

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Centre Universitaire d'El-Oued

Département de Génie Electrique

Mémoire de projet de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme

D'ingénieur d'état en génie électrique

THEME

Identification des paramètres et
estimation des états conjoints d'un
système monovariable en utilisant
le (F-K) et le (F-K-E).

Promoteur:

Mr. DJOKHRAB ALA EDDINE

Réalisé par:

***SAIED OTHMAN**

***AHMED LAIB**

***ZOUARI AHMED ZOHIR**

Promotion 2008

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Centre Universitaire d'El-Oued

Faculté des sciences et des sciences de l'ingénieur

Département de Génie Electrique

Mémoire de projet de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme

D'ingénieur d'état en génie electrique

THEME

Identification des paramètres et
estimation des états conjoints d'un
système monovariable en utilisant
le (F-K) et le (F-K-E).

Promoteur:

Mr. DJOKHRAB ALA EDDINE

Réalisé par:

***ZOUARI AHMED ZOHIR**

***AHMED LAIB**

***SAIED OTHMAN**

Promotion 2008

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Centre Universitaire d'El-Oued

Département de Génie Electrique

Mémoire de projet de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme

D'ingénieur d'état en génie electrique

THEME

Identification des paramètres et
estimation des états conjoints d'un
système monovariable en utilisant
le (F-K) et le (F-K-E).

Promoteur:

Mr. DJOKHRAB ALA EDDINE

Réalisé par:

***AHMED LAIB**

***ZOUARI AHMED ZOHIR**

***SAIED OTHMAN**

Promotion 2008

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERAL	01
Chapitre 01 : Modélisation et Identification des paramètres de processus	
I. INTRODUCTION	03
II. DÉFINITION D'UN PROCESSUS ET D'UN MODÈLE	03
II.1. Processus	03
II.2. Processus aléatoires	03
II.3. Notion de modèle:	04
II.3.1. Qu'est ce qu'un modèle ?	04
II.3.2. Buts d'une modélisation	05
II.4. Classe du modèle d'un processus	05
II.4.1. Modèles de connaissance	06
II.4.2. Modèles de représentation et modèles de conduite	06
II.4.3. Modèle mixte	07
III. LES ÉTAPES DE LA CONCEPTION D'UN MODÈLE	07
III.1. Choix du modèle-hypothèse	08
III.1.1. Modèle statique ou dynamique	08
III.1.2. Modèle linéaire ou non linéaire	08
III.1.3. Modèle à temps continu	09
III.1.4. Modèle à temps discontinu ou discret	09
III.1.5. Modèle entrée-sortie ou modèle d'état	09
III.1.6. Présence de perturbations déterministes	09
III.1.7. Présence d'un bruit	10
III.2. Du modèle hypothèse au prédicteur ou au simulateur	10

Identification des paramètres et estimation des états conjoints d'un système monovariable en utilisant le (F-K) et le (F-K-E).

III.2.1 Présentation de quelques modèles-hypothèses et de leurs prédicteurs associés	10
III.2.2 Modèle-hypothèse déterministe	11
III.2.3 Modèles-hypothèses non déterministes	11
III.3. Adaptation et simplification des modèles	12
III.4. Représentation des processus	13
IV. L'IDENTIFICATION	14
IV.1. Importance et utilisation de l'identification	16
IV.2. Principe de l'identification de procédés	17
IV.3. Méthodes d'identification	19
IV.3.1. Méthodes classiques	19
IV.3.2. Méthodes modernes	19
Chapitre 02: Représentation d'état des systèmes à temps discrets	
I. PRINCIPE GENERAL	21
I.1. Variables d'état en temps discret	21
I.2. Modélisation du fonctionnement du système	21
II. RESOLUTION DES EQUATIONS D'ETAT	23
II.1. Prédiction de l'état du système à UN instant quelconque	23
III. COMMANDABILITE D'UN SYSTEME A TEMPS DISCRET	24
III.1. Accessibilité	24
III.2. Critère de commandabilité	24
IV. OBSERVABILITE DE L'ETAT D'UN SYSTEME	24
IV.1 Définition	24
IV.2 Critère d'observabilité	25
V. RELATION ENTRE LA REPRESENTATION D'ETAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME	25
V.1. Représentation d'état à partir de la fonction de transfert	25
a) Représentation modale	25

b) Représentation série	27
c) Représentation compagne commandable	27
d) Représentation compagne observable	29
V.2. Calcul de la fonction de transfert a partir de la représentation d'état	30
a) Transformation en z des équations d'état	30
Chapitre 03: Le Filtre De Kalman et Le Filtre De Kalman Etendu	
I. INTRODUCTION	31
II. LE FILTRE DE KALMAN DISCRET	32
II.1 Le Processus à Estimer	32
II.2. Equations du Filtre	32
II.3 Les Origines Probabilistes du Filtre	33
II.4 L'Algorithme du Filtre de Kalman Discret	34
II.5. Paramètres et accords de filtre	35
III. LE FILTRE DE KALMAN ETENDU	36
III.1 Modèle étendu Stochastique	36
III.2 Filtre de Kalman Etendu Discret (EKF Discret)	37
Etapes de l'algorithme	38
IV. CONCLUSION	39
Chapitre 04: Modélisation Du Moteur à Courant Continu	
I. INTRODUCTION	40
II. DESCRIPTION D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU	40
II.1. Constitution	40
II.2. Comportement dynamique de la machine à c.c	40
III. MODELE DU MOTEUR A COURANT CONTINU	41
III.1. La représentation du système par l'espace d'état	41
III.2. Discrétisation du système	43
IV. SIMULATION DE LA REPONSE DU MOTEUR	44
IV.1. L'organigramme	44
IV.2. Résultats de simulation	45
Chapitre 05: Identification Des Paramètres & Estimation Des Etats D'Exemple (1-2)	
I. APPLICATION DU FILTRE DE KALMAN ETENDU	48
EXEMPLE (1)	48

I.1. Introduction	48
I.2. Estimation des états et identification des paramètres par le filtre de kalman étendu	48
I.3 L'organigramme	50
I.4 Les résultats d'application	51
I.5 Illustration sous Matlab	55
II. APPLICATION DE FILTRE DE KALMAN	60
EXEMPLE (2)	60
II.1. Illustration sous Matlab	63
III. Conclusion	66
CONCLUSION GENERAL	67
ANNEXE A	68
ANNEXE B	71
BIBLIOGRAPHIE	

Introduction

Identification un système, c'est l'opération de déduire des résultats de mesure d'une expérience, les valeurs numérique des paramètres d'un modèle de processus, dont la connaissance est nécessaire pour la conception et la mise en œuvre d'un système performant.

La disponibilité d'un calculateur numérique permet de mettre en place des algorithmes d'estimation échantillonnés. Ces derniers ayant une formulation récursive adaptée aux problèmes d'identification et à leur mise en œuvre sur micro-ordinateur.

Plusieurs méthodes existent pour trouver les paramètres des modèles nécessaires à l'application, en particulier les procédés industriels. Nous citons comme exemple "méthode des moindres carrés, moindres carrés avec facture de pondération, méthode de Marquardt, filtre de kalman, etc ".

Bien qu'il existe de nombreuses de synthèse, nous nous intéressons particulièrement à l'étude d'une seule méthode utilisée par la plupart des chercheurs.

Le filtrage de Kalman, méthode en automatique dont les applications les plus courantes, se situe dans les domaines de guidage des télécommunications, et permettent d'obtenir la meilleure estimation d'un vecteur d'état répondant au critère du minimum d'erreur quadratique moyenne.

Le filtre de kalman étendu est une technique mathématique capable d'estimer l'état et identifie des paramètres du moteur à courant continu.

La modélisation est une étape nécessaire pour l'analyse de comportement du système ou la synthèse des correcteurs pour la commande. L'importance de la modélisation est de simplifier l'étude de différents régimes de fonctionnement.

Présentation du mémoire:

Dans ce mémoire nous avons étudié les performances du filtre de Kalman et Kalman étendu pour l'identification des paramètres et l'estimation des états conjoints d'un système monovariabiles.

Ce manuscrit est divisé en cinq parties plus ou moins indépendantes afin de permettre au lecteur de localiser les sujets qui suscitent son intérêt. Ces cinq parties sont:

Partie I généralité sur les modélisations des processus et la conception d'un modèle avec la présentation d'un processus, et la technique de l'identification des paramètres et l'estimation des états avec quelque notion sur le système asservis, l'observation ...

Partie II on dire donc cette partie Représentation d'état des systèmes à temps discrets.

Partie III dans cette partie on présente généralité sur le filtrage et le principe de filtrage; estimation des états et identification des paramètres avec filtre de Kalman et filtre de Kalman étendu (KFE).

Partie IV Dans ce chapitre en présenter le moteur à courant continu par un système d'équations différentielles ; et le passage à la présentation d'état du moteur. Enfin la résolution de l'équation d'état nous permettra de voir le comportement de la machine.

Partie V illustre d'un exemple théorique sous forme d'une fonction de transfert et l'application du filtre de kalman étendu pour l'estimation des états et l'identification des paramètres du moteur à courant continu.

donnée d'identification des paramètres et l'estimation des états et présenté les résultats d'un programme de travail avec comparaisons entre les deux méthodes d'estimation.

A la fin une conclusion générale et résumé sur les techniques utilisés

I. INTRODUCTION

La modélisation est une partie inhérente à la conception d'une unité d'épuration. Le but de cette étude consiste à élaborer une structure assez générale d'un boues activées mettant en évidence les dynamiques de système.

L'ensemble des méthodes de commande de processus nécessite la connaissance d'un modèle mathématique du système. L'identification des systèmes a pour but de le déterminer parmi l'ensemble des modèles mathématiques étudiés. Les connaissances à priori peuvent être de diverses natures: il peut s'agir des lois physiques régissant l'évolution du système ou d'expériences menées sur le processus modéliser. [4]

Dans la première partie de ce chapitre, nous rappelons les notions de processus et de modèle, ainsi que divers termes utilisés fréquemment dans le cadre de la modélisation.

II. DÉFINITION D'UN PROCESSUS ET D'UN MODÈLE

II.1. Processus

Un processus est caractérisé par:

- une ou plusieurs grandeurs d'entrée (ou facteurs), qui peuvent être de deux types :
 - des entrées sur lesquelles il est possible d'agir (entrées de commande),
 - des entrées sur lesquelles il n'est pas possible d'agir (perturbations) ; ces dernières peuvent être aléatoires ou déterministes, mesurables ou non mesurables.
- une ou plusieurs grandeurs de sortie, mesurables, qui constituent le résultat du processus,

Les processus peuvent être de toutes natures : physique, chimique, biologique, écologique, financier, sociologique, etc. [5]

II.2. Processus aléatoires

Un processus aléatoire en temps discret est une famille $\{X_k; k \in \mathbb{N}\}$ de vecteurs aléatoires (notée $\{X_k\}$) définies sur un espace probabilisé (Ω, F, P) valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Un processus aléatoire gaussien est un processus aléatoire $\{X_k\}$ tel que pour tout " N " et tout $i_1, \dots, i_N \in \mathbb{N}$

$$\begin{pmatrix} X_{i_1} \\ \vdots \\ X_{i_N} \end{pmatrix}$$

est un vecteur aléatoire gaussien (de dimension $n \times N$).

Deux processus aléatoires $\{X_k\}$ et $\{Y_k\}$ sont indépendants si pour tout N et M et $i_1, \dots, i_N, j_1, \dots, j_M \in \mathbb{N}$ les vecteurs aléatoires

$$\begin{pmatrix} X_{i_1} \\ \vdots \\ X_{i_N} \end{pmatrix} \text{ Et } \begin{pmatrix} Y_{j_1} \\ \vdots \\ Y_{j_M} \end{pmatrix}$$

Sont indépendants.

Un bruit blanc est un processus aléatoire $\{X_k\}$ tel que:

$$E[X_k] = 0, E[X_k X_l^*] = 0 \text{ Si } k \neq l.$$

$\{X_k\}$ Est appelé bruit blanc gaussien lorsque qu'il s'agit d'un processus gaussien et d'un bruit blanc. [6]

II.3. Notion de modèle:

II.3.1. Qu'est ce qu'un modèle ?

Nous nous intéressons ici aux modèles mathématiques, qui représentent les relations entre les entrées et les sorties du processus par des équations. Si ces équations sont algébriques, le modèle est dit *statique*. Si ces équations sont des équations différentielles ou des équations aux différences récurrentes, le modèle est dit *dynamique*, respectivement à *temps continu* ou à *temps discret*. Un modèle est caractérisé par son *domaine de validité*, c'est-à-dire par le domaine de l'espace des entrées dans lequel l'accord entre les valeurs des sorties du processus calculées par le modèle, et leurs valeurs mesurées, est considéré comme satisfaisant compte tenu de l'utilisation que l'on fait du modèle.

Un modèle est la représentation mathématique d'un système physique supposé correspondre au système réel étudié.

Cette définition prouve d'emblée que la connaissance et l'expérience sont les atouts indispensables au modélisateur, puisqu'il établit la représentation mathématique de ce "qu'il croit voir". Dans ces conditions, on cerne davantage la notion limitative de modèle et on conçoit que des hypothèses simplificatrices soient implicitement introduites lors de la phase d'appréciation du dispositif à étudier.

Généralement, la modélisation s'opère suivant deux démarches différentes, selon qu'un système physique, de structure connue, s'adapte ou non au système réel. Dans un cas, on

suppose connue les transformations internes aboutissant à la relation entrée-sortie, dans l'autre, on recherche la structure à partir de l'évolution des grandeurs relevées en entrée et en sortie. [6]

II.3.2. Buts d'une modélisation:

Un modèle peut être utilisé soit:

- pour simuler un processus : à des fins pédagogiques, de détection d'anomalies de fonctionnement, de diagnostic de pannes, de conception assistée par ordinateur, etc.,
- pour effectuer la synthèse d'une loi de commande, ou pour être incorporé dans un dispositif de commande. [5]

II.4. Classe du modèle d'un processus :

La classe de modèles est spécifiée par une structure ou par des propriétés communes des modèles. Cette spécification peut être basée sur des connaissances physiques fournissant des équations mathématiques, qui contiennent toute fois des paramètres inconnus. Les modèles qui en résultent sont dits *modèles semi-physiques*, ou *modèles boîte-grise*.

Quand une telle spécification est impossible par manque de connaissances physiques, la classe de modèles est basée sur des hypothèses génériques, par exemple, la linéarité du système à identifier. Les modèles correspondant sont dits *modèles boîte-noire*.

La spécification de la classe de modèles boîte-noire soulève des problèmes d'ordre théorique et pratique, notamment pour des systèmes non-linéaires. Dans cette thèse nous nous intéressons plutôt aux modèles semi-physiques, car la classe de modèles peut être obtenue grâce à des études sur la physique du phénomène principal concerné.

Quand les données sont disponibles et la classe de modèles est spécifiée, il ne reste qu'à déterminer le "meilleur" modèle parmi cette classe. La signification du "meilleur" est au sens d'un critère choisi, qui évalue quantitativement l'adéquation entre les données et chaque modèle de la classe spécifiée. Les critères couramment utilisés sont basés sur l'erreur de prédiction des modèles, qui correspondent aux méthodes d'identification connues sous le nom commun PEM (Prédiction Error Methods), ce qui fait l'objet de la section suivante. [7]

II.4.1. Modèles de connaissance:

Un modèle de connaissance est un modèle dont les caractéristiques et les équations ont été établies en faisant appel à des modèles plus généraux mettant en œuvre les lois de la physique, de la chimie, de la biologie, de l'économie,...

Les paramètres d'un tel modèle ont alors une interprétation physique directe: température, pression, courant, force ...

Ils sont beaucoup plus riches de signification que les modèles de représentation et contiennent toutes les informations utiles sur le processus étudié. Par contre, il est en général difficiles à déterminer et de mise en œuvre complexe.

II.4.2. Modèles de représentation et modèles de conduite:

Ces modèles ne permettent pas, le plus souvent, d'interprétation physique des phénomènes étudiés. Ils sont constitués d'un ensemble de relations mathématiques qui vont relier dans un domaine d'évolution donné, les différentes variables du processus. Les paramètres de tels modèles peuvent n'avoir aucun sens physique particulier connu:

- Modèles de règles - Modèles fichiers - Modèles entrées-sorties - Modèles d'état - Modèles graphiques. [4]

a) Modèles Polynomiaux:

Le Modèle	La fonction de transfert
AR	$A(q^{-1})y_k = 0$
ARX	$A(q^{-1})y_k = C(q^{-1})v_k$
ARMA	$A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})u_k$
CARMA ou ARMAX	$A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})u_k + C(q^{-1})v_k$
CARIMA ou ARIMAX	$A(q^{-1})y_k = B(q^{-1})u_k + \frac{C(q^{-1})}{\Delta}v_k$

y: sortie; u: commande; v: perturbation ou bruit;

AR: Autoregressive Average; X: eXogenous; MA: Moving Average; C: Controlled;

I: Integrated; [8]

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_n q^{-n};$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_m q^{-m};$$

$$C(q^{-1}) = c_0 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_l q^{-l};$$

$$\Delta = 1 - q^{-1}$$

II.4.3. Modèle mixte:

D'après ce qui a précédé, les approches de connaissance et de représentation sont fondamentalement différentes.

Donc il semble intéressant de rechercher un compromis entre un modèle de connaissance qui fait appel à des techniques de calcul très lourdes mais proche de réalité physique et un modèle de représentation mettent en œuvre des algorithmes rapides, mais bien souvent éloignées de celles-ci.

Tout en se référant à des techniques de résolution efficaces, il convient donc d'apporter le modèle à des connaissances sur la nature physique du signal.

L'ensemble de ces données constituées alors une information à priori qui peut être introduite dans le modèle ou dans la méthode d'identification.

En pratique peu des connaissances à priori sont exploitées, et généralement l'expérimentateur s'arrange pour interpréter à la lumière de certaines intrinsèques du processus générateur du signal, les résultats issus d'une procédure de représentation.

Le lien entre le modèle de connaissance et le modèle de représentation reste encore à parfaire. [3]

III. LES ÉTAPES DE LA CONCEPTION D'UN MODÈLE:

Lors de la conception d'un modèle de connaissance, la relation entre les entrées et la sortie du modèle découle directement de la mise en équation des phénomènes physiques (chimiques, ou autres) qui régissent le fonctionnement du processus. Une fois le modèle obtenu sous forme analytique, des approximations peuvent être faites pour simplifier son expression (par exemple "linéariser" le modèle pour passer d'un modèle non linéaire à un modèle linéaire) si une telle approximation est justifiée.

Dans le cas d'une modélisation de type "boîte noire", la construction du modèle nécessite les trois éléments suivants :

- Une hypothèse sur l'existence d'une relation déterministe liant les entrées à la (ou aux) sortie(s). Cette relation est caractérisée par une fonction appelée *fonction de régression* (ou plus simplement *régression*). L'expression formelle supposée adéquate pour représenter cette relation est appelée *modèle-hypothèse*.
- Une séquence de mesures des entrées et de la sortie du processus.
- Un algorithme d'apprentissage.

Dans la suite de ce paragraphe, nous présentons les différents aspects qui doivent être pris en considération lors du choix d'un modèle-hypothèse.

III.1. Choix du modèle-hypothèse :

Les connaissances dont on dispose a priori sur le processus doivent guider le concepteur dans le choix de la modélisation la plus appropriée (statique ou dynamique, linéaire ou non linéaire, ...). L'élaboration du modèle-hypothèse nécessite d'effectuer les choix suivants :

III.1.1. Modèle statique ou dynamique :

Lorsque l'on cherche à modéliser un processus physico-chimique ou biologique, il est généralement facile de savoir si l'application envisagée nécessite de modéliser la dynamique du processus (c'est-à-dire si l'on doit considérer une échelle de temps petite devant les constantes de temps du processus) ou si une modélisation statique suffit.

