



République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de

la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

La résolution numérique d'équations
intégrales de Fredholm.

Présenté par: Lalmi Asma

Zeghdoud Hadjer

Soutenu publiquement devant le jury composé de

Dahda Bachir	MCA	Président	Univ. El Oued
Ben Ali Brahim	MCA.	Rapporteur	Univ. El Oued
Bekouch Mohamed Moumen	MCA	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire 2022 – 2023

Dédicace

Je dédie ce modeste travail et ma profonde gratitude :

A mes chers parents, mon père « *Abdelsalam* » et ma mère « *Yamna* » pour tous leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

À mes plus beaux cadeaux que mes parents m'ont offert : mes frères « Riyad, Abd El-Adim, Mouhamed et leurs femmes », mon frère « Youcef » et mes sœurs : « Faiza et Fatima Zahra ».

Aux poussins de la famille : « Ahmed, Rida, Razan, Bissan, Iyad, Rital et Baraa Al Rahman ».

Au compagnon de mon cœur et mon ami : « Mouchira ».

Aux compagnons de route, amis des positions : « Nour Al-Iman, Chaima, Souad, Fatoum, Salima et Amina ».

À toutes les personnes que j'aime chacun par son nom.

« *Asma* »

Remerciements

Avant tout remerciements «*Allah*» le tout puissant nous avoir donné la santé et le volonte de commencer et de terminer ce travail modeste.

Nous remercions le « *Dr. Ben Ali Brahim* », d'avoir proposée le thème et pour ses conseils lors de la préparation de cette mémoire, ainsi que pour la qualité de son encadrement, son aide précieuse et le temps qu'il nous a consacré.

Notre sincère gratitude à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait et pour avoir accepté de présider et de réviser ce travail.

Nos remerciements également à tous nos professeurs pour leur générosité et leur grande patience dont ils ont fait preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles. Nous adressons également nos sentiments de gratitude et de chaleureux remerciements vont également à nos camarades de classe mathématiques pour 2023, et à nos amis qui nous ont accompagnés du primaire à l'université.

Enfin, nous remercions toutes les personnes qui ont contribué à la réussite de notre parcours universitaire, en particulier les familles
« *Lalmi* » et « *Zeghdoud* »

Tables des matières

1	Rappel et généralisation	3
1.1	Rappel d'analyse fonctionnelle	3
1.2	Rappel sur les opérateurs	7
1.3	Généralités sur les équations intégrales	9
1.3.1	Equation intégrale de Volterra	10
1.3.2	Equations intégrales de Volterra-Fredholm	10
1.3.3	Equation intégrale de Fredholm	10
1.3.4	Noyaux particuliers	12
1.3.5	Relation avec les équations différentielles	13
1.3.6	Théorème d'existence et d'unicité	14
1.3.7	Equations intégrales singulières	14
1.4	Méthode d'approximation successive	15
1.4.1	Approximations en séries de Taylor	16
2	Méthodes numériques	18
2.1	Méthode de noyau dégénérée	18
2.1.1	Théorie générale	18
2.1.2	Solution de l'équation intégrale du noyau dégénéré	20
2.2	Méthode de Runge-Kutta	24
2.2.1	Exemples	25
2.2.2	Stabilité de méthode de Runge-Kutta	27
3	Applications	30
3.1	La méthode de noyau dégénérée	30
3.1.1	Solution de l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce avec noyau dégénéré :	30
3.1.2	Extension de la série Taylor :	33
3.2	La méthode de Runge-Kutta	35
3.2.1	Introduction	35
3.2.2	Ordre des étapes et conditions d'ordre	36
3.2.3	Analyse de stabilité par rapport à l'équation du test de convo- lution	40
3.2.4	Expérience numérique :	44

Notations générales

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Le produit scalaire.
 H : Espace de Hilbert.
 A : opérateurs linéaire bornés.
 A^{-1} : L'inverse de l'opérateur A .
 $\|A\|$: La norme de l'opérateur A .
 x_n : une suite.
 K : Opérateur intégrale linéaire.
 $k(x, y)$: Le noyau de opérateur intégrale.
 φ : La fonction inconnue dans l'équation intégrale.
 $f(x)$: Fonction donnée.
 λ : Constante.
 \mathbb{R} : L'ensemble des nombres réels.
 \mathbb{C} : L'ensemble des nombres complexes.

Introduction

En mathématique, une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu apparaît sous le signe intégrale. Cet inconnu est une fonction d'une ou plusieurs variables. Les équations intégrales ont un grand intérêt scientifique, elles sont parmi les branches les plus importantes en mathématiques, il est connu quelles touchent divers domaines des mathématiques appliquées et de la physique.

Dans la théorie des équations intégrales on distingue les équations de Fredholm (qui ont été introduites par le mathématicien Suédois Ivar Fredholm en 1900) et les équations de Volterra (qui ont été introduites par le mathématicien Italien Vito Volterra en 1896). Aussi, on distingue entre les équations intégrales linéaires et non linéaires. Dans cette note, nous abordons les équations linéaires de Fredholm

Les méthodes de résolution numérique des équations intégrales jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques. Avec l'avantage des machines de calcul numérique, notamment les ordinateurs, ces méthodes sont devenues aujourd'hui un outil essentiel pour l'investigation dans les différents problèmes fondamentaux de notre assimilation des phénomènes scientifiques qui sont difficiles, à savoir impossible à résoudre dans le passé.

Ainsi, notons qu'il existe actuellement un grand nombre de méthodes numériques utilisées dans les différentes branches de la recherche scientifique, ce qui rend notre présentation ne se veut ni exhaustive, ni trop théorique.

La théorie mathématique, essentiellement l'analyse fonctionnelle des équations intégrales qui permet d'analyser le problème, de prouver l'existence de la solution et surtout d'exhiber des méthodes d'approximation efficaces.

L'analyse numérique, qui étudie la réalisabilité de ces méthodes, principalement l'analyse de la vitesse de convergence et l'estimation de l'erreur.

La programmation sur machine, qui retranscrit ces méthodes sous forme d'algorithmes rapides et efficaces. notre travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre comprend un rappel sur l'analyse fonctionnelle, les espaces de fonctions et les généralités sur les équations intégrales ainsi que la Classification d'équations intégrales de Fredholm.

Comme pour le deuxième chapitre, nous avons traité d'un aperçu des méthodes

numériques "Runge-Kutta" , " noyau dégénéré" et de quelques exemples

Nous avons commencé le troisième chapitre par une explication des étapes des méthodes présentées et leur application et une comparaison des résultats présentés.

Chapitre 1

Rappel et généralisation

L'étude de diverse classe des équations intégrales nécessite l'utilisation des espaces fonctionnels, tels que les espaces de Banach ou de Hilbert. Dans ce chapitre, on donne des définitions de base sur l'analyse fonctionnelle, et on donne quelques notions sur les opérateurs. Aussi, quelques notions sur les équations intégrales, des définitions, des théorèmes, méthode de résolution...ect

1.1 Rappel d'analyse fonctionnelle

Espace vectoriel normé [3]

Définition 1. (Norme euclidienne)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. On pose pour $x \in E$,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

De plus, si y est un autre vecteur de E , on dit que $\|x - y\|$ est la distance euclidienne entre x et y .

Définition 2. (espace vectoriel)

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R} , telle que :

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$

2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in E$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ (homogénéité)

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout $x, y \in E$ (inégalité triangulaire).

on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|$.

Théorème 1. Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrique

Preuve. Pour tout $x, y \in E$ on définit la fonction ϕ par

$$\phi(x, y) = \|x - y\|$$

On remarque que cette fonction est bien une métrique sur E car, on a

$$\phi(x, y) = \|x - y\| = 0$$

ou encore

$$x - y = 0$$

D'où l'égalité

$$x = y$$

Il est évident de voir que la distance $\phi(x, y)$ est symétrique

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \|x - y\| \\ \|y - x\| &= \phi(y, x)\end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= \phi(x, z) + \phi(z, y).\end{aligned}$$

Espace de Banach

Suite de Cauchy

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$; on dit que la suite (x_n) est de Cauchy si, on a la relation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Soit (x_n) une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ contient une sous suite (x_{n_k}) convergente vers x alors la suite (x_n) est aussi convergente vers le même élément x :

Soit (x_n) une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

en particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$, on a

$$\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

avec la convergence de la suite (x_{n_k}) vers x

$$n_k \geq N_\varepsilon, \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$$

D'où la convergence de la suite (x_n) vers l'élément x

$$\begin{aligned}\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \|x_p - x\| &= \|x_p - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \\ &\leq \|x_p - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon\end{aligned}$$

Définition 3.

Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy (x_n) d'éléments de E est une suite convergente dans E

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Implique l'existence d'un élément $x \in E$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$$

Espaces de Banach

Définition 4. On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.

Espace de Hilbert [3]

Produit scalaire

Définition 5. On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

Définition 6. un espace de Hilbert H est un espace complet par rapport la norme induite par le produit scalaire. En d'autres terme un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire.

Définition 7. (Espaces séparables)

On dit qu'un espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.

Remarque 1. Généralement l'espace H est séparable est de dimension infinie, en d'autre terme, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans H et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe n vecteurs dans H linéairement indépendants.

Orthogonalité

Définition 8. On dit que deux vecteurs x et y d'un espace de Hilbert H sont orthogonaux si :

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Base hilbertiennes

Soit X une partie non vide de H est dite dense dans H si :

$$\forall y \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X; \|x - y\| < \varepsilon$$

de manière équivalente si tout y de H est limite d'une suite d'éléments x_n de X :

$$\|x_n - y\| \rightarrow 0$$

Définition 9. Soit H un espace de Hilbert sur le corps \mathbb{K} et $F = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que F est une base de Hilbert (base hilbertienne) de H si :

1. F est une famille orthonormée de H , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0 \\ \forall i \in I, \langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1 \end{cases}$$

2. La famille F est de plus complète ou total, c'est-à-dire : l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de F est dense dans H

Définition 10. Soit $\{\varphi_k\}$ un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert H , pour que ce système soit complet, il faut et il suffit que, le seul vecteur de H orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ est le vecteur nul. Cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur non nul de H , qui soit orthogonal à tous les vecteurs du système $\{\varphi_k\}$

Théorème 2. (Riesz-Fischer)

Soit $\{\varphi_k\}$ un système orthonormé dans un espace de Hilbert H , et soient les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i$ telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ soit convergente, alors on peut trouver un vecteur $f \in H$, tel que

$$\alpha_i = \langle f, \varphi_i \rangle, \forall i = 1, 2, \dots$$

et de plus, on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

ou encore

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

1.2 Rappel sur les opérateurs

Opérateurs linéaires bornés

Linéarité des opérateurs

Définition 11. Soient E et F deux espaces normés, On appelle opérateur A une application défini sur E dans F

$$A : E \rightarrow F$$

il est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

- Condition additive

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2)$$

- Condition homogène

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in \mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi)$$

Continuité des opérateurs linéaires

Définition 12. Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0 ; la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = A(x_0).$$

Remarque 2. L'opérateur linéaire A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Théorème 3. Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G .

Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive

$C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \forall x \in E.$$

Proposition 1. La norme $\|A\| = \sup\|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

Théorème 4. Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement s'il est borné.

Espaces isomorphes

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés, E et F sont dits isomorphes, s'il existe un opérateur homéomorphe A défini sur E dans F , c'est à dire

- A est bijectif sur E dans F .
- A et A^{-1} sont des opérateurs continus.

Espaces isométriques

Les espaces E et F sont dits linéairement isométriques, s'il existe une isométrie A appliquant E dans F , c'est à dire,

$$\|A(x)\|_F = \|x\|_E \text{ pour tout } x \in E$$

Remarque 3. La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$, ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β , telles que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1 \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$.

Opérateurs compacts

Définition 13. Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.

Ensembles relativement compacts

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite u_n de G , il existe une sous suite $u_{n(k)}$ qui converge dans F .

Théorème 5. (critère de compacité) Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E , la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans F .

Preuve.

Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact.

Théorème 6. *Une combinaison linéaire*

$$A = \alpha A_1 + \beta A_2$$

A_1, A_2 des opérateurs compacts est un opérateur compact.

Noyau faiblement singulier

Définition 14. *On appelle noyau faiblement singulier la fonction k continue sur*

$$G \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

sauf peut être aux points $x = y$ et telle que

$$\forall x, y \in G, x \neq y \exists M > 0, |k(x, y)| < \frac{M}{|x - y|^{n-\alpha}}, 0 < \alpha \leq n$$

Opérateurs intégraux

Les opérateurs intégraux constituent des objets fondamentaux en analyse fonctionnelle, où ils permettent notamment de transformer les équations fonctionnelles en une version plus simple afin de les résoudre facilement. Les opérateurs intégraux interviennent dans plusieurs domaines tels que les équations aux dérivées partielles, les phénomènes de diffusion et les équations intégrales.

Opérateur Intégrale

On appelle opérateur intégrale tout opérateur linéaire A défini sur un espace normé E à valeurs dans un espace normé F donné sous la forme

$$A\varphi(x) = \int_{G_2} k(x, y)\varphi(y)dy, x \in G_1,$$

où G_1 et G_2 deux sous ensemble de E , et $k(x, y)$ une fonction mesurable définie sur un ensemble mesuré $G_1 \times G_2$ et $\varphi(y)$ est une fonction mesurable définie sur G_2 . La fonction mesurable $k(x, y)$ est dite noyau de l'opérateur intégral A .

