t \|\dot{u}_1(s) - \dot{u}_2(s)\|_V^2 ds \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad (2.96)$$

ce qui implique aussi, en utilisant une variante de (2.93), que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V^2 \leq C \int_0^t \|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (2.97)$$

En substituant maintenant $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ dans (2.83) et en soustrayant les deux équations obtenues, on en déduit en choisissant $\delta = \tau_{\lambda_1} - \tau_{\lambda_2}$ comme fonction test

$$(\dot{\tau}_1 - \dot{\tau}_2, \tau_1 - \tau_2)_{\mathbb{L}_0} + a_0(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \tau_2) = (\lambda_1 - \lambda_2, \tau_1 - \tau_2)_{\mathbb{L}_0} \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

nous intégrons cette égalité par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\tau_1(0) = \tau_2(0) = \tau_0$ et l'inégalité $a_0(\tau_1 - \tau_2, \tau_1 - \tau_2) \geq 0$, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 + C_1 \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds \\ & \leq \int_0^t (\lambda_1(s) - \lambda_2(s), \tau_1(s) - \tau_2(s))_{\mathbb{L}_0} ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

employant les inégalité de Hölder et Young (1.2.6), on en déduit que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 + C_1 \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds \\ & \leq \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

moyennant une version de lemme de Gronwall (1.2.5), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 & \leq \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 + \int_0^t \|\tau_1(s) - \tau_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds \\ & \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \end{aligned}$$

donc

$$\|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 \leq C \int_0^t \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds \quad \text{p.p. } t \in (0, T). \quad (2.98)$$

De la relation (2.84), on déduit que

$$(\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2, \xi_1 - \xi_2)_{\mathbb{L}_0} + a(\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_2) \leq (\mu_1 - \mu_2, \xi_1 - \xi_2)_{\mathbb{L}_0} \quad \text{p.p. } t \in (0, T),$$

en intégrant l'inégalité précédente par rapport au temps, en utilisant les conditions initiales $\xi_1(0) = \xi_0$ et $\xi_2(0) = \xi_0$ et l'inégalité $a(\xi_1 - \xi_2, \xi_1 - \xi_2) \geq 0$, pour trouver

$$\frac{1}{2} \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 \leq \int_0^t (\mu_1(s) - \mu_2(s), \xi_1(s) - \xi_2(s))_{\mathbb{L}_0} ds,$$

ce qui implique que

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 \leq \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds + \int_0^t \|\xi_1(s) - \xi_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds,$$

cette inégalité combinée à l'inégalité de Gronwall, conduit à

$$\|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 \leq C \int_0^t \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 ds. \quad (2.99)$$

Nous pouvons en déduire, en utilisant (2.95)-(2.99) que

$$\begin{aligned}
 & \left\| \Pi^1(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Pi^1(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t)) \right\|_{V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}^2 \\
 & \leq C \int_0^t (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2) ds \\
 & \leq C \int_0^T (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2) ds \quad (2.100) \\
 & = C \left(\|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(0,T;V')}^2 + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}_0)}^2 + \|\mu_1 - \mu_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}_0)}^2 \right) \\
 & = C \|(\eta_1 - \eta_2, \lambda_1 - \lambda_2, \mu_1 - \mu_2)\|_{L^2(0,T;V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)}^2,
 \end{aligned}$$

de l'hypothèse (2.22), il résulte

$$\begin{aligned}
 & \left\| \Pi^2(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Pi^2(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t)) \right\|_{V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}^2 \\
 & = \|\Theta(\varepsilon(u_1(t)), \tau_1(t), \xi_1(t)) - \Theta(\varepsilon(u_2(t)), \tau_2(t), \xi_2(t))\|_{V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}^2 \\
 & \leq C (\|u_1(t) - u_2(t)\|_{V'}^2 + \|\tau_1(t) - \tau_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2 + \|\xi_1(t) - \xi_2(t)\|_{\mathbb{L}_0}^2) \quad \text{p.p. } t \in (0, T),
 \end{aligned}$$