Les modèles dynamiques sont de deux types:

☒ **Modèles non Paramétriques:**

Un espace décrit par un nombre variable de paramètres (e.g. les polynômes à n variables). Pour ces modèles on détermine une suite des points théoriquement infinie (qu'on limite évidemment). Par exemple: réponse fréquentielle, réponse à un échelon...

☒ **Modèle Paramétrique:**

Un nombre fixe de paramètres réels (e.g. les polynômes de degré d). Dans ce cas on détermine un ensemble fini de paramètres. Ce qui présente un avantage, mais on doit au préalable à effectuer une hypothèse sur l'ordre du processus (ce qui fixe le nombre de paramètres à déterminer). Il est évident qu'un mauvais choix pourra conduire à un modèle erroné. Par exemple: fonction de transfert, équations différentielles...

Donc nous intéresserons, par la suite à l'identification des modèles dynamiques paramétriques échantillonnés qui sont les plus appropriés pour la conception et l'ajustement des systèmes numériques de commande. [3]

III.1.2. Modèle linéaire ou non linéaire :

Il n'est pas douteux que la plupart des processus que l'on peut rencontrer nécessiteraient des modèles non linéaires s'il fallait les décrire de manière précise dans la totalité de leur domaine de fonctionnement : la plupart des modèles linéaires constituent des approximations valables dans un domaine plus ou moins restreint. Il est donc important de pouvoir élaborer un modèle non linéaire pour rendre compte du comportement d'un

processus, non seulement autour de ses points de fonctionnement "habituels", mais également lors des passages d'un point de fonctionnement à un autre. [5]

III.1.3. Modèle à temps continu:

Dans ce type de modèle, le temps est une variable qui évolue continûment sur un intervalle $\tau \subset \mathbb{R}$ prenant en croissant toutes les valeurs situées dans cet intervalle.

III.1.4. Modèle à temps discontinu ou discret:

Ce type de modèle est utilisé soit lorsque le processus étudié a naturellement un mode d'évolution séquentiel, soit lorsqu'on a adopté une représentation du processus qui correspond à une observation des variables d'état ou de sortie à des instants discrets t_k du temps avec $k \in \mathbb{Z}$. [4]

III.1.5. Modèle entrée-sortie ou modèle d'état :

Dans le cas où l'on opte pour une modélisation dynamique, deux représentations sont possibles pour le modèle : il s'agit de la représentation d'état ou de la représentation entrée-sortie. L'état d'un processus est défini comme la quantité d'information minimale nécessaire pour prédire son comportement, étant données les entrées présentes et à venir. Il s'agit généralement d'un vecteur de grandeur égale à l'ordre du modèle. La représentation entrée-sortie est un cas particulier de la représentation d'état où le vecteur des états est constitué par la sortie et ses valeurs retardées dans le temps. Si le but de la modélisation est de prédire le comportement entrée-sortie du processus, il existe généralement une infinité de représentations d'état (au sens d'états ayant des trajectoires différentes) solutions du problèmes. En revanche, la représentation entrée-sortie est unique.

III.1.6. Présence de perturbations déterministes :

Lorsque l'on cherche à réaliser un modèle dynamique, les perturbations déterministes peuvent être modélisées par une entrée supplémentaire (échelon, signal carré, sinusoïde). En particulier, si le modèle est construit pour la synthèse d'une loi de commande, la prise en considération de l'existence d'une perturbation pendant la phase de modélisation peut améliorer les performances de la commande pour le rejet de cette perturbation. Par exemple, il est proposé dans une approche qui consiste à considérer la perturbation comme la sortie d'un processus. La modélisation de ce processus a pour effet d'introduire de nouvelles variables d'état, donc d'augmenter l'ordre du modèle.

III.1.7. Présence d'un bruit :

Lorsque l'on cherche à réaliser un modèle dynamique, une perturbation de type "bruit" est modélisée par une séquence de variables aléatoires. Un bruit peut agir de différentes manières sur un processus. On distingue notamment le bruit de sortie (bruit additif qui affecte la mesure de la sortie du processus), et le bruit d'état (bruit additif qui affecte l'état du processus). Comme, en général, on ne connaît pas avec précision la nature du bruit qui affecte le processus, on doit effectuer des hypothèses sur celle-ci ; on déduit de celles-ci la structure du modèle-hypothèse, et l'algorithme utilisé pour l'ajustement des paramètres. Une hypothèse erronée peut dégrader considérablement les performances du modèle. Ces problèmes ont été très largement étudiés dans le cas de la modélisation linéaire. [3]

III.2. Du modèle hypothèse au prédicteur ou au simulateur:

Un modèle-hypothèse ayant été choisi, l'étape suivante consiste à établir l'expression du prédicteur théorique, c'est-à-dire l'expression de la prédiction de la sortie du processus à l'instant $n+d$ en fonction des données disponibles à l'instant n (entrées et sorties du processus et/ou du prédicteur à l'instant n et aux instants antérieurs). Enfin, la dernière étape consiste à établir l'expression du prédicteur (ou du simulateur) proprement dit : dans le cas d'une modélisation "boîte noire", ce prédicteur utilise une fonction paramétrée, dont on estime les paramètres, à partir de mesures effectuées préalablement sur le processus, de telle manière qu'il constitue la meilleure approximation possible du prédicteur théorique. A l'issue de la procédure d'estimation des paramètres (apprentissage), il faut évaluer la performance du prédicteur (ou du simulateur).

III.2.1 Présentation de quelques modèles-hypothèses et de leurs prédicteurs associés:

Nous présentons dans ce paragraphe quelques exemples de modèles-hypothèses ainsi que les prédicteurs qui leur sont associés, pour l'élaboration d'un modèle dynamique entrée-sortie. L'un des principaux paramètres qui interviennent dans le choix d'un modèle-hypothèse est la présence d'un bruit et la manière dont il agit sur le processus. Pour ceci, nous allons considérer deux classes de modèles-hypothèses: le modèle-hypothèse déterministe et des modèles-hypothèses non déterministe (faisant intervenir un bruit dans la modélisation du processus).

III.2.2 Modèle-hypothèse déterministe:

On considère qu'aucun bruit n'agit sur le processus. On propose un modèle-hypothèse déterministe ayant l'expression suivante :

$$y_p(n) = f(y_p(n \pm 1), \dots, y_p(n \pm N_s), u(n \pm 1), \dots, u(n \pm N_e)) \quad (\text{Eq.I.1})$$

Où $y_p(n)$ est la sortie mesurée du processus à l'instant n , N_s est l'ordre du modèle et N_e la mémoire sur l'entrée externe u . f est une fonction non linéaire dont on suppose qu'elle existe, et qu'elle constitue une représentation mathématique du comportement du processus. La forme prédicteur théorique associée à ce modèle-hypothèse est la suivante :

$$y_p(n) = f(y_p(n \pm 1), \dots, y_p(n \pm N_s), u(n \pm 1), \dots, u(n \pm N_e)) \quad (\text{Eq.I.2})$$

Où $y(t)$ est la prédiction de la sortie du processus calculée par la forme prédicteur théorique. Étant donné que nous considérons que le processus n'est soumis à aucun bruit, la forme prédicteur théorique doit calculer à tout instant $y(t) = y_p(t)$. Le prédicteur dont on effectuera l'apprentissage aura pour expression :

$$y(n) = \psi(y_p(t \pm 1), \dots, y_p(t \pm N_s), u(t \pm 1), \dots, u(t \pm N_e)) \quad (\text{Eq.I.3})$$

Où ψ est une fonction paramétrée, dont les paramètres doivent être estimés pour qu'elle approche au mieux la fonction f dans le domaine de fonctionnement considéré. Cette optimisation s'entend au sens de la minimisation de la fonction de coût empirique, que l'on appellera dorénavant fonction de coût et que l'on notera par J .

Si l'on est intéressé par la construction d'un modèle de simulation, un autre prédicteur peut être considéré :

$$y(n) = \psi(y_p(t \pm 1), \dots, y_p(t \pm N_s), u(t \pm 1), \dots, u(t \pm N_e)) \quad (\text{Eq.I.4})$$

La seule différence avec la forme prédicteur de la relation (Eq.I.3) réside dans le fait que les entrées d'état du modèle sont les sorties retardées *du modèle*, non celles *du processus*.

III.2.3 Modèles-hypothèses non déterministes:

On désigne par “modèles-hypothèses non déterministes” des modèles-hypothèses qui supposent l'existence d'un bruit agissant sur le processus à modéliser. On peut envisager plusieurs hypothèses concernant la manière dont le bruit agit sur le processus.

a) L'hypothèse “Bruit de sortie”:

L'hypothèse “Bruit de sortie” (Output Error en anglais) consiste à considérer qu'un bruit agit sur la sortie du processus. L'expression du modèle-hypothèse est :

$$\begin{cases} x(n) = f(x(n \pm 1), \dots, x(n \pm N_s), u(n \pm 1), \dots, u(n \pm N_e)) \\ y_p(n) = x(n) + w(n) \end{cases} \quad (\text{Eq.I.5})$$

Où $\{w(n)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance σ^2 . La forme prédictiveur théorique associée à ce modèle-hypothèse est donnée par l'expression suivante :

$$y(n) = f(y(n \pm 1), y(n \pm 2), \dots, y(n \pm N_s), u(n \pm 1), \dots, u(n \pm N_e)) \quad (\text{Eq.I.6})$$

Le prédictiveur réel associé a pour expression :

$$y(n) = \psi(y(n \pm 1), y(n \pm 2), \dots, y(n \pm N_s), u(n \pm 1), \dots, u(n \pm N_e)) \quad (\text{Eq.I.7})$$

Où ψ est une fonction réalisée à l'aide d'une fonction paramétrée. C'est donc un modèle dont les entrées d'état sont ses propres sorties retardées, et non pas les sorties du processus.

Si, après apprentissage, la fonction était identique à la fonction f , l'erreur de prédiction commise par ce prédictiveur serait une séquence aléatoire de mêmes caractéristiques que w .

b) L'hypothèse "Bruit d'état":

L'hypothèse "Bruit d'état" (Equation Error en anglais) consiste à considérer qu'un bruit agit sur l'état du processus. Ce modèle-hypothèse a la forme suivante :

$$y_p(n) = f(y_p(n \pm 1), y_p(n \pm 2), \dots, y_p(n \pm N_s), u(n \pm 1), \dots, u(n \pm N_e)) + w(n) \quad (\text{Eq.I.8})$$

Où $\{w(n)\}$ est une séquence de variables aléatoires indépendantes de moyenne nulle et de variance σ^2 . La forme prédictiveur théorique associée à ce modèle-hypothèse est donnée par l'expression suivante:

$$y_p(n) = f(y_p(n \pm 1), y_p(n \pm 2), \dots, y_p(n \pm N_s), u(n \pm 1), \dots, u(n \pm N_e)) \quad (\text{Eq.I.9})$$

Le prédictiveur réel associé est de la forme:

$$y_p(n) = \psi(y_p(n \pm 1), y_p(n \pm 2), \dots, y_p(n \pm N_s), u(n \pm 1), \dots, u(n \pm N_e)) + w(n) \quad (\text{Eq.I.10})$$

Où est une fonction paramétrée. Si ψ était identique à f , l'erreur de prédiction effectuée par ce prédictiveur serait une séquence de variables aléatoires de mêmes caractéristiques que le bruit w . [5]

III.3. Adaptation et simplification des modèles:

Le choix d'un modèle «optimum» diffère considérablement en fonction de l'objectif. Nous avons vu par exemple que pour un processus non linéaire, le modèle utilisable dans un fonctionnement en régulateur autour d'un point de consigne peut parfois

être choisi linéaire, par contre si on s'intéresse au comportement de processus pendant la phase d'évolution qui permis d'atteindre ce régime permanent, le choix de modèle précédant pourrait conduire à des résultats aberrants.

Dans même pour un processus possédant des variable de dynamiques séparées, par exemple, une variable lente et une variable rapide, il peut être intéressant et même parfois nécessaire d'utiliser différents modèles suivant qu'on s'intéresse aux variations lentes ou rapides du processus. Dans un problème de régulation, il n'est pas toujours nécessaire de conserver tous les modes d'un modèle linéaire d'un processus dont la présence peut parfois compliquer le calcul pour autant permettre, compte tenu de la précision de l'identification et de celle de comportement souhaité, d'accroître les performances du processus réel. D'autre part, il s'avère souvent très intéressant de pouvoir passer d'un modèle continu à un modèle discret ou d'un modèle de type matrice de transfert à un modèle d'état, la forme de ce dernier n'étant pas elle même indifférente. [4]

III.4. Représentation des processus:

Les modèles discrets linéaires sont très adaptés au procédé technologique que l'on peu mesure régulièrement dans le temps et qui sont de plus en plus suivent commandé par des calculateurs numériques.

Un modèle discret linéaire est d'écrit dans le cas général par :

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_1 u(k-d-1) + \dots + b_m u(k-d-m) \quad (\text{Eq.I.11})$$

Où $u(k)$ et $y(k)$ sont des séquences d'entrée et de sortie respectivement et où d correspond à un retard, multiple entier de la période d'échantillonnage, pris en compte à travers une translation des données de l'entrée.

Nous avons que $y(k-i) = z^{-i} y(k)$; $u(k-d-i) = z^{-d} z^{-i} u(k)$

L'équation (Eq.I.11) peut se récrire sous la forme:

$$A(z^{-1})y(z) = z^{-d} B(z^{-1})u(z) \quad \text{Où écrire sous la forme} \quad y(z) = \frac{z^{-d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} u(z)$$

Où $A(z^{-1})$ et $B(z^{-1})$ sont des polynômes de degrés n et m respectivement, qui s'écrivent sous les formes développées suivants:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} \\ B(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_m z^{-m} \end{aligned} \quad (\text{Eq.I.12})$$

$z^{-d} B(z^{-1})/A(z^{-1})$ Est un bloc déterministe linéaire à paramètres constants liant la sortie à l'entrée. [3]

IV. L'IDENTIFICATION :

Une définition clair et précise de l'identification d'un système est donnée comme suit. «L'identification d'un système est la détermination sur la base de l'observation des entrées et des sorties caractérisant ce système, d'un modèle mathématique appartenant à une classe des modèles donnés. Ce dernière, soumis ou mêmes signaux de test (entrées), étant alors équivalent ou système donné ». [1]

L'identification consiste donc à déterminer grâce à des mesures expérimentales des signaux d'entrée et de sortie, la structure et les valeurs des paramètres du modèle (fonction de transfert) représentant le mieux possible le procédé. [4]

Certains paramètres ou certaines fonctions intervenant dans ces modèles sont inconnus, ou plutôt mal connus (coefficients de diffusion dans des équations paraboliques, sources non linéaires dans des équations elliptiques, conditions initiales ou conditions aux limites, etc...).

On se propose d'identifier ces paramètres ou fonctions à partir d'observations expérimentales :

Ce sont des problèmes inverses (par opposition à la résolution des équations elles-mêmes qui constitue le problème direct).

La résolution de ces problèmes est une aide précieuse pour le physicien qui, en général, possède un modèle de son système, mais avec une grande incertitude sur ses paramètres. La résolution du problème inverse lui fournit donc une information primordiale.

» Le problème de la détermination des lois physiques constitue un problème de modélisation qui dans certains cas, lorsque les paramètres sont connus avec suffisamment de précision, peut suffire.

» Le problème d'identification, que nous étudions consiste à déterminer les paramètres caractéristiques d'un modèle externe ou d'un modèle interne à partir d'un ensemble de mesure entrée-sortie du processus. Il s'agit donc de déduire d'une expérience, les valeurs numériques des paramètres d'un modèle du processus.

» Le problème d'identification est généralement résolu à l'aide de trois ensembles:

- **Les données issues de l'expérience:**

Le problème consiste à choisir une expérience donnant le maximum d'information.

Les données peuvent être enregistrées par des observations passives du système à identifier, ou par des expérimentations conçues pour réaliser l'identification dans de bonnes conditions. [9]

- **Les modèles:**

Le choix d'un modèle candidat peut se faire à partir des lois physiques régissant le système dont les paramètres sont peu connus ou mal connus (boîtes grises), ou bien à partir du résultat de l'expérience sans connaissance a priori (boîtes noires).

- **Les algorithmes d'identification:**

Ils permettent à partir des données, de préciser les paramètres du modèle candidat.

► Le choix d'un élément dans chacun de ces ensembles conduit à une identification d'un système qui se déroule en trois étapes.

- » **estimation structurelle:**

Cette étape, liée au choix d'un modèle, consiste à déterminer les paramètres de structure;

- » **estimation paramétrique:**

Il faut déterminer les valeurs numériques des coefficients de la structure choisie; le choix d'un critère que l'algorithme d'identification doit minimaliser, permet de juger de la confiance à attribuer à ces valeurs;

- » **validation du modèle:**

Le modèle mathématique obtenu n'est valable, en tout rigueur, que pour l'expérience utilisée; il faut donc vérifier s'il est compatible avec l'utilisation que l'on en fera.

L'identification ne se limite pas à une simple estimation de paramètre, mais toute une démarche où l'automaticien met en œuvre son expérience pour déterminer le meilleur modèle relativement à son hypothèse structurelle de départ et à l'utilisation qu'il fera du modèle choisie. Il faut donc fournir des résultats complémentaires permettant de juger de la qualité du modèle. A cet effet des tests de validation sont prévus.

Si ces tests s'avèrent négatifs, il faut choisir une méthode d'estimation ou adopter une nouvelle structure du modèle, ou même dans le cas le plus défavorable, refaire l'expérience s'il y a un manque d'informations.

L'identification d'un système est donc une procédure interactive (Fig. II.4) où les choix doivent être remis en question lors d'un échec de la validation du modèle. La plupart

des méthodes demandent la résolution d'un système linéaire dont les coefficients dépendent des données. [4]

De nombreuses méthodes d'identification sont précisées la suite correspondant le plus souvent à l'un des schémas (Fig. I.1 & I.2).

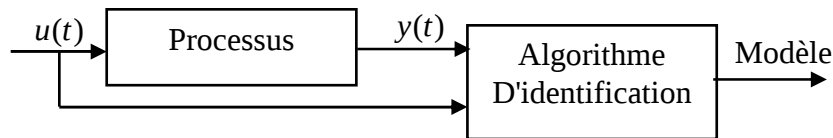


Fig. I.1 Identification à partir du comportement entrée-sortie

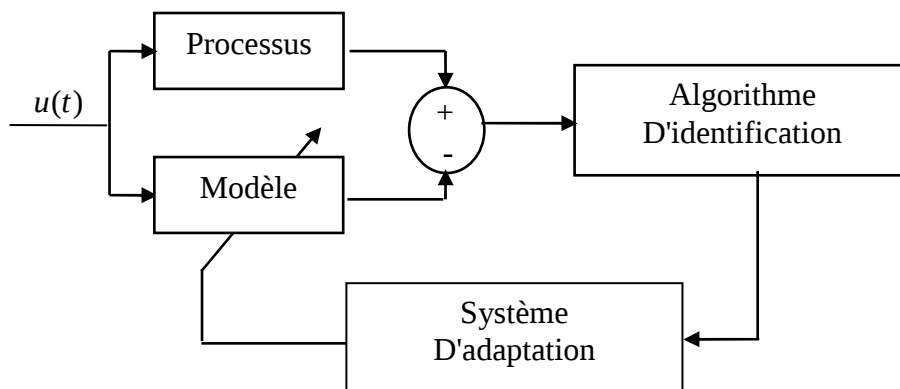


Fig. I.2 Identification de type paramétrique

IV.1. Importance et utilisé de l'identification:

Les systèmes abondent dans l'environnement de l'homme. Toutes les choses qui nous entourent (la machine, l'économie, la plante, la société, etc.) y compris nous même les êtres humains, peuvent être étudiées comme un système à savoir modéliser c'est-à-dire réduit à une forme de répercussion plus abstrait et moins physique du système. L'analyse du modèle de représentation permet d'obtenir des meilleures connaissances sur le système et de le corriger par la suite dans le sens désiré.