Théorème 7. *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

1.3 Généralités sur les équations intégrales

Une équation dans laquelle la fonction inconnue d'une ou plusieurs variables figure sous le signe intégral est dite équation intégrale. Cette définition générale tient compte de beaucoup de formes naturellement issues de la modélisation des différents problèmes de la mécanique et de la physique mathématique ou par remaniement d'une importante classe de problèmes formulés auparavant par des opérateurs différentiels, notamment les problèmes aux limites et ceux de Cauchy.

La forme ordinaire d'une équation intégrale linéaire est donnée par

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.1)$$

où $h(x)$, $f(x)$, $k(x, t)$ sont des fonctions données, la fonction $\varphi(x)$ qui figure à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégral est l'inconnu à déterminer; λ est un paramètre réel ou complexe différent de zéro. La fonction $k(x, t)$ est appelée noyau de l'équation intégrale.

1.3.1 Equation intégrale de Volterra

Définition 15. 1) On appelle équation intégrale de Volterra de deuxième espèce une équation de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.2)$$

2) On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce une équation de la forme

$$f(x) = \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.3)$$

Remarque 4. 1) L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation de Fredholm

Il suffit de prendre de noyau k vérifie la condition : $k(x, t) = 0$ pour $x < t$

2) si $f(x) \neq 0$ les équations (1.2) et (1.3) sont dites non homogènes,

3) si $f(x) = 0$ les équations (1.2) et (1.3) sont dites homogènes.

1.3.2 Equations intégrales de Volterra-Fredholm

Les équations intégrales de Volterra-Fredholm apparaissent dans la littérature sous deux formes, à savoir

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k(x, t)_1 \varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k(x, t)_2 \varphi(t)dt \quad (1.4)$$

et

$$\varphi(x, t) = f(x, t) + \lambda \int_0^t \int_{\Omega} F(x, t, \mu, \tau, \varphi(\mu, \tau))d\mu d\tau \quad (1.5)$$

où $f(x, t)$ et $F(x, t, \mu, \tau, \varphi(\mu, \tau))$ sont des fonctions analytiques sur $D = \Omega \times [0, T]$, et Ω est un sous ensemble fermé de \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$.

Exemple 1. Soient les équations intégrales

$$\varphi(x) = 6x^2 + 3x + 2 - \int_0^x x\varphi(t)dt - \int_0^1 t\varphi(t)dt,$$

et

$$\varphi(x, t) = x + t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t \int_0^t \int_0^1 (\tau - \mu)d\mu d\tau$$

1.3.3 Equation intégrale de Fredholm

Définition 16. une équation intégrale dont les bornes d'intégration sont fixées c-à-d $\Omega = [a; b]$ est dite équation intégrale de Fredholm, donc est de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)F(\varphi(t))dt$$

Classification des équations intégrales de Fredholm

Equations intégrales linéaires de Fredholm[6]

Définition 17. Une équation intégrale de Fredholm de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \quad (1.6)$$

est dite équation intégrale linéaire de Fredholm. où $f(x)$ une fonction donné, $k(x,t)$ appelée noyan de l'équation intégrale.

i) Si $h(x) = 0$, l'équation (1.6) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = 0 \quad (1.7)$$

et s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce.

ii) Si $h(x) = 1$ l'équation (1.6) s'écrit :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt \quad (1.8)$$

et s'appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce.

iii) Si $h(x) \neq 0$ donc la formule (1.6) est appelé équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Remarque 5. 1) Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt$$

et elle est dite homogène .

2) Si $f(x) \neq 0$ est appelé non homogène.

Exemple 2. 1) $2x^2 - x + 4 = \int_0^1 (x-t)\theta(t)dt$ est une équation intégrale linéaire de Fredholm de première espèce

1) $\theta(x) = x + 4 - \int_0^1 (x-t)\theta(t)dt$ est une équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce

Equations intégrales non linéaires de Fredholm[6]

Définition 18. Une équation intégrale de Fredholm de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)F(\varphi(t))dt \quad (1.9)$$

où F est une fonction non linéaire de $\varphi(t)$, on dit que l'équation intégrale de Fredholm est non linéaire.

i) Si $h(x) = 0$, l'équation (1.6) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)F(\varphi(t))dt = 0$$

et elle est dite de première espèce.

ii) Si $h(x) = \mu(\text{constante}) \neq 0$ l'équation (1.6) s'écrit :

$$\mu\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)F(\varphi(t))dt$$

et elle est dite de seconde espèce.

iii) Si $h(x) \neq 0$ donc la formule (1.6) est elle est dite de troisième espèce.

Remarque 6. 1) Si $f(x) = 0$, l'équation s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$$

et elle est dite homogène .

2) Si $f(x) \neq 0$ est appelé non homogène.

1.3.4 Noyaux particuliers

1. Si le noyau $k(x, t)$ d'une équation intégrale s'écrit sous la forme

$$k(x, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\beta_i(t) \tag{1.10}$$

où les fonctions $\alpha_i(x)$ pour $i = 1, \dots, n$ sont linéairement indépendantes, alors il est dit noyau séparable ou dégénéré. Par exemple, les noyaux xt et $xt^2 + tx^2$ sont séparables.

2. Si le noyau $k(x, t)$ est une fonction à valeurs complexes telle que

$$k(x, t) = \overline{k(t, x)} \tag{1.11}$$

alors il est dit symétrique ou hermitien. Une équation intégrale à noyau symétrique est dite aussi symétrique. Par exemple, sur le carré $a \leq x, t \leq b$, les noyaux $x + t, x^2 + t^2$ et $i(xt)$ sont symétriques, tandis que $i(x + t)$ ne l'est pas.

3. Si le noyau est de la forme $k(x, t) = k(x - t)$, alors l'équation intégrale est dite équation intégrale à noyau de convolution.

4. Si le noyau $k(x, t)$ est tel que

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dxdt < \infty \tag{1.12}$$

a une valeur finie, alors ce type de noyau est dit noyau régulier.

5. Si le noyau $k(x, t)$ est de la forme

$$k(x, t) = h(x, t) |x - t|^{-m} \quad (1.13)$$

où $h(x, t)$ est bornée sur $\mathbb{R}, a < b$ et $a < t < b$ avec $h(x, t) \neq 0$, et m est une constante telle que $0 < m < 1$, alors l'équation intégrale est dite équation intégrale faiblement singulière.

6. Si le noyau $k(x, t)$ est de la forme

$$k(x, t) = \frac{h(x, t)}{x - t} \quad (1.14)$$

avec $h(x, t)$ est une fonction différentiable avec $h(x, t) \neq 0$, alors l'équation intégrale est dite singulière à noyau de Cauchy où l'intégrale

$$\int_a^b \frac{h(x, t)}{x - t} \varphi(t) dt, \quad (1.15)$$

est prise au sens de la valeur principale de Cauchy. Ainsi,

$$\int_a^b \frac{\varphi(t)}{x - t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{x - t} dt + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{\varphi(t)}{x - t} dt \right\} \quad (1.16)$$

1.3.5 Relation avec les équations différentielles

Pour toute fonction $u(x)$,

$$\int_a^x \int_a^s u(t) dt ds = \int_a^x (x - t) u(t) dt \quad (1.17)$$

En général, on a

$$\int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} u(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{(x - t)!} \int_a^x (x - x_1)^{n-1} u(x) dx_1 \quad (1.18)$$

Preuve. Soit $g(s) = \int_a^s u(t) dt$,

$$\begin{aligned} \int_a^x \int_a^s u(t) dt ds &= \int_a^x g(s) ds = \int_a^x 1 \cdot g(s) ds \\ &= [s g(s)]_a^x - \int_a^x s \cdot g'(s) ds && \text{(intégration par parties)} \\ &= x g(x) - a g(a) - \int_a^x s u(s) ds \\ &= x \int_a^x u(t) dt - 0 - \int_a^x t u(t) dt \\ &= \int_a^x (x - t) u(t) dt \end{aligned}$$

1.3.6 Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 8. *Alternative de Fredholm*

Si l'équation intégrale linéaire homogène de Fredholm de seconde espèce

$$h(x)\varphi(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt$$

admet la solution triviale $\varphi(x) = 0$ comme l'unique solution, alors l'équation non-homogène correspondante admet toujours une solution unique.

Théorème 9. *Unique solution*

Si le noyau $k(x, t)$ de l'équation intégrale de Fredholm (1,4) est une fonction à valeur réelle bornée et continue sur $[a, b] \times [a, b]$; et si $f(x)$ est une fonction continue à valeur réelle, alors la condition nécessaire d'existence et d'unicité d'une solution pour l'équation (1,4) est donner par

$$|\lambda|M(b-a) < 1$$

où

$$|k(x, t)| \leq M \in \mathbb{R}$$

Théorème 10. *Soit l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de seconde espèce de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b G(x, t, \varphi(t))dt \quad (1.19)$$

l'équation (1,17) admet une solution si les conditions suivantes sont satisfaites

- 1- La fonction $f(x)$ est bornée, $|f(x)| < R$ pour $x \in [a, b]$.
- 2- La fonction $G(x, t, u(t))$ est intégrable et bornée, $|G(x, t, u(t))| < K$ pour $x \in [a, b], t \in [a, b]$.
- 3- La fonction $G(x, t, u(t))$ est Lipschitzien,

$$|G(x, t, z) - G(x, t, z')| < M|z - z'|$$

1.3.7 Equations intégrales singulières

Les équations intégrales de Volterra du premier type

$$f(x) = \lambda \int_{h(x)}^{g(x)} k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.20)$$

ou du second type

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{h(x)}^{g(x)} k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1.21)$$

sont appelées singulières si l'une des bornes de l'intégration $g(x)$, $h(x)$ ou les deux sont infini. De plus, les deux équations précédentes sont appelées singulières si le noyau $k(x, t)$ est non borné en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} \varphi(t)dt, 0 < \alpha < 1, \quad (1.22)$$

ou du second type :

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} \varphi(t) dt, 0 < \alpha < 1, \quad (1.23)$$

Les deux dernières formes sont appelées équation intégrale d'Abel généralisée pour $\alpha = \frac{1}{2}$, l'équation :

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \varphi(t) dt, \quad (1.24)$$

est appelée équation intégrale singulière d'Abel.

1.4 Méthode d'approximation successive

La méthode des approximations successives, ou la méthode d'itération de Picard . Cette méthode résout tout problème en trouvant des approximations successives à la solution en commençant par une estimation initiale comme $\varphi_n(x)$ appelée l'approximation zéro. Les valeurs les plus couramment utilisées pour les approximations zéro sont 0, 1, ou x . Bien sûr d'autres valeurs réelles peuvent également être sélectionnées[4]. La méthode des approximations successives permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \varphi_0(x) & \text{valeur réelle} \\ \varphi_{n+1}(x) & = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) \varphi_n(t) dt \end{cases} \quad (1.25)$$

La solution est donnée sous la forme

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x)$$

en générale, on prend $\varphi_0(x) = 0$.

Théorème 11. Si $f(x)$ est continue sur $[a, b]$ et $k(x, t)$ est continu sur $[a, b] \times [a, b]$, alors la suite φ_n définie par (1.25) converge vers la solution de l'équation intégrale donnée.

Exemple 3. Utilisez la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm suivante

$$\varphi_n(x) = x + e^x - \int_0^1 xt \varphi(t) dt \quad (1.26)$$

Solution Sélectionnons $\varphi_0(x) = 0$.

$$\varphi_{n+1}(x) = x + e^x - \int_0^1 (xt) \varphi_n(t) dt, n \geq 0 \quad (1.27)$$

Substituons $\varphi_0(x) = 0$ dans (1.27), nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= x + e^x, \\ \varphi_2(x) &= e^x - \frac{1}{3}x \end{aligned}$$

$$\varphi_{n+1}(x) = x + e^x - \int_0^1 (xt) \varphi_n(t) dt = e^x + \frac{(-1)^n}{3^n} x \quad (1.28)$$

Conséquent, la solution $\varphi(x)$ de (1.26) est donnée par

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n+1}(x) = e^x.$$

1.4.1 Approximations en séries de Taylor

Considérons l'équation intégrale unidimensionnelle

$$\lambda x(t) - \int_a^b k(x, t)x(s)ds = y(t), \quad a \leq x \leq \quad (1.29)$$

Souvent, nous pouvons écrire k comme une série de puissances en s ,

$$k(t, s) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i(t)(s - a)^i \quad (1.30)$$

ou en t ,

$$k(t, s) = \sum_{i=0}^{\infty} k_i(s)(t - a)^i \quad (1.31)$$

Soit k_n la somme partielle des n premiers termes du côté droit de (1.30),

$$k_n(t, s) = \sum_{i=0}^{n-1} k_i(t)(s - a)^i \quad (1.32)$$

En utilisant la notation de (2.2), k_n est un noyau dégénéré avec

$$\alpha_i(t) = k_{i-1}(t), \quad \beta_i(s) = (s - a)^{i-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.33)$$

Le système linéaire (1.15) devient

$$\lambda c_i - \sum_{j=1}^n c_j \int_a^b (s - a)^{i-1} k_{j-1}(s)ds = \int_a^b y(s)(s - a)^{i-1}ds, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.34)$$

et la solution x_n est donnée par

$$x_n(t) = \frac{1}{\lambda} \left[y(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} k_i(t) \right] \quad (1.35)$$

Les intégrales de (1.26) doivent souvent être calculées numériquement. Cependant, il n'y a pas grand-chose à dire sur les intégrales de cette généralité. D'abord, ils impliquent l'intervalle entier $[a, b]$, contrairement à certaines méthodes ultérieures que nous considérer. De plus, la plupart des intégrandes seront nulles ou assez petites, dans le voisinage de $s = a$, l'extrémité gauche de l'intervalle. Ce dernier peut aider dans le choix d'une méthode d'intégration numérique plus efficace. Ce qui suit exemple évite le calcul numérique de la plupart de ces intégrales.