cela nous permet de déduire, via (2.97) - (2.99), que

$$\begin{aligned}
 & \left\| \Pi^2(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Pi^2(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t)) \right\|_{V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}^2 \\
 & \leq C \int_0^t (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2) ds \\
 & \leq C \int_0^T (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2) ds \quad (2.101) \\
 & = C \left(\|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(0,T;V')}^2 + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}_0)}^2 + \|\mu_1 - \mu_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}_0)}^2 \right) \\
 & = C \|(\eta_1 - \eta_2, \lambda_1 - \lambda_2, \mu_1 - \mu_2)\|_{L^2(0,T;V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)}^2,
 \end{aligned}$$

de même, en utilisant (2.23) et (2.97)-(2.99), nous obtenons l'estimation suivante pour Π^3

$$\begin{aligned}
 & \left\| \Pi^3(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Pi^3(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t)) \right\|_{V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}^2 \\
 & = \|\Psi(\varepsilon(u_1(t)), \tau_1(t), \xi_1(t)) - \Psi(\varepsilon(u_2(t)), \tau_2(t), \xi_2(t))\|_{V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}^2 \\
 & \leq C \int_0^t (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2) ds \\
 & \leq C \int_0^T (\|\eta_1(s) - \eta_2(s)\|_{V'}^2 + \|\lambda_1(s) - \lambda_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2 + \|\mu_1(s) - \mu_2(s)\|_{\mathbb{L}_0}^2) ds \quad (2.102) \\
 & = C \left(\|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2(0,T;V')}^2 + \|\lambda_1 - \lambda_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}_0)}^2 + \|\mu_1 - \mu_2\|_{L^2(0,T;\mathbb{L}_0)}^2 \right) \\
 & = C \|(\eta_1 - \eta_2, \lambda_1 - \lambda_2, \mu_1 - \mu_2)\|_{L^2(0,T;V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)}^2,
 \end{aligned}$$

de (2.100), (2.101) et (2.102), on conclut qu'il existe une constante positive $C > 0$ vérifiant

$$\begin{aligned} & \|\Pi(\eta_1(t), \lambda_1(t), \mu_1(t)) - \Pi(\eta_2(t), \lambda_2(t), \mu_2(t))\|_{V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0}^2 \\ & \leq C \|(\eta_1 - \eta_2, \lambda_1 - \lambda_2, \mu_1 - \mu_2)\|_{L^2(0, T; V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)}^2, \end{aligned}$$

on généralise cette procédure par récurrence sur m , on obtient alors la formule

$$\begin{aligned} & \|\Pi^m(\eta_1, \lambda_1, \mu_1) - \Pi^m(\eta_2, \lambda_2, \mu_2)\|_{L^2(0, T; V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)}^2 \\ & \leq \frac{C^m T^m}{m!} \|(\eta_1 - \eta_2, \lambda_1 - \lambda_2, \mu_1 - \mu_2)\|_{L^2(0, T; V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, pour m suffisamment grand, l'opérateur Π^m est une contraction sur l'espace de Banach $L^2(0, T; V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)$, et par conséquent, le théorème du point fixe de Banach montre que Π admet un unique point fixe $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)$. ■

Maintenant, **dans la dernière étape**, nous avons tout ce qui est nécessaire pour établir la démonstration du Théorème (2.3.1).

Démonstration. Existence. Soit $(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) \in L^2(0, T; V' \times \mathbb{L}_0 \times \mathbb{L}_0)$ le point fixe de Π défini par (2.88)-(2.91), nous adobtons les notations suivantes :

$$u_* = u_{\eta^*}, \quad \zeta_* = \zeta_{\eta^*}, \quad \tau_* = \tau_{\lambda^*}, \quad \xi_* = \xi_{\mu^*}, \quad \varsigma_* = \varsigma_{\eta^*}. \quad (2.103)$$

Soit $\sigma_* = (\sigma_*^1, \sigma_*^2) : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ et $D_* = (D_*^1, D_*^2) : [0, T] \rightarrow H$ les fonctions définies par

$$\sigma_*^\ell = \mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\dot{u}_*^\ell)) + \mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_*^\ell), \tau_*, \xi_*) - (\mathcal{E}^\ell)^* E^\ell(\zeta_*^\ell) \quad \ell = 1, 2, \quad (2.104)$$

$$D_*^\ell = \mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell) - B^\ell \nabla \zeta_*^\ell \quad \ell = 1, 2. \quad (2.105)$$

Nous prouvons que les $\{u_*, \zeta_*, \tau_*, \sigma_*, \xi_*, \varsigma_*, D_*\}$ satisfait (2.55)-(2.62) et la régularité (2.66)-(2.72).

