

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE
ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique



Université Echahid Hamma Lakhder-d'Eloued

MASTER ACADEMIQUE

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques fondamentales

Thème

Les Théorèmes du Point fixe dans les espaces D-métrique

Présenté par :

-MESGHOUNI Imane

-CHIKHA MABROUK Islame

Soutenu publiquement devant le jury composé de

AISSAOUI Adel	Prof.	Président	Univ. El Oued
FERHAT Mohammed Said	MCA.	Rapporteur	Univ. El Oued
GHENDIR AOUN Abdellatif	MCA.	Examineur	Univ. El Oued

Année universitaire -2022/2023

REMERCIEMENT

Nous tenons remercier avant tout DIEU qui nous a donné la force, la volonté, le courage, et la patience de pouvoir réaliser ce modeste travail.

On tient aussi remercier Dr : Ferhat Mohamed Said, notre encadreur qui a su orienter notre travail, aussi pour sa disponibilité nous prodiguer des conseils, pour sa confiance et pour sa précieuse aide, on le remercie du fond du cœur.

Nous sincères remerciements sont adressés tous les membres du jury qui ont accepté de juger notre modeste travail, et tous ceux qui, sans avoir été impliqués directement dans ce travail, ont toujours été d'un grand support : nos enseignants, nos familles, nos amis, nos collègues chacun son nom.

Dédicace

A mes très chers parents

*pour tous les soins et le suivi dont ils font preuve depuis ma naissance et au long de mes tudes
pour leurs soutien et surtout leurs conseils et amour*

A mes très chères sœurs

A mes très chères frères

A ma grande famille

A toutes mes amies

A tous ceux qui m'aiment et que j'aime

Chikha, Mesghouni

Abstract

The fixed point theorems are very important tools in functional analysis, they are used to demonstrate the existence of solutions of different kinds of equations in various spaces. The purpose of this work is to make a broad study on the theory of the fixed point and its applications in particular its applications in $\mathcal{D}$ -metric spaces.

Résumé

Les théorème du point fixe sont des outils très important dans l'analyse fonctionnelle, on les utilise afin de démontrer l'existence des solutions des différents genres d'équations dans divers espaces. Le but de ce travail est de faire une étude large sur la théorie du point fixe et ses applications en particulier ses applications dans les espaces $\mathcal{D}$ -métriques.

المُلخَص

تعتبر نظريات النقطة الثابتة أدوات مهمة جدًا في التحليل الوظيفي ، حيث يتم استخدامها لإثبات وجود حلول لأنواع مختلفة من المعادلات في مساحات مختلفة. الغرض من هذا العمل هو إجراء دراسة واسعة حول نظرية النقطة الثابتة وتطبيقاتها على وجه الخصوص تطبيقاتها في المساحات $\mathcal{D}$ -المتريّة .

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'objet de ce mémoire est l'étude des propriétés des théorèmes de points fixes sur les espaces métriques, les espaces S-métriques, les espaces b-métriques, et les espaces D-métriques.

Notre mémoire est composé de trois chapitres : le premier chapitre intitulé notions et résultats préliminaires aborde des définitions des espaces métriques, ouvert, fermé, parties bornées, espace complet, voire les notions des espaces métriques et la théorème du point fixe métrique (Banach).

Espaces métriques Généralisés est l'intitulé de notre deuxième chapitre où il sera question les définitions et exemples des Espaces G-métrique, D*-métrique et S-métrique, b-métrique.

La définition des espaces G-métriques généralisent les espaces métriques, les espaces D*- métriques généralisent les espaces G-métriques, et les espaces S-métriques généralisent les D*- mtriques. et boule ouverte, boule fermé, suite de Cauchy, aussi ce chapitre présente des définitions de quelques notions des espaces S-métriques et se termine par le Théorème de point fixe sur les espaces S-métrique.

Dans le troisième chapitre nous avons présenté les définitions des espaces D-métriques, le diamètre, fonction multi-valeurs, une orbite, suite convergente, D-Cauchy, D-compatibles, semi-compatibles, et quelques propositions de D-métrique et on termine par le Théorème de point fixe sur les espaces D-métrique.

TABLE DES MATIÈRES

1	Préliminaires	1
1.1	Espace Métrique	1
1.2	Boules, Sphères	2
1.3	Espaces métriques complets	5
2	Quelques Espaces Métrique et Divers types du Point Fixe	12
2.1	Quelques Espaces Métrique	12
2.1.1	Espaces G-métrique	12
2.1.2	Espace D*-métrique	13
2.1.3	Espace S-métrique	15
2.2	Divers Types du point fixe	16
2.2.1	Théorème du points fixe de Banach	16
2.2.2	Théorème du point fixe de Brouwer	18
2.2.3	Théorème du point fixe de Schauder	20
2.2.4	Théorème de Kannan	22
2.2.5	Théorème du point fixe de Chatterjea	23
2.2.6	Théorème de Zamfirescu	25
3	Théorème de point fixe dans les Espaces D-métriques	27
3.1	les espaces D-métriques	27
3.2	Résultats principaux	31
3.3	Théorème de point fixe	34
3.4	Théorèmes communs du point fixe	36
	Bibliographie	40

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous définissons l'espace métrique, et donnons certaines de leurs propriétés, avec quelques exemples. Enfin, nous parlerons également du théorème du point fixe de Banach.

1.1 Espace Métrique

Définition 1.1.0.1

On appelle distance sur un ensemble E une application : $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ possédant les propriétés suivantes :

1. $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x) \Leftrightarrow x = y$ (symétrie).
3. $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Définition 1.1.0.2

Un espace métrique est un couple (E, d) si E est un ensemble et d est une distance sur E .

Exemple 1.1.0.1

1. L'ensemble des réels muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique.
2. Soit $E = \mathbb{R}^n$ et soit $X = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ et $Y = (y_1; y_2; \dots; y_n)$ deux éléments de E chacun des expressions suivantes définit une distance sur E :

(a) $d_1(x, y) = \sum_{t=1}^n |x_t - y_t|$.

(b) $d_2(x, y) = (\sum_{t=1}^n |x_t - y_t|^2)^{\frac{1}{2}}$.

(c) $d_3(x, y) = (\sum_{t=1}^n |x_t - y_t|^p)^{\frac{1}{p}}; (p \geq 2).$

(d) La distance discrète sur un ensemble E quelconque est définie par :

$$d_4(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

1.2 Boules, Sphères

Soit (E, d) un espace métrique, soit $x_0 \in E$ et tout réel $r > 0$.

On appelle boule ouverte (resp. boule fermé) de centre x_0 et de rayon r l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in E, d(x, x_0) < r\}$$

resp.

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E, d(x, x_0) \leq r\}$$

On appelle sphère de centre $x_0 \in E$ et de rayon r l'ensemble

$$S(x_0, r) = \{x \in E, d(x, x_0) = r\}$$

Exemple 1.2.0.1

Dans l'espace métrique $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ on a

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x \in \mathbb{R}, d(x, x_0) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, -r < x - x_0 < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}, -r + x_0 < x < r + x_0\} \end{aligned}$$

alors

$$B(x_0, r) =]-r + x_0; r + x_0[$$

la boule fermée $\overline{B}(x_0, r) = [-r + x_0; r + x_0]$

Définition 1.2.0.1

Une partie k de E est un ouvert de E si pour tout $x \in k$ il existe $\epsilon > 0$ tel que $r > 0$:

$$B(x, r) \subset K$$

Une partie F de E est un fermé de E si et seulement si son complémentaire C_E^F dans E est ouvert.

Proposition 1.2.0.1

Toute boule ouverte est un ouvert.

Preuve :

Soit $B(x, r)$ est un ensemble ouvert dans E . Soit $y \in B(x, r)$; on a $d(x, y) < r$, et on pose

$$r' = \frac{r - d(x, y)}{2}$$

Alors $B(y, r')$ est inclus dans $B(x, r)$, en effet pour $z \in B(y, r')$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, y) + \frac{r - d(x, y)}{2} \leq \frac{r + d(x, y)}{2} < r$$

Corollaire 1.2.0.1

Un ensemble ouvert A dans E est une union quelconque des boules ouvertes.

Proposition 1.2.0.2

1. Toute intersection des fermés est un fermé.
2. Une réunion finie des fermés est un fermé.
3. $\emptyset$ et E sont des fermés.

Définition 1.2.0.2

Un voisinage d'un point $a \in E$ est une partie de E contenant une boule ouverte centrée en a c-à-d

$$v \in V(a) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset v$$

Proposition 1.2.0.3

Un ouvert de E est une partie de E qui est voisinage de tous ses points.

1.3 Suites

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (E, d) .

Définition 1.2.0.3

On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon, d(x_n, x) < \varepsilon$$

On note $x_n \longrightarrow x$ (ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$).

Proposition 1.2.0.4 (l'unicité de la limite dans un espace métrique)

Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans un espace métrique (E, d) alors la limite est unique .

Preuve :

Si on a x_1, x_2 dans E tel que

$$\exists \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\varepsilon, d(x_n, x_1) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N'_\varepsilon, d(x_n, x_2) < \varepsilon$$

Alors, pour $n \geq \sup\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$; on a

$$d(x_1, x_2) < d(x_n, x_1) + d(x_n, x_2) < \varepsilon$$

et donc $d(x_1, x_2) < \varepsilon; \forall \varepsilon > 0$

D'où

$$d(x_1, x_2) = 0$$

ce qui donne

$$x_1 = x_2$$

1.4 Continuité

Définition 1.2.0.4

Soit (E, d) , (E', d') deux espaces métriques et soit $a \in E$, on dit que une application $f : E \longrightarrow E'$ est continue au point a si :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, d(x, a) < \delta \Rightarrow d'(f(a), f(x)) < \varepsilon$$

Définition 1.2.0.5

On dit que $f : E \longrightarrow E'$ est continu sur (E, d) si elle est continue en tout point de E .