Exemple 4. Considérons l'équation intégrale

$$\lambda x(t) - \int_0^b e^{st} x(s)ds = y(t), \quad 0 \leq t \leq b \quad (1.36)$$

$$e^{st} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i t^i}{i!}$$

$$\lambda c_i - \sum_{j=1}^n c_j \frac{b^{i+j-1}}{(j-1)!(i+j-1)} = \int_0^b y(s) s^{i-1} ds, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.37)$$

et la solution x_n de l'équation dégénérée du noyau $(\lambda|k_n)x_n = y$ est donnée par

$$x_n(t) = \frac{1}{\lambda} \left[y(t) + \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1} \frac{t^i}{i!} \right]$$

Pour l'analyse d'erreur, soit $\chi = C[0, b]$ avec $\|\cdot\|_\infty$ Alors

$$\begin{aligned} \|K - K_n\| &= \max_{0 \leq t \leq b} \int_0^b |e^{st} - K_n(t, s)| ds \\ &= \max_{0 \leq t \leq b} \int_0^b \frac{(st)^n}{n!} e^\xi ds, \quad \xi = \xi(t, s) \in [0, b] \\ &\leq \frac{b^{2n+1}}{(n+1)!} e^{b^2} \end{aligned}$$

Celle-ci converge vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$.

Il est simple de calculer

$$\|\kappa\| = \frac{e^{b^2} - 1}{b}$$

Si $|\lambda| > \|\kappa\|$, alors $(\lambda - \kappa)^{-1}$ existe par le théorème des séries géométriques, et

$$\|(\lambda - \kappa)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|\kappa\|} \quad (1.38)$$

Pour les valeurs de n pour lesquelles

$$\|(\lambda - \kappa)^{-1}\| < |\lambda| - \|\kappa\|. \quad (1.39)$$

Chapitre 2

Méthodes numériques

Dans ce chapitre, on va présenter quelques méthodes de résolution des équations intégrales de Fredholm de seconde espèce avec l'adressage de quelques théorèmes et la résolution de quelques exemples simples

2.1 Méthode de noyau dégénérée

2.1.1 Théorie générale

Considérons l'équation intégrale

$$\lambda x(t) - \int_D K(t, s)x(s)ds = y(t), t \in D \quad (2.1)$$

avec $\lambda \neq 0$ et $D \subset \mathbb{R}^m$, certains $m \geq 1$. Nous supposons tout au long de ceci (et les chapitres suivants) que D est un ensemble borné fermé. Généralement, il s'agit d'un ensemble à m -dimensions avec une frontière lisse par morceaux; ou cela peut être le morceau frontière lisse elle-même. On travaille habituellement dans l'espace $\chi = C(D)$ avec $\| \cdot \|_\infty$, et occasionnellement en $\chi = L^2(D)$. L'opérateur intégral κ de (2.1) est supposé être un opérateur compact sur χ dans χ .

La fonction noyau K doit être approchée par une séquence de dégénérés du noyau,

$$K_n(t, s) = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,n}(t)\beta_{i,n}(s), \quad \forall n \geq 1 \quad (2.2)$$

de telle sorte que les opérateurs intégraux associés K_n vérifient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \| \kappa - \kappa_n \| = 0 \quad (2.3)$$

Généralement, on veut que cette convergence soit rapide pour obtenir une convergence rapide de x_n à x , où x_n est la solution de l'équation d'approximation

$$\lambda x_n(t) - \int_D K_n(t, s)x_n(s)ds = y(t), t \in D \quad (2.4)$$

Parmi les questions à aborder figurent les suivantes : (1) Comment pouvons-nous montrer $x_n \rightarrow x$ comme $n \rightarrow \infty$? (2) Comment obtient-on x_n dans l'équation

(2.4) ? (3) Comment obtenir $K_n(t, s)$ et montrer $\kappa_n \rightarrow \kappa$? Nous commençons par le premier de ces questions.

[5]

Théorème 12. [5] Supposons $\lambda - \kappa : \chi \xrightarrow{1 \rightarrow 1} \chi$, avec χ un espace de Banach et κ délimité. De plus, supposons que κ_n est une séquence d'opérateurs linéaires bornés avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\kappa - \kappa_n\| = 0$$

Alors les opérateurs $(\lambda - \kappa_n)^{-1}$ existent de χ sur χ pour tout n suffisamment grand, disons $n \geq N$, et

$$\|(\lambda - \kappa_n)^{-1}\| \leq \frac{\|(\lambda - \kappa_n)^{-1}\|}{1 - \|(\lambda - \kappa_n)^{-1}\| \|\kappa - \kappa_n\|}, \quad n \geq N \quad (2.5)$$

Pour les équations $(\lambda - \kappa)x = y$, et $(\lambda - \kappa_n)x_n = y$, $n \geq N$, nous avons

$$\|x - x_n\| \leq \|(\lambda - \kappa_n)^{-1}\| \|\kappa x - \kappa_n x\|, \quad n \geq N \quad (2.6)$$

Preuve : [5]

Utiliser l'identité

$$\lambda - \kappa_n = \lambda - \kappa + (\kappa - \kappa_n) = (\lambda - \kappa)[I + (\lambda - \kappa)^{-1}(\kappa - \kappa_n)] \quad (2.7)$$

Choisissez N pour que

$$\|(\kappa - \kappa_n)^{-1}\| < \frac{1}{\|(\lambda - \kappa)^{-1}\|}, \quad n \geq N \quad (2.8)$$

Par le théorème des séries géométriques, la quantité $I + (\lambda - \kappa)^{-1}(\kappa - \kappa_n)$ a un inverse borné, avec

$$\|[I + (\lambda - \kappa)^{-1}(\kappa - \kappa_n)]^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|(\lambda - \kappa)^{-1}\| \|\kappa - \kappa_n\|}$$

En utilisant (2.7), cela donne l'existence de $(\lambda - \kappa_n)^{-1}$ et sa borne (2.5). Pour la borne d'erreur (2.6), utilisez l'identité

$$\begin{aligned} x - x_n &= (\lambda - \kappa)^{-1}y + (\lambda - \kappa_n)^{-1}y \\ &= (\lambda - \kappa_n)^{-1}[\kappa - \kappa_n](\lambda - \kappa)^{-1}y \\ &= (\lambda - \kappa_n)^{-1}[\kappa x - \kappa_n x] \end{aligned}$$

La borne d'erreur suit immédiatement. Une modification de ce qui précède donne également

$$\|(\lambda - \kappa)^{-1} - (\lambda - \kappa_n)^{-1}\| \leq \|(\lambda - \kappa_n)^{-1}\| \|(\lambda - \kappa)^{-1}\| \|\kappa - \kappa_n\| \quad (2.9)$$

D'après (2.3) et (2.5), cela montre $(\lambda - \kappa_n)^{-1} \rightarrow (\lambda - \kappa)^{-1}$ dans $L(\chi, \chi)$.

Aussi, $\|(\lambda - \kappa_n)^{-1}\| \rightarrow \|(\lambda - \kappa)^{-1}\|$ Ceci complète la preuve.

Une conséquence importante du théorème de convergence ci-dessus est que le la

vitesse de convergence ne dépend pas nécessairement de la dérivabilité de l'inconnue x , puisque (2.6) implique

$$\|x - x_n\| = \|(\lambda - k_n)^{-1}\|(k - k_n)\| \|x\| \quad (2.10)$$

Si $\|k - k_n\|$ converge rapidement vers zéro, alors il en est de même de $\|x - x_n\|$, indépendante de la dérivabilité de x . Ce ne sera pas le cas de la plupart des autres types de méthodes numériques pour résoudre (2.1).

Avec $\chi = C(D)$, on choisit le noyau dégénéré (2.2) pour que les fonctions $\alpha_i(t)$ sont toutes continues et les fonctions $\beta_i(s)$ sont toutes absolument intégrables. Pour appliquer le théorème de convergence ci-dessus, notez que

$$\|k - k_n\| = \max \int_D |k(t, s) - k_n(t, s)| ds \quad (2.11)$$

Avec $\chi = L^2(D)$, nous exigeons que tous $\alpha_i, \beta_i \in L^2(D)$. Pour appliquer la convergence théorème, on peut utiliser

$$\|k - k_n\| \leq \left[\int_D \int_D |k(t, s) - k_n(t, s)|^2 ds dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

Si cela ne suffit pas, d'autres limites sont souvent possibles. Les noyaux $k_n(t, s)$ doit être choisi pour faire converger $\|k - k_n\|$ vers zéro aussi rapidement que praticable.

2.1.2 Solution de l'équation intégrale du noyau dégénéré

En utilisant la formule (2.2) pour $k_n(t, s)$, l'équation intégrale $(\lambda - k_n)x_n = y$ devient

$$\lambda x_n - \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \int_D \beta_j(s) x_n(s) ds = y(t), \quad t \in D \quad (2.13)$$

Alors la solution x_n est donnée par

$$x_n = \frac{1}{\lambda} [y(t) + \sum_{j=1}^n c_j \alpha_j(t)] \quad (2.14)$$

Pour déterminer c_j , multipliez (2.13) par $\beta_i(t)$ et intégrez sur D . Cela donne le système

$$\lambda c_i - \sum_{j=1}^n c_j (\alpha_j, \beta_i) = (y, \beta_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.15)$$

avec

$$(\alpha_j, \beta_i) = \int_D \beta_i(t) \alpha_j(t) dt \quad (2.16)$$

Le système (2.15) est résolu, et x_n est obtenu à partir de (2.14). L'utilisation de (2.14)-(2.15) présente de nombreux aspects pratiques. En accord avec le théorème 2.1.1, on peut supposer que $(\lambda - K_n)x_n = y$ est uniquement résoluble pour tout $y \in \chi$. Alors on voudrait que le système linéaire associé (2.15) soit non singulier. De plus, ce système nécessite l'évaluation des intégrales (α_j, β_i) et (y, β_i) ; et comme cela doit

souvent être fait numériquement, nous devrions choisir les fonctions $\alpha_j(t)$ et $\beta_i(t)$ dans cet esprit. Enfin, nous aimerions faire en sorte que le système linéaire (2.15) soit aussi bien conditionné que le problème initial $(\lambda - k)x = y$. Le théorème suivant répond à la première de ces préoccupations, et les autres préoccupations sont reprises plus tard.

Théorème 13. *Supposons $\lambda - k_n : \chi \rightarrow \chi$, avec $\lambda \neq 0$ et avec $\chi = C(D)$ ou $L^2(D)$; et soit k_n le noyau dégénéré (2.2). Alors le système linéaire (2.15) est non singulier.*

Preuve.

Nous prouvons le résultat pour $\chi = L^2(D)$, et pour la définition, nous supposons que \mathbb{R} est le corps des scalaires pour χ . Le cas pour $\chi = C(D)$ peut être prouvé de même, ou bien il peut être considéré comme un corollaire du cas $\chi = L^2(D)$. La preuve suivante est divisée en deux cas, selon que β_1, \dots, β_n est un ensemble de fonctions indépendantes ou dépendantes.

Cas 1). Supposons que β_1, \dots, β_n est un ensemble indépendant de fonctions. En supposant que $(\lambda - k_n)^{-1}$ existe, nous savons que le système linéaire (2.15) est résoluble pour tous les membres droits de la forme

$$\gamma \equiv \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y, \beta_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (y, \beta_n) \end{bmatrix} \quad \text{pour certains } y \in L^2(D)$$

Une solution de (2.15) dans ce cas est fournie par les coefficients du développement (2.1.14), avec $x_n = (A - k_n)^{-1}y$. Étant donné tout $\gamma \in \mathbb{R}^n$, on montrera qu'il existe $y \in L^2(D)$ pour lequel (2.17) est valide.