En utilisant (2.73), pour $\eta = \eta^*$ ainsi que (2.103), on obtient

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_*(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell(\varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t))), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + (\eta^*(t), v)_{V' \times V} \\ & = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \forall v \in V, \quad \text{p.p.t } t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.106)$$

nous combinons les égalités $\Pi^1(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \eta^*$, $\Pi^2(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \lambda^*$ et

$\Pi^3(\eta^*, \lambda^*, \mu^*) = \mu^*$ avec (2.89)-(2.91), (2.103) et (2.104), pour obtenir

$$(\eta^*(t), v)_{V' \times V} = \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_*^\ell(t)), \tau_*^\ell(t), \xi_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \quad (2.107)$$

$$+ \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta_*^\ell(t), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + j_{ad}(\varsigma_*(t), u_*(t), v) + j_{vc}(u_*(t), v) \quad \forall v \in V,$$

$$\lambda_*^\ell(t) = \Theta^\ell(\varepsilon(u_*^\ell(t)), \tau_*^\ell(t), \xi_*^\ell(t)), \quad (2.108)$$

$$\mu_*^\ell(t) = \Psi^\ell(\varepsilon(u_*^\ell(t)), \tau_*^\ell(t), \xi_*^\ell(t)), \quad (2.109)$$

on substitue (2.107) dans (2.106), on déduit

$$\begin{aligned} & (\ddot{u}_*(t), v)_{V' \times V} + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{A}^\ell \varepsilon(\dot{u}_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{B}^\ell(\varepsilon(u_*^\ell(t)), \tau_*^\ell(t), \xi_*^\ell(t)), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} + \sum_{\ell=1}^2 ((\mathcal{E}^\ell)^* \nabla \zeta_*^\ell(t), \varepsilon(v^\ell))_{\mathcal{H}^\ell} \\ & + j_{ad}(\varsigma_*(t), u_*(t), v) + j_{vc}(u_*(t), v) = (f(t), v)_{V' \times V} \quad \text{p.p. } t \in (0, T), \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Pour $t \in [0, T]$, et nous substituons (2.108) dans (2.83), on obtient

$$\forall \delta \in \mathbb{L}_0, \quad \sum_{\ell=1}^2 (\dot{\tau}_*^\ell(t), \delta^\ell)_{\mathbb{L}_0^\ell} + a_0(\tau_*(t), \delta) = \sum_{\ell=1}^2 (\lambda_*^\ell(t) + \chi^\ell(t), \delta^\ell)_{\mathbb{L}_0^\ell}, \quad (2.111)$$

ensuite, de (2.109) et (2.84), on a

$$\begin{aligned} \xi_*^\ell(t) \in K \quad & \sum_{\ell=1}^2 \left(\dot{\xi}_*^\ell(t), \delta^\ell - \xi_*^\ell(t) \right)_{\mathbb{L}_0^\ell} + a(\xi_*(t), \delta - \xi_*(t)) \\ & \geq \sum_{\ell=1}^2 (\Psi^\ell(\varepsilon(u_*^\ell(t)), \tau_*^\ell(t), \xi_*^\ell(t)), \delta^\ell - \xi_*^\ell(t))_{\mathbb{L}_0^\ell} \quad \forall \delta \in K, \end{aligned} \quad (2.112)$$

nous écrivons maintenant (2.80) pour $\eta = \eta^*$ et en employant (2.103), on tire

$$\sum_{\ell=1}^2 (B^\ell \nabla \zeta_*^\ell(t), \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} - \sum_{\ell=1}^2 (\mathcal{E}^\ell \varepsilon(u_*^\ell(t)), \nabla \Psi^\ell)_{H^\ell} = (q(t), \Psi)_W \quad \forall \Psi \in W, \quad (2.113)$$

d'autre part d'après (2.85) pour $\eta = \eta^*$ et en utilisant (2.103), on trouve

$$\dot{\varsigma}_* = H_{ad}(\varsigma_*(t), \hat{\varsigma}_*, R_\nu(u_{*\nu}^1 + u_{*\nu}^2), R_\tau(|u_{*\tau}^1 - u_{*\tau}^2|)) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T). \quad (2.114)$$

Nous concluons par (2.106)–(2.114) que $\{u_*, \sigma_*, \zeta_*, D_*, \tau_*, \xi_*, \varsigma_*\}$ est une solution du problème (2.55)–(2.62). Et d’après les lemmes (2.3.1), (2.3.2), (2.3.3), (2.3.4) et (2.3.5) on a les régularités (2.66)–(2.72).