Définition 1.2.0.6

Une application $f : E \longrightarrow E'$ est dite uniformément continue sur E si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E, d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Définition 1.2.0.7

On dit que $f : E \longrightarrow E'$ est Lipschitzienne de rapport $K \in \mathbb{R}_+$ sur E (K -Lipschitzienne) si

$$\forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) < Kd(x, y)$$

Proposition 1.2.0.5

f Lipschitzienne $\Rightarrow f$ uniformement continue $\Rightarrow f$ continue .

1.3 Espaces métriques complets**Définition 1.3.0.1 (Suite de Cauchy)**

On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace métrique (E, d) est de Cauchy si elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N_\varepsilon, d(x_p, x_q) < \varepsilon$$

Exemple 1.3.0.1

Dans $(\mathbb{R}, |.|)$ les suites définies par :

$$U_n = \frac{1}{n}$$

soit $p, q \in \mathbb{N}, p > q$

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &= \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right| \\ &= \left| \frac{q - p}{pq} \right| \\ &\leq \frac{q}{pq} \\ &\leq \frac{1}{q} \\ &\leq \lim_{p, q \rightarrow +\infty} \frac{1}{q} = 0 \end{aligned}$$

Donc (x_n) est de Cauchy.

Proposition 1.3.0.1

Dans un espace métrique (E, d) on a

1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy , L'inverse est généralement faux.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.
3. Toute suite de Cauchy admettant une sous suite convergente converge.

Preuve :

1. Soit (x_n) une suite convergente vers x dans (E, d) on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pour toute $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N$ et $q \geq N$ on a :

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x_q, x)$$

$$p \geq N \Rightarrow d(x_p, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$q \geq N \Rightarrow d(x_q, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$d'où p, q \geq N \Rightarrow d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$$

La suite (x_n) est donc de Cauchy.

Pour l'inverse on prend la suite (x_n) tel que $x_n = \frac{n}{n+1}$ dans l'espace métrique $(\mathbb{R} - 1, | \cdot |)$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 1 \notin \mathbb{R} - 1$ donc (x_n) diverge

soit $p, q \in \mathbb{N}; p > q$

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &= \left| \frac{p}{p+1} - \frac{q}{q+1} \right| \\ &= \left| \frac{p-q}{(p+1)(q+1)} \right| \\ &\leq \frac{p}{p(q+1)} \\ &\leq \frac{1}{q+1} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} d(x_p; x_q) &\leq \frac{1}{q+1} \\ \lim_{p, q \rightarrow +\infty} \frac{1}{q+1} &= 0 \end{aligned}$$

Alors $\lim_{p, q \rightarrow +\infty} d(x_p; x_q) = 0$ donc (x_n) est de Cauchy

2. Choisissons $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0; d(x_p, x_q) \leq 1$$

En particulier

$$\forall n \geq n_0; d(x_p, x_{n_0}) \leq 1$$

Ce qui montre que la suite est bornée.

3. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et soit $(x_{\varepsilon n})_{n \in \mathbb{N}}$ la suite extraire qui converge vers x .

Soit $\varepsilon > 0; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ Tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}; \forall n \geq N_\varepsilon; d(x_{\varepsilon n}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy il existe un rang N'_ε tel que

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2; (\forall p \geq N'_\varepsilon) \text{ et } (\forall q \geq N'_\varepsilon); d(x_p, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

en particulier, si $n \geq \max(N_\varepsilon, N'_\varepsilon)$, on en déduit que

$$d(x_p; x_q) \leq d(x_n, x_{\varepsilon n}) + d(x_{\varepsilon n}, x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ce qui prouve la convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers x .

Définition 1.3.0.2 (Espace complet)

Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans E converge dans E .

Définition 1.3.0.3

1. $(\mathbb{R}, | \cdot |); (\mathbb{R}^n, d_2)$ sont complets.
2. $(\mathbb{Q}, | \cdot |)$ n'est pas complet, car il existe dans $\mathbb{Q}$ une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = \frac{E(2^n \sqrt{2}-1)}{2^n}$ est de Cauchy, mais ne converge pas.
En effet, on a $2^n \sqrt{2} - 1 < x_n \leq \sqrt{2}$ d'où $x_n \rightarrow \sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$. Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Par ailleurs, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. L'unicité de la limite implique que $(x_n)_{n \in \mathbb{Q}}$ ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.3.0.2

On a

1. Dans un espace métrique (E, d) , toute partie complète est fermée.
2. Dans un espace métrique (E, d) , les parties fermées sont des parties complètes.

1.6 Contraction

Définition 1.3.0.4

Soit (E, d) espace métrique complet et l'application $T : E \rightarrow E$, on dit T est une application Lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$, telle que pour tout couple d'éléments $x, y \in E$, on a l'inégalité

$$d(Tx; Ty) \leq kd(x; y)$$

- Si $k < 1$ l'application est une contraction.
- Si $k = 1$ l'application est appelée une application non expansive.

Exemple 1.3.0.2

Soit $X = \mathbb{R}$ et $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application définie par $Tx = 12x + 1$,

$x \in \mathbb{R}$. Alors T est une contraction.

- Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'une fonction soit uniformément continue.

Théorème 1.3.0.1

Une application $T : E \longrightarrow E$ qui k -lipchitzienne est uniformément continue.

Preuve :

Sachant que $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ pour un $k > 0$ donné, il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{K}$; il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \frac{\varepsilon}{K}, d(x, y) \leq \varepsilon k &\Rightarrow d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \\ &\Rightarrow d(Tx, Ty) \leq k \frac{\varepsilon}{K} \\ &\Rightarrow d(Tx, Ty) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

Donc T est uniformément continue.

Remarque 1.3.0.1

- La composition de deux applications Lipschitziennes est une application Lipschitzienne.
- Si T est une application Lipschitzienne, T^n la composition n fois de T avec elle-même est aussi Lipschitzienne.

Théorème 1.3.0.2 Un Théorème du Point Fixe Métrique (Banach)

Ce théorème donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet. Soient E un espace métrique et f une fonction de E dans E .

Définition 1.3.0.5

La fonction $T : E \longrightarrow E$ est dite de type Lipschitz s'il existe une constante $K \geq 0$ telle que :

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y), x, y \in E$$

Définition 1.3.0.6

Soit la fonction $f : E \longrightarrow E$ de type Lipschitz est appelée fonction contractante si $0 < k < 1$.

Définition 1.3.0.7

La fonction $T : E \longrightarrow E$ on dit que x est un point fixe de f si $f(x) = x$.

Exemple 1.3.0.3

La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longrightarrow \frac{1}{2} \sin x$ est contractante définie sur E de constante K alors f admet un point fixe unique.

-En effet il suffit d'appliquer le théorème des accroissements finis.

Théorème 1.3.0.3

Soit E un espace métrique complet, f une application contractante définie sur E alors f admet un point fixe unique.

Preuve :

Unicité

Soient x_1 et x_2 deux points fixe de f alors $f(x_1) = x_1$; $f(x_2) = x_2$ et

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq Kd(x_1, x_2) \Rightarrow d(x_1, x_2) \leq K(x_1, x_2) \Rightarrow d(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

L'existence

Soit $x_0 \in E$; définissons par récurrence la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_{n+1} = f(x_n)$ et montrons que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace métrique complet E , d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \in E$ et comme f est continue il viendra $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) \Rightarrow x = f(x)$

(x_n) est une suite de Cauchy de E . En effet, soient p, q deux entiers tels que $q > p$ alors.

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q)$$

Sachant que

$$\begin{aligned} d(x_p, x_{p+1}) &= d(f(x_{p-1}), f(x_p)) \leq kd(x_{p-1}, x_p) \\ &\leq k^2 d(x_{p-2}, x_{p-1}) \leq k^3 d(x_{p-3}, x_{p-2}) \leq \dots \leq knd(x_0, x_1) \end{aligned}$$

d'où $d(x_p, x_q) \leq (k^p + k^{p+1} + k^{p+2} \dots + k^{q-1})d(x_0, x_1) \leq k^p d(x_0, x_1) \sum_{p=0}^{q-1} k^p \leq \frac{k^p d(x_0, x_1)}{1-k}$
si $d(x_0, x_1) = 0$ alors $x_1 = x_0 = f(x_0)$ et x_0 est le point fixe sinon $d(x_0, x_1) > 0$ et $k^p \leq \frac{k^p d(x_0, x_1)}{1-k} \leq \varepsilon$
si $p \geq n_0$ entier convenablement choisi.

Exemple 1.3.0.4

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow \sqrt{x+1}$ possède un unique point fixe sur $]1; +\infty[$ (en l'occurrence $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).
2. $f :]0; 1] \rightarrow]0; 1]; x \rightarrow \frac{x}{2}$ ne possède pas de point fixe, $]0; 1]$ n'est pas un Banach (on prend $x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \notin]0; 1]$).
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow \sqrt{x^2+1}$ ne possède pas de point fixe, elle n'est pas contractante (même si $\forall x \neq y; |f(x) - f(y)| < |x - y|$).
4. $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}; x \rightarrow \frac{x}{2} + 1$ ne possède pas de point fixe, on n'a pas $f([0; 1]) \subset [0; 1]$.

Remarque 1.3.0.2

- a. Les hypothèses du théorème du Banach est réellement utilisé si nous a négligions seulement une, alors le point fixe n'existe pas.

- b. . Si f est une application Lipschitzienne pas nécessairement une contraction mais l'une de ces itérées f^p est une contraction, alors f a encore un point fixe et un seul. Ceci résulte de l'unicité. En effet, soit x l'unique point fixe de f^p on a

$$f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(x)$$

ce qui convient dire que $f(x)$ est aussi un point fixe de f^p et grâce à l'unicité $f(x) = x$. Donc ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

- c. Il se peut que f ne soit pas une contraction sur tout l'espace E mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant qui est la version local du théorème de Banach.