Étant donné $\gamma \in \mathbb{R}^n$, définir

$$y(t) = \sum_{j=1}^n \delta_j \beta_j(t) \tag{2.17}$$

pour certains $(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Ces coefficients sont à choisir de manière à avoir (2.17) être vrai, c'est-à-dire $\gamma_i = (y, \beta_i)$, $i = 1, \dots, n$. Cela nécessite $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ d'être la solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n \delta_j (\beta_j, \beta_i) = \gamma_i, \quad i = 1, \dots, n \tag{2.18}$$

La matrice de ce système est appelée matrice de Gram, et nous montrons ci-dessous que la l'indépendance linéaire de β_j implique que (2.19) est non singulier, ce qui en fait uniquement résoluble pour $(\delta_1, \dots, \delta_n)$. Pour montrer que (2.19) est non singulier, considérons le système homogène

$$\sum_{j=1}^n \delta_j (\beta_j, \beta_i) = 0, \quad i = 1, \dots, n \tag{2.19}$$

Multipliez l'équation i par δ_i , pour chaque i , puis faites la somme sur i . Cela donne

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_i \delta_j (\beta_j, \beta_i) = 0$$

ou équivalent,

$$(g, g) = 0, \quad g = \sum_{i=1}^n \delta_i \beta_i$$

Cela implique $g = 0$, et par l'indépendance linéaire de β_i , $g = 0$ implique $\delta_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Puisque le système homogène (2.20) n'a que solution nulle, le système non homogène (2.19) a une solution unique pour chaque côté droit γ .

Ceci montre que pour chaque $\gamma \in \mathbb{R}^n$, il existe $y \in L^2(D)$ pour lequel (2.17) est valable. Par conséquent, le système linéaire (2.15) a une solution pour chaque côté droit γ . Par des résultats standard d'algèbre linéaire, cela prouve le système (2.15) est non singulier.

Cas (2). Supposons que β_1, \dots, β_n est un ensemble dépendant de fonctions.

Nous réduisons ce cas à celui du cas (1), puis nous citons ses conclusions obtenir une conclusion similaire pour le cas présent. Plutôt que de prouver le non-singularité de (2.15) pour général $n \geq 1$, on fait un cas simple pour illustrer l'idée générale de la preuve.

Soit $n = 3$, soit β_1 et β_2 indépendants, et soit $\beta_3 = c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2$ la matrice des coefficients pour (2.15) est

$$A = \begin{bmatrix} \lambda - (\alpha_1, \beta_1) & -(\alpha_2, \beta_1) & -(\alpha_3, \beta_1) \\ -(\alpha_1, \beta_2) & \lambda - (\alpha_2, \beta_2) & -(\alpha_3, \beta_2) \\ -(\alpha_1, \beta_3) & -(\alpha_2, \beta_3) & \lambda - (\alpha_3, \beta_3) \end{bmatrix}$$

Basé sur la dépendance de β_3 sur β_1 et β_2 , présenter les matrices

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & 1 \end{bmatrix}$$

pour effectuer des opérations élémentaires de ligne et de colonne sur A . Ce faisant, on obtient ce qui suit. Ajouter c_1 fois la colonne 3 à la colonne 1 ; et ajouter c_2 fois la colonne 3 à colonne 2 :

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda - (\alpha_1 + c_1 \alpha_3, \beta_1) & -(\alpha_2 + c_2 \alpha_3, \beta_1) & -(\alpha_3, \beta_1) \\ -(\alpha_1 + c_1 \alpha_3, \beta_2) & \lambda - (\alpha_2 + c_2 \alpha_3, \beta_2) & -(\alpha_3, \beta_2) \\ c_1 \lambda - (\alpha_1 + c_1 \alpha_3, \beta_3) & c_2 \lambda - (\alpha_2 + c_2 \alpha_3, \beta_3) & \lambda - (\alpha_3, \beta_3) \end{bmatrix}$$

Ensuite, soustrayez c_1 fois la ligne 1 et c_2 fois la ligne 2 de la ligne 3, et utilisez $\beta_3 = c_1\beta_1 - c_2\beta_2$ pour obtenir :

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda - (\alpha_1 + c_1\alpha_3, \beta_1) & -(\alpha_2 + c_2\alpha_3, \beta_1) & -(\alpha_3, \beta_1) \\ -(\alpha_1 + c_1\alpha_3, \beta_2) & \lambda - (\alpha_2 + c_2\alpha_3, \beta_2) & -(\alpha_3, \beta_2) \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\equiv \begin{bmatrix} A & * \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

avec \hat{A} d'ordre 2×2 . Ainsi $\det(A) = \lambda \det(\hat{A})$. La matrice \hat{A} est la matrice de coefficients associés au noyau dégénéré

$$\hat{k}_3(t, s) = [\alpha_1(t) + c_1\alpha_3(t)]\beta_1(s) + [\alpha_2(t) + c_2\alpha_3(t)]\beta_2(s)$$

et cela équivaut au noyau dégénéré d'origine k_3 lorsque β_3 a été remplacé par $c_1\beta_1 + c_2\beta_2$. Dans le cas (1), \hat{A} est non singulier, et donc A est non singulier. Ce la preuve peut être généralisée pour gérer tout ensemble dépendant β_i , en réduisant la matrice de coefficients A pour (2.2) à une matrice d'ordre inférieur \hat{A} pour un forme \hat{k}_n de k_n , celui qui rentre sous le boîtier (1).

Ce théorème nous assure que le système (2.15) est non singulier pour les cas qui nous intéressent, à savoir celles pour lesquelles $(\lambda - k_n)^{-1}$ existe. Le deuxième cas dans la preuve est particulièrement important, car il n'est souvent pas possible savoir à l'avance si oui ou non β_i est un ensemble indépendant ou dépendant. La plupart des textes semblent impliquer que β_i doit être indépendant, mais ce n'est pas nécessaire. En établissant le noyau dégénéré $k_n(t, s)$ qui approche $k(t, s)$, il est nécessaire de tenir compte des coûts d'installation du système (2.15). En particulier, les coefficients (y, β_i) et (α_j, β_i) doivent être calculés, il est donc logique de choisir les fonctions at, ft en ayant cela à l'esprit. Souvent, les coefficients doivent être calculé en utilisant l'intégration numérique, et nous voudrions minimiser le coût de telles quadratures numériques. Dans les sections suivantes, nous considérons trois méthodes pour construire des approximations de noyau dégénéré, et nous considérons le calcul de leurs coefficients.

2.2 Méthode de Runge-Kutta

Principe générale

On considère un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

et on cherche à discrétiser ce problème par rapport à une subdivision $t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$. L'idée est de calculer par récurrence les points (t_n, y_n) en utilisant des points intermédiaire $(t_{n,i}, y_{n,i})$ avec

$$t_{n,i} = t_n + c_i h_n, \quad 1 \leq i \leq q, \quad c_i \in [0, 1].$$

A chacun de ces points on associe la pente correspondante

$$p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}).$$

Soit z une solution exacte de l'équation, On a

$$\begin{aligned} z(t_{n,i}) &= z(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n,i}} f(t, z(t)) dt \\ &= z(t_n) + h_n \int_0^{c_i} f(t_n + u h_n, z(t_n + u h_n)) du \end{aligned}$$

grâce au changement de variable $t = t_n + u h_n$. De même

$$z(t_{n+1}) = z(t_n) + h_n \int_0^1 f(t_n + u h_n, z(t_n + u h_n)) du$$

On se donne alors pour chaque $i = 1, 2, \dots, q$ une méthode d'intégration approchée

$$(M_i) \quad \int_0^{c_i} g(t) dt \simeq \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} g(c_j),$$

ces méthodes pouvant être a priori différentes. On se donne également une méthode d'intégration approchée sur $[0, 1]$:

$$(M) \quad \int_0^1 g(t) dt \simeq \sum_{1 \leq j < q} b_j g(c_j),$$

En appliquant ces méthodes d'intégration à $g(u) = f(t_n + u h_n, z(t_n + u h_n))$, il vient

$$z(t_{n,i}) \simeq z(t_n) + h_n \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} f(t_{n,j}, z(t_{n,j})),$$

$$z(t_{n+1}) \simeq z(t_n) + h_n \sum_{1 \leq j < q} b_j f(t_{n,j}, z(t_{n,j})).$$

La méthode Runge-Kutta correspondante est définie par l'algorithme [2]

$$\begin{cases} \begin{cases} t_{n,i} = t_n + c_i h_n \\ y_{n,i} = y_n + h_n \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} p_{n,j} \\ p_{n,i} = f(t_{n,i}, y_{n,i}) \end{cases} & 1 \leq i \leq q \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{1 \leq j \leq q} b_j p_{n,j}. \end{cases}$$

On la représente conventionnellement par le tableau

(M ₁)	c ₁	0	0	...	0	0
(M ₂)	c ₂	a ₂₁	0	...	0	0
	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
	⋮	⋮	⋮		0	0
(M _q)	c _q	a _{q1}	a _{q2}	...	a _{qq-1}	0
(M)		b ₁	b ₂	...	b _{q-1}	b _q

où les méthodes d'intégration approchées correspondent aux lignes. On pose par convention $a_{ij} = 0$ pour $j \geq i$.

Hypothèse

On supposera toujours que les méthodes d'intégration (M_i) et (M) sont d'ordre 0 au moins, c'est-à-dire

$$c_i = \sum_{1 \leq j < i} a_{ij}, \quad 1 = \sum_{1 \leq j \leq q} b_j.$$

En particulier, on aura toujours

$$c_1 = 0, \quad t_{n,1} = t_n, \quad y_{n,1} = y_n, \quad p_{n,1} = f(t_n, y_n).$$

2.2.1 Exemples

Range-kutta d'ordre 1[2]

Pour $q = 1$, le seul choix possible est $\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$ On a ici $c_1 = 0, a_{11} = 0, b_1 = 1$.

L'algorithme est donné par

$$\begin{cases} p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n p_{n,1} \end{cases}$$

Il s'agit de la méthode d'Euler.

Range-kutta d'ordre 2[2]

Pour $q = 2$, on considère les tableaux de la forme

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1 - \frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array}, \quad \text{où } \alpha \in]0, 1].$$

L'algorithme s'écrit ici

$$\begin{cases} p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n,2} = t_n + \alpha h_n \\ y_{n,2} = y_n + \alpha h_n p_{n,1} \\ p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \\ y_{n+1} = y_n + h_n \left(\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) p_{n,1} + \frac{1}{2\alpha} p_{n,2} \right) \end{cases}$$

ou encore, sous forme condensée :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \left(\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) f(t_n, y_n) + \frac{1}{2\alpha} f(t_n + \alpha h_n, y_n + \alpha h_n f(t, y_n)) \right).$$

C'est néanmoins la première formulation qui est la plus efficace en pratique, puisqu'elle requiert seulement deux évaluations de la fonction f au lieu de 3 pour la forme condensée.

Runge-kutta d'ordre 4 [2]

Méthode de Runge-Kutta $\langle\langle$ classique $\rangle\rangle$:

Il s'agit de la méthode définie par le tableau

$$q = 4, \quad \begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{array}$$

L'algorithme correspondant s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ t_{n,2} = t_n + \frac{1}{2}h_n \\ y_{n,2} = y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n,1} \\ p_{n,2} = f(t_{n,2}, y_{n,2}) \\ y_{n,3} = y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n,2} \\ p_{n,3} = f(t_{n,2}, y_{n,3}) \quad (\text{noter que } t_{n,3} = t_{n,2}) \\ t_{n+1} = t_n + h_n \quad (\text{noter que } t_{n,4} = t_{n+1}) \\ y_{n,4} = y_n + h_n p_{n,3} \\ p_{n,4} = f(t_{n+1}, y_{n,4}) \\ y_{n+1} = y_n + h_n \left(\frac{1}{6}p_{n,1} + \frac{2}{6}p_{n,2} + \frac{2}{6}p_{n,3} + \frac{1}{6}p_{n,4} \right) \end{array} \right.$$

On verra plus loin que cette méthode est d'ordre 4. Dans ce cas les méthodes d'intégration (M_i) et (M) utilisées sont respectivement :

$$(M_2) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) dt \simeq \frac{1}{2}g(0) : \text{rectangles } \tilde{A} \text{ gauche,}$$

$$(M_3) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} g(t) dt \simeq \frac{1}{2}g\left(\frac{1}{2}\right) : \text{rectangles } \tilde{A} \text{ droite,}$$

$$(M_4) \quad \int_0^1 g(t) dt \simeq g\left(\frac{1}{2}\right) : \text{point milieu,}$$

$$(M) \quad \int_0^1 g(t) dt \simeq \frac{1}{6}g(0) + \frac{2}{6}g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{6}g\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}g(1) : \text{Simpson.}$$

2.2.2 Stabilité de méthode de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes à un pas

$$y_{n+1} = y_n + h_n \Phi(t_n, y_n, h_n)$$

avec $\Phi(t_n, y_n, h_n) = \sum_{1 \leq j \leq q} b_j p_{n,j}$. La fonction Φ est définie de manière explicite par

$$\begin{cases} \Phi(t, y, h) = \sum_{1 \leq j \leq q} b_j f(t + c_j h, y_j) & \text{avec} \\ y_i = y + h \sum_{1 \leq j < i} a_{ij} f(t + c_j h, y_j), & 1 \leq i \leq q. \end{cases} \quad (2.20)$$

Supposons que f soit k -lipschitzienne en y . On va montrer que Φ est alors également lipschitzienne. Soit $z \in \mathbb{R}$ et supposons $\Phi(t, z, h)$ et z_i définis à partir de z comme dans la formule (2.2.2)

Lemme :

Soit $\alpha = \max_i (\sum_{1 \leq j \leq i} |a_{ij}|)$. Alors

$$|y_i - z_i| \leq (1 + (\alpha kh) + (\alpha kh)^2 + \dots + (\alpha kh)^{i-1}) |y - z|.$$

On démontre le lemme par récurrence sur i . Pour $i = 1$, on a $y_1 = y, z_1 = z$ et le résultat est évident. Supposons l'inégalité vraie pour tout $j < i$. Alors

$$|y_i - z_i| \leq |y - z| + h \sum_{j < i} |a_{ij}| \cdot k \cdot \max_{j < i} |y_j - z_j|,$$

$$|y_i - z_i| \leq |y - z| + \alpha kh \max_{j < i} |y_j - z_j|.$$

Par hypothèse de récurrence il vient

$$\max_{j < i} |y_j - z_j| \leq (1 + \alpha kh + \dots + (\alpha kh)^{i-2}) |y - z|,$$

et l'inégalité s'ensuit à l'ordre i .