Les modèles mathématiques développés à travers les techniques d'identification doivent être adéquates et robustes car ils peuvent être utilisés pour :

- L'obtention d'une meilleure connaissance du procédé.
- L'obtention des propriétés du modèle par étude des simulations temporelles et des propriétés structurelles (ordre, commandabilité, observabilité, stabilité) c'est l'analyse de modèle.

- La conception et la mise en œuvre d'un système performant de régulation.
- Le choix entre un ou plusieurs algorithmes de commande suivant les performances requises et test du schéma adopté par simulation de boucle fermée, constituée du modèle initial linéaire et de régulateur :

C'est la synthèse de commande.

- ❖ La prédiction des signaux.
- ❖ L'optimisation du comportement du procédé.
- ❖ Le calcul des variables expérimentalement inaccessibles.

IV.2. Principe de l'identification de procédés:

L'identification de systèmes, ou tout simplement identification, désigne l'ensemble des méthodologies pour la modélisation mathématique de systèmes à partir de données expérimentales. En des termes plus techniques, l'identification a été définie par comme la détermination, à partir des signaux d'entrée et de sortie, du modèle mathématique d'un système parmi une classe de modèles pré spécifiée. [8]

La disponibilité de calculateurs numérique a permis la mise en œuvre d'une approche moderne et performante pour l'identification de modèles paramétriques échantillonnés.

Cette approche est illustrée dans la figure (I.3). Le procédé à identifier est représentée par un modèle échantillonné à paramètre ajustable, ces deux derniers sont excités par la même entrée $u(k)$.

L'erreur entre la sortie du procédé à l'instant k , $y(k)$ est la sortie prédite par la modèle $\hat{y}(k)$ (erreur de prédiction) notée $e(k)$, et utilisée par un algorithme d'adaptation paramétriques qui à chaque instant d'échantillonnage va modifier (piloter) les paramètres du modèle afin de minimiser cette erreur. Une fois les paramètres estimés, un test de validation sur l'erreur de prédiction dans être fait afin de choisir le meilleur modèle, car ce test nous donne une idée sur la qualité de l'estimation.

Notons que cette approche moderne pour l'identification des modèles classiques et offre donc les possibilités suivantes :

- ♦ plus grande précision.
- ♦ utilisation des signaux d'excitation extrêmement faibles (qualité très appréciable en pratique).
- ♦ identification des modèles de perturbation.

- ♦ modélisation des bruits en vue de leur suppression.
- ♦ validation des modèles.

Un des éléments clés pour la mise en œuvre de cette approche est l'algorithme d'adaptation paramétrique (A.A.P) qui pilote les paramètres du modèle ajustable de pré-diction à partir des informations recueillies sur le système à chaque bas d'échantillonnage.

Cet algorithme à une structure (récursive), c'est-à-dire que la nouvelle valeur de chaque paramètre est égale à la valeur précédant plus un terme de correction qui dépendra des dernières mesures.

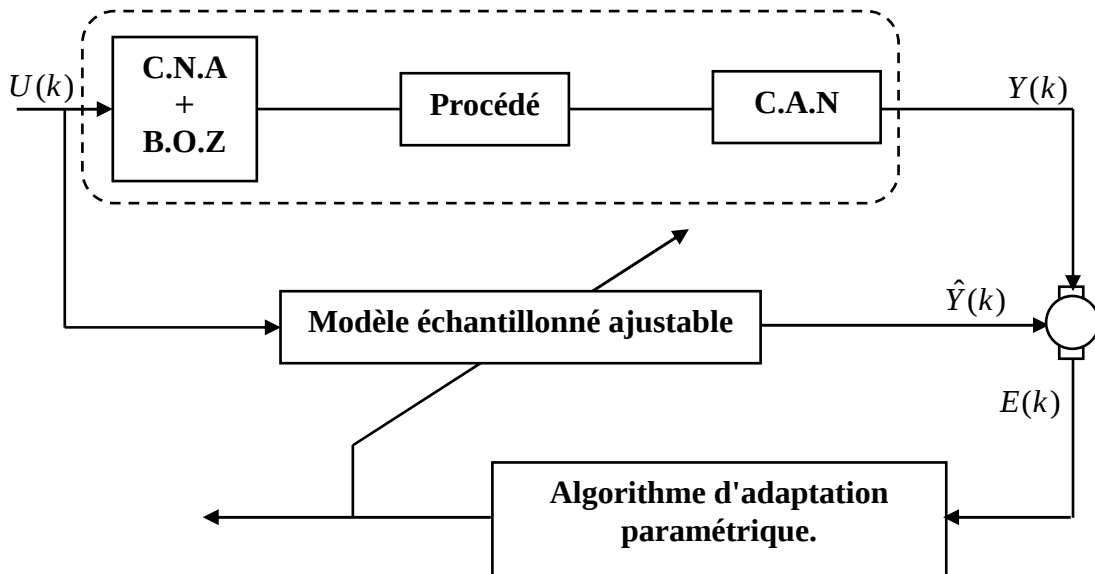


Fig.I.3 Principe de l'estimation des paramètres.

On définit en général un vecteur des paramètres dont les composantes sont les différents paramètres qui doivent être identifiés. Les algorithmes d'adaptation paramétrique ont tous la structure ci-après:

$$\begin{bmatrix} \text{Nouvelle estimation des} \\ \text{paramètres} \\ \text{(vecteur)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Estimation précédente des} \\ \text{paramètres} \\ \text{(vecteur)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Gain d'adaptation} \\ \text{(Gain)} \\ \text{(Scalaire)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{Fonction des mesures} \\ \text{(vecteur)} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \text{Fonction de l'erreur de} \\ \text{prédiction} \\ \text{(Scalaire)} \end{bmatrix}$$

Le vecteur des fonctions des mesures s'appelle aussi le « vecteur des observations ». Indiquons qu'il existe aussi des algorithmes non récursifs l'identification paramétriques

(qui traité en bloc les fichiers entrée/sortie obtenus sur un horizon de temps) par rapport à ces techniques d'identification récursive offrent les avantages suivants

- Obtention d'une estimation du modèle au fur et à mesure que le procédé évolue.
- Compression importante des données, car les algorithmes récursifs traitent à chaque instant qu'une paire entrée/sortie au lieu de ensemble des données entrée/sortie.
- Mise en œuvre aisée sur micro-ordinateur.
- Possibilité de réalisation de système d'identification en temps réel.
- Possibilité de poursuite des paramètres de système variable dans le temps.

Il est important de souligner que les méthodes d'identification, utilisant cette approche (A.A.P), apparaissent comme une procédure itérative car le calcul servant pour l'ajustement du modèle est récurrent.

IV.3. Méthodes d'identification:

Les différentes classes du modèle permettent de distinguer les méthodes d'identification qui sont en générale:

- ❖ Méthodes de base « classiques ».
- ❖ Méthodes de modèle « modernes ».

IV.3.1. Méthodes classiques:

Cette méthode est faite pour déduire des modèles paramétriques à partir des modèles non paramétriques. Initialement les modèles paramétriques sont continus.

Cette méthode a été étendue pour l'identification des modèles échantillonnés. On choisit un type, à partir de la forme de la réponse du procédé à un échelon, et on détermine graphiquement les paramètres de ce modèle avec la connaissance de la fréquence d'échantillonnage, donc, on peut connaître le modèle échantillonné correspondant à l'aide des tables.

Cette méthode a plusieurs inconvénients:

- Faible précision.
- Ne permet pas de modélisation.
- Procédure longue.
- Signaux de test d'amplitude importante.

IV.3.2. Méthodes modernes:

Les calculateurs numériques donnent des algorithmes d'estimation automatique des paramètres des modèles échantillonnés de procédé.

Des algorithmes d'identification performants ayant une formulation récursive adaptée aux problèmes d'identification en temps réel et à leur en œuvre sur micro-ordinateur ont été développés. Le fait que ces méthodes peuvent opérer avec des signaux d'excitation extrêmement faible une qualité appréciable en pratique (fig.I.4).

Cette approche moderne pour l'identification des modèles de procédé élimine tout les défauts des méthodes classique et offre aussi d'autres possibilité telle que:

- 1) Identification des modèles de perturbation.
- 2) Modélisation des bruits en une de leur suppression.
- 3) Détection et mesure des fréquences de vibration.
- 4) Suivi des variations des paramètres de procédés en temps réel permettent un ajustement des régulateurs pendant le fonctionnement. [3]

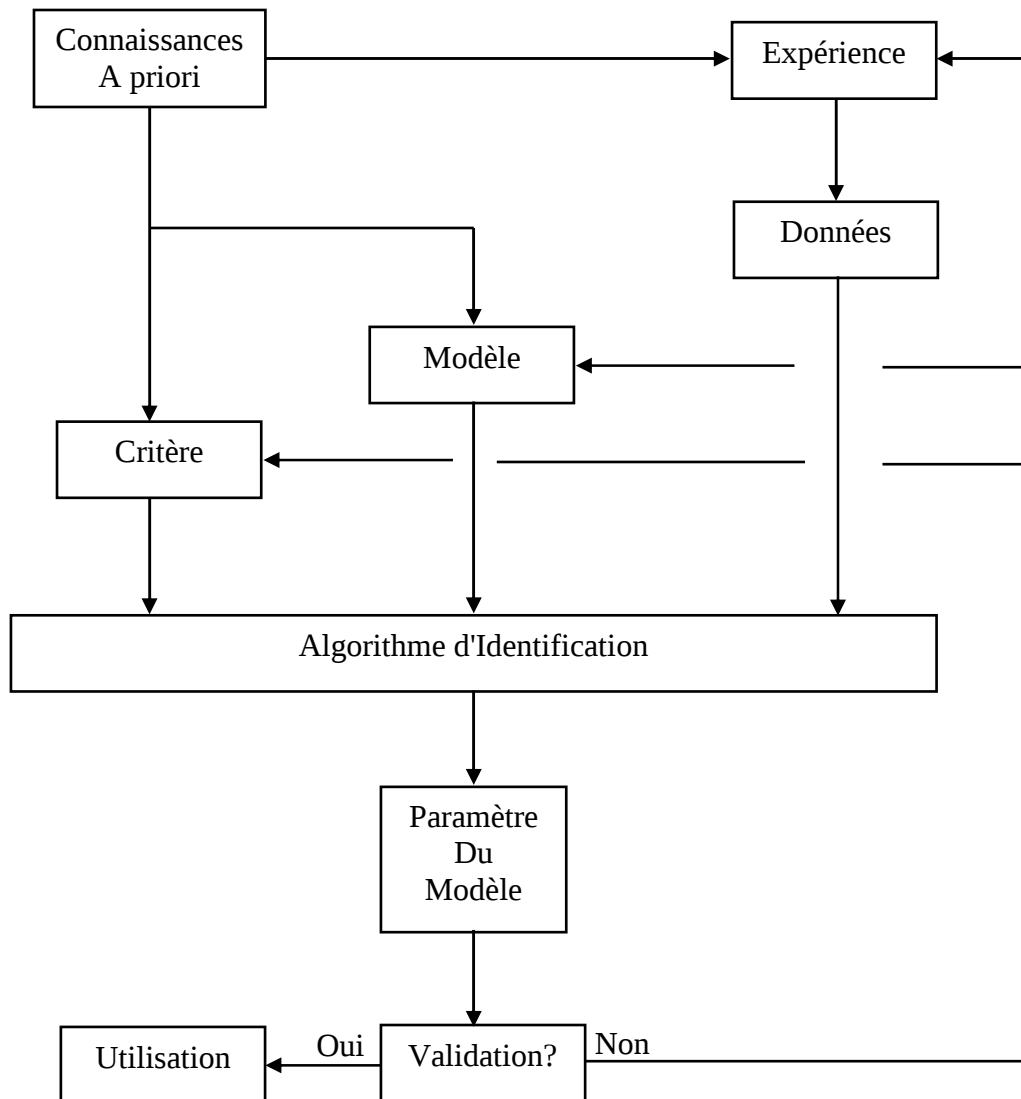


Fig.II.4. Identification d'un système.

V Conclusion :

L'ensemble des méthodes de commande de processus nécessite connaissance d'un modèle mathématique du système .

L'identification des système à pour but de le déterminer parmi l'ensemble des modèles mathématique étudié .

Dans la première partie de ce chapitre nous rappelons le notion de modélisation de processus et dans la 2eme partie nous rappelons le notion de L'identification de paramètre de processus

I. PRINCIPE GENERAL

les systèmes à temps discret peuvent être placés sous forme de représentation d'état. pour la plupart, valables. Deux approches traditionnelles sont souvent étudiées pour aborder la représentation d'état des systèmes discrets: La discrétisation des équations d'état continues et la représentation directe par analogie avec la représentation d'état en temps continu. C'est cette deuxième approche que nous avons privilégiée car elle permet de généraliser très rapidement les propriétés déjà démontrées.

I.1. Variables d'état en temps discret

Nous avons proposé des schémas fonctionnels de systèmes ne comportant que des intégrateurs et des gains et nous avons vu qu'il était possible, à partir de tels éléments, de reconstruire n'importe quelle fonction de transfert. En temps discret, il est possible de décomposer un système en utilisant des gains et des opérateurs dits de décalage. De fonctions de transfert Z^{-1} . La figure II.1 présente un exemple de système composé de tels éléments. On peut, dans un tel modèle, définir des variables d'état, que nous noterons $x_i(k)$ et qui représentent, la valeur des signaux x_i aux instants kT_e , T_e étant la période d'échantillonnage de tous les signaux présents dans le système.

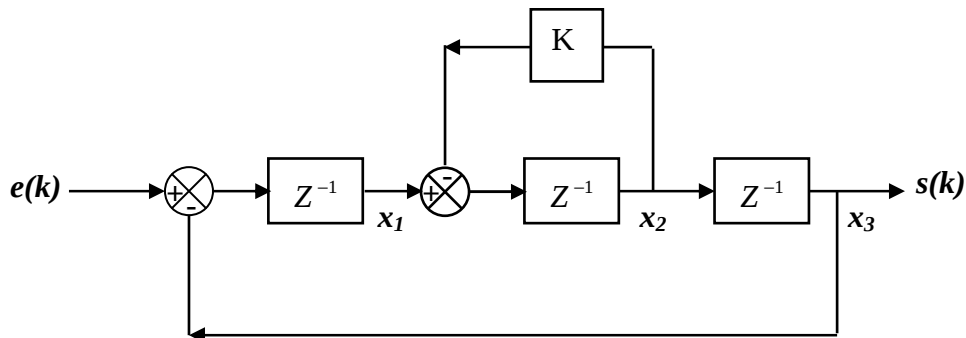


Fig. I.1 Représentation d'état en temps discret

I.2. Modélisation du fonctionnement du système

Dans une représentation en temps discret, La possibilité d'exprimer l'état du système à un instant donné en fonction du signal d'entrée et en fonction de son < passé >, autrement dit, de son état précédent, prend tout son sens. La forme générale pour un système mono-entrée et mono- sortie des équations d'état en temps discret correspond donc à :

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = [\underline{A}]\underline{x}(k) + (\underline{B})e(k) \\ s(k) = (\underline{C})\underline{x}(k) \end{cases} \quad (\text{Eq.II.1})$$

La matrice de commande $[\underline{A}]$ est une matrice carrée, $(\underline{B})$ est un vecteur colonne et $(\underline{C})$ est un vecteur ligne.

Remarque: pour un système d'ordre n , c'est-à-dire possédant n variables d'état, la première équation, dite de commande, correspond à un système de n équations:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) + \dots + a_{1n}x_n(k) + b_1e(k) \\ x_2(k+1) = a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + \dots + a_{2n}x_n(k) + b_2e(k) \\ \vdots \\ x_n(k+1) = a_{n1}x_1(k) + a_{n2}x_2(k) + \dots + a_{nn}x_n(k) + b_ne(k) \end{cases} \quad (\text{Eq.II.2})$$

Si le système possède plusieurs entrées et plusieurs sorties, on retrouve une écriture similaire ; soit n le nombre de variables d'état, m le nombre d'entrées et p le nombre de sorties. Dans ces conditions, la matrice de commande est toujours une matrice $n \times n$, $[\underline{B}]$ est une matrice $n \times m$ et $[\underline{C}]$ est une matrice $p \times n$.

Pour être complet, il faut tenir compte d'une possible relation directe entre entrées et sorties. La matrice $[\underline{D}]$, de dimensions $m \times p$ représente ce lien. Signalons pour finir que les coefficients des différentes matrices peuvent aussi être variables dans le temps (c'est-à-dire s'exprimer en fonction de k).

$$\text{On a alors : } \begin{cases} \underline{x}(k+1) = [\underline{A}(k)]\underline{x}(k) + [\underline{B}(k)]e(k) \\ s(k) = [\underline{C}(k)]\underline{x}(k) + [\underline{D}(k)]e(k) \end{cases} \quad (\text{Eq.II.3})$$

on adopte fréquemment la représentation schématique de la figure II.2 pour illustrer cette modélisation. Attention dans cette représentation, les signaux sont en réalité des vecteurs de signaux à temps discret.

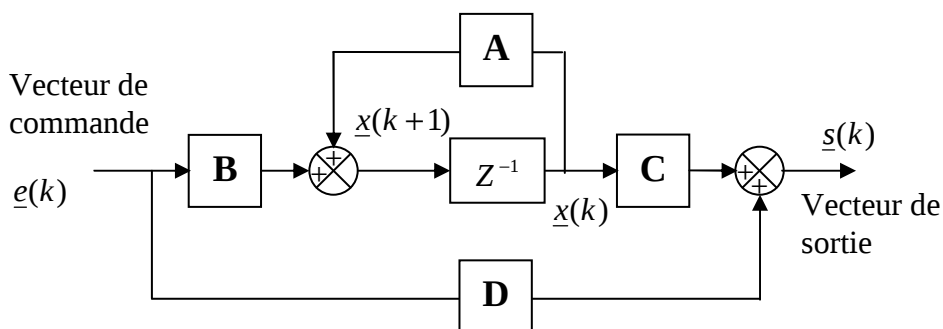


Fig. II.2 Représentation schématique d'une modélisation d'état en temps discret

Si les coefficients des différentes matrices sont constants, le système est dit invariant.

II. RESOLUTION DES EQUATIONS D'ETAT

Nous nous limitons ici à étude des systèmes invariants possédant une seule entrée et une seule sortie. Formulons l'hypothèse que l'état du système à l'instant 0 est connu et que la suite d'échantillons d'entrée l'est également entre l'instant 0 et l'instant $k_0 - 1$.

Résoudre les équations d'état revient à rechercher l'état du système à l'instant k_0 . Comme cet état sera déterminé sans tenir compte de la valeur de l'échantillon d'entrée à cet instant, on parle ici de prédiction de l'état du système.