Théorème 1.3.0.4

Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : B(x_0, r) \longrightarrow E$ une contraction de constante k avec

$$d(f(x_0), x_0) > (1 - k)r$$

Alors f admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$.

Preuve :

On a $d(f(x_0), x_0) > (1 - k)r$ donc il existe r_0 tel que $0 \leq r_0 \leq r$ et $d(f(x_0), x_0) > (1 - k)r_0$

On montre que $f : \overline{B(x_0, r_0)} \longrightarrow B'(x_0; r_0)$

Soit $x \in B'(x_0; r_0)$ alors

$$\begin{aligned} d(f(x), x_0) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq kd(x, x_0) + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq kr_0 + (1 - k)r_0 \\ &= r_0 \end{aligned}$$

Donc l'application $f : \overline{B(x_0, r_0)} \longrightarrow B'(x_0, r_0)$ est contractante avec $B'(x_0, r_0)$ est un espace complet.

Par suite l'application le théorème de Banach à f assure qu'elle admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$ comme $B'(x_0; r_0) \subset B(x_0, r)$ et f contractante sur $B(x_0, r)$ ce point fixe reste unique dans $B(x_0, r)$.

Remarque 1.3.0.3

La signification du théorème de point fixe métrique

L'application de ce théorème nous donne des résultats qui sont d'une importance fondamentale dans l'analyse non linéaire. Citons quelques un :

1. Existence de la solution.
2. Unicité de la solution.
3. Stabilité de la solution sous une petite perturbation de l'équation.

4. *Existence de la convergence des méthodes d'approximation.*
5. *Stabilité des méthodes d'approximation.*

CHAPITRE 2

QUELQUES ESPACES MÉTRIQUE ET DIVERS TYPES DU POINT FIXE

dans ce chapitre, nous étudions quelques espaces métriques (espace S -métrique, espace D^* -métrique, espace G -métrique), et divers types du point fixe (Th Banach, Th brouwer,.....).

2.1 Quelques Espaces Métrique

2.1.1 Espaces G -métrique

Définition 2.1.1.1

Soit X un ensemble non vide et $G : X^3 \longrightarrow [0, \infty[$ une fonction satisfaisant les conditions suivantes pour tous les $x; y; z; a \in X$:

$$(G1) \quad G(x, y, z) = 0 \text{ si } x = y = z.$$

$$(G2) \quad G(x, x, z) > 0, \text{ pour tous les } x, y \in X \text{ avec } x \neq y.$$

$$(G4) \quad G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = \dots$$

$$(G5) \quad G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z) \text{ pour tout } x; y; z; a \in X.$$

On dit que G est une métrique généralisée et le paire $(X; G)$ est appelé un espace G - métrique.

Exemple 2.1.1.1

Soit $X = \mathbb{R}$, on définit $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par :

$$G(x; y; z) = |x - y| + |y - z| + |z - x|$$

Soit $x; y; z; a \in \mathbb{R}$:

1. $G(x; y; z) = 0$ si et seulement si :

$$|x - y| = |y - z| = |z - x| = 0 \quad (\text{Car } |x' - x''| \geq 0 \forall x', x'' \in X)$$

$$\iff x = y = z.$$

2. $G(x; x; z) = |x - x| + |x - z| + |z - x| = |x - z| + |z - x| > 0$ Si $x \notin y$.

3.

$$\begin{aligned} G(x; x; z) &= |x - x| + |x - y| + |y - x| = |x - y| + |y - x| \\ &= |x - y| + |y - x + z - z| \\ &\leq |x - y| + |y - z| + |z - x| \\ &= G(x; y; z) \end{aligned}$$

4. $G(x; y; z) = |x - y| + |y - z| + |z - x| = G(y; x; z) = G(z; y; x) = \dots$
(Car $|x' - x''| = |x'' - x'| \forall x', x'' \in X$)

5.

$$\begin{aligned} G(x; y; z) &= |x - y| + |y - z| + |z - x| \\ &= |x - y - a + a| + |y - z| + |z - x + a - a| \\ &\leq |x - a| + |a - y| + |y - z| + |z - a| + |a - x| \\ &= G(x; a; a) + G(a; y; z). \end{aligned}$$

$\Rightarrow G(x; y; z) = |x - y| + |y - z| + |z - x|$ est une G -métrique sur $X = \mathbb{R}$.

2.1.2 Espace D^* -métrique

Définition 2.1.2.1

Soit X un ensemble non vide. Une métrique généralisée (ou D^* -métrique) sur X est une fonction $D^* : X^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui satisfait aux conditions suivantes pour chaque $x; y; z; a \in X$.

(D1) $D^*(x, y, z) \geq 0$.

(D2) $D^*(x, y, z) = 0$ si et seulement si $x = y = z$.

(D3) $D^*(x, y, z) = D^*(p(x, y, z))$, (symétrie), où p est une fonction de permutation.

(D4) $D^*(x, y, z) \leq D^*(x, y, a) + D^*(a, z, z)$.

Le couple $(X; D^*)$ est appelé un espace métrique généralisée (ou espace D^* -métrique).

Exemple 2.1.2.1

1. $D^*(x, y, z) = \max\{d(x, y); d(y, z); d(z, x)\}$, ici, d est la métrique ordinaire sur X .
2. $D^*(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$, ici, d est la métrique ordinaire sur X .
3. Si $X = \mathbb{R}^n$ alors nous définir :

$$D^*(x, y, z) = \|x + y - 2z\| + \|x + z - 2y\| + \|y + z - 2x\|.$$

4. Si $X = \mathbb{R}^+$ alors nous définir

$$D^*(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = z \\ \max\{x; y; z\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

on va montrer que (4) est une D^* -métrique.

Soit $x; y; z \in X = \mathbb{R}^+$:

1. Si $x = y = z \Rightarrow D^*(x, y, z) = 0$, sinon $D^*(x, y, z) = \max\{x; y; z\} > 0$ car $x; y; z \in X = \mathbb{R}^+$

$$D^*(x, y, z) > 0.$$

2. Si $x = y = z$; alors $D^*(x, y, z) = 0$, inversement

si $D^*(x, y, z) = 0$ par définition de D^* , on a $x = y = z$.

3. on a $D^*(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = z \\ \max\{x; y; z\} & \text{sinon.} \end{cases}$ Comme $x; y$ et z sont quelconques et comme l'égalité est une relation commutative et transitive alors on peut permuter entre les trois variables et on écrit :

$$\begin{aligned} D^*(x, y, z) &= D^*(y, x, z) = D^*(z, y, x) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } z = y = x \\ \max\{x; y; z\} & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= D^*(p(x, y, z)). \end{aligned}$$

où p est une fonction de permutation

$$D^*(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y = z \\ \max\{x; y; z\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. Si $x = y = z = a$, alors $D^*(x, y, z) = D^*(x, y, a) + D^*(a, z, z) = 0$:

Comme $x; y; z; a$ sont quelconques dans $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}^+$ est ordonné, on peut supposer un ordre donné sans perte de généralité :

Soit $x; y; z; a \in \mathbb{R}^+$, alors $0 \leq y \leq z \leq a \leq x$

$$\begin{cases} D^*(x, y, z) = x \\ D^*(x, y, a) = x \\ D^*(a, z, z) = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq x + a \\ D^*(x, y, z) \leq D^*(x, y, a) + D^*(a, z, z) \end{cases}$$

$$D^*(x, y, z) \leq D^*(x, y, a) + D^*(a, z, z)$$

Remarque 2.1.2.1

Un espace G -métrique est un espace D^* -métrique. (Espace G -métrique s'injecte canoniquement dans l'espace D^* -métrique).

Remarque 2.1.2.2

Un G -métrique est un D^* -métrique comme on vient de le voir, mais en général l'inverse ne tient pas, pour vous convaincre.

2.1.3 Espace S -métrique

Définition 2.1.3.1

Soit X un ensemble non vide. Une S -métrique sur X est une fonction

$S : X^3 \rightarrow [0; +\infty[$ qui satisfait aux conditions suivantes pour tous $x; y; z; a \in X$.

$$S1. S(x, y, z) \geq 0.$$

$$S2. S(x, y, z) = 0 \text{ si et seulement si } x = y = z.$$

$$S3. S(x, y, z) \leq S(x, x, a) + S(y, y, a) + S(z, z, a).$$

Le couple (X, S) est appelé un espace S -métrique.

Corollaire 2.1.3.1

Les espaces G -métrique et D^* -métrique sont des espaces S -métriques.

Preuve :

On a

$$D^*(x, y, z) = 0 \text{ si et seulement si } x = y = z.$$

et

$$\begin{aligned} D^*(x, y, z) &\leq D^*(x, y, a) + D^*(a, z, z) = D^*(x, a, y) + D^*(a, z, z) \\ &\leq D^*(x, a, a) + D^*(a, y, y) + D^*(a, z, z) \\ &= D^*(x, x, a) + D^*(y, y, a) + D^*(z, z, a). \end{aligned}$$

Remarque 2.1.3.1

Tout D^* -métrique est un S -métrique, et comme G -métrique est un D^* -métrique donc G -métrique est un S -métrique.

Exemple 2.1.3.1

1. Soit $X = \mathbb{R}^+$, et $\|\cdot\|$ une norme sur X , alors

$$S(x, y, z) = \|y + z - 2x\| + \|y - z\|$$

$$S(x, y, z) = \|y + z\| + \|y - z\|$$

sont des espaces S -métrique sur X .

2. Soit $X = \mathbb{R}^+$ alors

$$S(x, y, z) = d(x, y) + d(x, z) + d(y, z)$$

est un espace S -métrique où d est une métrique ordinaire sur X .

2.2 Divers Types du point fixe

2.2.1 Théorème du points fixe de Banach

Théorème : (Point fixe de Banach 1922)

Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \rightarrow E$ une application contractante avec la constante de contraction k , alors f a un unique point fixe $x \in E$. De plus nous avons la propriété suivante qui est importante

1. Si $x_1 = f(x_0)$ et pour $n \geq 1, x_n = f(x_{n-1})$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \text{ et } d(x_n, x) \leq \frac{k^n}{(1-k)} d(x_1, x_0), n \geq 1$$

x étant le point fixe de f .