La formule (2.2.2) entraîne maintenant

$$|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)| \leq \sum_{1 \leq j \leq q} |b_j| k |y_j - z_j| \leq \Lambda |y - z| \text{ avec}$$

$$\Lambda = k \sum_{1 \leq j \leq q} |b_j| (1 + (\alpha kh_{max}) + \dots + (\alpha kh_{max})^{j-1}).$$

Corollaire

Les méthodes de Runge-Kutta sont stables, avec constante de stabilité $S = e^{\Lambda T}$.

Remarque

le cas fréquent où les coefficients b_j sont ≥ 0 , on a la relation

$$\Lambda \leq k(1 + (\alpha kh_{max}) + \dots + (\alpha kh_{max})^{q-1}).$$

Si les coefficients a_{ij} sont eux-mêmes ≥ 0 , on a $\alpha = \max_{c_i}$.

Lorsque h_{max} est assez petit devant $1/\alpha k$, la constante de stabilité est donc de l'ordre

de grandeur de e^{kT} . Ces observations montrent que les méthodes de Runge- Kutta décrites dans les exemples 1, 2, 3 possèdent une excellente stabilité (il est facile de voir que e^{kT} est la borne inférieure possible pour S , quelle que soit la méthode utilisée : considérer pour cela l'équation $y' = ky$).

Chapitre 3

Applications

Dans Ce chapitre traite d'une application des méthodes numériques "Runge-Kutta" et "noyau dégénéré"

3.1 La méthode de noyau dégénérée

Équation intégrale impliquant une fonction inconnue qui est sous un signe intégral. Pour résoudre l'équation intégrale linéaire de Fredholm dans les méthodes numériques, c'est plus difficile, de sorte que pour obtenir une solution de cette équation, il faut utiliser le développement de la série de Taylor pour la fonction de deux variables afin d'obtenir une solution appropriée pour le noyau $k(x, t)$. D'après l'article [1], cela explique que l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce avec la valeur intégrale comme $a = 0$ et $b = 1$. Maintenant, d'après l'article [1], nous allons résoudre la valeur intégrale pour $a = 1$ et $b = 2$. Considérons maintenant l'équation de l'intégrale linéaire de Fredholm est

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)y(t)dt \quad (3.1)$$

Ici, nous utilisons la somme de la fonction de multiplication telle que $g_i(t)$ et $h_i(t)$ c'est à dire.

$$k(x, t) = \sum_{n=1}^N h_n(x)g_n(t) \quad (3.2)$$

À partir de l'équation (3.2), utilisez l'idée de noyau dégénéré. Pour résoudre l'équation ci-dessus, en utilisant le logiciel de laboratoire MATLAB à déduire de manière simple. Cette méthode est très précise lorsque l'on compare les résultats avec la solution d'autres méthodes.

3.1.1 Solution de l'équation intégrale de Fredholm de seconde espèce avec noyau dégénéré :

Considérons une équation intégrale de Fredholm non homogène de seconde espèce.

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)y(t)dt$$

Le Noyau est dégénéré, alors on prend

$$k(x, t) = \sum_{n=1}^N h_i(x)g_i(t)$$

Supposons que la fonction $h_i(x)$ est linéairement indépendant. En remplaçant l'équation (3.2) dans l'équation (3.1), on obtient

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n h_i(x)g_i(t) \right] y(t) dt \quad y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n h_i(x) \int_a^b [g_i(t)y(t)] dt \quad (3.3)$$

Ainsi, l'équation ci-dessus se réduit à,

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i h_i(x) \quad (3.4)$$

où $c_i = \int_a^b g_i(t)y(t)dt$ ($i = 1, 2, \dots, n$) sont des constantes à déterminer pour trouver la solution de (3.1) sous la forme donnée par l'équation (3.5). Maintenant pour continuer ceci pour évaluer c_i comme suit

$$y(t) = f(t) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i h_i(t) \quad (3.5)$$

remplacer les valeurs de $y(t)$ dans l'équation (3.4) on obtient

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n h_i(x) \int_a^b g_i(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i h_i(t) \right] dt \quad (3.6)$$

(4, 5)

Mise en équation de l'équation (3.5) et de l'équation (3.7)

$$f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i h_i(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n h_i(x) \int_a^b g_i(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i h_i(t) \right] dt$$

Ou

$$\lambda \sum_{i=1}^n c_i h_i(x) = \lambda \sum_{i=1}^n h_i(x) \int_a^b g_i(t) \left[f(t) + \lambda \sum_{i=1}^n c_i h_i(t) \right] dt \quad (3.7)$$

Laisser $\beta_i = \int_a^b g_i(t)f(t)dt$ et $\alpha_{ij} = \int_a^b g_i(t)h_j(t)dt$ où α_{ij} et β_i sont dites constantes. Alors l'équation (3.8) est simplifiée comme,

$$\sum_{i=1}^n [c_i h_i(x)] = \sum_{i=1}^n h_i(x) \left[\beta_i + \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} c_j \right]$$

Ou

$$\sum_{i=1}^n h_i(x) \left[c_i - \beta_i - \lambda \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} c_j \right] = 0$$

Par notre hypothèse $h_i(x)$ sont linéairement indépendants,

$$c_i - \beta_i - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} c_j = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} c_j = \beta_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

On obtient ainsi un système d'équations linéaires. Pour déterminer la valeur de c_1, c_2, \dots, c_n

À partir de l'équation (3.9), poser $i = 1$

$$c_1 = \lambda[\alpha_{11}c_1 + \alpha_{12}c_2 + \alpha_{13}c_3 + \dots + \alpha_{1n}c_n]$$

poser $i = 2$

$$c_2 = \lambda[\alpha_{21}c_1 + \alpha_{22}c_2 + \alpha_{23}c_3 + \dots + \alpha_{2n}c_n]$$

et ainsi de suite, en général poser $i = n$

$$c_n = \lambda[\alpha_{n1}c_1 + \alpha_{n2}c_2 + \alpha_{n3}c_3 + \dots + \alpha_{nn}c_n]$$

Ainsi le déterminé de $D(\lambda)$ du système

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} (1 - \lambda\alpha_{11}) & -\lambda\alpha_{12} & \dots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & (1 - \lambda\alpha_{22}) & \dots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \dots & (1 - \lambda\alpha_{nn}) \end{bmatrix}$$

qui est un polynôme en λ de degré au plus (n) , $D(\lambda)$ n'est pas identiquement nul.

Exemple 1 :

Trouver la solution analytique de l'équation intégrale suivante

$$y(x) = 1 + \int_1^2 [1 + 4xt]y(t)dt$$

Solution.

L'équation intégrale donnée est,

$$y(x) = 1 + \int_1^2 [1 + 4xt]y(t)dt$$

À partir de l'équation intégrale donnée, nous pouvons choisir la valeur du noyau comme $K(x, t) = 1 + 4xt$ Nous savons que le noyau $K(x, t)$ est une fonction séparable. Ce $h_1(x) = 1; h_2(x) = 4x$

$g_1(t) = 1; g_2(t) = tf(x) = 1; \lambda = 1$ De l'équation (5.4) nous obtenons,

$$y(x) = 1 + [c_1 + 4xc_2]$$

$$\begin{bmatrix} (1 - \lambda\alpha_{11}) & -\lambda\alpha_{12} \\ -\lambda\alpha_{21} & (1 - \lambda\alpha_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

donc la valeur de λ est 1 alors,

$$\begin{bmatrix} (1 - \alpha_{11}) & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & (1 - \alpha_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Pour trouver la valeur de c_1 et c_2 on trouve d'abord le α_{ij} , $i \neq j$ et β_j , ($i = 1, 2; j = 1, 2$), nous obtenir

$$\alpha_{11} = \int_1^2 dx = 1, \alpha_{12} = \int_1^2 4x dx = 6, \alpha_{21} = \int_1^2 x dx = \frac{3}{2}, \alpha_{22} = \int_1^2 4x^2 dx = \frac{28}{3}$$

$$\beta_1 = \int_1^2 dx = 1, \beta_2 = \int_1^2 x dx = \frac{3}{2}$$

, Puis substituez ces valeurs dans la matrice ci-dessus et on obtient

$$\begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{28}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

et les valeurs des constantes sont $c_2 = -\frac{1}{6}$; $c_1 = -\frac{2}{27}$ Ainsi la solution est $y(x) = 1 + [-\frac{2}{27} + (-\frac{2x}{3})]$

3.1.2 Extension de la série Taylor :

Soit $f(x, y)$ une fonction continue de deux variables x et y , alors la série de Taylor Développement de la fonction f au voisinage de tout nombre réel "a" en ce qui concerne y est

$$taylor(f, y, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(y - a)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial y^n} (f, y = a)$$

et

$$taylor(f, y, a) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(y - a)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial y^n} (f, y = a)$$

cela veut dire que m^{th} terme du développement de Taylor à la fonction au voisinage a Par rapport à la variable

Exemple 2 :

Trouver les six termes d'un développement en série de Taylor de la fonction $f(x, y) = e^{xy}$ à $a = 4$

Solution :

la fonction donnée est $f(x, y) = e^{xy}$. Le développement de Taylor est

$$\text{taylor}(f, y, a) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{(y-a)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial y^n} (f, y=a)$$

Pour trouver les quatre nombres réels

Algorithme[7]

étape-1 : Démarrer le programme.

étape-2 : Déclarez le variable x .

étape-3 : Calculer $\alpha_{ij}, i \neq j, (i = 1, 2, \dots, 5; j = 1, 2, \dots, 5)$ valeurs en utilisant

$$\alpha_{ij} = \int_1^2 g_i(x)h_j(x)dx$$

étape-4 : A partir des valeurs de α_{ij} nous pouvons calculer la valeur $[A]$.

étape-5 : Calculer $\beta_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ valeurs en utilisant

$$\beta_i = \int_1^2 g_i(x)f(x)dx$$

étape-6 : Calculer la valeur des constantes $[c_i] = [A_i]^{-1} \times [B_i]^T$.

étape-7 : Ensuite, la solution de $Y(x)$ est également calculée.

étape-8 : Arrêtez le programme.

valeur des constantes

```
A = 0.0436 - 0.0678 0.4782 0.0113 - 0.0399
1.4404 0.9793 0.7202 0.0034 - 0.0601
-2.2462 0.0851 2.1231 - 0.0142 - 0.0937
-3.6141 0.3058 1.8070 - 0.9490 - 0.1507
-5.9754 0.7491 2.9877 - 0.1249 0.7508
```

```
>> c = inv(A) * transpose(B)
c = 1.5195
2.0528
2.8646
- 4.5974
6.1393
```

Solution d'approximation

```
>> Y = 1 + (((1.5195) * sin(x) + ((2.0528) * cos(x)) + ((2.8646) * (-0.5) * sin(x)) +
((-4.5974) * (-0.1667) * cos(x)) + ((6.1393) * (0.0417) * sin(x))))
```

$$Y = 1 + 0.3432\sin(x) + 2.8192\cos(x)$$

3.2 La méthode de Runge-Kutta

3.2.1 Introduction

Tout au long de ce paragraphe, on va servir de l'article [5] Pour résoudre numériquement les équations intégrales de Volterra (VIE) de second espèce

$$y(x) = g(x) + \int_{x_0}^x k(x, t, y(t)) dt, \quad x \in [x_0, X] \quad (3.9)$$

telles que

$g : [x_0, X] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k : \Delta \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\Delta = \{(x, t) : x_0 \leq t \leq x \leq X\}$ sont suffisamment régulières, on considère une classe très générale de méthodes dites de Volterra Runge-Kutta (VRK) définies par

$$Y_i^{[n]} = h \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} k \left(x_n + d_{ij}h, x_n + e_{ij}h, \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} Y_l^{[n]} \right) + \tilde{F}_n(x_n + c_i h), \quad (3.10)$$

$$y_{n+1} = \sum_{j=1}^{\nu} w_j Y_j^{[n]}$$

$i = 1, 2, \dots, \nu$; $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Ici μ , est un entier fixe, $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$; $Nh = X - x_0$ est le maillage (division) uniforme, et $\tilde{F}_n(x_n + c_i h)$ est une approximation de $F_n(x_n + c_i h)$ définie par

$$F_n(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x_n} k(x, t, y(t)) dt$$