II.1. Prédiction de l'état du system à UN instant quelconque

Procédons par itérations successives. On a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}(1) = [A]\underline{x}(0) + (\underline{B})e(0) \\ \underline{x}(2) = [A]\underline{x}(1) + (\underline{B})e(1) \\ \vdots \\ \underline{x}(i) = [A]\underline{x}(i-1) + (\underline{B})e(i-1) \\ \vdots \\ \underline{x}(k_0 - 1) = [A]\underline{x}(k_0 - 2) + (\underline{B})e(k_0 - 2) \\ \underline{x}(k_0) = [A]\underline{x}(k_0 - 1) + (\underline{B})e(k_0 - 1) \end{array} \right.$$

Soit : $\underline{x}(k_0) = [A]\{[A]\underline{x}(k_0 - 2) + (\underline{B})e(k_0 - 2)\} + (\underline{B})e(k_0 - 1)$

D'où : $\underline{x}(k_0) = [A]^2 \underline{x}(k_0 - 2) + [A](\underline{B})e(k_0 - 2) + (\underline{B})e(k_0 - 1)$

En remplaçant successivement les $\underline{x}(i)$, on obtient :

$$\underline{x}(k_0) = [A]^{k_0} \underline{x}(0) + \sum_{k=0}^{k_0-1} [A]^{k_0-1-k} (\underline{B})e(k)$$

Remarque: l'expression ainsi mise en évidence est tout a fait comparable avec celle que nous avons trouvée en temps continu. La matrice de transition est égale à $[A]^{k_0}$ et se calcule donc sans aucune difficulté.

Le principe des itérations successives est très intéressant à utiliser dans le cas où l'on recherche l'évolution de l'état du système pour tout instant sur l'intervalle $[0, k_0]$.

III. COMMANDABILITE D'UN SYSTÈME A TEMPS DISCRET

La commandabilité des systèmes à temps discret s'étudie exactement de la même manière que pour systèmes à temps continu.

III.1. Accessibilité

Un système est dit accessible l'état $\underline{x}(k_0)$ si il est possible de déterminer une suite d'échantillons d'entrée $e(k)$ sur l'intervalle $[0, k_0 - 1]$ de manière à amener le système de état $\underline{x}(0) = \underline{0}$ vers l'état $\underline{x}(k_0)$.

Si un système est accessible quel que soit $\underline{x}(k_0)$, il est dit complètement accessible.

Remarque: les notions d'accessibilité, de commandabilité et de gouvernabilité sont encore ici, généralement confondues.

III.2. Critère de commandabilité

Un système est complètement accessible et complètement commandable si et seulement si les vecteurs $(\underline{B}), [A](\underline{B}), [A]^2(\underline{B}), \dots, [A]^{n-1}(\underline{B})$ sont Linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante :

On définit la matrice de commandabilité ou de gouvernabilité par la matrice formée des n vecteurs colonnes $(\underline{B}), [A](\underline{B}), [A]^2(\underline{B}), \dots, [A]^{n-1}(\underline{B})$:

$$[C]_{([A](\underline{B}))} = [(\underline{B}) \quad [A](\underline{B}) \quad [A]^2(\underline{B}) \quad \dots \quad [A]^{n-1}(\underline{B})] \quad (\text{Eq.II.4})$$

La paire $[A], (\underline{B})$ est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est régulière autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

IV. OBSERVABILITE DE L'ETAT D'UN SYSTEME

L'observabilité des systèmes à temps discret s'étudie exactement de la même manière que pour ceux à temps continu.

IV.1 Définition:

Un système est dit observable a un instant $k_2 T_e$, Si la connaissance du signal d'entrée et du signal de sortie sur un intervalle de temps $[k_1 T_e, k_2 T_e]$ permet de calculer l'état du système a l'instant $k_2 T_e$.

Si un système est observable quel que soit l'instant $k_2 T_e$, il est dit complètement observable

IV.2 Critère d'observabilité :

Un système est complètement observable si et seulement si les vecteurs colonnes : $(\underline{C}), [A^T](\underline{C})^T, [A^T]^2(\underline{C})^T, \dots, [A^T]^{n-1}(\underline{C})^T$ sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante: on définit la matrice d'observabilité par la matrice formée des n vecteurs colonnes $(\underline{C}), [A^T](\underline{C})^T, [A^T]^2(\underline{C})^T, \dots, [A^T]^{n-1}(\underline{C})^T$.

$$[\underline{O}]_{([A](\underline{C}))} = \begin{bmatrix} (\underline{C})^T & [A^T](\underline{C})^T & [A^T]^2(\underline{C})^T & \dots & [A^T]^{n-1}(\underline{C})^T \end{bmatrix} \quad (\text{Eq.II.5})$$

La paire $[A], (\underline{C})$ est complètement observable si et seulement si la matrice de d'observabilité est régulière autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

V. RELATION ENTRE LA REPRESENTATION D'ETAT ET LA FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME

V.1. Représentation d'état a partir de la fonction de transfert:

En temps discret la représentation d'état d'un système n'est pas unique. Nous présentons ici plusieurs types de représentation d'état que l'on peut obtenir à partir d'une fonction de transfert $G(z)$. Les principes de construction étant rigoureusement les mêmes que pour la représentation d'état en temps continu, nous nous limiterons à présenter les résultats essentiels.

a) Représentation modale

Ce type de représentation, encore appelée représentation parallèle, convient particulièrement bien la représentation d'un système possédant plusieurs pôles réels distincts. Soit $G(z)$ sa fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\alpha_1}{z-p_1} + \frac{\alpha_2}{z-p_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{z-p_n} \quad (\text{Eq.II.6})$$

Cette écriture fait apparaître la Somme de n fonctions de transfert et peut être matérialisée, sous forme de représentation d'état, par le schéma de la figure en faisant apparaître n blocs élémentaires placés en parallèle.

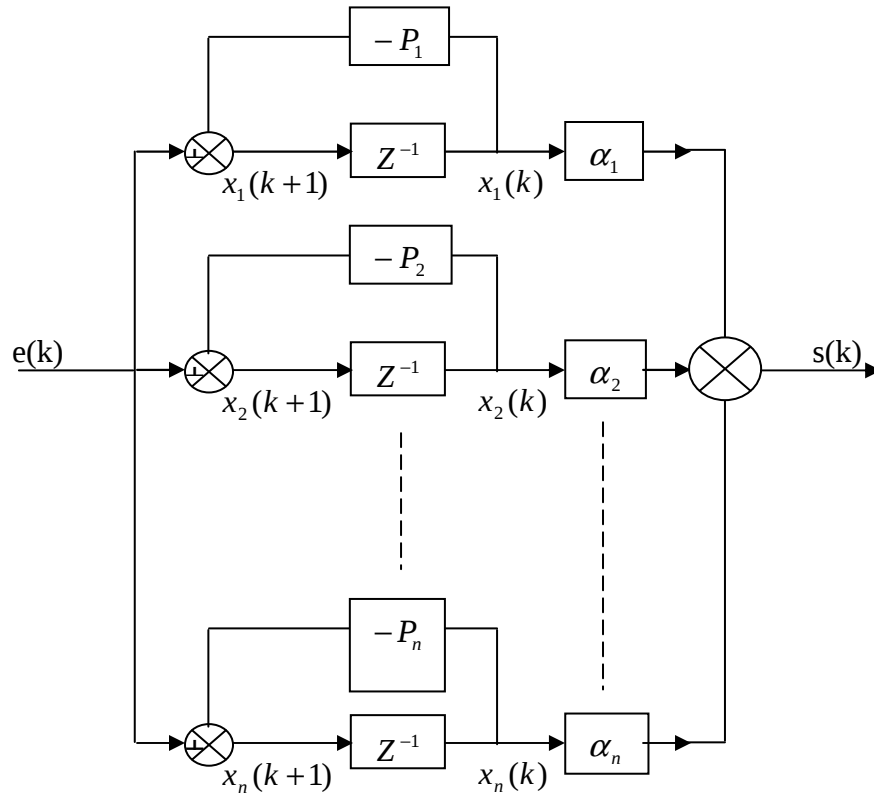


Fig. II.3 Représentation modale d'un système à temps discret

On lit immédiatement : $x_i(k+1) = p_i x_i(k) + e(k)$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \underline{X}(K+1) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p_n \end{bmatrix} \underline{X}(K) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} e(K) \\ S(K) = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n) \underline{X}(K) \end{cases} \quad (\text{Eq.II.7})$$

La matrice de commande $[A]$ est diagonale et ses valeurs propres sont les pôles de la fonction de transfert.

b) Représentation série

soit :
$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\alpha}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_n)} \quad (\text{Eq.II.8})$$

Cette écriture fait apparaître le produit de n fonctions de transfert et peut être matérialisée par la mise en cascade de n blocs élémentaires.

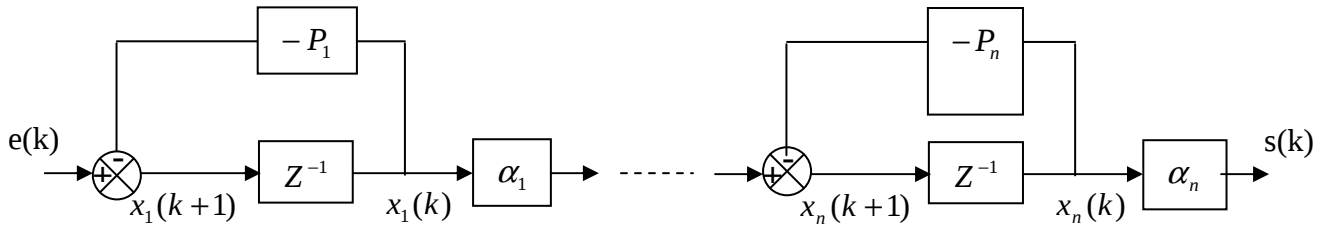


Fig. II.4 Représentant d'état d'un système discret sous forme série

La figure II.4 propose une représentation d'état cohérente avec cette forme en cascade de la fonction de transfert.

Dans ce cas, on a
$$\begin{cases} \underline{X}(K+1) = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & p_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & p_n \end{bmatrix} \underline{X}(K) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e(K) \\ S(K) = (0 \quad \dots \quad 0 \quad \alpha) \underline{X}(K) \end{cases} \quad (\text{Eq.II.9})$$

c) Représentation compagne commandable

On suppose ici que la fonction de transfert n'est pas factorisé

Soit :
$$G(z) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}} \quad (\text{Eq.II.10})$$

Nous pouvons immédiatement proposer la représentation de la figure II.5 par analogie totale avec l'étude de la forme compagne commandable en temps continu il

suffit en effet de remarquer la similitude complète de cette fonction de transfert en z avec la fonction $G(p)$ qui a été étudiée, en faisant la transformation $P^{-1} \rightarrow Z^{-1}$.

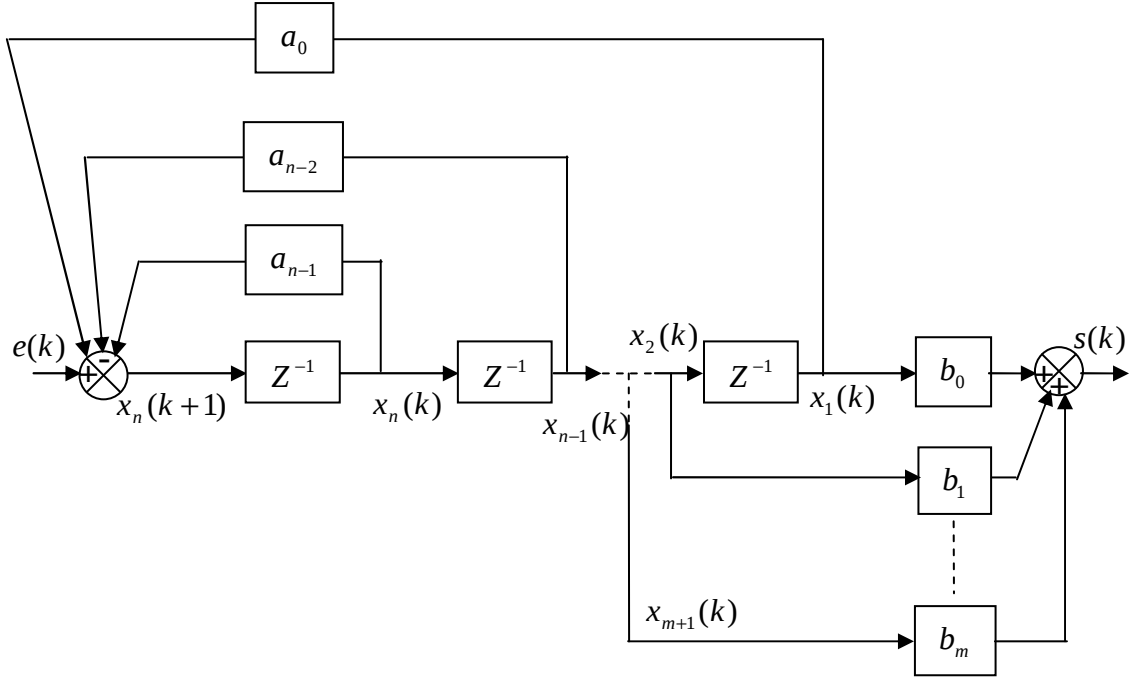


Fig. II.5 Représentation d'état sous forme compagne commandable

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) = x_n(k) \\ x_n(k+1) = -a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - \dots - a_{n-1} x_n(k) + e(k) \\ s(k) = b_0 x_1(k) + b_1 x_2(k) + \dots + b_m x_{m+1}(k) \end{cases} \quad (\text{Eq.II.11})$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} \underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \underline{x}(k) \end{cases} \quad (\text{Eq.II.12})$$

d) Représentation compagne observable

La représentation compagne observable peut être mise en évidence à partir de la forme de $G(z)$ déjà transformée dans le paragraphe précédent :

$$G(z) = \frac{b_m z^{m-n} + b_{m-1} z^{m-n-1} + \dots + b_1 z^{-n+1} + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-n+1} + a_0 z^{-n}}$$

Nous pouvons immédiatement proposer la représentation de la figure II.6 par analogie totale avec l'étude de la forme compagne observable en temps continu. Il faut remarquer la similitude complète de cette fonction de transfert en z avec la fonction $G(p)$ que nous avons étudiée, en faisant la transformation $p \rightarrow z^{-1}$.

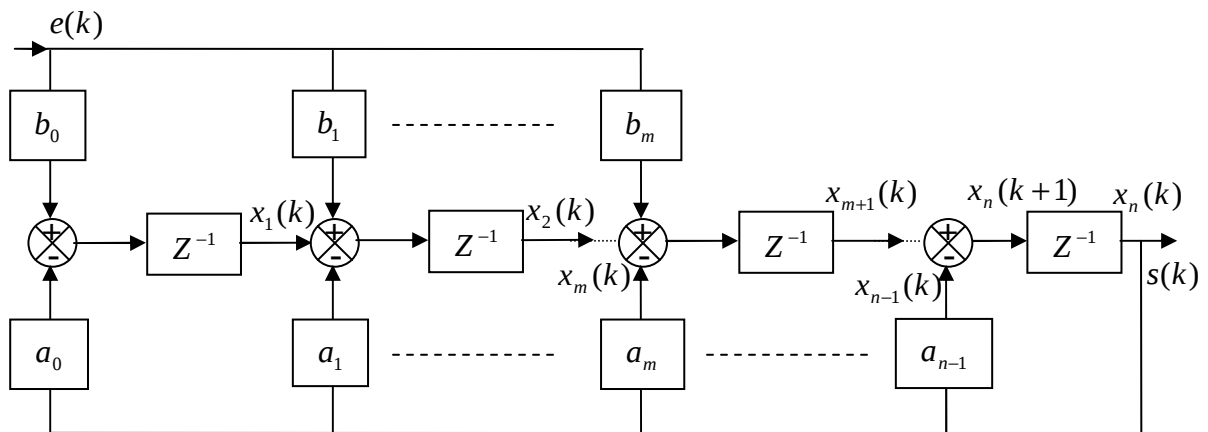


Fig. II.6 Représentation d'état de système sous forme compagne observable

Les équations d'état se déduisent naturellement de cette représentation :

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -a_n \end{bmatrix} \underline{x}(k) + \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e(k) \\ s(k) = (0 \quad \dots \quad 0 \quad 1) \underline{x}(k) \end{cases} \quad (\text{Eq.II.13})$$

V.2. Calcul de la fonction de transfert a partir de la représentation d'état

a) Transformation en z des équations d'état

Si on applique la transformation en z aux équations d'état et si on suppose nulles les conditions initial. Obtient :

$$\begin{cases} \underline{x}(k+1) = [A]\underline{x}(k) + (B)e(k) \\ s(k) = (C)\underline{x}(k) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z\underline{X}(z) = [A]\underline{X}(z) + (B)E(z) \\ S(z) = (C)\underline{X}(z) \end{cases} \quad (\text{Eq.II.14})$$

On a donc : $\underline{X}(z) = (zI - [A])^{-1}(B)E(z)$ (Eq.II.15)

On tire alors l'expression de S(P) : $S(z) = (C)(zI - [A])^{-1}(B)E(z)$ (Eq.II.16)

La fonction de transfert du système est donc :

$$G(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = (C)(zI - [A])^{-1}(B) \quad (\text{Eq.II.17})$$

L'inverse d'une matrice carrée étant égale a sa matrice adjointe divisée par son déterminant, nous pouvons en déduire que les pôles de la fonction de transfert sont les valeurs de z qui sont solutions de l'équation :

$$\det(zI - [A]) = 0$$

Ce sont donc les valeurs propres de la matrice [A]

. VI Conclusion :

Le représentation d'état des système est un outil puissant permettant de modéliser le fonctionnement de système linéaire ou non , en temps continu en temps discret et qui possède en outre l'avantage de conserver la représentation temporelle ou discret des phénomènes .

Dans ce chapitre on a étudié la représentation d'état des système a temps discret

I. INTRODUCTION

Le filtre de Kalman est un reconstituteur d'état dans un environnement stochastique, ou bien est un observateur d'état optimal pour un système linéaire perturbé par différentes sources de bruits. Le filtre de Kalman nécessite une connaissance précise des variances des bruits qui doivent être blancs, gaussiens, centrés et indépendants. Les algorithmes donnant la solution de ce problème ont été déterminés initialement par (KALMAN, 1960) dans les cas discret, et (KALMAN, BUZY, 1961) dans le cas continu. L'algorithme du filtre de kalman permet :

- Une estimation sans passe par l'inversion matricielle de dimension important.
- Une réalisation excellente d'identification.
- L'utilisation d'une mémoire restreinte.

Le filtre de Kalman étendu (EKF) donne par Jazwinski (1970) un estimateur des états et identificateur des paramètres pour les systèmes non linéaires stochastiques. Dans ce chapitre nous décrivons, en premier, le filtre de Kalman discret pour les systèmes linéaires, et puis son extension pour les systèmes non linéaires le filtre de Kalman étendu (EKF).

II. LE FILTRE DE KALMAN DISCRET

Etant donné un système linéaire stochastique discret et invariant, dont l'évolution dynamique est modélisée à l'aide de l'équation d'état.

II.1 Le Processus à Estimer

Le problème général du filtre de Kalman est l'essai d'estimer l'état $x \in R^n$ d'un processus commandé par temps discret qui est régi par l'équation différentielle stochastique linéaire:

↳ L'équation de processus :

$$x_k = Ax_{k-1} + BU_{k-1} + w_{k-1} \quad (\text{Eq.III.1})$$

↳ L'équation de mesure:

$$Y_k = C x_k + v_k \quad (\text{Eq.III.2})$$

Les w_k et v_k sont des variables aléatoires représentent respectivement le bruit d'état de processus et de mesure.

On assume qu'ils sont indépendants (l'un de l'autre), blanc, et avec des distributions normales de probabilité.

$$P(w) \sim N(0, Q) \quad (\text{Eq.III.3})$$

$$P(v) \sim N(0, R) \quad (\text{Eq.III.4})$$

En pratique, les matrices de covariances des bruits Q et R de processus et de mesure peuvent changer à chaque instant k , mais dans notre cas on assume qu'elles sont constantes.

x_k : l'état du système de dimension n .