Preuve :

Existence : Soit $y \in E$ un point arbitraire dans E . Considérons la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ donnée par

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}), n \geq 1 \\ x_0 = y \end{cases}$$

On doit prouver que (x_n) est une suite de Cauchy dans E . Pour $m \leq n$

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \dots + d(x_{n-1}, x_n).$$

Par itération on a

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + \dots + k^{n-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq k^m(1 + k + \dots + k^{n-m-1})d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{k^m}{(1-k)}(d(x_0, x_1)). \end{aligned}$$

On déduit que $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans E .

Par ailleurs puisque f est continue, on a

$$x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim f(x_{n-1}) = f(\lim x_{n-1}) = f(x)$$

Donc x est un point fixe de f (i.e $f(x) = x$).

Unicité : Supposons qu'il existe deux points $x, y \in E$ tel que $x \neq y, x = f(x)$ et $y = f(y)$. Alors on a

$$d(x, y) = d(f(x), f(y))$$

donc

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} = 1$$

D'autre part on a

$$\frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} \leq k \leq 1$$

Ce qui contradiction d'ou l'unicité existe.

Exemple 2.2.1.1

1. Soit $E = \mathbb{R}$ et l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1.$$

Alors f est contractante et admet un unique point fixe $x = 2$.

2. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$, ne possède pas de point fixe (on a pas $f([0, 1]) \subset [0, 1]$).

Remarque 2.2.1.1

1. Les hypothèses du théorème du Banach est réellement utilisé si nous a négligions seulement une, alors le point fixe n'existe pas.

(a) E n'est pas stable pour $f : f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $E = [0, 1]$. On a E est fermé dans $\mathbb{R}$ donc complet (car $\mathbb{R}$ est complet). De plus $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 1$ ce qui implique que $\sup_{x \in E} |f_0(x)| < 1$ donc f est contractante. Mais f n'admet pas de point fixe car $f([0, 1]) = [1, \sqrt{2}] \not\subset [0, 1]$, i.e E n'est pas stable par f .

(b) Si f n'est pas contractant : $f : f(x) = \sqrt{x^2+1}$ sur $E = [0, +\infty[$.

On a $f : E \rightarrow E$, et E est un fermé de $\mathbb{R}$ qui est complet donc E est complet. Mais f n'admet pas de point fixe car $\sup_{x \in E} |f_0(x)| = 1$ donc f n'est pas contractante.

(c) E n'est pas complet : $f(x) = \frac{\sin x}{2}$ sur $E =]0, \frac{\pi}{4}]$.

On a $f([0, \frac{\pi}{4}]) =]0, \frac{\sqrt{2}}{4}] \subset]0, \frac{\pi}{4}]$, et $\sup_{x \in E} |f'(x)| = \frac{1}{2} < 1$, donc f est contractante.

Mais n'admet pas de point fixe car E n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ donc E n'est pas complet.

2. Si une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées f^p est une contraction, alors f a encore un point fixe et un seul. Ceci résulte de l'unicité. En effet, soit x l'unique point fixe de f^p on a

$$f^p(f(x)) = f(f^p(x)) = f(x),$$

ce qui convient dire que $f(x)$ est aussi un point fixe de f^p et grâce à l'unicité $f(x) = x$.

Donc ce résultat est valable pour tous les types de contraction qui assurent l'unicité du point fixe.

3. Il se peut que f ne soit pas une contraction sur tout l'espace E mais juste dans le voisinage d'un point donné. Dans ce cas on a le résultat suivant qui est la version local du théorème de Banach

Théorème 2.2.1.1

Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : B(x_0, r_0) \longrightarrow E$ une contraction de constante k avec

$$d(f(x_0), x_0) > (1 - k)r.$$

Alors f admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$.

Preuve :

On a $d(f(x_0), x_0) > (1 - k)r$ donc il existe r_0 tel que $0 \leq r_0 \leq 1$ et

$$d(f(x_0), x_0) > (1 - k)r_0.$$

On montre que $f : B(x_0, r_0) \longrightarrow B'(x_0, r_0)$.

Soit $x \in B_0(x_0, r_0)$ alors

$$\begin{aligned} d(f(x), x_0) &\leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), x_0) \\ &\leq kd(x, x_0) + (1 - k)r_0 \\ &\leq kr_0 + (1 - k)r_0 \\ &= r_0. \end{aligned}$$

Donc l'application $f : B(x_0, r_0) \longrightarrow B'(x_0, r_0)$ est contractante avec $B'(x_0, r_0)$ est

un espace complet. Par suite l'application le théorème de Banach à f assure qu'elle admet un unique point fixe dans $B(x_0, r)$. Comme $B'(x_0, r) \subset B(x_0, r)$ et f contractante sur $B(x_0, r)$ ce point fixe reste unique dans $B(x_0, r)$.

2.2.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Le théorème du point fixe de Brouwer est un résultat de la topologie algébrique.

Il fait partie de la grande famille des théorèmes du point fixe. Ce théorème donne l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur une boule fermée dans un espace de dimension finie.

Théorème 2.2.2.1

Soit $C \subset E$ une partie non vide compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \rightarrow C$ une fonction continue. Il existe alors $x \in C$ tel que $f(x) = x$.

Le théorème de Brouwer prends plusieurs formes selon le contexte d'utilisation, pour $n = 1$ le théorème de Brouwer prend la forme suivante.

Théorème 2.2.2.2

Si $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.

Remarque 2.2.2.1

Dans $\mathbb{R}$ les parties compactes et convexes sont les intervalles.

Preuve :

Si f est continue sur $[a, b]$ dans lui même, la fonction $g(x) = f(x) - x$ est continue de plus

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \text{ et } g(b) = f(b) - b \leq 0.$$

Par le théorème de la valeur intermédiaire, il existe un point x_0 tel que $g(x_0) = 0$, c'est-à-dire $f(x_0) = x_0$ (x_0 est le point fixe de f).

Théorème 2.2.2.3

Tout application f continue du disque fermé dans lui même admet au moins un point fixe.

Remarque 2.2.2.2

Dans le plan, les parties compactes et convexes sont des disques fermés ou bien des boules fermées.

Preuve :

On va donner un squelette de la démonstration. Si C le domaine de définition de f d'intérieure vide. C'est un segment. Sinon, C est semable à une boule unité fermée. Le terme semable signifie qu'il existe un homéomorphisme ϕ de la boule unité vers C . L'équation définissant le point fixe peut encore s'écrire si $g = f \circ \phi$, $g(x) = x$. Autrement dit, on peut supposer que C est la boule unité fermée. On peut de plus choisir la norme de manière quelconque. Si on choisit celle qui associe la valeur absolue de la plus grande coordonnée, cela revient à dire que l'on peut choisir pour compact C , l'ensemble $[-1, 1] \times [-1, 1]$, sans perte de généralité. Si l'on définit la fonction h comme suit

$$h : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1] \text{ par } h(x) = g(x) - x,$$

Cela revient à montrer que la fonction G atteint le vecteur nul sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Si f_k , pour $k = 1, 2$ sont les deux fonctions coordonnées de f , cela revient à montrer l'existence d'un point x_0 , tel que h_1, h_2 , admettent toutes deux pour zéro de la valeurs x_0 .

La fonction h_1 est une fonction de $[-1, 1] \times [-1, 1]$ dans $[-1, 1]$. Sur $-1 \times [-1, 1]$, L 'altitude est positive. En revanche sur $1 \times [-1, 1]$, elle est négative. Ceci laisse penser que la courbe de niveau 0 est une ligne qui parte d'un point $[-1, 1] \times 1$ pour finir sur un point de $[-1, 1] \times -1$. Le même raisonnement appliquée à h_2 laisse penser que la courbe de niveau 0 est cette fois-ci une ligne qui part d'un point de $1 \times [-1, 1]$ pour terminer sur un point de $-1 \times [-1, 1]$. Intuitivement, il semble évident que ces deux lignes de niveaux doivent nécessairement se croiser et ce point de croisement est un point fixe de $f \circ \phi$.

Remarque 2.2.2.3

Il est important de voir que l'unicité n'est pas assurée par le Théorème de Browder du fait que chaque point de C est un point fixe de l'application identité.

Il est possible de généraliser en toute dimension finie. Donc dans un espace euclidien, on retrouve.

Théorème 2.2.2.4

Toute application f continue de la boule unité fermé de $\mathbb{R}^x$ dans lui-même admet un point fixe. Ce point fixe n'est pas forcément unique.

2.2.3 Théorème du point fixe de Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Le théorème du point fixe de Schauder est plus topologique et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Schauder a généraliser le résultat de Brouwer en dimension infinie.

Théorème 2.2.3.1

Soit C un sous ensemble non vide, compact convexe dans un espace Banach E et supposons $f : C \longrightarrow C$ une application continue. Alors f admet un point fixe.

Preuve :

Soit C un sous ensemble compact convexe d'un espace de Banach E , et soit $f : C \longrightarrow C$ une application continue. Comme C est un compact, f est uniforme continue donc, fixons $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x, y \in C$, on a

$$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$$

de plus il existe $x_1, x_2, \dots, x_l \in C$ tel que $K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq l} B(x_j, \delta)$.

soit $L \doteq \text{Vect}(f(x_j))_{1 \leq j \leq l}$ alors L est de dimension fini et $C^* \doteq C \cap L$ est compact convexe de

dimension finie. Pour $1 \leq j \leq l$, on définit les fonctions continues $\psi_j : E \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x - x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

il est clair que ψ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle ailleurs. On a donc pour tout $x \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{j=1}^l \psi_j(x)$$

Ainsi, on peut définir sur les fonctions continues positives ε_j par

$$\varepsilon_j = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^l \psi_k(x)}$$

pour les quelles, on a $\sum_{j=1}^l \varepsilon_j(x) = 1$, pour tout $x \in \mathbb{C}$.