Avec cette notation, l'équation (3.9) peut être réécrite comme

$$y(x) = F_n(x) + \int_{x_0}^x k(x, t, y(t)) dt, \quad x \in [x_n, x_{n+1}], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (3.11)$$

L'approximation dite de "la queue" consiste à approximer $\tilde{F}_n(x_n + c_i h)$ par $F_n(x_n + c_i h)$ doit être choisie de manière à ce qu'elle préserve l'ordre de convergence de la méthode VRK et elle est la plus efficace possible en terme de nombre d'évaluations du noyau k apparaissant dans (3.9), (3.10) et (3.11). On peut définir l'approximation de la queue de la forme

$$\tilde{F}_n(x) = g(x) + h \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j k \left(x, x_{\kappa-1} + c_j h, Y_j^{[\kappa-1]} \right) \quad (3.12)$$

avec le vecteur des poids $\gamma = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_\nu]^T$. La méthode résultante (3.10) avec les approximations $\tilde{F}(x_n + c_i h)$ définies par (3.12) ont été référencées dans [5], comme une méthode VRK étendue. Une approche différente des approximations basée sur des extensions continues naturelles de la solution numérique de degré $d \leq p$ (tel que p est l'ordre de la méthode qui sera discutée plus bas) a été proposée par Bellen et al. dans [2]. Ces extensions continues naturelles $u(x_n + \theta h)$ sont définies par

$$u(x_n + \theta h) = \sum_{j=1}^{\nu} w_j(\theta) Y_j^{[n]} \quad (3.13)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N - 1; \theta \in [0, 1]$ où $w_j(\theta)$ est un polynôme d'ordre d

$$[p/2] \leq d \leq \min \{ \nu - 1, p \}$$

Ici, $[p/2]$ représente la partie entière de $p/2$. Ces polynômes satisfont les systèmes linéaires des équations

$$\sum_{j=1}^{\nu} w_j(\theta) c_j^k = \theta^k, k = 0, 1, 2, \dots, d \quad (3.14)$$

Voir [4] pour comparaison. On considère alors l'approximation suivante

$$\tilde{F}_n(x) = g(x) + h \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^m v_j k(x, x_{\kappa-1} + \xi_j h, u(x_{\kappa-1} + \xi_j h)) \quad (3.15)$$

où le poids v_j et les abscisses ξ_j correspondent à une r ègle de quadrature d'ordre supérieur ou égal à p . Les formules résultantes avec approximation que définies par (3.15) seront appelées méthodes VRK naturelles. Les coefficients α_{ij} , β_{ijl} et w_i , et les abscisses c_i , d_{ij} et e_{ij} seront choisis de sorte que la méthode VRK ait un ordre p et un ordre d'étape $q = p$, et certaines propriétés de stabilité souhaitables par rapport à la base et à l'équations de test de convolution. Puisque, en général, $k(x, t, y)$ n'est défini que pour $t \leq x$, nous supposons toujours la condition dite du noyau $e_{ij} \leq d_{ij}$.

3.2.2 Ordre des étapes et conditions d'ordre

Pour discuter des conditions d'ordre pour les méthodes VRK (3.10)[1], sans perte de généralité, nous considérerons une forme plus simple de VIE (3.9), où la fonction noyau $k(x, t, y(t))$ est ind épendant de t . Ceci peut être accompli si nous définissons, par exemple

$$\tilde{y}(x) = \begin{bmatrix} x \\ y(x) \end{bmatrix}, \quad \tilde{g}(x) = \begin{bmatrix} x_0 \\ g(x) \end{bmatrix}, \quad \tilde{k}(x, \tilde{y}(x)) = \begin{bmatrix} 1 \\ k(x, t, y(t)) \end{bmatrix}$$

Alors l'équation (3.9) peut être réduite à la forme

$$y(x) = g(x) + \int_{x_0}^x k(x, y(t)) dt, \quad x \in [x_0, X] \quad (3.16)$$

où par commodité nous avons écrit y , g et k au lieu de \tilde{y} , \tilde{g} et \tilde{k} . La méthode VRK pour (3.16) prend maintenant la forme

$$Y_i^{[n]} = h \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} k \left(x_n + d_{ij} h, \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} Y_l^{[n]} \right) + \tilde{F}_n(x_n + c_i h) \quad (3.17)$$

$$y_{n+1} = \sum_{j=1}^{\nu} w_j Y_j^{[n]}$$

$i = 1, 2, \dots, \nu$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, où $\tilde{F}_n(x_n + c_i h)$ est une approximation de $F_n(x_n + c_i h)$ d'ordre suffisamment élevé définie par

$$F_n(x) = g(x) + \int_{x_0}^{x_n} k(x, y(t)) dt, \quad x \in [x_n, x_{n+1}], \quad n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

L'approximation de l'égalité (3.12) prend maintenant la forme

$$\tilde{F}_n(x) = g(x) + h \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j k(x, Y_j^{[\kappa-1]})$$

et l'approximation de l'égalité (3.15) basée sur les extensions continues naturelles (3.13) prend pour

$$\tilde{F}_n(x) = g(x) + h \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^m v_j k(x, u(x_{\kappa-1} + \xi_j h)) \quad (3.18)$$

Il résulte de la définition de $\tilde{k}(x, \tilde{y}(t))$ qu'avec les abscisses e_{ij} définies par

$$e_{ij} = \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l, \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad j = 1, 2, \dots, \mu. \quad (3.19)$$

les conditions d'ordre pour (3.17) appliquées à (3.16) sont les mêmes que les conditions d'ordre pour (3.10) appliquées à (3.9). Comme dans [3], nous supposons également que

$$\sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad j = 1, 2, \dots, \mu. \quad (3.20)$$

Dans ce paragraphe, nous déterminons les conditions qui garantissent que les méthodes VRK (3.17) ont l'ordre p et l'ordre des étapes $q = p$. Cela signifie que

$$hd_i = O(h^{p+1}), \quad i = 1, 2, \dots, \nu, \quad h \rightarrow 0, \quad (3.21)$$

et

$$h\hat{d} = O(h^{p+1}), \quad h \rightarrow 0 \quad (3.22)$$

où hd_i , $i = 1, 2, \dots, \nu$, sont les erreurs locales de discrétisation des valeurs d'étage $Y_i^{[n]}$, et $h\hat{d}$ est l'erreur locale de discrétisation de y_{n+1} . Ces erreurs sont définies comme des résidus obtenus en remplaçant $Y_i^{[n]}$ par $y(x_n + c_i h)$, et $\tilde{F}_n(x_n + c_i h)$ par $F_n(x_n + c_i h)$, et y_{n+1} par $y(x_{n+1})$ dans (3.17), où $y(x)$ est la solution de (3.16), c'est-à-dire

$$hd_i := y(x_n + c_i h) - h \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} k \left(x_n + d_{ij} h, \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} y(x_n + c_l h) \right) - F_n(x_n + c_i h) \quad (3.23)$$

$i = 1, 2, \dots, \nu$, et

$$h\hat{d} := y(x_{n+1}) - \sum_{j=1}^{\nu} w_j y(x_n + c_j h). \quad (3.24)$$

Il découle de (3.21) et (3.22) que l'ordre des étapes et les conditions d'ordre peuvent être obtenus en développant hd_i , $i = 1, 2, \dots, \nu$, et $h\hat{d}$ en séries de Taylor autour du point x_n et égalant à zéro les coefficients des différentielles élémentaires jusqu'à l'ordre d'étape $q = p$ et l'ordre p . Ces différentielles élémentaires dépendent des y , k , des dérivées de y , des dérivées partielles de k , et de leurs combinaisons. Dans ce qui suit, nous allons illustrer ce processus pour déterminer l'ordre des étapes et les

conditions d'ordre jusqu'à l'ordre $p = 4$ et l'ordre des étapes $q = 4$. Les expressions hd_i et $h\hat{d}$ ont les développements de Taylor suivants jusqu'à l'ordre quatre

$$\begin{aligned}
hd_i &= y(x_n) - F_n(x_n) + (y'(x_n) - F'_n(x_n)) c_i h + (y''(x_n) - F''_n(x_n)) \frac{c_i^2 h^2}{2} \\
&+ (y'''(x_n) - F'''_n(x_n)) \frac{c_i^3 h^3}{6} + (y^{(4)}(x_n) - F_n^{(4)}(x_n)) \frac{c_i^4 h^4}{24} \\
&- h \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} k(x_n + d_{ij} h, y(x_n)) + \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l y'(x_n) h \\
&+ \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} \frac{c_l^2}{2} y''(x_n) h^2 + \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} \frac{c_l^3}{6} y'''(x_n) h^3 + O(h^5).
\end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, \nu$, où nous avons utilisé (3.20), et

$$\begin{aligned}
h\hat{d} &= \left(1 - \sum_{j=1}^{\nu} w_j\right) y(x_n) + \left(1 - \sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j\right) h y'(x_n) + \left(1 - \sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j^2\right) y''(x_n) \frac{h^2}{2} \\
&+ \left(1 - \sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j^3\right) y'''(x_n) \frac{h^3}{6} + \left(1 - \sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j^4\right) y^{(4)}(x_n) \frac{h^4}{24} + O(h^5).
\end{aligned}$$

$p=q$	différentielles	conditions d'ordre p et ordre d'étapes q
$p = 0$	y	$\sum_{j=1}^{\nu} w_j = 1$
$p = 1$	y'	$\sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j = 1$
$q = 1$	k	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} = c_i$
$p = 2$	y''	$\sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j^2 = 1$
$q = 2$	$\frac{\partial k}{\partial x}$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} = c_i^2$
$q = 2$	$\frac{\partial k}{\partial y} y'$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l = \frac{c_i^2}{2}$

Tableau1 : Conditions d'ordre et d'ordre d'étape pour $p = 0$, $p = q = 1$ et $p = q = 2$

Nous évaluons ensuite $y(x) - F_n(x)$, $y'(x) - F'_n(x)$, $y''(x) - F''_n(x)$, $y'''(x) - F'''_n(x)$, et $y^{(4)}(x) - F_n^{(4)}(x)$ pour $x = x_n$. Après quelques calculs, il résulte de (3.11) que

$$\begin{aligned}
y - F_n &= 0, \quad y' - F'_n = k, \quad y'' - F''_n = 2 \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} y', \\
y''' - F'''_n &= 3 \frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial k}{\partial y} y'', \\
y^{(4)} - F_n^{(4)} &= 4 \frac{\partial^3 k}{\partial x^3} + 6 \frac{\partial^3 k}{\partial x^2 \partial y} y' + 4 \frac{\partial^3 k}{\partial x \partial y^2} y'^2 + 4 \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y} y'' \\
&+ \frac{\partial^3 k}{\partial y^3} y'^3 + 3 \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} y' y'' + \frac{\partial k}{\partial y} y'''.
\end{aligned}$$

où nous avons ignoré les variables de y , F_n et k et de leurs dérivées. En remplaçant les expressions ci-dessus par hd_i , $i = 1, 2, \dots, \nu$ et en développant la fonction

k apparaissant dans hd_i en série de Taylor autour du point $(x_n, y(x_n))$, puis en égalisant à zéro les coefficients des différentielles élémentaires résultants, on obtient des conditions d'ordre d'étape jusqu'à l'ordre d'étape $q = 4$. De même, en égalant à zéro les puissances de h dans hd jusqu'à l'ordre quatre on obtient les conditions d'ordre de la forme $\sum_{j=1}^{\nu} w_j e_j^k = 1$, $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Nous appellerons ces conditions, les conditions d'ordre de quadrature. Ces conditions d'ordre et d'ordre d'étape sont répertoriées dans le tableau 1 pour $p = 0$, $p = q = 1$ et $p = q = 2$, dans le tableau 2 pour $p = q = 3$ et dans le tableau 3 pour $p = q = 4$. On observe qu'en multipliant les conditions d'ordre d'étape par w_i puis en additionnant les expressions résultantes de $i = 1$ à $i = \nu$ et en tenant compte des conditions d'ordre de quadrature, nous obtenons des conditions d'ordre d'étape déterminées dans [2]. Nous concluons cette section en énumérant dans le tableau 4 le nombre de conditions (qui incluent les conditions d'ordre et d'ordre d'étape et les relations (3.20)) et le nombre de paramètres libres $c_j, w_j, \alpha_{ij}, d_{ij}$ et β_{ijl} pour les méthodes VRK naturelles avec $p = q = \mu = \nu$ pour $\nu = 1, 2, 3$ et 4. En construisant de telles méthodes, nous supposons généralement que la dernière composante c_ν du vecteur d'abscisse c est égale à un.