Y_k : la sortie (mesure ou observation) de dimension m .

U_k : l'entrée certaine de dimension l .

A : une matrice de dimension $n \times n$.

B : reliant la commande U à l'état x de dimension $n \times 1$.

C : reliant l'état à la mesure Y_k de dimension $m \times n$.

II.2. Equations du Filtre

Soit :

$\hat{x}_k^- \in R^n$: l'évaluation a priori de l'état à l'étape k ;

$\hat{x}_k \in R^n$: l'évaluation a posteriori d'état à l'étape k donnant la mesure Y_k .

Nous pouvons alors définir les erreurs estimées a priori et a posteriori respectivement par :

$$e_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$$

$$e_k = x_k - \hat{x}_k$$

La covariance de l'erreur a priori d'évaluation est alors :

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \quad (\text{Eq.III.5})$$

La covariance de l'erreur a posteriori est :

$$P_k = E[e_k e_k^T] \quad (\text{Eq.III.6})$$

Le filtre de Kalman estime la valeur optimal de l'état à posteriori $\hat{x}_k$ en fonction de $\hat{x}_k^-$ l'état a priori la mesure actuelle z_k .

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(Y_k - C \hat{x}_k^-) \quad (\text{Eq.III.7})$$

La matrice du gain K de dimension $n \times m$ est choisie en minimisant la covariance de l'erreur a posteriori décrite par l'équation (Eq.III.6).

D'ou K optimale:

$$K_k = P_k^- C^T (C P_k^- C^T + R)^{-1} = \frac{P_k^- C^T}{C^T P_k^- C^T + R} \quad (\text{Eq.III.8})$$

Nous constatons que quand la covariance d'erreur de mesure R s'approche de zéro, le gain K à un effet considérable sur l'erreur résiduel : $\lim_{R \rightarrow 0} K_k = C^{-1}$

D'autre part, comme la covariance d'erreur a priori P_k^- s'approche de zéro, le gain K sera comme un effet négligeable: $\lim_{P_k^- \rightarrow 0} K_k = 0$

II.3 Les Origines Probabilistes du Filtre

Le filtre de Kalman maintient les deux premiers moments de la distribution d'état c'est à dire :

$$E[x_k] = \hat{x}_k$$

$$E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] = P_k$$

A partir de ces dernières équations, on déduit que l'erreur d'estimation a posteriori à une moyenne non nul. $[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]$

$$P(x_k/Y_k) \sim N(E[x_k], E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T]) = N(\hat{x}_k, P_k)$$

II.4 L'Algorithme du Filtre de Kalman Discret

Le filtre de Kalman estime l'état de processus à un moment donné et puis obtient la rétroaction sous forme d'un bruit de mesure, d'où Les équations du filtre de Kalman se divisent en deux classes :

- ☞ Equations de mise à jour de temps (la prédiction): responsables de projeter en avant (en temps) les évaluations de covariance d'état et d'erreur actuel afin de les prédire a priori pour la prochaine étape.
- ☞ Equations de mise à jour de mesure (la correction): responsables du rétroaction c'est-à-dire pour incorporer une nouvelle mesure dans l'évaluation a priori pour obtenir une évaluation a posteriori améliorée.

Ceci est présenté dans la figure (III.1):

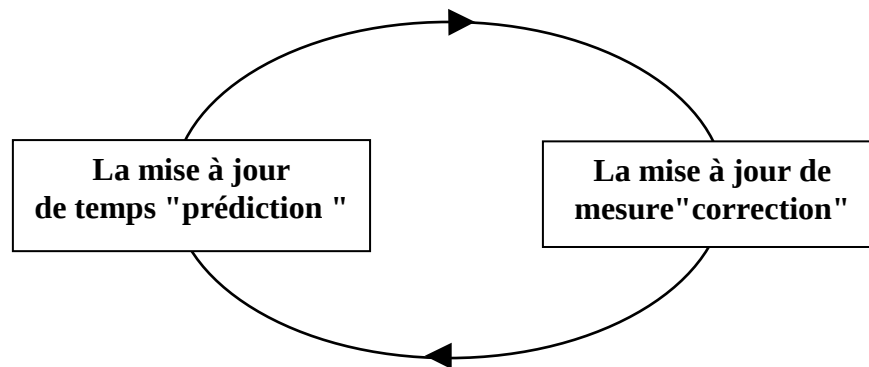


Fig III.1: Le cycle du Kalman de filtre discret. La mise à jour de temps prédit l'état actuel en avant. La mise à jour de mesure qui adapte la valeur prédit à une mesure réelle

Les équations spécifiques pour les mises à jour de temps et de mesure sont présentées ci dessous :

- Les équations Kalman discrètes de mise à jour de temps du filtre

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (\text{Eq.III.9})$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (\text{Eq.III.10})$$

Notons encore que les équations de mise à jour de temps prédit l'état et la covariance de l'erreur en avant de l'étape k .

- Les équations de mise à jour de mesure du filtre de Kalman discret.

$$K_k = P_k^- C^T (C P_k^- C^T + R)^{-1} \quad (\text{Eq.III.11})$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (Y_k - C \hat{x}_k^-) \quad (\text{Eq.III.12})$$

$$P_k = (I - K_k C) P_k^- \quad (\text{Eq.III.13})$$

La première tâche pendant la mise à jour de mesure est de calculer le gain de Kalman, K_k . La prochaine étape est de mesurer réellement le processus pour obtenir le Y_k , et puis d'une évaluation d'état a posteriori en incorporant la mesure (Eq.III.12). L'étape finale est d'obtenir une évaluation de covariance d'erreur a posteriori (Eq.III.13).

II.5. Paramètres et accords de filtre

L'implémentation du filtre nécessite la connaissance de la covariance de bruit de mesure R . La covariance R d'erreur de mesure est généralement pratique, habituellement mesurée avant utilisation du filtre (possible). Généralement on pourrait prendre quelques mesures d'échantillon "off line" afin de déterminer la variance du bruit de mesure.

La détermination de la covariance de processus Q de bruit est généralement plus difficile car nous n'avons pas la capacité d'observer directement le processus que nous estimons. Parfois un simple modèle de processus peut produire des résultats acceptables si on injecte" assez d'incertitude dans le processus par l'intermédiaire du choix de Q . [10]

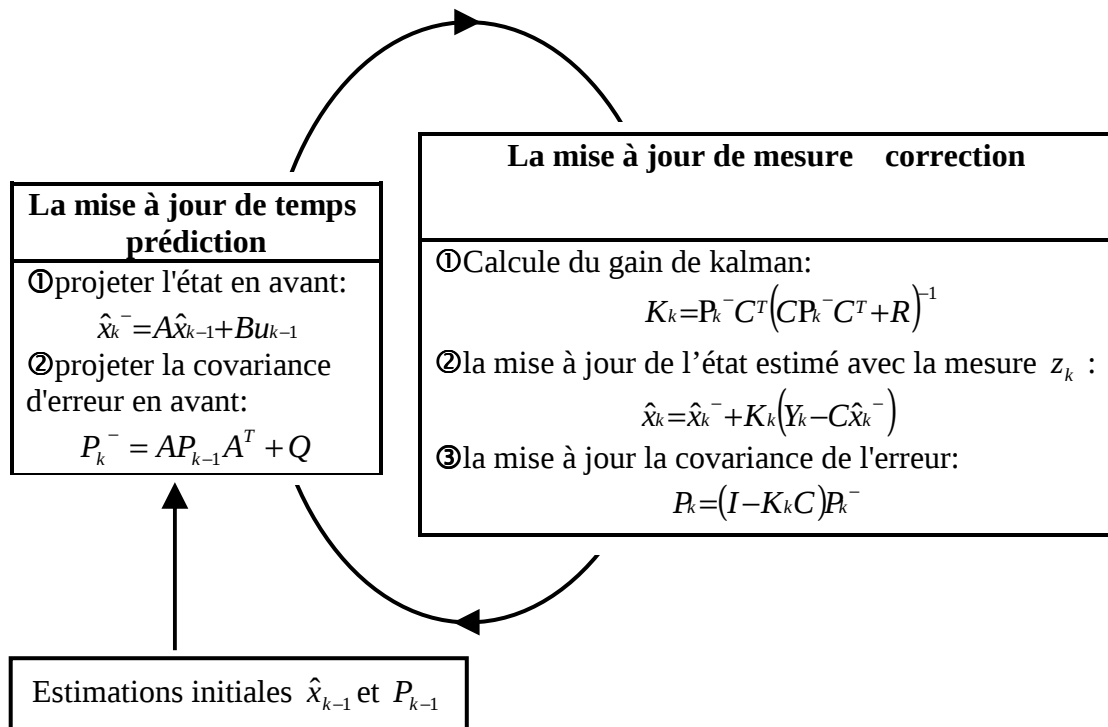


Fig III.2: les différentes étapes et équations du filtre de Kalman

Notons que dans des conditions où Q et R , sont en fait constantes, la covariance P_k d'erreur d'évaluation et le gain de Kalman K_k stabiliseront rapidement et demeureront alors constants.

III. LE FILTRE DE KALMAN ETENDU

L'algorithme du filtre de Kalman étendu est une technique de calcul largement utilisée dans le domaine du filtrage non linéaire, c'est un outil mathématique capable de déterminer des grandeurs d'état non mesurables, ou les paramètres du système varient en fonction du temps.

Le problème de l'identification est très important sur les deux plans, le contrôle non linéaire et les paramètres variables.

III.1 Modèle étendu Stochastique

Pour appliquer l'EKF pour l'évaluation d'état simultané et de paramètre, on doit étendre le vecteur d'état par le vecteur de paramètre : $X_{e,k} = [X_k \ \theta_k]^T$. D'ailleurs, l'approche kalman de filtre suppose que le modèle déterministe du moteur est troublé par Gaussien et bruit blanc centré : Le bruit d'état et le bruit de mesure.[11][6]

Nous supposons que les paramètres sont constants ou changeons lentement ($\dot{\theta}(t)=0$), le modèle étendu stochastique est obtenu en combinant le modèle présenté dans Le modèle d'état de moteur à courant continu est représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_d X(k) + B_d U(k) \\ Y(k) = C_d X(k) \end{cases}$$

et la dynamique de paramètre affectée par Gaussien et bruit blanc centré :

$$\begin{cases} \dot{X}_{e/k+1} = f(X_k, \theta_k) + W_{e/k} \\ Y_k = g(X_k, \theta_k) + V_k \end{cases} \quad (\text{Eq.III.14})$$

$$\text{Avec:} \quad f = \begin{pmatrix} A_d(\theta_k) X_k + B_d(\theta_k) U_k \\ \theta_k \end{pmatrix}$$

$$g(X_k, \theta_k) = C_k(\theta_k) X_k + D_{e,k}(\theta_k) U_k$$

$W_{e/k}$ et V_k sont le bruit étendu d'état et de mesure respectivement. Leurs matrices des la covariance sont :

$$Q_{e/k} = E\{W_{e/k} W_{e/k}^T\} \text{ et } R_k = E\{V_k V_k^T\}$$

III.2 Filtre de Kalman Etendu Discret (EKF Discret)

L'EKF se compose de deux phases. D'abord, l'état étendu est prévu selon la valeur prévue du modèle étendu donné in (Eq.III.14) :

$$\begin{cases} \hat{X}_{e, k+1/k} = f(\hat{X}_{k, k}, \hat{\theta}_{k, k}) \\ \hat{Y}_{k+1/k} = g(\hat{X}_{k+1/k}, \hat{\theta}_{k+1/k}) \end{cases} \quad (\text{Eq.III.15})$$

Puis, cette prévision est corrigée en injectant l'erreur d'estimation de rendement :

$$\hat{X}_{\hat{e}, k+1, k+1} = \hat{X}_{e, k+1, k} + K_{k+1} (Y_{k+1} - \hat{Y}_{k+1, k}) \quad (\text{Eq.III.16})$$

Le gain de kalman K est déduit des propriétés du modèle stochastique pour réduire au minimum la variance de l'erreur d'estimation. Cependant, parce que le filtre kalman est un observateur linéaire, le modèle étendu doit être linéarisé en ce qui concerne l'état étendu estimé. Grâce à la simplicité du modèle de second ordre de discrete-temps, cette linéarisation peut être calculée très facilement :

$$\begin{cases} \tilde{X}_{\hat{e}, k+1, k} = F_k \tilde{X}_{e, k/k} + W_{e, k} \\ \tilde{Y}_{k+1/k} = G_{k+1} \tilde{X}_{e, k+1/k} + V_{k+1} \end{cases}$$

avec $e(\tilde{X}) = X_e - \hat{X}_e$ l'erreur d'estimation

et les matrices suivantes de Jacobian :

$$F_k = \left[\frac{\partial f(X_k, \theta_k)}{\partial X_e} \right]_{X_e = \hat{X}} = \begin{bmatrix} A_d & J_x \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$G_{k+1} = \left[\frac{\partial g(X_{k+1}, \theta_{k+1})}{\partial X_e} \right]_{X_e = \hat{X}} = \begin{bmatrix} C_k & J_y \end{bmatrix}$$

$$J_x = \left[\frac{\partial X_{k+1, i}}{\partial \theta_j} \right]_{X_e = \hat{X}} \quad \text{et} \quad J_y = \left[\frac{\partial Y_{k+1, i}}{\partial \theta_j} \right]_{X_e = \hat{X}}$$

$$i = 1, 2 \quad \text{et} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Etapes de l'algorithme

$$M(k) = F(k) P(k) F(k)^T$$

$$K(k) = \frac{M(k)G(k+1)^T}{G(k+1)M(k)G(k+1)^T + R}$$

$$X_e(k+1) = F_k X_e(k) + K(k)(Y(k+1) - G(k+1)F_k X_e(k))$$

$$P(k+1) = (I - K(k)G(k+1)) M(k)$$

IV. CONCLUSION

Le filtre du kalman est un observateur linéaire qui peut être, il permet de résoudre, dans le domaine temporel le problème de l'estimation statistique pour des système linéaire. Une condition nécessaire pour la convergence du filtre, l'observateur du système.

Si on veut estimer des paramètres recherchés, le modèle devient alors non linéaire. Dans ce cas, on applique le filtre de kalman étendu au modèle linéarisé. Il faut alors effectuer un développement limité –par exemple- en série de Taylor.

I. INTRODUCTION

La modélisation est une étape nécessaire pour l'analyse de comportement du système ou la synthèse des correcteurs pour la commande.

Dans ce chapitre on présentera le moteur à courant continu par un système d'équations différentielles ; et le passage à la présentation d'état du moteur. Enfin la résolution de l'équation d'état nous permettra de voir le comportement de la machine.

II. DESCRIPTION D'UN MOTEUR A COURANT CONTINU

Le moteur à courant continu est l'actionneur électrique le plus classique il est toujours présent dans de nombreuses applications, il existe beaucoup de structures mais le principe de base est le même avec en particulier le rôle fondamental du collecteur de balais.

II.1. Constitution :

Comme toute machine tournante, le moteur à courant continu comporte une partie fixe (le stator) et une partie mobile (le rotor) séparées par un entrefer. Le stator dit aussi inducteur, porte des aimants qui sont chargés de créer le champ magnétique dans l'entrefer, il comporte un pôle Nord et un pôle sud. Les deux demi culasses permettant de canaliser les lignes de champ. Le rotor porte un bobinage appelé induit.

II.2. Comportement dynamique de la machine à c.c

Un moteur électrique est destiné à fournir de l'énergie mécanique aussi ce moteur est-il toujours accouplé à la machine qu'il entraîne.

Différents types des machines ont c.c :

En faisant un choix du type de connexion de l'inducteur et de l'induit nous permet de l'obtenir une machine à c.c. du type :

- A excitation séparée.
- A excitation shunt.
- A excitation série.
- A excitation compound ou composée.

III. MODELE DU MOTEUR A COURANT CONTINU

Le modèle de moteur à courant continu est donné : R et L sont respectivement la résistance et la self de l'induit. La force contre-électromotrice E est proportionnels à la vitesse angulaire w : $E = k_e w$.

L'équation électrique donne :

$$U(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + k_e w \quad (\text{Eq.IV.1})$$

D'autre part, si on note J_m le moment d'inertie de l'arbre moteur et f_m le coefficient de frottements visqueux, on peut écrire :

$$J_m \frac{dw(t)}{dt} = C_m - C_f \quad (\text{Eq.IV.2})$$

C_m : couple moteur, proportionnel au courant d'induit, $C_m = k_c i$.

C_f : couple de frottements visqueux, proportionnel à la vitesse angulaire, $C_f = f_m w$.

On obtient ainsi le système différentiel dont les variables sont le courant d'induit i et la vitesse angulaire w .

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} [U(t) - R.i(t) - k_e.w(t)] \\ \frac{dw(t)}{dt} = \frac{1}{J_m} [k_c.i(t) - f_m.w(t)] \end{cases} \quad (\text{Eq.IV.3})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i(t) - \frac{k_e}{L}w(t) + \frac{1}{L}U(t) \\ \frac{dw(t)}{dt} = \frac{k_c}{J_m}i(t) - \frac{f_m}{J_m}w(t) \end{cases} \quad (\text{Eq.IV.4})$$

III.1. La représentation du système par l'espace d'état

En peut écrire l'équation sous forme espace d'état en prend :

Les variables d'états (X) :

X_1 : le courant de l'induit.

X_2 : la vitesse angulaire.

Entrées de commande U.

U : l'excitation.

Sortie Y.

$Y = X_2$

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = -\frac{R}{L} \cdot X_1(t) - \frac{k_e}{L} \cdot X_2(t) + \frac{1}{L} \cdot U(t) \\ \dot{X}_2(t) = \frac{k_c}{J_m} \cdot X_1(t) - \frac{f_m}{J_m} \cdot X_2(t) - 0 \cdot U(t) \end{cases} \quad (\text{Eq.IV.5})$$

donc :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{bmatrix} + B[u] \quad (\text{Eq.IV.6})$$

$$Y = C \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Eq.IV.7})$$

alors le modèle sous forme d'état a donné par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) \\ Y(t) = C X(t) + D U(t) \end{cases} \quad (\text{Eq.IV.8})$$

Ou $X(t)$ est un vecteur d'état de dimension (2x1) et U est un vecteur d'entrée de dimension (1x1). Et Y est vecteur de sortie de dimension (1x1) et les matrices de A , B , C en fonction des paramètres physiques sont :

$$\begin{cases} a_{11} = -R / L \\ a_{12} = -k_e / L \\ a_{21} = k_c / J_m \\ a_{22} = -f_m / J_m \end{cases}$$

$$b_1 = 1 / L$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } C = [0 \ 1] \quad D = 0$$

III.2. Discrétisation du système

En peut calcul des matrices A_d , B_d , C_d , D_d du système discrétisé à partir des matrices A,B,C et D du système continu.