Posant, pour $x \in C$

$$g(x) = \sum_{j=1}^l \varepsilon_j(x) f(x_j)$$

La fonction g est continue et prend ses valeurs dans C^* .

Le théorème de Brouwer assure que la restriction $g/C^* : C^* \rightarrow C^*$ possède un point fixe $z \in C^*$.

De plus

$$\begin{aligned} f(z) - z &= f(z) - g(z) = \sum_{j=1}^l \varepsilon_j(z) f(z) - \sum_{j=1}^l \varepsilon_j(x) f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^l \varepsilon_j(z) [f(z) - f(x_j)]. \end{aligned}$$

On a si $\varepsilon_j(z) \neq 0$ alors $\|z - x_j\| < \delta$, et par suite $\|f(z) - f(x_j)\| < \epsilon$. On a donc pour tout j

$$\begin{aligned} \|f(z) - z\| &\leq \sum_{j=1}^l \varepsilon_j(z) \|f(z) - f(x_j)\| \\ &= \sum_{j=1}^l \varepsilon_j(z) \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

Pour tout entier m , on peut trouver un point $y_m \in C$ tel que

$$\|f(y_m) - y_m\| < 2^{-m}$$

et puisque C est compact, on peut extraire une sous suite (z_{mk}) de la suite $(z_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ et qui converge vers un point $z^* \in C$.

Alors f étant continue, la suite $(f(z_{mk}))$ converge vers $f(z^*)$, et on conclut par la suite que $f(z^*) = z^*$ i.e z^* est un point fixe de f sur C .

2.2.4 Théorème de Kannan

Théorème (R. Kannan 1968)

Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application. Supposons qu'il existe $a \in [0, \frac{1}{2}[$ tel que pour tous $x, y \in E$, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq a[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \quad (2.1)$$

Alors f admet un point fixe unique dans E .

Preuve :

Existence : Soit $x_0 \in E$, on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par

$$x_n = f(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots,$$

en utilisant la condition (1), on obtient

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq a[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})]. \end{aligned}$$

ce qui implique

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{a}{1-a}\right) d(x_{n-1}, x_n)$$

Par récurrence sur n , on a

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{a}{1-a}\right)^n d(x_0, x_1)$$

On pose $r = \frac{a}{1-a}$. Si n, p sont deux entiers naturels, alors

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + \dots + r^{n+p-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{r^n}{1-r} d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Comme $a \in [0, \frac{1}{2}[$ on a $r \in [0, 1[$ et donc $d(x_n, x_{n+p}) \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de Cauchy. Comme E est complet, il existe $u \in E$ tel que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = u$. u est un point fixe de E car

$$\begin{aligned} d(u, f(u)) &\leq d(u, x_n) + d(x_n, f(u)) \\ &\leq d(u, x_n) + a[d(x_n, x_{n-1}) + d(u, f(u))]. \end{aligned}$$

et donc

$$d(u, f(u)) \leq \frac{1}{1-a} d(u, x_n) + \frac{a}{a-1} d(x_{n-1}, x_n)$$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel arbitraire, comme $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers u , il existe un entier naturel $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$n \leq N \leq 1 \Rightarrow d(u, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-a}{1+a}$$

et

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-a}{1+a}$$

Il en résulte que

$$d(u, f(u)) \leq \frac{\varepsilon}{1+a} + \frac{\varepsilon a}{1+a} = \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on déduit que $f(u) = u$.

Unicité : Soit v est un autre point fixe de f , alors

$$d(v, u) \leq a[d(u, f(u)) + d(v, f(v))] = 0.$$

et donc $u = v$, ce qui achève la preuve.

Exemple 2.2.4.1

Soit $E = \mathbb{R}$ et $f : E \longrightarrow E$ une application définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 2 \\ -\frac{1}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Alors :

1. f n'est pas continue.
2. f satisfait la condition (1) avec $a = \frac{1}{5}$ et par conséquent d'après le théorème de Kannan f admet un point fixe unique $u = 0$ dans E .

2.2.5 Théorème du point fixe de Chatterjea

En 1971 Chatterjea a obtenu la variante du théorème de point fixe de Kannan suivant

Théorème 2.2.5.1

Soit (E, d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application. Supposons qu'il existe $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$ tel que pour tous $x, y \in E$ on a

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda[d(x, f(y)) + d(y, f(x))]. \quad (2.2)$$

Alors f admet un point fixe unique dans E .

Preuve :

Existence : soit x_0 arbitraire, on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0), n = 1, 2, \dots,$$

en utilisant la condition (2.2), on obtient

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f(x_{n-1}), f(x_n))$$

$$\begin{aligned}
&\leq a[d(x_{n-1}, f(x_n)) + d(x_n, f(x_{n-1}))] \\
&= a[d(x_{n-1}, x_{n+1}) + d(x_n, x_n)] \\
&\leq a[d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})].
\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{a}{1-a}\right)^n d(x_0, x_1)$$

On pose $r = \frac{a}{1-a}$. Si n, p sont deux entiers naturels, alors

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\
&\leq (r^n + r^{n+1} + \dots + r^{n+p-1})d(x_0, x_1) \\
&\leq \frac{r^n}{1-r} d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

Comme $\lambda \in [0, \frac{1}{2}[$, on a $r \in [0, 1[$ et donc $d(x_n, x_{n+p}) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de Cauchy. Comme E est complet, il existe $u \in E$. u est un point fixe de E car

$$\begin{aligned}
d(u, f(u)) &\leq d(u, x_n) + d(x_n, f(u)) \\
&\leq d(u, x_n) + a[d(x_{n-1}, x_n) + d(u, f(u))].
\end{aligned}$$

et donc

$$d(u, f(u)) \leq \frac{a}{1-a} d(u, x_n) + \frac{a}{1-a} d(x_{n-1}, x_n).$$

Soit $\varepsilon > 0$ un réel arbitraire, comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u , il existe un entier naturel $N = N(\varepsilon)$ tel que

$$n \leq N \Rightarrow d(u, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-a}{1+a}.$$

et

$$d(x_{n-1}, x_n) \leq \varepsilon \frac{1-a}{1+a}.$$

Il en résulte que

$$d(u, f(u)) \leq \frac{\varepsilon}{1+a} + \frac{\varepsilon a}{1+a} = \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on déduit que $f(u) = u$.

Unicité : Supposons que v est un autre point fixe de f . En suite, nous avoir $f(v) = v$ et

$$\begin{aligned}
d(u, v) &= d(f(u), f(v)) \\
&\leq a[d(u, f(v)) + d(v, f(u))].
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$d(u, v) \leq 2ad(u, v).$$

Donc $u = v$, d'où l'unicité.

2.2.6 Théorème de Zamfirescu

Dans un espace métrique, il se peut qu'il ya des points de cet espace qui vérifient la condition du théorème de Banach , autres points celle de Kannan et autres points la condition de Chatterjea. En 1972, Zamfirescu montre dans ce cas que l'application admet un point fixe unique.

Théorème 2.2.6.1

(T.Zamfirescu1972). Soient (E, d) un espace métrique complet et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose qu'il existe des nombres réels α, β et γ satisfont $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 12$ et $0 \leq \gamma < 12$ tels que, pour tous $x, y \in E$, au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$(z_1) \quad d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

$$(z_2) \quad d(f(x), f(y)) \leq \beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))].$$

$$(z_3) \quad d(f(x), f(y)) \leq \gamma[d(x, f(y)) + d(y, f(x))].$$

Alors f admet un point fixe unique dans E .

Preuve :

On fixe d'abord $x, y \in E$. Si la condition (Z_2) est satisfaite, alors on a

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq \beta[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \\ &\leq \beta(d(x, f(x)) + [d(y, x) + d(x, f(x)) + d(f(x), f(y))]). \end{aligned}$$

Ainsi

$$(1 - \beta)d(f(x), f(y)) \leq 2\beta d(x, f(x)) + \beta d(x, y).$$

donc

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{2\beta}{1 - \beta}d(x, f(x)) + \frac{\beta}{1 - \beta}d(x, y).$$

Si la condition (Z_3) est vérifiée, alors similairement, on obtient

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{2\gamma}{1 - \gamma}d(x, f(x)) + \frac{\gamma}{1 - \gamma}d(x, y).$$

On note par

$$\delta = \max\{\alpha, \frac{\beta}{1 - \beta}, \frac{\gamma}{1 - \gamma}\}$$

donc on a $0 \leq \delta < 1$, il s'en suit que pour tous $x, y \in E$, l'inégalité suivante

$$d(f(x), f(y)) \leq 2\delta d(x, f(x)) + \delta d(x, y)$$

est vérifiée. D'une façon similaire, on a

$$d(f(x), f(y)) \leq 2\delta d(x, f(y)) + \delta d(x, y), \quad \forall x, y \in E.$$

On va prouver que f admet un point fixe unique. Soit $x_0 \in E$ un élément arbitraire et $(x_n)_{n \geq 0}$ tel que $x_n = f^n(x_0)$. Si $x = x_n$ et $y = x_{n-1}$, alors la dernière inégalité donne

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \delta d(x_n, x_{n-1}).$$

De cela on déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc elle admet une limite $u \in E$ puisque E est complet. En particulier, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0.$$

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} d(u, f(u)) &\leq d(u, x_{n+1}) + d(f(x_n), f(u)) \\ &\leq d(u, x_{n+1}) + \delta d(u, x_n) + 2\delta d(x_n, f(x_n)). \end{aligned}$$

En faisant tendre $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$d(u, f(u)) = 0 \Leftrightarrow u = f(u).$$

Ce qui montre que u est un point fixe pour f . L'unicité est triviale.

CHAPITRE 3

THÉORÈME DE POINT FIXE DANS LES ESPACES D-MÉTRIQUES

Dans ce chapitre, on a traité des résultats principaux, les théorèmes du point fixe dans l'espace D-métrique, et théorèmes communs du point fixe.