$p = q$	différentiels	conditions d'ordre p et ordre d'étape q
$p = 3$	y'''	$\sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j^3 = 1$
$q = 3$	$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2}$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij}^2 = c_i^3$
$q = 3$	$\frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y} y'$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l = \frac{c_i^3}{2}$
$q = 3$	$\frac{\partial^2 k}{\partial y^2} y'^2$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} (\sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l)^2 = \frac{c_i^3}{3}$
$q = 3$	$\frac{\partial k}{\partial y} y''$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l^2 = \frac{c_i^3}{3}$

Tableau2 : Conditions d'ordre et d'ordre d'étape pour $p = q = 3$

$p = q$	différentielles	conditions d'ordre p et ordre d'étape q
$p = 4$	$y^{(4)}$	$\sum_{j=1}^{\nu} w_j c_j^4 = 1$
$q = 4$	$\frac{\partial^3 k}{\partial x^3}$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij}^3 = c_i^4$
$q = 4$	$\frac{\partial^3 k}{\partial x \partial y^2} y'^2$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} (\sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l)^2 = \frac{c_i^4}{3}$
$q = 4$	$\frac{\partial^3 k}{\partial x^2 \partial y} y'$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij}^2 \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l = \frac{c_i^4}{2}$
$q = 4$	$\frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y} y''$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l^2 = \frac{c_i^4}{3}$
$q = 4$	$\frac{\partial^2 k}{\partial y^2} y' y''$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l^2 = \frac{c_i^4}{4}$
$q = 4$	$\frac{\partial^3 k}{\partial y^3} y'^3$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} (\sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l)^3 = \frac{c_i^4}{4}$
$q = 4$	$\frac{\partial k}{\partial y} y'''$	$\sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \sum_{l=1}^{\nu} \beta_{ijl} c_l^3 = \frac{c_i^4}{4}$

Tableau3 : Conditions d'ordre et d'ordre d'étape pour $p = q = 4$

$p = q = \mu = \nu$	\neq de condition : $p = q$	\neq de paramètre
1	4	5
2	13	20
3	34	51
4	77	104

Tableau 4 : Nombre de conditions et nombre de paramètres libres pour les m éthodes VRK naturelles avec $p = q = \mu = \nu$, pour $\nu = 1, 2, 3$ et 4.

3.2.3 Analyse de stabilité par rapport à l'équation du test de convolution

Dans cette paragraphe, nous étudions les propriétés de stabilité des méthodes VRK (3.17) avec l'approximation définie par (3.18) par rapport à l'équation test de convolution

$$y(x) = 1 + \int_0^x (\lambda + \xi(x-t)) y(t) dt, \quad x \geq 0 \quad (3.25)$$

où, $\lambda, \xi \in \mathbb{R}$. La solution $y(x)$ de cette équation tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini si et seulement si $\lambda < 0$ et $\xi \leq 0$. Nous allons rechercher si cette propriété est héritée de la solution numérique $\{y_n\}_{n=0}^\infty$ obtenue par l'application de la méthode VRK (3.17) avec l'approximation de la queue donnée par (3.18) à l'équation test (3.25). On peut vérifier que cette solution numérique dépend des paramètres λh et ξh^2 , où h est le pas utilisé. La m éthode VRK est dite stable pour $(\lambda h, \xi h^2)$ donné si $y_n = y_n(\lambda h; \xi h^2) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. La région de stabilité S d'une méthode VRK par rapport à (3.25) est l'ensemble de tous $(\lambda h, \xi h^2)$ pour lesquels la m éthode est stable, c'est-à-dire

$$S := \{(\lambda h, \xi h^2) \in \mathbb{R}^2 : y_n(\lambda h; \xi h^2) \rightarrow 0, \text{ quand } n \rightarrow \infty\} \quad (3.26)$$

La méthode VRK est dite V_0 -stable si sa région de stabilité comprend l'ensemble $\lambda h < 0$ et $\xi h^2 < 0$, c'est-à-dire $\{(\lambda h, \xi h^2) \in \mathbb{R}^2 : \lambda h < 0, \xi h^2 < 0\} \subset S$. Dans ce mémoire nous présenterons la méthodes de VRK naturelles V_0 -stables d'ordre p et d'ordre d'étape $q = p$ jusqu'à l'ordre quatre. En appliquant la méthode VRK (3.17) à (3.25) on obtient

$$\begin{aligned} Y_i^{[n]} &= h\lambda \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \beta_{ijl} Y_l^{[n]} + h^2 \xi \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} \beta_{ijl} Y_l^{[n]} \\ &\quad - h^2 \xi \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} e_{ij} \beta_{ijl} Y_l^{[n]} + \tilde{F}_n(x_n + c_i h) \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$y_{n+1} = \sum_{j=1}^{\nu} w_j Y_j^{[n]}$$

$i = 1, 2, \dots, \nu$, où l'approximation de la queue (3.18) prend maintenant la forme

$$\begin{aligned}\tilde{F}_n(x_n + c_i h) &= 1 + h\lambda \sum_{\kappa=1}^n \sum_{l=1}^m v_l u(x_{\kappa-1} + \xi_l h) \\ &\quad + h^2 \xi \sum_{\kappa=1}^n \sum_{l=1}^m v_l (n - \kappa + 1) u(x_{\kappa-1} + \xi_l h) \\ &\quad + h^2 \xi \sum_{\kappa=1}^n \sum_{l=1}^m v_l (c_i - \xi_l) u(x_{\kappa-1} + \xi_l h).\end{aligned}\quad (3.28)$$

En mettant

$$b_j = \sum_{l=1}^m v_l w_j(\xi_l), \quad r_j = \sum_{l=1}^m v_l \xi_l w_j(\xi_l) \quad (3.29)$$

il résulte de (3.13) que (3.28) peut être réécrit sous la forme

$$\begin{aligned}\tilde{F}_n(x_n + c_i h) &= 1 + h\lambda \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^{\nu} b_j Y_j^{[\kappa-1]} \\ &\quad + h^2 \xi \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^{\nu} b_j (n - \kappa + 1) Y_j^{[\kappa-1]} + h^2 \xi \sum_{\kappa=1}^n \sum_{j=1}^{\nu} (b_j c_i - r_j) Y_j^{[\kappa-1]}\end{aligned}\quad (3.30)$$

En mettant

$$\begin{aligned}x &= h\lambda, \quad y = h^2 \xi, \quad r = [r_1, \dots, r_{\nu}]^T, \quad e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^{\nu}, \\ A &= [a_{il}]_{i,l=1}^{\nu}, \quad a_{il} = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \beta_{ijl}, \quad B = [b_{il}]_{i,l=1}^{\nu}, \quad b_{il} = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} d_{ij} \beta_{ijl}, \\ C &= [c_{il}]_{i,l=1}^{\nu}, \quad c_{il} = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} e_{ij} \beta_{ijl}, \quad b = [b_1, \dots, b_{\nu}]^T, \quad c = [c_1, \dots, c_{\nu}]^T, \\ Y^{[\kappa]} &= [Y_1^{[\kappa]}, \dots, Y_{\nu}^{[\kappa]}]^T, \quad F^{[\kappa]} = [\tilde{F}_{\kappa}(x_{\kappa} + c_1 h), \dots, \tilde{F}_{\kappa}(x_{\kappa} + c_{\nu} h)]^T\end{aligned}$$

la relation (3.27) peut s'écrire sous forme vectorielle

$$Y^{[n]} = (xA + y(B - C))Y^{[n]} + F^{[n]} \quad (3.32)$$

et l'approximation de (3.31) prend la forme

$$F^{[n]} = e + \sum_{\kappa=1}^n (xeb^T + y(n - \kappa + 1)eb^T + y(cb^T - er^T))Y^{[\kappa-1]} \quad (3.33)$$

où $r = b.c := [c_1 b_1, \dots, c_{\nu} b_{\nu}]^T$. Comme dans [3] on peut réduire (3.32) et (3.33) à un équation de différence vectorielle d'ordre deux. En mettant

$$Q = Q(x, y) = I - xA - y(B - C) \quad (3.34)$$

la relation (3.32) prend la forme $QY^{[n]} = F^{[n]}$. On peut donner (3.33) comme suite

$$\begin{aligned}F^{[n+2]} - 2F^{[n+1]} + F^{[n]} &= ((x + y)eb^T + y(cb^T - er^T))Y^{[n+1]} \\ &\quad - (xeb^T + y(cb^T - er^T))Y^{[n]},\end{aligned}$$

et en substituant ceci dans la relation

$$Q (Y^{[n+2]} - 2Y^{[n+1]} + Y^{[n]}) = F^{[n+2]} - 2F^{[n+1]} + F^{[n]}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} Q (Y^{[n+2]}) &= (2Q + (x + y) eb^T + y (cb^T - er^T)) Y^{[n+1]} \\ &\quad - (Q + xeb^T + y (cb^T - er^T)) Y^{[n]}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$n = 0, 1, \dots$, Il s'agit de la relation de récurrence vectorielle souhaitée d'ordre deux. Dans ce qui suit nous supposons que la matrice Q définie par (3.34) est non singulière et nous définissons les vecteurs $\tilde{e} = Q^{-1}e$, $\tilde{c} = Q^{-1}c$. Nous chercherons les solutions de (3.35) sous la forme

$$Y^{[n]} = \alpha_n \tilde{e} + \beta_n \tilde{c} \quad (3.36)$$

où α_n et β_n sont des scalaires à déterminer. En remplaçant (3.36) dans (3.35) et en comparant les coefficients de e et c dans les expressions résultantes, et en tenant compte du fait que les vecteurs e et c sont linéairement indépendants, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha_{n+2} &= (2 + (x + y) b^T \tilde{e} - yr^T \tilde{e}) \alpha_{n+1} + ((x + y) b^T \tilde{c} - yr^T \tilde{c}) \beta_{n+1} \\ &\quad - (1 + xb^T \tilde{e} - yb^T \tilde{e}) \alpha_n - (xb^T \tilde{c} - yr^T \tilde{c}) \beta_n \end{aligned}$$

$$\beta_{n+2} = yb^T \tilde{e} \alpha_{n+1} + (2 + yb^T \tilde{c}) \beta_{n+1} - yb^T \tilde{e} \alpha_n - (1 + yb^T \tilde{c}) \beta_n$$

$n = 0, 1, \dots$, Ensuite, nous réduirons les relations de récurrence ci-dessus pour α_n et β_n à une équation de différence vectorielle du premier ordre. Laisser

$$M = M(x, y) = \begin{bmatrix} 2 + (x + y) b^T \tilde{e} - yr^T \tilde{e} & (x + y) b^T \tilde{c} - yr^T \tilde{c} \\ yb^T \tilde{e} & 2 + yb^T \tilde{c} \end{bmatrix}$$

$$N = N(x, y) = \begin{bmatrix} -1 - xb^T \tilde{e} + yr^T \tilde{e} & -xb^T \tilde{c} + yr^T \tilde{c} \\ -yb^T \tilde{e} & -1 - yb^T \tilde{c} \end{bmatrix}$$

Alors le système pour α_{n+2} et β_{n+2} peut être écrit sous une forme compacte

$$v_{n+1} = S v_n \quad (3.37)$$

$n = 0, 1, \dots$, où

$$S = S(x, y) = \left[\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline I & 0 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad v = [\alpha_{n+1} \beta_{n+1} \alpha_n \beta_n]^T \in \mathbb{R}^4$$

Il résulte de (3.32) et (3.33) que $Y^{[0]} = Q^{-1}F^{[0]} = \tilde{e}$,

$$Y^{[1]} = Q^{-1}F^{[1]} = (1 + xb^T \tilde{e} - yb^T \tilde{e}) \tilde{e} + yb^T \tilde{c},$$

ce qui implique que $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\alpha_1 = 1 + (x + y)b^T \tilde{e} - yr^T \tilde{e}$, $\beta_1 = yb^T \tilde{c}$. Ainsi, le vecteur initial v_0 de l'équation de récurrence (3.37) prend la forme

$$v_0 = [\alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_0 \quad \beta_0]^T = [1 + (x + y)b^T \tilde{e} - yr^T \tilde{e} \quad yb^T \tilde{c} \quad 1 \quad 0]^T.$$

Les propriétés de stabilité de la méthode VRK (3.17) avec l'approximation de (3.18) par rapport à l'équation du test de convolution (3.25) sont déterminées par le polynôme caractéristique $\phi(\theta)$ de la matrice d'amplification $S = S(x, y)$ apparaissant dans (3.37). Ce polynôme prend la forme

$$\phi(\theta) = \det [\theta I - S] = \det [\theta^2 I - \theta M - N]$$

Ainsi que $\phi(\theta) = (\theta - 1)^2 \psi(\theta)$ avec

$$\psi(\theta) = \theta^2 - (2 + (x + y) b^T \tilde{e} + y (b^T \tilde{c} - r^T \tilde{e})) \theta \quad (3.38)$$

$$+ 1 + x b^T \tilde{e} + y (b^T \tilde{c} - r^T \tilde{e}) + y^2 (b^T \tilde{e} r^T \tilde{c} - b^T \tilde{c} r^T \tilde{e}). \quad (3.39)$$

où $\theta = 1$ est une valeur propre de S de multiplicité algébrique deux et de multiplicité géométrique un. En conséquence, la région de stabilité de la méthode VRK (3.17) par rapport à l'équation de test (3.25) peut être caractérisée comme

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |\theta_1(x, y)| < 1, \text{ et } |\theta_2(x, y)| < 1\}$$

où $\theta_1 = \theta_1(x, y)$ et $\theta_2 = \theta_2(x, y)$ sont les racines du polynôme $\psi(\theta)$ défini par (3.39). En mettant $y = 0$ dans (3.39) ce polynôme $\psi(\theta)$ se réduit à

$$\psi(\theta) = \theta^2 - (2 + x b^T \tilde{e}) \theta + 1 + x b^T \tilde{e},$$

avec les racines $\theta = 1$ et $\theta = 1 + x b^T \tilde{e} = 1 + x b^T (I - xA) e$.