Puisque (u_*, ζ_*) satisfait (2.66) et (2.67), on a le régularité

$$\sigma_* \in L^2(0, T; \mathcal{H}), \quad (2.115)$$

pour $\ell = 1, 2$, on choisit $v = (v^1, v^2)$ avec $v^\ell = w^\ell \in \mathcal{D}(\Omega^\ell)^d$ et $v^{3-\ell} = 0$ dans (2.110), ainsi que (2.103) et (2.38), on obtient

$$\rho^\ell \ddot{u}_*^\ell(t) = \text{Div } \sigma_*^\ell(t) + f_0^\ell(t) \quad \text{dans } V', \quad \forall t \in (0, T),$$

où $\mathcal{D}(\Omega^\ell)^d = \{u^\ell = (u_i^\ell) / u_i^\ell \in \mathcal{D}(\Omega^\ell)\}$ et $\mathcal{D}(\Omega^\ell)$ est l’espace des fonctions réelles infiniment différentiables à support compact dans Ω^ℓ .

En utilisant maintenant (2.115), (2.27) et (2.28), on a alors

$$(\text{Div } \sigma_*^1, \text{Div } \sigma_*^2) \in L^2(0, T; V'),$$

pour $t_1, t_2 \in [0, T]$, et de (2.20), (2.21), (1.16) et (2.105), nous déduisons qu’il existe une constante positive $c > 0$ vérifiant

$$\|D_*(t_1) - D_*(t_2)\|_H \leq c(\|\zeta_*(t_1) - \zeta_*(t_2)\|_W + \|u_*(t_1) - u_*(t_2)\|_V),$$

en rappelant les régularités pour u_* et ζ_* dans (2.66) et (2.67), on a

$$D_* \in C(0, T; H), \quad (2.116)$$

en prenant $\Psi = (\Psi^1, \Psi^2)$ où $\Psi^\ell \in \mathcal{D}(\Omega^\ell)^d$ et $\Psi^{3-\ell} = 0$ dans (2.113) et de (2.39), il vient

$$\text{div } D_*^\ell(t) - q_0^\ell(t) = 0 \quad \forall t \in (0, T), \quad \ell = 1, 2,$$

de (2.29) et (2.116), on tire

$$D_* \in C(0, T; \mathcal{W}).$$

Finalement, nous concluons que $\{u_*, \sigma_*, \zeta_*, D_*, \tau_*, \xi_*, \varsigma_*\}$ est une solution faible du problème de contact piézoélectrique \mathcal{P} qui satisfait les régularités (2.66)–(2.72), en ce qui termine la preuve de la partie d’existence du théorème (2.3.1).

Unicité. L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur Π qui est défini par (2.88)-(2.91) et de l'unicité de la résolution des problèmes \mathcal{PV}_η^u , \mathcal{PV}_η^ζ , $\mathcal{PV}_\lambda^\tau$, \mathcal{PV}_μ^ξ , et \mathcal{PV}_η^s . ■

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire, on a étudié théoriquement un problème de contact avec adhésion et endommagement entre deux corps thermo-électro-viscoélastique.

Nous décrivons la formulation variationnelle du modèle, comme la frontière des corps et les données des problèmes ont des bonnes régularités.