Le système est discrétisé au pas d'échantillonnage T_e , les paramètres du processus aux instants d'échantillonnage kT_e se formalisent ainsi :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_d X(k) + B_d U(k) \\ Y(k) = C_d X(k) + D_d U(k) \end{cases} \quad (\text{Eq.IV.9})$$

Connaissant l'état du système continu à l'instant t_0 , son état à l'instant (t_0+T_e) s'écrit :

$$X(t_0+T_e) = e^{AT_e} X(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+T_e} e^{A(t_0+T_e-\tau)} B U(\tau) d\tau \quad (\text{Eq.IV.10})$$

En remplaçant t_0 par kT_e et en considérant T_e implicite, nous avons :

$$\begin{aligned} X[(k+1)T_e] &= X(k+1) \\ X(k+1) &= e^{AT_e} X(k) + \int_k^{k+1} e^{A[(k+1)T_e-\tau]} B U(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{Eq.IV.11})$$

Réalisons le changement de variable $t' = \tau - kT_e$, il vient $u(\tau) = u(k)$ reste constant pendant T_e du fait du bloqueur d'entrée du processus.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= e^{AT_e} X(k) + \int_0^{T_e} e^{A(T_e-t')} B U(k) dt' \\ X(k+1) &= e^{AT_e} X(k) + \int_0^{T_e} e^{A(T_e-t')} dt' B U(k) \end{aligned}$$

soit après identification :

$$\begin{cases} A_d = e^{AT_e} \\ B_d = \int_0^{T_e} e^{A(T_e-t')} dt' B \\ C_d = C \quad \text{et} \quad D_d = D \end{cases}$$

IV. SIMULATION DE LA REPONSE DU MOTEUR

Le modèle d'état de moteur à courant continu est représenté par le système suivant :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_d X(k) + B_d U(k) \\ Y(k) = C_d X(k) \end{cases} \quad (\text{Eq.IV.12})$$

On se propose de déterminer l'évolution du couple moteur et de la vitesse angulaire, les paramètres électromécaniques du moteur sont :

$$R = 3 \, \Omega$$

$$k_c = 1.4 \, \text{Nm A}^{-1}$$

$$L = 1 \, \text{mH}$$

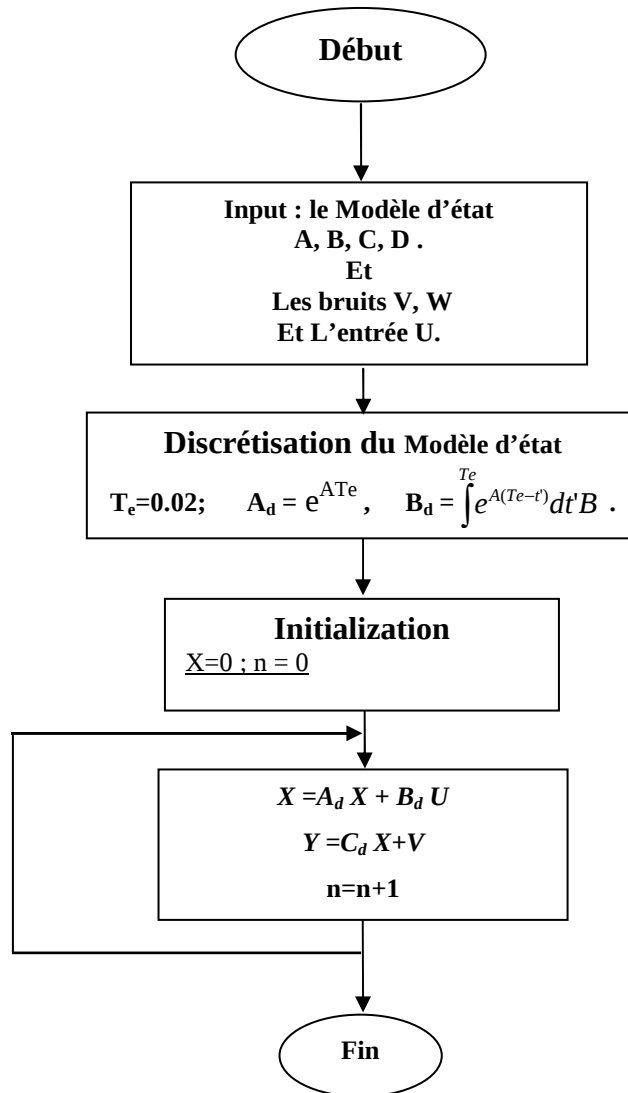
$$f_m = 0.002 \, \text{Nm rad}^{-1}\text{s}$$

$$k_e = 1.2 \, \text{V rad}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$J_m = 0.01 \, \text{Kg m}^2$$

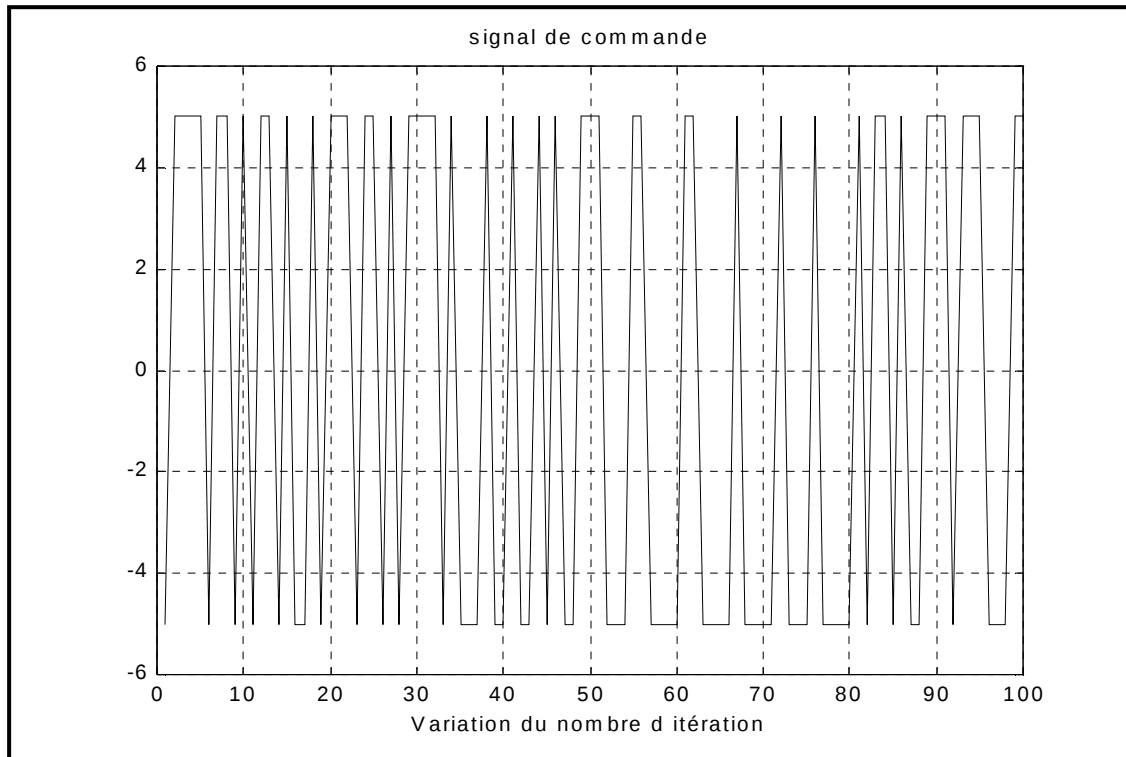
IV.1. L'organigramme

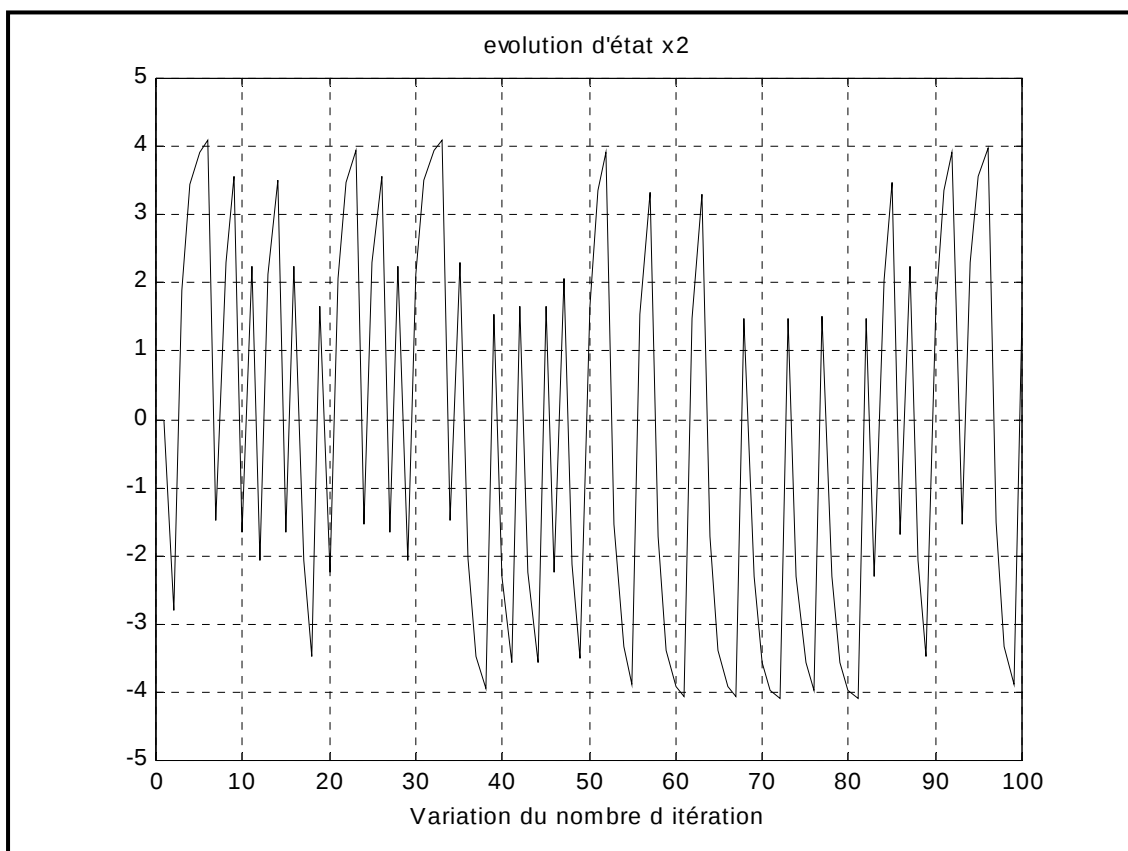
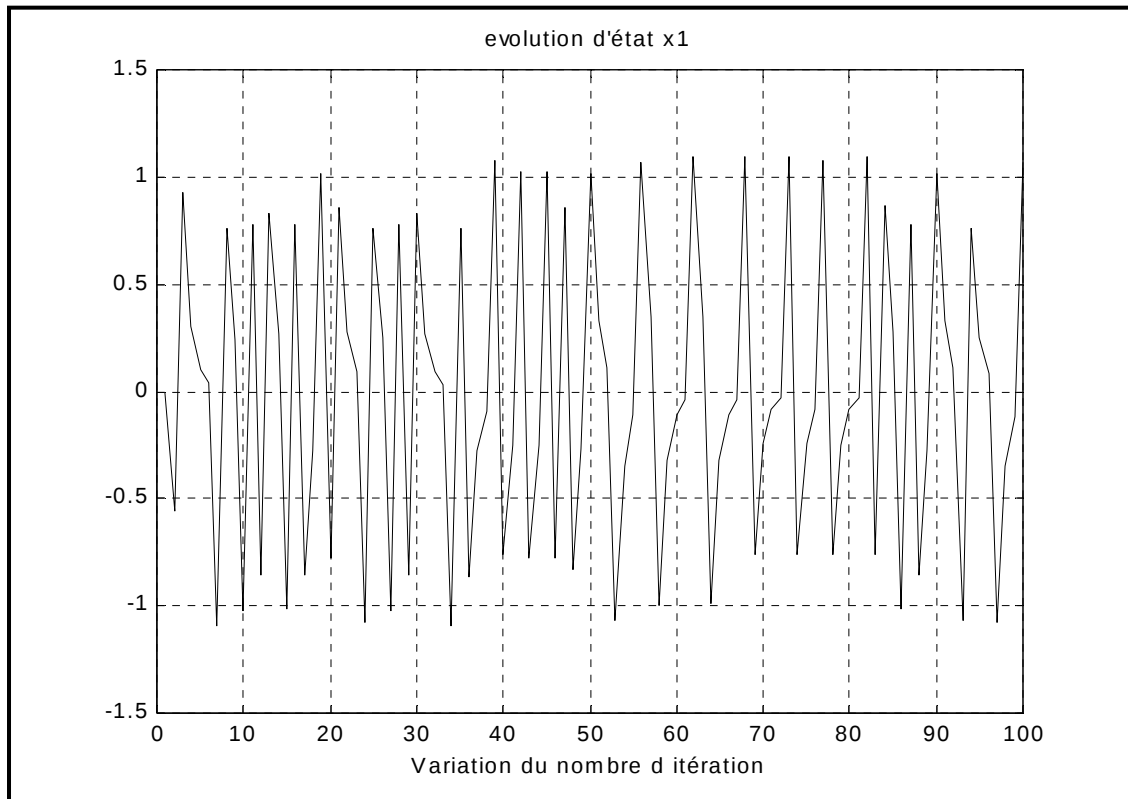
Notons que la simulation a été effectuée par le logiciel " MATLAB " .

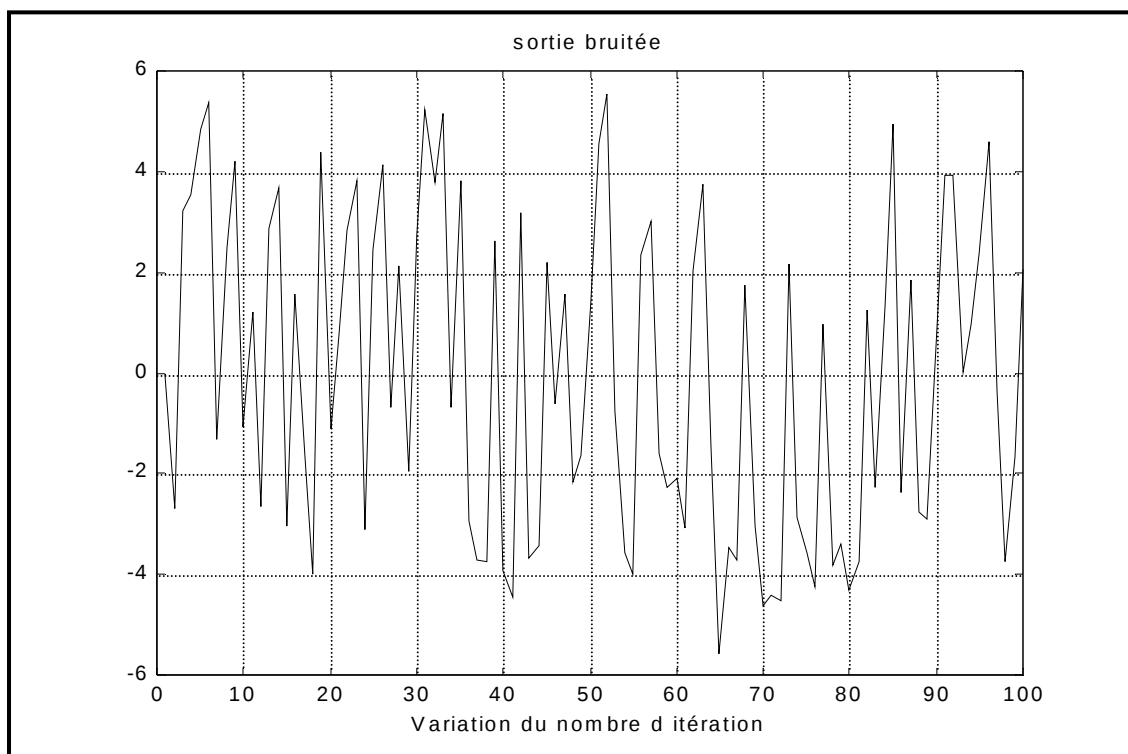
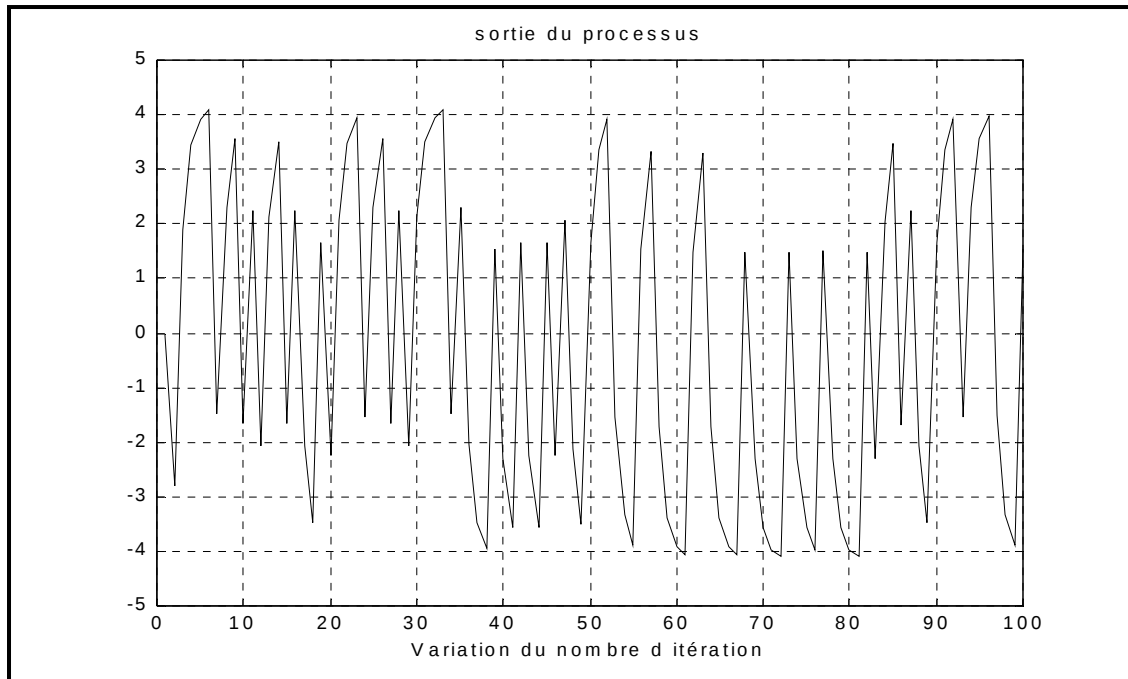


IV.2. Résultats de simulation

Les figures suivantes représentent respectivement l'évolution du couple, de la vitesse angulaire, la sortie sans bruit et la sortie bruitée.







V Conclusion :

La machine à courant continu a été durant de nombreuses années l'actionneur principalement utilisé dans les applications à vitesse. En effet, comme cela a été mis en évidence

Dans ce chapitre, on a étudié la machine à courant continu sous forme générale, et le fonctionnement du moteur à courant continu et puis son comportement.

I. APPLICATION DU FILTRE DE KALMAN ETENDU

EXEMPLE (1)

I.1. Introduction

Après avoir présenter la théorie du filtre de kalman étendu, nous allons présenter dans ce partie son application à l'estimation d'états et l'identification des paramètres du moteur à courant continu.

I.2. Estimation des états et identification des paramètres par le filtre de kalman étendu :

On adapte le modèle d'état non linéaire (IV.8) avec les mêmes paramètres décrits dans le chapitre précédent.

L'équation (IV.8)est présenté par:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A X(t) + B U(t) \\ Y(t) = C X(t) \end{cases}$$

Et le système non linéaire discret :

$$\begin{cases} X(k+1) = A_d X(k) + B_d U(k) \\ Y(k) = C_d X(k) \end{cases}$$

Avec:

$$\begin{cases} A_d = e^{A T_e} \\ B_d = \int_0^{T_e} e^{A(T_e-t')} dt' B \\ C_d = C \quad \text{et} \quad D_d = D \end{cases}$$

Où :

$$A_d = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad B_d = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$C = [0 \quad 1] \quad D = [0]$$

On ramène le système non linéaire discret en un système linéaire discret

Le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \tilde{X}_{\hat{e},k+1,k} = F_k \tilde{X}_{e,k/k} + W_{e,k} \\ \tilde{Y}_{k+1/k} = G_{k+1} \tilde{X}_{e,k+1/k} + V_{k+1} \end{cases} \quad (\text{Eq.V.1})$$

avec : $\tilde{X} = X_e - \hat{X}_e$

Le vecteur $X_e(k)$ est le vecteur étendu .