Nous utiliserons le critère de Schur l'article X pour trouver les conditions sous lesquelles les racines $\theta_1 = \theta_1(x, y)$ et $\theta_2 = \theta_2(x, y)$ de $\psi(\theta)$ sont à l'intérieur de l'unité cercle. Ce critère implique que tel est le cas si et seulement si

$$|1 + x b^T \tilde{e} + y (b^T \tilde{c} - r^T \tilde{e}) + y^2 (b^T \tilde{e} r^T \tilde{c} - b^T \tilde{c} r^T \tilde{e})| < 1 \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} & |2 + (x + y) b^T \tilde{e} + y (b^T \tilde{c} - r^T \tilde{e})| \\ < & |2 + x b^T \tilde{e} + y (b^T \tilde{c} - r^T \tilde{e}) + y^2 (b^T \tilde{e} r^T \tilde{c} - b^T \tilde{c} r^T \tilde{e})| \end{aligned} \quad (3.41)$$

Pour rechercher des méthodes V_0 -stables, il est plus pratique de reformuler (3.40) et (3.41) sous la forme

$$\varphi(x, y) > 0, \quad x, y \leq 0 \quad (3.42)$$

$$\psi(x, y) > 0, \quad x, y \leq 0 \quad (3.43)$$

où les fonctions rationnelles $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont définies par

$$\varphi(x, y) := 1 - (1 + x b^T \tilde{e} + y (b^T \tilde{c} - r^T \tilde{e}) + y^2 (b^T \tilde{e} r^T \tilde{c} - b^T \tilde{c} r^T \tilde{e}))^2 \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, y) & : = (2 + x b^T \tilde{e} + y (b^T \tilde{c} - r^T \tilde{e}) + y^2 (b^T \tilde{e} r^T \tilde{c} - b^T \tilde{c} r^T \tilde{e}))^2 \\ & - (2 + (x + y) b^T \tilde{e} + y (b^T \tilde{c} - r^T \tilde{e}))^2. \end{aligned}$$

Pour les méthodes VRK avec $\mu = \nu$ ces fonctions prennent la forme

$$\varphi(x, y) = \frac{\sum_{0 \leq i+j \leq 2\nu} (-1)^{i+j} \xi_{ij}^{(1)} x^i y^j}{\left(\sum_{0 \leq i+j \leq \nu} \eta_{ij}^{(1)} x^i y^j \right)^2}, \quad \psi(x, y) = \frac{\sum_{0 \leq i+j \leq 2\nu} (-1)^{i+j} \xi_{ij}^{(2)} x^i y^j}{\left(\sum_{0 \leq i+j \leq \nu} \eta_{ij}^{(2)} x^i y^j \right)^2}$$

$\xi_{00}^{(1)} = \xi_{00}^{(2)} = 0$, $\eta_{00}^{(1)} = \eta_{00}^{(2)} = 1$, où les coefficients $\xi_{ij}^{(1)}, \eta_{ij}^{(1)}, \xi_{ij}^{(2)}, \eta_{ij}^{(2)}$ dépendent des paramètres libres restants des méthodes. Alors les conditions suffisantes pour la stabilité V_0 prennent la forme

$$\xi_{ij}^{(k)} \geq 0, \quad i, j = 0, 1, \dots, \nu, \quad 1 \leq i + j \leq 2\nu, \quad k = 1, 2. \quad (3.45)$$

Pour faire respecter les conditions (3.42) et (3.43) on peut aussi considérer les polynômes

$$\gamma(x, y) = \sum_{k=0}^{2\nu} \left(\sum_{l=0}^k \eta_l^{(1)} t^l \right) (-x)^k, \quad \delta(x, y) = \sum_{k=0}^{2\nu} \left(\sum_{l=0}^k \eta_l^{(2)} t^l \right) (-x)^k,$$

obtenu en remplaçant $y = tx$ dans les numérateurs de $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$. Alors les conditions suffisantes pour la V_0 -stabilité des méthodes VRK, qui sont moins restrictives que les conditions (3.45), prennent la forme

$$\eta_k^{(1)} > 0, \quad \eta_k^{(2)} > 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2\nu, \quad (3.46)$$

$$t_i^{(1)} \leq 0, \quad t_i^{(2)} \leq 0, \quad (3.47)$$

où $t_i^{(1)}$ et $t_i^{(2)}$ sont les racines réelles des polynômes $\sum_{l=1}^k \eta_l^{(1)} t^l$, et $\sum_{l=1}^k \eta_l^{(2)} t^l$, $k = 0, 1, \dots, 2\nu$ apparaissant en $\gamma(x, y)$ et $\delta(x, y)$. Cela conduira à méthodes qui sont à la fois A- et V_0 -stables.

3.2.4 Expérience numérique :

Nous avons implement les méthodes rapportées dans un code pas fixe et effectu des tests numériques sur une équation linéaires.

soit l'équation intégrale de Fredholm

$$f(x) = 2x + \int_{-1}^1 \frac{xt}{2} f(t) dt$$

sa solution est

$$f(x) = 3x$$

et soit l'équation différentielle

$$y(x) = 3x$$

$$y'(x) = 3$$

$$y''(x) = 0$$

donc

$$y' + y'' = 3, \quad 0 \leq x \leq 1$$

avec

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

à solution exacte $y(x) = 3x$.

en recherche la solution numérique par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 les pas sont $h = 0.1$ on a 11 valeurs

$h = 0.05$ on a 21 valeurs

$h = 0.025$ on a 41 valeurs

Programme :

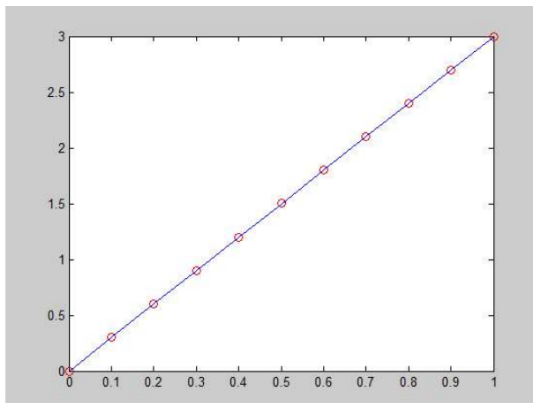
```
clc
clear
f = @(x,y)[y(2), -y(2) + 3];
fa = @(x)3 * x;
n = 41;
x = linspace(0, 1, n);
h = x(2) - x(1);
x0 = x(1);
y0 = [0, 3];
y = y0;
for i = 1 : n - 1
k1 = h * f(x(i), y(i, :));
k2 = h * f(x(i) + h/2, y(i, :) + k1/2);
k3 = h * f(x(i) + h/2, y(i, :) + k2/2);
k4 = h * f(x(i) + h, y(i, :) + k3);
y(i + 1, :) = y(i, :) + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)/6 ;
end
plot(x, y(:, 1), 'or', x, fa(x), 'b')
err = y(:, 1) - fa(x)';

hv=ones (1, n) * h ;
Result= [x', hv', y(:, 1), fa(x)', err];
Result2Data=[x;hv;y(:,1)';fa(x)';err'];
fid = fopen ('RK2023,num2str(n)'.dat','w') ;
fprintf(fid,'fclose(fid);
```

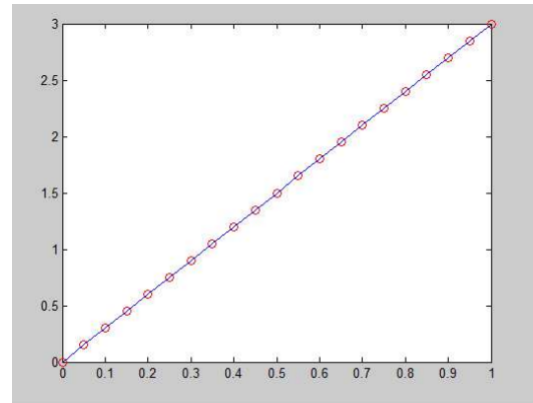
Nous rapportes ici les résultats obtenus sur les problèmes de tests linéaires suivants :

X	$h=0.1$	$h=0.05$	$h=0.025$
0.0000	0.00000E+000	0.00000E+000	0.00000E+000
0.1000	0.00000E+000	0.00000E+000	0.00000E+000
0.2000	0.00000E+000	0.00000E+000	0.00000E+000
0.3000	2.22045E-016	2.22045E-016	0.00000E+000
0.4000	0.00000E+000	0.00000E+000	4.44089E-016
0.5000	2.22045E-016	0.00000E+000	4.44089E-016
0.6000	4.44089E-016	0.00000E+000	4.44089E-016
0.7000	8.88178E-016	0.00000E+000	0.00000E+000
0.8000	0.00000E+000	8.88178E-016	0.00000E+000
0.9000	0.00000E+000	8.88178E-016	8.88178E-016
1.0000	0.00000E+000	8.88178E-016	1.77636E-015

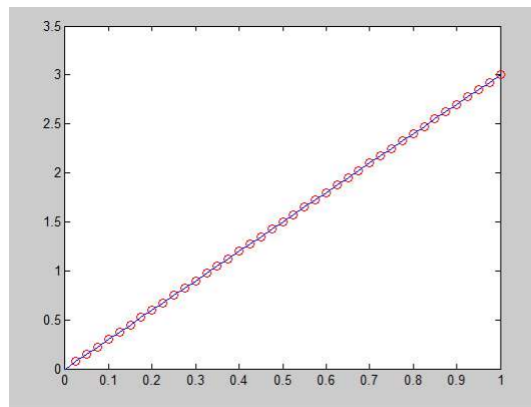
Pour plus de précisions, nous avons les trois courbes suivantes :



Courbe pour n=11



Courbe pour n=21



Courbe pour n=41

d'après le tableaux et les trois courbes en remarque l'efficacité de méthode de Runge-Kutta.

Conclusion

Nous avons traité dans ce travail la théorie relative à deux méthodes de résolution numérique de problèmes en mathématiques appliquées. Nous avons adapté, dans ce travail, ces deux méthodes à la résolution d'équations intégrales de Fredholm linéaire. Pour valider cette adaptation, nous avons testé une équations intégrale. Ce test a été réalisé sur l'équation à noyaux dégénéré et la deuxième teste par méthode de Runge-Kutta et nous avons constaté que la deuxième méthode (Runge-Kutta) est plus efficace. On s'attend à que cette méthode soit aussi efficace pour les équations intégrales non linéaires.

Bibliographie

- [1] **H. Brunner and P.J. van der Houwen**, *The Numerical Solution of Volterra Equations*, CWI Monographs 3, North-Holland, Amsterdam 1986.
- [2] **J. C. BUTCHER**, "Implicit Runge-Kutta and related methods," in *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations* (G. Hall and J. M. Watt, eds.), Clarendon Press, Oxford, 1976, pp. 136- 151.
- [3] **L. Debnath and P. Mikusinski**, *Introduction to Hilbert spaces with application*, Academic press, New York, 1990.
- [4] **E. Hairer and G. Wanner**, "On the Butcher group and general multi-value methods," *Computing*, v. 13, 1974, p p. 1-15. (MR 53 7037)
- [5] **A.J. Saleh**, *The Numerical Solutions of FIEs of the Second Kind of Degenerated Type Using Bownd's Methods*, Baghdad, Iraq , March 31, 2021.
- [6] **Shanti Swarup**, *Equations intégrales*, Krishna Prakashan Media (P) Ltd, quinzième Édition, 2007.
- [7] **N. Velmurugan, S.Tinnu Priy** , *Solution of linear Fredholm integral equation second kind with Taylor expansion using MATLAB*, Tamil Nadu, India 52(1989), 49,63.

Résumé

Dans ce travail , nous avons étudié par méthodes numériques la résolution des équations intégrales de Fredholm.

Le but de ce travail est de montrer l'efficacité des deux méthodes présentées et leurs avantages.

Ensuite, nous avons fait une comparaison entre les résultats de cette méthode et la solution exacte de l'équation.

Les résultats de la méthode Rung Kutta sont plus proches de la solution exacte.

Mots clés :

Équations intégrales de Fredholm, noyaux dégénéré, approximat, méthode Runge-Kutta.

Abstract

In this work, we studied by numerical methods the resolution of the integral equations of Fredholm.

The purpose of this work is to show the effectiveness of the two methods presented and their advantages.

Then, we made a comparison between the results of this method and the exact solution of the equation.

The results of the Rung Kutta method are closer to the exact solution.

Keywords: Fredholm integral equations, degenerate kernels, approximat, Runge-Kutta method.

ملخص

في هذا العمل ، درسنا بالطرق العددية حل المعادلات التكاملية لفريدهولم. الغرض من هذا العمل هو إظهار فعالية الطريقتين المقدمتين ومزاياهما . ثم قمنا بإجراء مقارنة بين نتائج هذه الطريقة والحل الدقيق للمعادلة. نتائج طريقة رونج-كوتا أقرب إلى الحل الدقيق. الكلمات المفتاحية: معادلات التكاملية لفريدهولم، التقريب، رونج-كوتا.