On à montré l'existence et l'unicité de la solution de problème variationnelle par l'utilisation des arguments suivants : équation variationnelle dépendant du temps, Inégalités variationnelles paraboliques, théorème du Lax-Milgram, le lemme de Gronwall et point fixe.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. Hadj Ammar, *Etude Variationnelle et Numérique de Quelques Problèmes de Contact Entre Deux Corps Déformables*, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2015).
- [2] H. Brézis, *Equations et Inéquations Non Linéaires dans les Espaces en Dualité*, Annale de l'Institut Fourier 18 (1968), 115-175.
- [3] D.S. Chandrasekhariah, *A temperature rate dependent theory of piezoelectricity*, J. Thermal Stresses, 7 (1984), 293-306.
- [4] O. Chau, J.R. Fernández, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J. Comput. Appl. Math, 159 (2003), 431-465.
- [5] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, Z. Angew. Math. Phys., 55 (2004), 32-47.
- [6] C. Ciulcu, D. Montreanu and M. Sofonea, *Analysis of an elastic contact problem with slip dependent coefficient of friction*, Mathematical Inequalities and Applications, 4 (2001) , 465-479.
- [7] M. Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II, 295 (1982), 913–916.
- [8] M. Frémond, *Adhérence des solides*, J. Mécanique Théorique et Appliquée, 6 (1987), 383-407.
- [9] M. Frémond, B. Nedjar, *Damage in concrete : The unilateral phenomenon*, Nucl. Eng. Des, 156 (1995), pp. 323-335.
- [10] M. Frémond and B. Nedjar, *Damage, Gradient of Damage and Principle of Virtual Work*, Int. J. Solids Structures, 33 (8) (1996), 1083-1103.
- [11] M. Frémond, K.L. Kuttler and M. Shillor, *Existence and uniqueness of solutions for a one dimensional damage model*, J. Math. Anal. Appl., 229(1999), 271-294.

-
- [12] T. Hadj ammar, A. Saïdi and A. Azeb ahmed, *Dynamic contact problem with adhesion and damage between thermo-electro-elasto-viscoplastic bodies*, Comptes Rendus Mecanique, 345 (2017), 329-336.
- [13] K.L. Kuttler and M. Shillor, *Existence for models of damage*, preprint, Sér. II, 295, 2001.
- [14] J.A.C. Martins, J.T. Oden, *Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws*, Nonlinear Anal. TMA, 11 (1987), 407-428.
- [15] A. Merouani, F. Messelmi, *Dynamic evolution of damage in elastic-thermoviscoplastic materials*, Electron. J. Differential Equations, No. 129 (2010), 1-15.
- [16] F. Messelmi and B. Merouani, *Quasi-static evolution of damage in thermoviscoplastic materials*, Analele Universităţii Oradea, Fasc. Mathematica, Tome (XVII(2)) (2010), 133-148.
- [17] R.D. Mindlin, *On the equations of motion of piezoelectric crystals*, in : *Problems of Continuum Mechanics*, SIAM, Philadelphia, N. I. Muskelishvili Birthday, 70 (1961), 282-290.
- [18] R.D. Mindlin, *Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics*, Journal Of Elasticity, 4, (1972), 217-280.
- [19] D. Montreanu and M. Sofonea, *Quasivariational inequalities and applications in frictional contact problems with normal compliance*, Adv. Math. Sci. Appl, 10 (2000), 103-118.
- [20] J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies : An Introduction*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1981.
- [21] W. Nowacki, *Some general theorems of thermo-piezoelectricity*, J. Thermal Stresses, 1 (1978), 171-182.
- [22] J.T. Oden and J.A.C. Martins, *Models and computational methods for dynamic friction phenomena*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 52 (1985), 527-634.
- [23] O. Kavian, *Introduction la Theorie des Points Critiques et Applications aux Problemes Elliptiques*, Springer-Verlage, 1993.
- [24] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, *A quasistatic viscoelastic contact problem with normal compliance and friction*, J. Elasticity, 51 (1998), 105-126.
- [25] M. Rochdi, M. Shillor and M. Sofonea, *Analysis of a quasistatic viscoelastic problem with friction and damage*, Adv. Math. Sci. Appl, 10 (2002), 173-189.
- [26] J.N. Sharma and M. Pal, *Propagation of Lamb waves in a transversely isotropic piezothermoelastic plate*, J. Sound Vibration, 270 (2004), 587-610.