$X_e(k)$ est défini comme suit :

$$X_e(k) = [X^T(k) \quad \underline{a}^T \quad \underline{b}^T]^T \quad (\text{Eq.V.2})$$

Où $\theta = [\underline{a}^T \quad \underline{b}^T]^T$

Avec:

$$\underline{a} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3]^T$$

Et $\underline{b} = [b_0 \ b_1]^T$

On a:

$$\dim[X^T(k)] = 1 \times 2.$$

$$\dim[\underline{a}^T] = 1 \times 4.$$

$$\dim[\underline{b}^T] = 1 \times 2.$$

Donc :

$$\dim[X_e(k)] = 8 \times 1.$$

Il faut tirer une expression de $X_e(k+1)$ en fonction $X_e(k)$:

d'après l'équation (III.2).

$$X_e(k+1) = [X^T(k+1) \quad \underline{a}^T \quad \underline{b}^T]^T$$

Avec:

$$F_k = \left[\frac{\partial f(X_k, \theta_k)}{\partial X_e} \right]_{X_e = \hat{X}} = \begin{bmatrix} A_d & J_X \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (\text{Eq.V.3})$$

$$\dim[F_k] = (8 \times 8)$$

$$G_{k+1} = \left[\frac{\partial g(X_{k+1}, \theta_{k+1})}{\partial X_e} \right]_{X_e = \hat{X}_e} = \begin{bmatrix} C_k & J_Y \end{bmatrix} \quad (\text{Eq.V.4})$$

$$\dim[G_{k+1}] = (1 \times 8)$$

$$J_X = \left[\frac{\partial X_{k+1,i}}{\partial \theta_j} \right]_{X_e = \hat{X}} \quad \text{et} \quad J_Y = \left[\frac{\partial Y_{k+1,i}}{\partial \theta_j} \right]_{X_e = \hat{X}} \quad (\text{Eq.V.5})$$

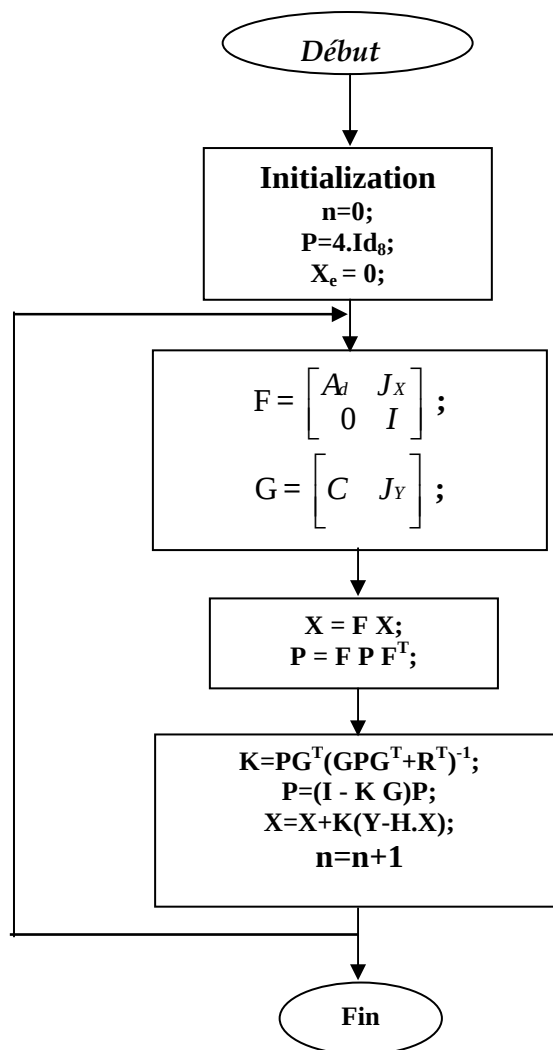
$$i = 1, 2 \quad \text{et} \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$J_x = \begin{pmatrix} X_1(k) & X_2(k) & 0 & 0 & U(k) & 0 \\ 0 & 0 & X_1(k) & X_2(k) & 0 & U(k) \end{pmatrix} \quad \dim[J_x] = (2 \times 6)$$

$$J_Y = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad \dim[J_Y] = (1 \times 6)$$

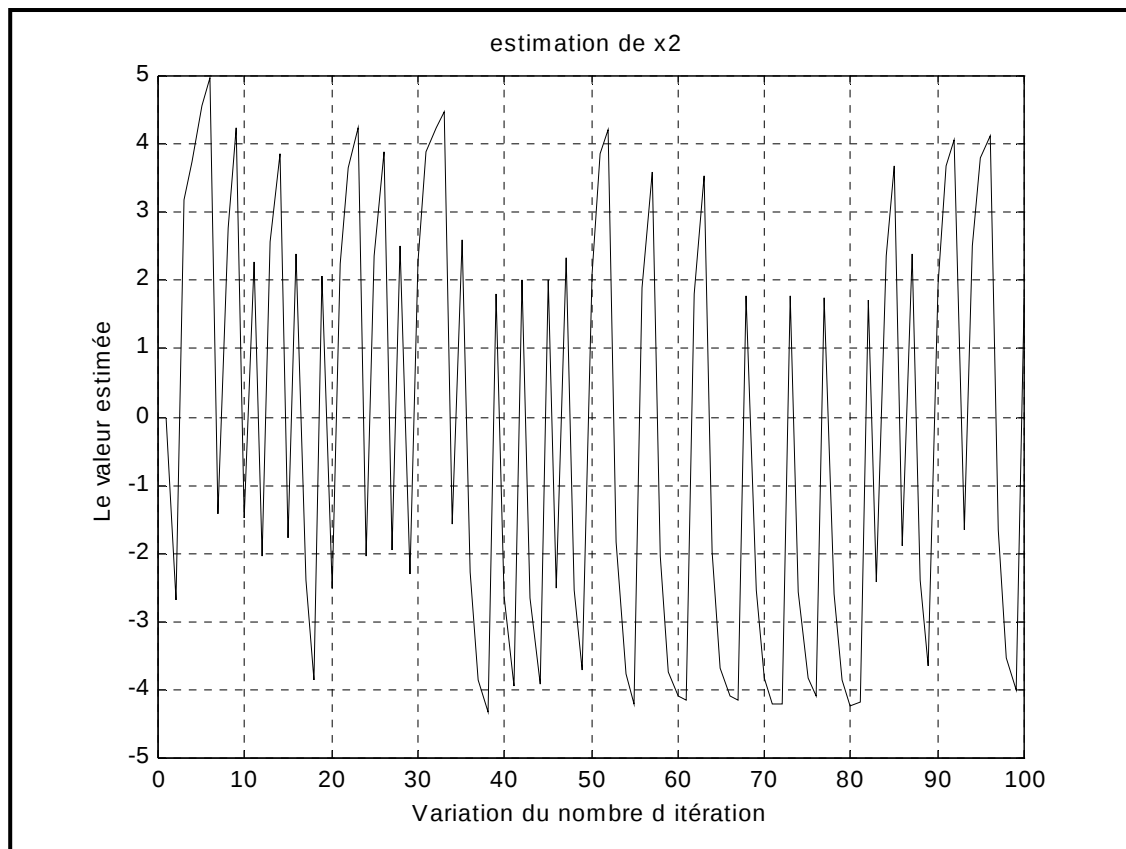
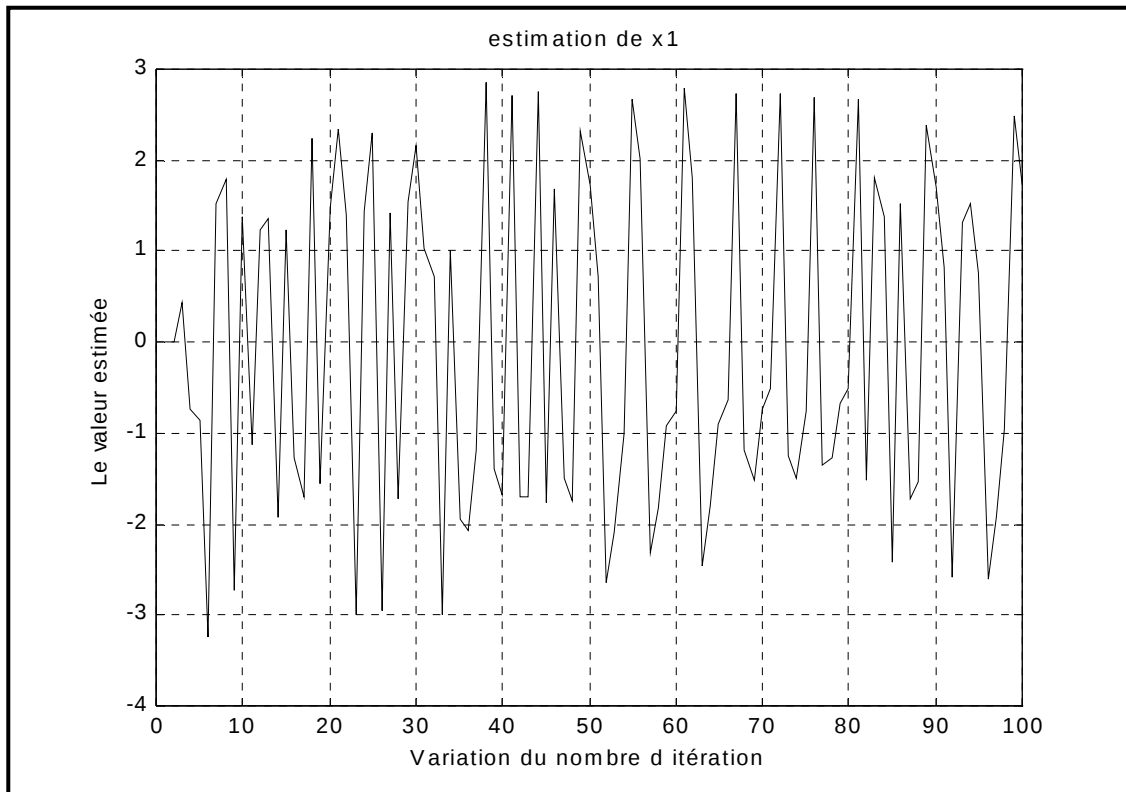
I.3 L'organigramme :

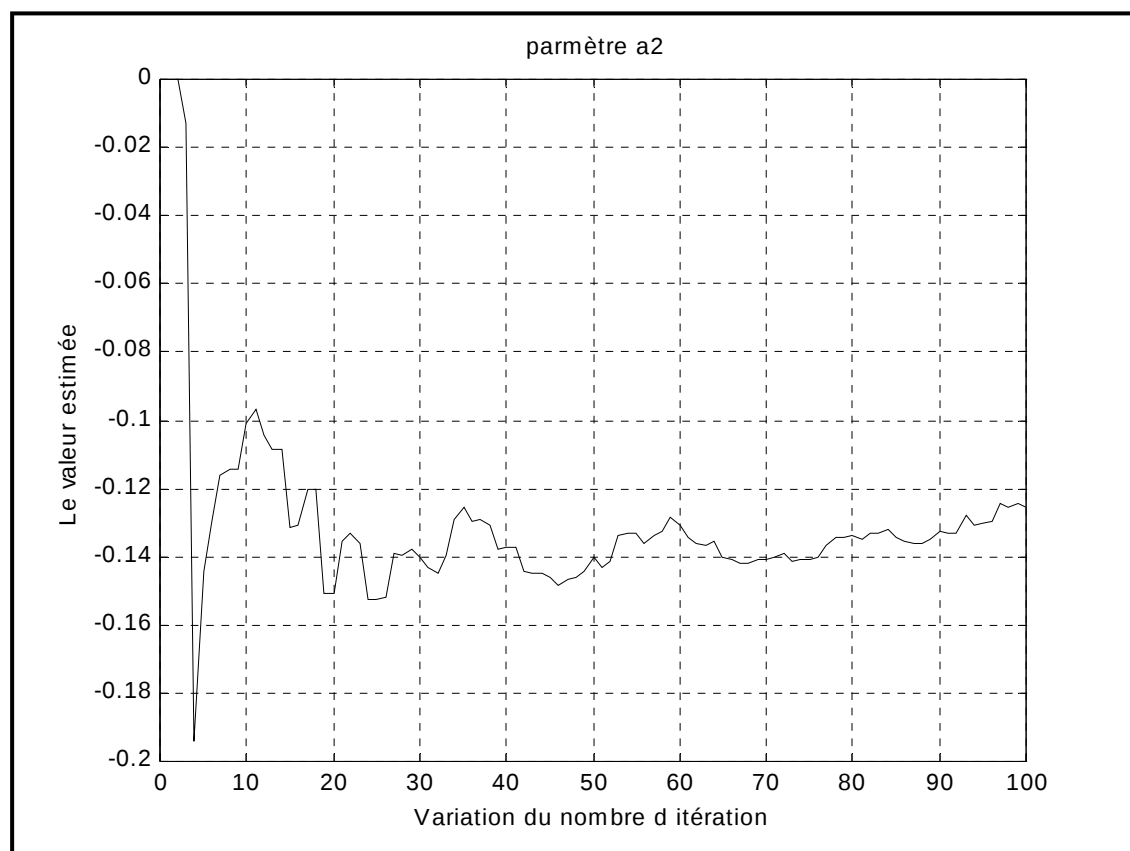
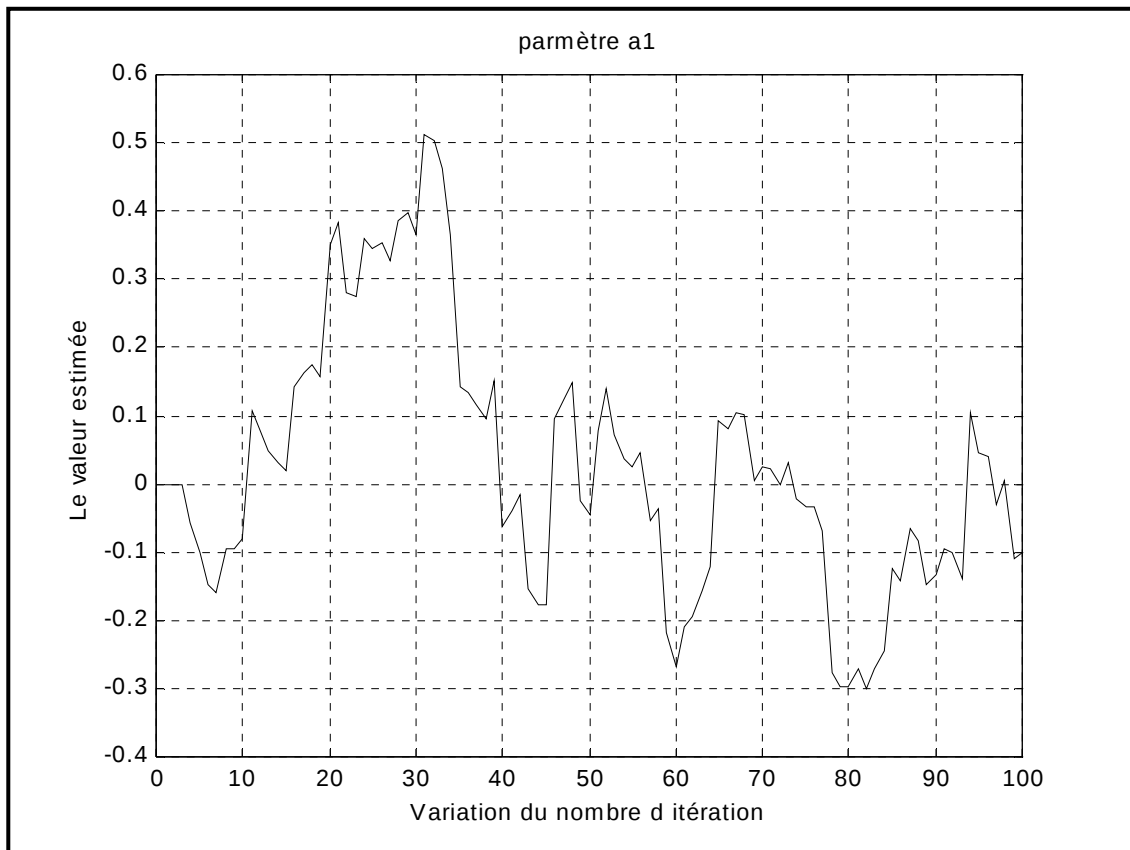
Notons que la simulation a été effectuée par le logiciel " **MATLAB** "