3.1 les espaces D-métriques

Définition 3.1.0.1

Soit X un ensemble non vide et $D : X \times X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ (l'ensemble des nombres réels positifs). Le couple $(X; D)$ est un espace D-métrique si :

- (D1) $D(x, y, z) = 0$ si et seulement si $x = y = z$.
- (D2) $D(x, y, z) = D(y, x, z) = D(z, y, x) = \dots$
- (D3) $D(x, y, z) \leq D(x, y, a) + D(x, a, z) + D(a, y, z); \forall x, y, z, a \in X$.

Exemple 3.1.0.1

1. $D(x, y, z) = \max\{d(x, y); d(y, z); d(z, x)\}$, ici, d est la métrique ordinaire sur X .
2. $D(x, y, z) = d(x, y) + d(y, z) + d(z, x)$, ici, d est la métrique ordinaire sur X .

Définition 3.1.0.2

Soit (X, D) un espace D-métrique et S un sous-ensemble non vide de X . On définit le diamètre de S par

$$\delta_d(S) = \sup\{D(x, y, z); x, y, z \in S\}.$$

Définition 3.1.0.3

Soit T une fonction multi-valeurs de l'espace D -métrique (X, D) sur lui même. Soit $x_0 \in X$, une suite $\{x_n\}$ dans X est dite une orbite de T en x_0 notée $O(T, x_0)$ si :

$$x_{n-1} \in T^{n-1}(x_0) \Leftrightarrow x_n \in T(x_{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Une orbite $O(T, x_0)$ est dite bornée si son diamètre est fini.

Définition 3.1.0.4

Dans un espace D -métrique, on dit qu'une suite $\{x_n\}$ est convergente vers un point $x \in X$; si $\forall \varepsilon > 0$, il existe un entier positif n_0 tel que $D(x_n, x_m, x) < \varepsilon; \forall n, m > n_0$.

Définition 3.1.0.5

Une suite $\{x_n\}$ dans un D -métrique est dite D -Cauchy dans X si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif n_0 tel que $D(x_n, x_m, x_p) < \varepsilon, \forall n, m, p > n_0$.

Définition 3.1.0.6

Un espace D -métrique est dit complet si toute suite de D -Cauchy est convergente.

Définition 3.1.0.7

Une paire (S, T) de fonctions définies de D -métrique (X, D) sur lui même sont dites D -compatibles si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(STx_n, STx_n, Z) = 0 \quad (3.1)$$

où $Z = STx_n$ ou $Z = TSx_n$ telle que (x_n) est une suite de X avec $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = x \in X$.

Définition 3.1.0.8

Une paire (S, T) de fonctions définies de D -métrique (X, D) sur lui même sont dites D -compatibles si

$$\forall x, y, z \in X; \exists \alpha \geq 0 : D(STx, STy, TSz) \leq \alpha D(Tx; Ty; Sz) \quad (3.2)$$

Définition 3.1.0.9

Une paire (S, T) de fonctions définies de D -métrique (X, D) sur lui même sont dites D -semi-compatibles si $\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = Tx$ à chaque fois que la suite x_n vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = x$.

Proposition 3.1.0.1

Soit une paire (S, T) de fonctions définies de D -métrique (X, D) sur lui même telle que T soit continue. Alors, les fonctions S et T sont semi-compatibles.

Preuve : Supposons que

$$Sx_n \longrightarrow u$$

$$Tx_n \longrightarrow u$$

Pour montrer que $STx_n \longrightarrow Tu$, il suffit de remarquer que comme T est continue alors $TSx_n \longrightarrow Tu$. la paire (S, T) est D -compatible, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(STx_n, STx_n, TSx_n) = 0; \forall x, y, z \in X$$

ce qui donne ceci implique que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(STx_{n+p}, Tu) = 0$$

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow \infty} STx_n = Tu$, preuve achevée.

Remarque 3.1.0.1

L'exemple suivant nous permis de remarquer que :

1. La paire de fonction (S, T) est semi-compatibile mais elle n'est pas D -compatible même avec T continue .
2. Le couple (S, T) est semi-compatibles, mais (T, S) n'est pas semi-compatibile .
3. $ST = TS$, encore (T, S) n'est pas semi-compatibile.

Exemple 3.1.0.2

Soit (X, D) un espace de D -métrique avec $X = \mathbb{R}^+$, et $D : X \times X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction définie par :

$$D(x, y, z) = \max\{|x - y|, |y - z|, |z - x|\}; \forall x, y, z \in X$$

On prend :

$$S(x) = \begin{cases} 0 & ; x > 0 \\ T(x) = x & ; x_n = \frac{1}{n} \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$

1. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} STx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n \longrightarrow 0 = T(0).$$

Aussi comme $T = I$, fonction d'identité, pour toute suite x_n telle que

$$Sx_n \longrightarrow u; Tx_n \longrightarrow u$$

alors

$$STx_n = Sx_n \longrightarrow u = Tu$$

.

$$\Leftrightarrow STx_n \longrightarrow Tu.$$

donc $(S; T)$ est semi-compatible .

T est continue.

choisissant $x = 0, y = 0$ et $z = 1$, on obtient,

$$D(1, 1, 0) \leq \alpha D(0, 0, 0), \forall \alpha \in (0, \infty)$$

$$1 \leq 0.$$

Par conséquent $(S; T)$ n'est pas D -compatible .

2. On a

$$Sx_n \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} 0; Tx_n \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$$

mais

$$TSx_n = T(0) \longrightarrow 0 \neq S(0).$$

par conséquent (T, S) n'est pas semi-compatible.

Remarquons que $STx_n \longrightarrow T(0)$, donc (S, T) est semi- compatible.

3. Comme $T = I$; alors $ST = TS$, Ainsi (S, T) est semi-compatible et (T, S) ne l'est pas.

Proposition 3.1.0.2

Soit S et T deux fonctions définies de (X, D) espace D -métrique sur lui même telles que $S(X) \subseteq T(X)$.

Pour $x_0 \in X$, on définit les suites (x_n) et (y_n) sur X par :

$$Sx_{n-1} = Tx_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$O(T^{-1}S, x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

$$O(ST^{-1}, Sx_0) = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}.$$

Preuve : On a

$$Sx_0 = Tx_1 \Rightarrow x_1 \in T^{-1}Sx_0$$

$$Sx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_2 \in T^{-1}Sx_1 = (T^{-1}S)^2x_0$$

...

$$Sx_{n-1} = Tx_n \Rightarrow x_n \in T^{-1}Sx_{n-1} = (T^{-1}S)^n x_0$$

$$\Rightarrow O(T^{-1}S, x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Idem pour la deuxième, en effet

$$\begin{aligned}
 y_1 &= Sx_0 \\
 y_2 &= Sx_1 \in S(T^{-1}Sx_0) = (ST^{-1})Sx_0 \\
 y_3 &= Sx_2 \in S(T^{-1}ST^{-1}Sx_0) = (ST^{-1})^2Sx_0 \\
 &\dots \\
 y_n &= Sx_{n-1} \in (ST^{-1})^{n-1}Sx_0 \\
 &\Rightarrow O(ST^{-1}, Sx_0) = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\}.
 \end{aligned}$$

3.2 Résultats principaux

Lemme 3.2.0.1

Soit $(x_n) \subseteq X$ une suite bornée par M et qui satisfait

$$D(x_n, x_{n+1}, x_m) \leq q^n M; \forall m > n + 1; 0 \leq q < 1;$$

alors la suite (x_n) est une suite D -Cauchy dans X .

Lemme 3.2.0.2

Soit S et T deux fonctions définies de (X, D) espace D -métrique sur lui même telles que

1. $S(X) \subseteq T(X)$.
2. Certain orbite $\{y_n\} = O(ST^{-1}, Sx_0)$ est bornée.
3. $\forall x, y, z \in O(ST^{-1}, x_0)$ et $0 \leq q < 1$ tel que

$$\begin{aligned}
 D(Sx, Sy, Sz) &\leq q \max\{D(Tx, Ty, Tz); D(Sx, Tx, Tz); D(Sy, Ty, Tz) \\
 &\quad D(Sx, Ty, Tz); D(Sy, Tx, Tz)\}.
 \end{aligned}$$

Alors (y_n) est une suite D -Cauchy sur $O(ST^{-1}, Sx_0)$

Preuve : Soit $x_0 \in X$. Comme $S(X) \subseteq T(X)$, nous pouvons définir les suites (x_n) et (y_n) sur X par

$$Sx_{n-1} = Tx_n = y_n, \forall x, y \in \mathbb{N}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 D(y_n, y_{n+1}, y_{n+p}) &= D(Sx_{n-1}, Sx_n, Sx_{n+p-1}) \\
 &\leq q \max\{D(Tx_{n-1}, Tx_n, Tx_{n+p-1}), D(Sx_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-1}), \\
 &\quad D(Sx_n; Tx_n; Tx_{n+p-1}), D(Sx_{n-1}; Tx_n; Tx_{n+p-1}), \\
 &\quad D(Sx_n, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-1})\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq q \max\{D(y_{n-1}, y_n, y_{n+p-1}), D(y_n, y_{n-1}, y_{n+p-1}), \\
&\quad D(y_{n+1}, y_n, y_{n+p-1}), D(y_n, y_n, y_{n+p-1}), \\
&\quad D(y_{n+1}, y_{n-1}, y_{n+p-1})\}.
\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
D(y_n, y_{n+1}, y_{n+p}) &\leq q \max\{D(y_{n-1}, y_n, y_{n+p-1}), D(y_n, y_{n+1}, y_{n+p-1}), \\
&\quad D(y_n, y_n, y_{n+p-1}), D(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+p-1})\}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