-
- [27] J.N. Sharma, M. Pal and D. Chand, *Three dimensional vibrational analysis of a piezothermoelastic cylindrical panel*, Int. J. Eng. Sci., 42(2004), 1655-1673.
- [28] J.N. Sharma and V. Walia, *Straight and circular crested waves in generalized piezothermoelastic materials*, J. Thermal Stresses, 29 (2006), 529-551.
- [29] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telga, *Models and Variational Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes Phys, Springer, Berlin, 655, 2004.
- [30] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact problems with Adhesion or Damage*, Pure and Applied Mathematics 276, New York, Chapman-Hall/CRC Press, 2006.
- [31] J.S. Yang, and R.C. Batra, *Free vibrations of a linear thermo-piezoelectric body*, J. Thermal Stresses, 18 (1995), 247-262.
- [32] A. Azeb Ahmed, *Etude théorique de quelques problèmes dynamiques en contact avec endommagement*, Thèse de doctorat Université Ferhat Abbas-sétif (2015).
- [33] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff (1976).
- [34] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston (1984).
- [35] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et Application*, Masson, 1987.
- [36] O. Chau, J. R. Fernández, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J. of Comp. and App. Math, 159 (2003), pp.431–465.
- [37] M. Frémond, *Contact with adhesion. Dans Topics in nonsmooth mechanics (Edité par J.J. Moreau, P.D. Panagiotopoulos, et G.Strang)*, Birkhauser Verlag, Basel (1988), 177-221.
- [38] M. Frémond, *Adhérence des solides, J.Mécanique Théorique et Appliquée*, 6(1987), pp. 383-407.
- [39] J. Nečas, *Les méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson, Paris (1967).
- [40] M. Sofonea, A. Matei, *Variational inequalities with applications, A Study of antiplane frictional contact problems*, Springer, New York (à paraître), p.51.
- [41] M. Sofonea, W. Han and M. Shillor, *Analysis and Approximation of Contact Problems with Adhesion or Damage*, Pure and App. Math. 276, Chapman-Hall/CRC Press, New York, (2006).

RÉSUMÉ

L'objectif de ce mémoire est l'étude d'un problème en Mécanique de contact avec adhésion et compliance normale pour des lois constitutives thermo-électro-viscoélastiques avec endommagement. Les résultats obtenus concernent l'existence et l'unicité d'une solution faible pour le problème étudié. La mémoire est composée de deux parties. La première partie est consacrée à rappeler les différents modèles mécaniques de contact étudiés ainsi que quelques outils mathématiques nécessaires dans la mémoire. La deuxième partie est destinée à l'étude de la théorie des problèmes de contact avec adhésion et compliance normale en thermo-électro-viscoélastiques avec endommagement.

Mots clés: thermo-électro-viscoélastiques, adhésion, compliance normale, endommagement, équation aux dérivées partielles d'évolution, Inégalité variationnelle parabolique, solution faible, point fixe.

ABSTRACT

The objective of this thesis is the study of a problem in contact mechanics with adhesion and normal compliance for thermo-electro-viscoelastic constitutive laws with damage. The results obtained concern the existence and uniqueness of a weak solution for the problem studied. Memory is made up of two parts. The first part is devoted to recalling the different mechanical models of contact studied as well as some mathematical tools necessary in memory. The second part is intended for the study of the theory of the problems of contact with adhesion and normal compliance in thermo-electro-viscoelastic with damage.

Key words: thermo-electro-viscoelastics, adhesion, normal compliance, damage, evolution partial differential equation, Parabolic variational inequality, weak solution, fixed point.

ملخص

إن الهدف من هذه المذكرة هو دراسة مسألة في ميكانيكا التلامس مع الالتصاق والاستجابة العادية للقوانين الحرارية الكهربائية اللزجة مع التلف، فالنتائج المتحصل عليها تتعلق بوجود وتفرد حل ضعيف للمسألة المدروسة. تتكون المذكرة من جزأين، الجزء الأول مخصص للتذكير بمختلف النماذج الميكانيكية المختلفة للتلامس التي تمت دراستها وكذلك بعض الأدوات الرياضية اللازمة في المذكرة، أما الجزء الثاني مخصص للدراسة النظرية لمسألة التلامس مع الالتصاق والاستجابة العادية في الكهروحرارية اللزجة المطاطية مع التلف.

الكلمات المفتاحية:

الكهروحرارية اللزجة المطاطية، الالتصاق، الاستجابة العادية، التلف، تطور المعادلة التفاضلية الجزئية، المتباينة المتكافئة المتغيرة، الحل الضعيف، النقطة الثابتة.