de nouveau

$$\begin{aligned}
D(y_{n-1}, y_n, y_{n+p-1}) &= D(Sx_{n-2}, Sx_{n-1}, Sx_{n-2}) \\
&\leq q \max\{D(Tx_{n-2}, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-2}), D(Sx_{n-2}, Tx_{n-2}, Tx_{n+p-2}), \\
&\quad D(Sx_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-2}), D(Sx_{n-2}, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-2}), \\
&\quad D(Sx_{n-1}, Tx_{n-2}, Tx_{n+p-2})\}. \\
&\leq q \max\{D(y_{n-2}, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_n, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_{n-1}, y_{n-1}, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_n, y_{n-2}, y_{n+p-1})\}. \\
&\leq q \max\{D(y_{n-2}, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_{n-1}, y_n, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_{n-1}, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_n, y_{n-2}, y_{n+p-2})\}. \\
\implies D(y_{n-1}, y_n, y_{n+p-1}) &\leq q \max\{D(y_{n-2}, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_{n-1}, y_n, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_{n-1}, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_n, y_{n-2}, y_{n+p-2})\}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
D(y_{n+1}, y_n, y_{n+p-1}) &= D(Sx_n, Sx_{n-1}, Sx_{n+p-2}) \\
&\leq q \max\{D(Tx_n, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-2}), D(Sx_n, Tx_n, Tx_{n+p-2}), \\
&\quad D(Sx_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-2}), D(Sx_n, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-2}), \\
&\quad D(Sx_{n-1}, Tx_n, Tx_{n+p-2})\}. \\
&\leq q \max\{D(y_n, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_{n+1}, y_n, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_n, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_{n+1}, y_{n-1}, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_n, y_n, y_{n+p-2})\}. \\
\implies D(y_{n+1}, y_n, y_{n+p-1}) &\leq q \max\{D(y_n, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_{n+1}, y_n, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_n, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_{n+1}, y_{n-1}, y_{n+p-2}),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
& D(y_n, y_n, y_{n+p-2})\}. \\
D(y_n, y_n, y_{n+p-1}) &= D(Sx_{n-1}, Sx_{n-1}, Sx_{n+p-2}) \\
&\leq q \max\{D(Tx_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-2}), D(Sx_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-2}), \\
&\quad D(Sx_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-2}), D(Sx_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-2}), \\
&\quad D(Sx_{n-1}, Tx_{n-1}, Tx_{n+p-2})\}. \\
&\leq q \max\{D(y_{n-1}, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_n, y_{n-1}, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_n, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_n, y_{n-1}, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_n, y_{n-1}, y_{n+p-2})\}. \\
&\leq q \max\{D(y_{n-1}, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_n, y_{n-1}, y_{n+p-2})\}. \\
\implies D(y_n, y_n, y_{n+p-1}) &\leq q \max\{D(y_{n-1}, y_{n-1}, y_{n+p-2}), D(y_n, y_{n-1}, y_{n+p-2})\}. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+p-1}) &= D(Sx_{n-2}, Sx_n, Sx_{n+p-2}) \\
&\leq q \max\{D(Tx_{n-2}, Tx_n, Tx_{n+p-2}), D(Sx_{n-2}, Tx_{n-2}, Tx_{n+p-2}), \\
&\quad D(Sx_n, Tx_n, Tx_{n+p-2}), D(Sx_{n-2}, Tx_n, Tx_{n+p-2}), \\
&\quad D(Sx_n, Tx_{n-2}, Tx_{n+p-2})\}. \\
&\leq q \max\{D(y_{n-2}, y_n, y_{n+p-2}), D(y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_{n+1}, y_n, y_{n+p-2}), D(y_{n-1}, y_n, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+p-2})\}. \\
\implies D(y_{n-1}, y_{n+1}, y_{n+p-1}) &\leq q \max\{D(y_{n-2}, y_n, y_{n+p-2}), D(y_{n-1}, y_{n-2}, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_{n+1}, y_n, y_{n+p-2}), D(y_{n-1}, y_n, y_{n+p-2}), \\
&\quad D(y_{n+1}, y_{n+2}, y_{n+p-2})\}. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

En substituant (3.4)-(3.7) dans (3.3), nous obtenons :

$$D(y_n, y_{n+1}, y_{n+p}) \leq q^2 \max_{a,b,c} \{D(y_a, y_b, y_c)\}.$$

tels que $a; b; c$ vérifient $n-2 \leq a \leq n, 1 \leq b \leq n+1, c = n+p-1$. En continuant ce procédé, on obtient :

$$D(y_n, y_{n+1}, y_{n+p}) \leq q^n \max_{a,b,c} \{D(y_a, y_b, y_c)\}. \tag{3.8}$$

avec $0 \leq a \leq n, 1 \leq b \leq n+1, c = p$. Soit M la borne de $O(ST^{-1}, Sx_0)$

Il découle de (3.8) que

$$D(y_n; y_{n+1}; y_{n+p}) \leq q^n(M)$$

Par conséquent, (y_n) est une suite D -Cauchy dans $O(ST^{-1}, Sx_0)$.

3.3 Théorème de point fixe

Théorème 3.3.0.1

Soit (X, D) un espace D -métrique, f une auto-application de X . Supposons qu'il existe un $x_0 \in X$ tel que $O(x_0)$ soit D -borné et f -orbitalement complet. Supposons aussi que f satisfait :

$$D(fx, fy, fz) \leq \lambda \max\{D(x, y, z), D(x, fx, z)\} \text{ pour } x, y, z \in \overline{O(x_0)} \quad (3.9)$$

pour un certain $0 \leq \lambda < 1$. Alors f a un point fixe unique dans X

Preuve : Supposons qu'il existe un n tel que $x_n = x_{n+1}$. Alors f a x_n comme point fixe dans X .

On peut donc supposer que tous les x_n sont distincts.

On veut montrer que, pour tout entier positif $m, n, m > n$, que $D(x_{n+1}, x_{n+2}, x_m) \leq \lambda^n K$, où K est la D -borne de $O(x_0)$. La preuve est par induction. D'après (3.9), pour tout m

$$D(x_1, x_2, x_m) \leq \lambda \max\{D(x_0, x_1, x_{m-1}), D(x_0, x_1, x_{m-1})\} \leq \lambda K \quad (3.10)$$

Toujours en utilisant (3.9)

$$D(x_2, x_3, x_m) \leq \lambda \max\{D(x_2, x_3, x_{m-1}), D(x_1, x_2, x_{m-1})\} \leq \lambda K \quad (3.11)$$

En utilisant (3.10)

$$D(x_2, x_3, x_m) \leq \lambda \max\{D(x_2, x_3, x_m); \lambda K.\} \quad (3.12)$$

L'inégalité (3.12) peut être considérée comme une formule de récurrence en m . Donc

$$D(x_2, x_3, x_m) \leq \lambda \max\{\lambda \max\{D(x_2, x_3, x_{m-2}); \lambda K.\}; \lambda K.\} \leq \lambda^2 K \quad (3.13)$$

Supposons l'hypothèse d'induction. Alors, à partir de (3.9)

$$\begin{aligned} D(x_{n+1}, x_{n+2}, x_m) &\leq \lambda \max\{D(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{m-1}); D(x_n, x_{n+1}, x_{m-1})\} \\ &\leq \lambda \max\{D(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{m-1}); \lambda^n K.\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'inégalité (3.14) peut être considérée comme une formule de récurrence en m . Donc,

$$\begin{aligned} D(x_{n+1}, x_{n+2}, x_m) &\leq \lambda \max\{\lambda \max\{D(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{m-2}); \lambda^n K.\}; \lambda^n K.\} \\ &= \max\{\lambda^2 D(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{m-2}); \lambda^{n+2} K; \lambda^{n+1} K.\} \\ &= \max\{\lambda^2 D(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{m-2}); \lambda^{n+1} K.\} \\ &\leq \max\{\lambda^2 \lambda \max\{D(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{m-3}); \lambda^{n+1} K.\}; \lambda^{n+1} K.\} \\ &= \max\{\lambda^3 D(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{m-3}); \lambda^{n+1} K.\} \\ &\leq \max\{\lambda^n D(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{m-n}); \lambda^{n+1} K.\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max\{\lambda^n \lambda \max\{D(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{m-n-1}); \lambda^{n+1}K\}; \lambda^{n+1}K\} \\
&= \lambda^{n+1}k
\end{aligned} \tag{3.15}$$

et x_n est D -Cauchy d'après le lemme 2.1. Puisque X est x_0 -orbitalement complet, il existe un $p \in X$ avec $\lim x_n = p$.

Dans (3.9) poser $x = x_n$, $z = p$ pour obtenir.

$$D(x_{n+1}, x_{n+1}, x_p) \leq \lambda \max\{D(x_n, x_n, x_p); D(x_n, x_{n+1}, x_p)\} \tag{3.16}$$

Prendre la limite de (3.16) lorsque $n \rightarrow \infty$ donne $D(p, p, fp) \leq \lambda D(p, p, p) = 0$, et $p = fp$. Pour prouver l'unicité, supposons que q soit aussi un point fixe de f .

Alors, à partir de (3.9),

$$D(p, p, q) = D(fp, fp, fq) \leq \lambda \max\{D(p, p, q); D(p, fp, q)\} = \lambda D(p, p, q) \tag{3.17}$$

c qui implique que $p = q$.

Remarque 3.3.0.1

Soit f une autocarte d'un espace D -métrique complet et borné X satisfaisant

$$D(fx, fy, fz) \leq \lambda D(x, y, z) \tag{3.18}$$

pour tout $x, y, z \in X$, pour certains $0 \leq \lambda < 1$. Alors f admet un unique point fixe p , et f est continue en p .

Remarque 3.3.0.2

Soit f une auto-carte d'un ensemble complet et borné Espace D -métrique satisfaisant la condition qu'il existe un entier positif q tel que

$$D(f^q x, f^q y, f^q z) \leq \lambda D(x, y, z) \tag{3.19}$$

pour tout $x, y, z \in X$, pour certains $0 \leq \lambda < 1$. Alors f a un unique point fixe p , et f est f -orbitalement continue en p .

Remarque 3.3.0.3

Soit f une autocarte de X, X et f -orbitalement bornée et complète Espace D -métrique satisfaisant

$$D(fx, fy, fz) \leq \alpha \left[\frac{1 + D(x, fx, z)}{1 + D(x, y, z)} \right] D(y, fy, z) + \beta D(x, y, z) \tag{3.20}$$

pour tout $x, y, z \in X$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$. Alors f admet un unique point fixe p et f est continue en p .

Preuve : Dans (3.21) set $y = fx$ to obtain

$$D(fx, f^2x, fz) \leq \alpha D(fx, f^2x, z) + \beta D(x, fx, z) \leq \lambda \max D(fx, f^2x, z), D(x, fx, z) \tag{3.21}$$

où $\lambda = \alpha + \beta < 1$, et (3.9) est satisfaite. La conclusion découle du théorème 3.1. Pour prouver la continuité de f en p , soit $z_n \subset X$ avec $\lim z_n = p$.

Dans (3.22) poser $x = z = p$, $y = z_n$, pour obtenir

$$\begin{aligned} D(p, fz_n, p) &= D(fp, fz_n, fp) \\ &\leq \alpha \left[\frac{1 + D(p, fp, p)}{1 + D(p, z_n, p)} \right] D(z_n, fz_n, p) + \beta D(p, z_n, p) \\ &\leq \alpha D(z_n, fz_n, p) + \beta D(p, z_n, p) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Prendre la limite sup des deux côtés de (3.24) lorsque $n \rightarrow \infty$ donne

$$D(p, \limsup fz_n, p) \leq \alpha D(p, \limsup fz_n, p) \quad (3.23)$$

ce qui implique que $\limsup fz_n = p$. De même, en prenant la limite inf des deux côtés de (3.23) lorsque $n \rightarrow \infty$ donne

$$D(p, \liminf fz_n, p) \leq \alpha D(p, \liminf fz_n, p) \quad (3.24)$$

ce qui implique que $\liminf fz_n = p$. Donc $\lim fz_n = p = fp$, et f est continue en p .

Remarque 3.3.0.4

Soit f une autocarte d'un espace D -métrique f -orbitalement borné et complet X , q un entier positif fixe. Supposons que f satisfait

$$D(f^q x, f^q y, f^q z) \leq \alpha \left[\frac{1 + D(x, f^q x, z)}{1 + D(x, y, z)} \right] D(y, f^q y, z) + \beta D(x, y, z) \quad (3.25)$$

pour tout $x, y, z \in X$ où $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$. Alors f admet un unique point fixe p et f est f -orbitalement continue en p .

Preuve : Posons $T = f^q$. Alors T satisfait (3.21). Donc T a un unique point fixe en p , et continue en p . Un argument standard vérifie alors que f a p pour unique point fixe. Comme dans la preuve du corollaire 3.2,0,2 f est f -orbitalement continue en p .

3.4 Théorèmes communs du point fixe

Théorème 3.4.0.1

Soit S et T deux fonctions définies de $(X; D)$ espace D -métrique sur lui même telles que :

1. $S(X) \subseteq T(X)$.
2. Le couple $(S; T)$ est semi-compatible et T est continue.
3. Pour certains $x_0 \in X$, certain orbite $\{y_n\} = O(ST^{-1}, Sx_0)$ est bornée et complét.

4. pour certains $0 \leq q \leq 1$ et $\forall x, y \in O(T^{-1}S, x_0) \cup O(ST^{-1}, Sx_0)$ et pour tout $z \in X$.

$$D(Sx, Sy, Sz) \leq q \max\{D(Tx, Ty, Tz), D(Sx, Tx, Tz), \quad (3.26)$$

$$D(Sy, Ty, Tz), D(Sx, Ty, Tz), D(Sy, Tx, Tz)\}.$$

Alors S et T ont un point fixe commun unique dans X .

Preuve : Soit $x_0 \in X$, on considère deux suites (x_n) et (y_n) sur X définies par :

$$Sx_{n-1} = Tx_n = y_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'après le lemme (3.1.2), (y_n) est une suite D -Cauchy dans $O(ST^{-1}, Sx_0)$, qui est complet.

Par conséquent :

$$y_n = Tx_n = Sx_{n-1} \longrightarrow u \in X \quad (3.27)$$

Comme T est continue et (S, T) est semi-compatible, nous obtenons :

$$T^2x_n \longrightarrow Tu, STx_n \longrightarrow Tu. \quad (3.28)$$

étape 1 :

Posons $x = Tx_n, y = Tx_n$ et $z = u$ dans (3.26) nous obtenons :

$$D(STx_n; STx_n; Su) \leq q \max\{D(TTx_n; TTx_n; Su); D(STx_n; TTx_n; Su);$$

$$D(STx_n; TTx_n; Su); D(STx_n; TTx_n; Su);$$

$$D(STx_n; TTx_n; Su).$$

En utilisant (3.28) nous obtenons, $D(Tu; Tu; Su) = 0$, en faisant tendre $n \longrightarrow \infty$; ce qui donne :

$$Tu = Su \quad (3.29)$$

étape 2 :

Posons $x = x_n, y = x_n$ et $z = u$ dans (3.26) nous obtenons :

$$D(Sx_n, Sx_n, Su) \leq q \max\{D(Tx_n, Tx_n, Su); D(Sx_n, Tx_n, Tu);$$

$$D(Sx_n, Tx_n, Tu); D(Sx_n, Tx_n, Tu);$$

$$D(Sx_n, Tx_n, Tu).$$

A l'aide de (3.27) et (3.29), nous obtenons :

$$D(u, u, Su) \leq q\{D(u, u, Su)\} \leq D(u, u, Su); \text{ si } D(u, u, Su) > 0.$$

contradiction. Par conséquent $D(u, u, Su) = 0$, qui donne $u = Su$ où $u = Su = Tu$ ce qui se traduit par : " u est un point fixe commun de S et T ".

étape 3 : (Unicité)

Soit ω un autre point fixe commun à S et T , $\omega = S\omega = T\omega$.

Posons $x = x_n, y = x_n$ et $z = \omega$ Par la relation (3.26) nous obtenons :

$$D(Sx_n, Sx_n, S\omega) \leq q \max\{D(Tx_n, Tx_n, T\omega); D(Sx_n, Tx_n, T\omega);$$

$$D(Sx_n, Tx_n, T\omega); D(Sx_n, Tx_n, T\omega);$$

$$D(Sx_n, Tx_n, T\omega).$$

par passage à la limite $n \rightarrow \infty$ nous obtenons :

$$D(u, u, w) \leq q\{D(u, u, \omega)\} < D(u, u, \omega), \text{ si } D(u, u, \omega) > 0.$$

ce qui est une contradiction, par conséquent $D(u, u, \omega) = 0$, qui donne $u = \omega$, où u est le point fixe commune unique de S et T .

CONCLUSION

Dans ce travail, on a étudié certaines définitions et quelques espaces d'un espaces métriques, divers espaces métriques et ses propriété, on a intéressé à donner des conditions qui assure l'existence et l'unicité d'un point fixe dans les espaces métriques surtout dans les espaces D -métriques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. Abbas, Etude de quelques théorèmes du point fixe et leurs applications .mémoire master 2015, Université de Saïda.
- [2] Q. M. Ansari, Metric Spaces Including Fixed Point Théory and Set Valued.Maps. Norosa publishing House, New Delhi(2010).
- [3] S. Banach, Sur les opérateurs dans les ensembles abstraits et leur application.aux équations intégrales, Fund. Math, 3(1922), 133-181.
- [4] C. Berger, Topologie pour la licence (cours et exercices) Université de Vice.Sophia Anti polis 2004.
- [5] N. Boulacheb, Etude de certains théorèmes du point fixe (Exemples et applications) mémoire master 2019, Université Oum El Bouaghi.
- [6] S. Chatterjea, Fixed Point theorems, C. R. Acad. Bulgare. Sci. 25(1972).727-730.
- [7] G. Choquet, Cours d'analyse. Tome II, Masson, Paris, 1964.
- [8] J. Córnicki, Fixed point theorem for Kannan type mappings, Fixed PointTheory App. 19, 2145-2152(2017).
- [9] H. E. Djabri, S. Haddadi, Sur la théorie du point fixe dans les espaces mé-triques et applications, mémoire master 2015, Université Abderrahmane Miro. Béjaia .
- [10] N. El Hage Hassan, Topologie générale et espaces normés, Z.I des hautes.no. dition 54692, Rue fond des Fourches 21, juillet 2011.
- [11] R. Kannan, Some results on fixed points, Bull. Calcuta. Math, Soc .Go(1968), 71-76.
- [12] A. Malceski, K. Anervska, Existence of Kannan and Chatterjea, Fixed point.theorems on complete metric spaces, J. Math.17(1) :1-10, 2016.
- [13] A. Monier, Théorème du point fixe de Brouwer, j. des élèves, ENS Lyon.vol 1, 1998, no 4, p 202-206.

- [14] J. Nachbar, fixed point theorems. Econ 511 (2010), 1-16 .
- [15] F. Neir, D. Iftinie, Introduction à la topologie. Université de Renne 1.
- [16] N. Redjel, Quelques résultats de points fixes et applications, mémoire doctorat, Université Mentouri Constantine 1, 2016.
- [17] Y. Sonntag, Topologie et analyse fonctionnelle, Ellipses, Paris 1998.
- [18] K. Taibi, La théorie du point fixe et leurs applications, mémoire master.2017, Université Oum El Bouaghi.
- [19] S. Willard, General topology, Adison Wesley(1970).
- [20] T. Zamfirescu, Fixed point theorems in metric spaces, Arch. Math.(23)(1972), 292-298.
- [21] E. Zielder, Nonlinear anelysis and its application ffixed point theoreme, Springer Verlage, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.
- [22] K. Zennir, Théorèmes du point fixe et ses applications, mémoire doctorat, Université Annaba, 2010.