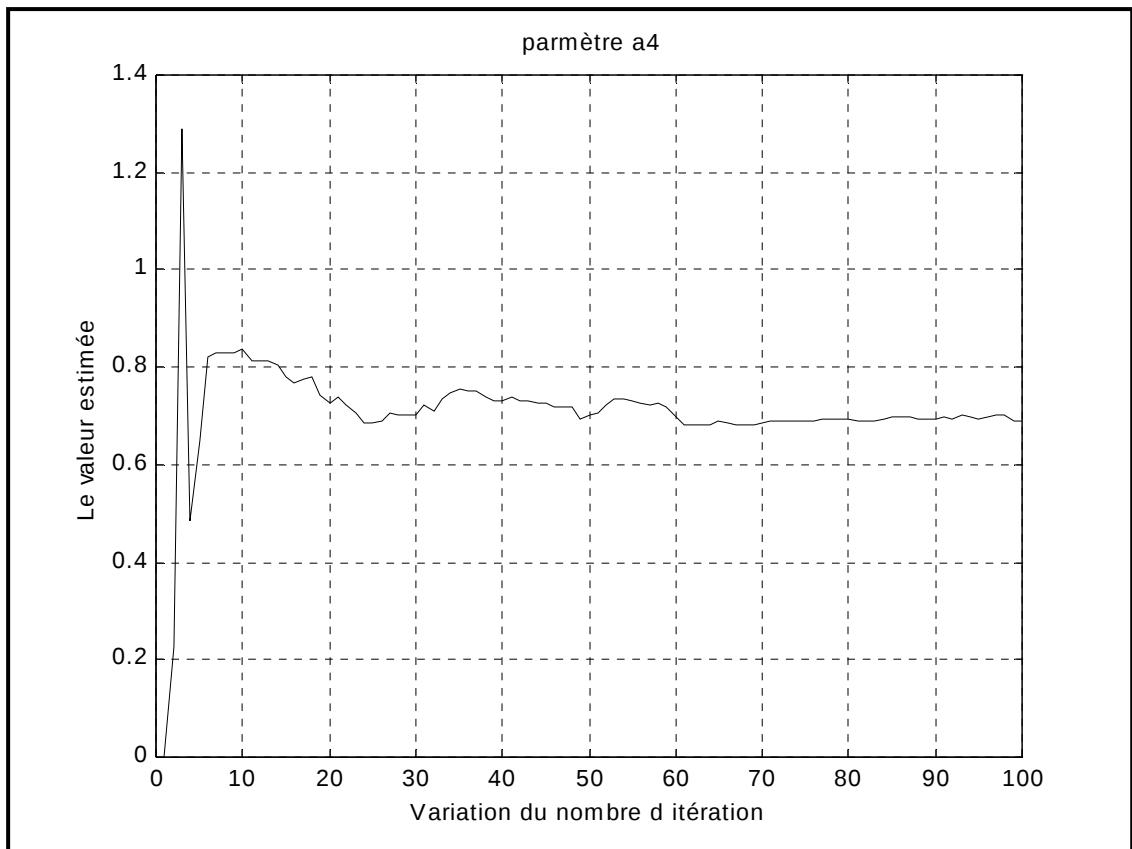
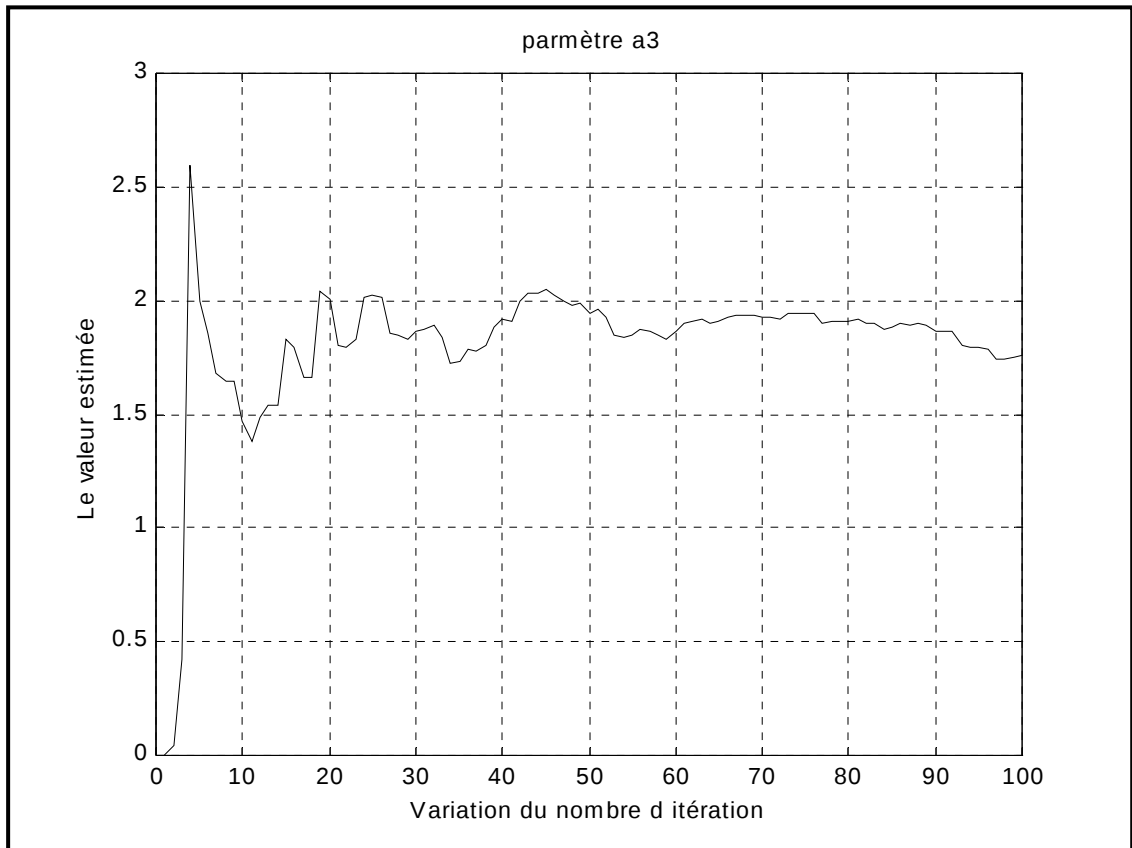


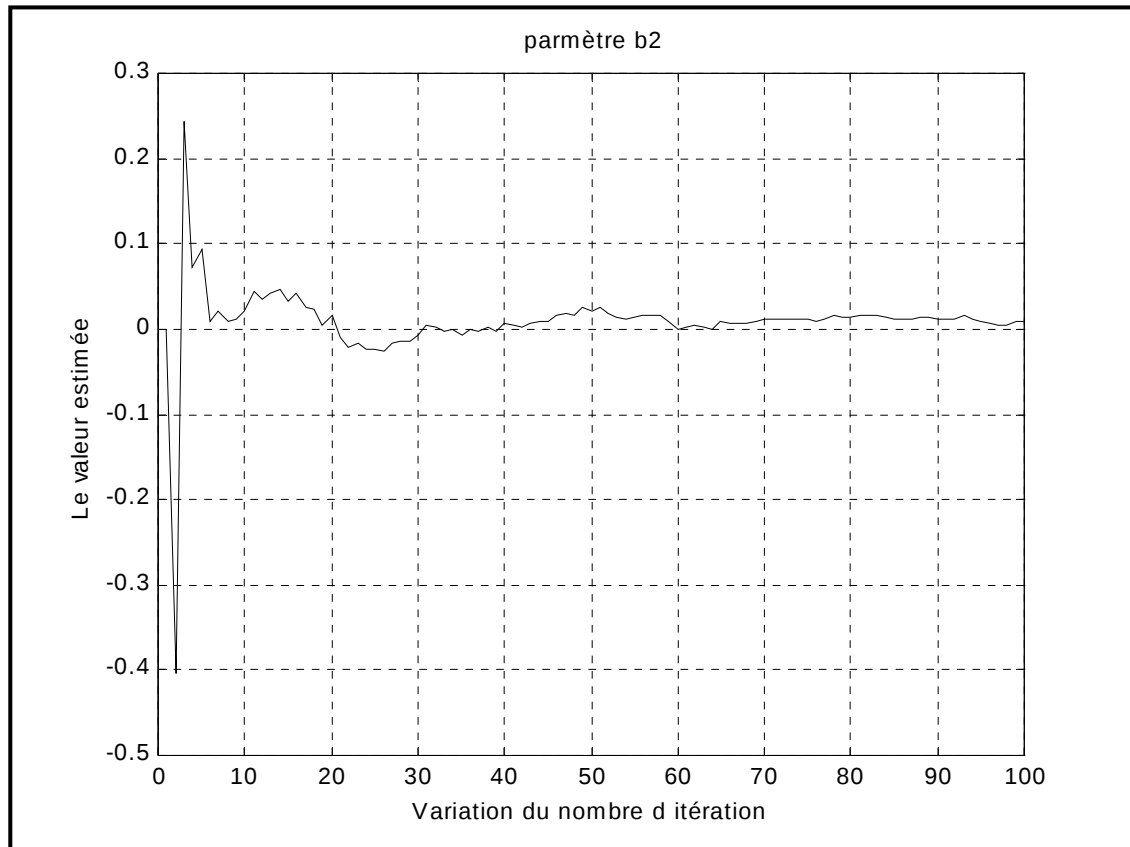
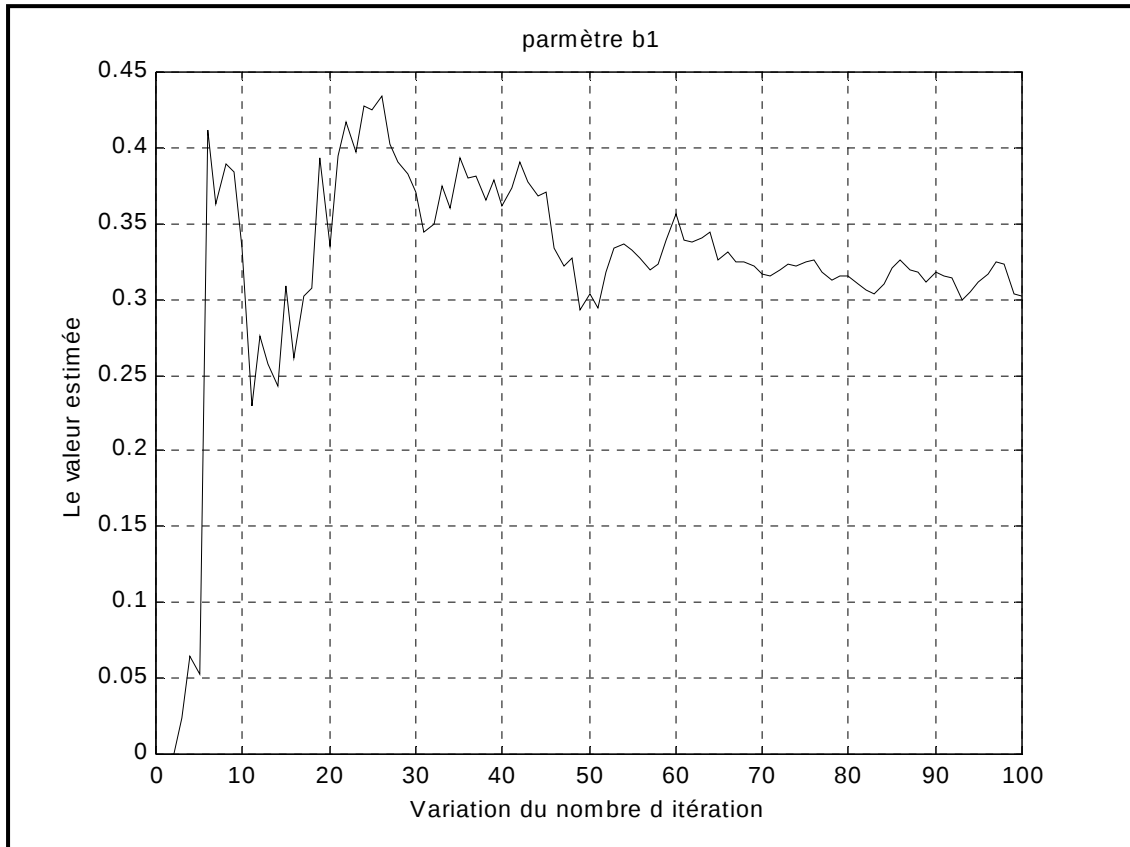
I.4 Les résultats d'application:

nous avons obtenu les résultats illustrés par les figures suivantes :









La remarque qui nous avons introduit, a chaque changement des valeurs initiales de Q , P et R donne une divergence des résultats. Alors l'initialisation de la matrice de variance-covariance et les matrices de covariance est plus importante.

L'identification des paramètres et l'estimation des états sont atteintes après un nombre fini d'itération.

L'utilisation de la technique du vecteur d'état augmenté nous a permis estime les états et l'identification les paramètres d'une manière conjointe (en ligne).

L'existence du bruit n'affecte pas la convergence de l'algorithme.

I.5 Illustration sous Matlab

```
clear;
clc;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
1- déclaration des matrices du système %%%%%%%%%
2- caractéristiques du moteur à courant continu. %%%%%%%%%
3- nombre de périodes d'echantionnage %%%%%%%%%
% %%%%%%%%%
% les paramètres électromécaniques du moteur sont :
r=3;
L=0.001;
fm=0.002;
jm=0.01;ke=1.2;
kc=1.4;
%les matrices du système sont :
a11=-r/L;    a12=-ke/L;
a21=kc/jm;    a22=-fm/jm;
b1=1/L;
% nombre d'echantionnage
%N=input('N');
N=100;
% temps d'echantionnage
```

```

T=0.02;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  Modèle d'etat  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A =[a11 a12; a21 a22];
B=[b1 0]';
C=[0 1];
D=0;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  discrétisation du modèle d'etat  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% discrétisation de matrices A et B à partir des matrices d'origine
[Ad,Bd]=c2d(A,B,T);
% creates a discrete-time SS model with sample time T.
sys=ss(Ad,Bd,C,D,T);
% le nouveau fonction de transfert
Hz=tf(sys);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  bruit de mesure et processus  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
w=0.1*randn(1,N);%Normally distributed random numbers
Q=std(w).^2; %Standard deviation.
v=randn(1,N); %Normally distributed random numbers
R=std(v).^2; %Standard deviation.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  signal de commande  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%1- evolution de signal de commande
u=5*idinput(N); % u: The generated input signal, et N: The length of the input.
% 2- evolution de l'etat
x=zeros(2,N); % vecteur d'état initial
% 3- evolution de la sortie bruitée

```

```

for i=2:N;
    x(:,i)=Ad*x(:,i-1)+Bd*u(i-1);
    y(i)=C*x(:,i);           %sortie non bruité
    yb(i)=C*x(:,i)+v(i);    %sortie bruité
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  estimation des états et identification  %%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%    des paramètres par EKF          %%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% 1- les matrices étendu
    G=[0 1 0 0 0 0 0 0];
    A1=zeros(6,2);
    A2=eye(6);
% 2- initialisation de l'estimateur
    xe=zeros(8,N); % initialisation de vecteur d'états
    P=10*eye(8);  % variance de l'erreur d'estimation
    for i=2:N
        A3=[x(1,i) x(2,i) 0 0 u(i) 0;
            0 0 x(1,i) x(2,i) 0 u(i)];
        F=[Ad A3;A1 A2]; % matrice étendu
% estimateur kalman
        M = F*P*F';
        K=M*G'*inv(G*M*G'+R); % gain de kalman
        P=M-K*G*M;           % la covarionce
% estimation
        xe(:,i)=F*xe(:,i);
        xe(:,i)=xe(:,i)+K*(yb(i)-G*xe(:,i));
    end

figure(1)
plot(u),grid
title('signal de commande');
xlabel('Variation du nombre d itération');

```

%%%%%%%%%

figure(2)

plot(x(1,:)),grid

title('evolution d"état x1');

xlabel('Variation du nombre d itération');

%%%%%%%%%

figure(3)

plot(x(2,:)),grid

title('evolution d"état x2');

xlabel('Variation du nombre d itération');

%%%%%%%%%

figure(4)

plot(y),grid

title('sortie du processus');

xlabel('Variation du nombre d itération');

%%%%%%%%%

figure(5)

plot(y),grid

title('sortie bruitée');

xlabel('Variation du nombre d itération')

%%%%%%%%%

figure(6)

plot(xe(1,:)),grid

title('estimation de x1 ');

xlabel('Variation du nombre d itération');ylabel('Le valeur estimée')

%%%%%%%%%

figure(7)

plot(xe(2,:)),grid

title('estimation de x2 ');

xlabel('Variation du nombre d itération');ylabel('Le valeur estimée')

%%%%%%%%%

figure(8)

```
plot(xe(3,:)),grid
title('paramètre a1');
xlabel('Variation du nombre d itération');ylabel('Le valeur estimée')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(9)
plot(xe(4,:)),grid
title(' paramètre a2');
xlabel('Variation du nombre d itération');ylabel('Le valeur estimée')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(10)
plot(xe(5,:)),grid
title(' paramètre a3');
xlabel('Variation du nombre d itération');ylabel('Le valeur estimée')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(11)
plot(xe(6,:)),grid
title(' paramètre a4');
xlabel('Variation du nombre d itération');ylabel('Le valeur estimée')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(12)
plot(xe(7,:)),grid
title(' paramètre b1');
xlabel('Variation du nombre d itération');ylabel('Le valeur estimée')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
figure(13)
plot(xe(8,:)),grid
title(' paramètre b2');
xlabel('Variation du nombre d itération');ylabel('Le valeur estimée')
```

II. APPLICATION DE FILTRE DE KALMAN

EXEMPLE (2)

Le modèle dit " quart de véhicule " utilisé pour étudier une suspension active de voiture est représenté sur le FigV.1. L'organe de commande permet d'appliquer des efforts u entre la roue (de masse m repérée par sa position verticale z) et la caisse du véhicule (de masse M repérée par sa position verticale Z).

On désigne par K et f la raideur et le frottement visqueux de la suspension passive, par k la raideur du pneu entre la roue et la route. Enfin, on note w la position verticale du point de contact pneu/sol sollicitée par les irrégularités de la route (bruit de Roulement). On mesure l'accélération de la caisse avec un accéléromètre sensible à la gravité ($g=-9.81\text{m/s}^2$) et on note v le bruit de mesure de ce capteur.

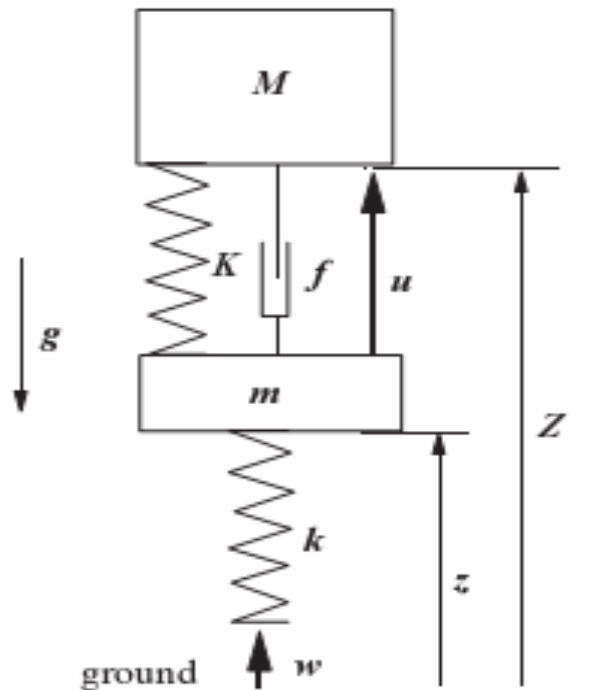


Fig.V.1. Modèle 1/4 de véhicule.

On note δz et δZ les variations de z et Z autour d'une position d'équilibre z_0 et Z_0 (obtenue en supposant que $w=0$, $u=0$ et que la gravité est entièrement compensée par l'écrasement des 2 raideurs K et k). En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur les 2 masses M et m (calcul aux variations), on obtient :

$$\begin{aligned} M\ddot{\delta Z} &= K(\delta \dot{Z} - \delta Z) + f(\dot{\delta Z} - \delta \dot{Z}) + u \\ m\ddot{\delta Z} &= -K(\delta \dot{Z} - \delta Z) - f(\dot{\delta Z} - \delta \dot{Z}) - u - k(\delta \dot{Z} - w) \end{aligned} \quad (\text{Eq.V.6})$$

En choisissant $x = [\delta Z, \delta \dot{Z}, \dot{\delta Z}, \dot{\delta Z}]^T$ comme vecteur d'état, on obtient la représentation d'état suivante:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -K/M & K/M & -f/M & f/M \\ K/m & -(K+k)/m & f/m & -f/m \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/M & 0 \\ -1/m & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/k \end{bmatrix} w \\ y &= [-K/M \quad K/M \quad -f/M \quad f/M]x + [1/M \quad -1] \begin{bmatrix} u \\ g \end{bmatrix} + v \end{aligned} \quad (\text{Eq.V.7})$$

On obtient donc un modèle du type de (1.1) avec $n=4$, $m=2$, $q=1$, $p=1$.

On reconnaît dans les matrices (A, B, C, D) du modèle (1.1) la représentation d'état "classique" du transfert entre l'entrée u et la sortie y:¹:

$$F(s) = D + C (sI - A)^{-1} B \quad (\text{Eq.V.8})$$

La réponse de ce modèle à des entrées déterministes u(t) sur un horizon $t \in [t_0, t]$ et à des conditions initiales $x(t_0)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (\text{Eq.V.9})$$

Démonstration: voir annexe A

Des essais en condition réelle de roulement ont montré que la densité spectrale de puissance du bruit de roulement pour un véhicule roulant à 90km/h sur une départementale pouvait être approchée par la fonction suivante:

$$\Phi_{ww}(w) = \frac{w^2 + 10^4}{w^4 - 1.75 \cdot 10^4 w^2 + 10^8} \quad (\text{Eq.V.10})$$

a) Le spectre complexe du bruit w(t) par définition:

$$\Phi_{ww}(s) = \frac{-s^2 + 10^4}{s^4 + 1.75 \cdot 10^4 s^2 + 10^8}$$

b) la représentation de markovienne de w(t):

la décomposition $\Phi_{ww}(s) = G(-s)G(s)$ s'écrit :

$$\Phi_{ww}(s) = \left(\frac{s^2 + 10^2}{s^2 - 50s + 10^4} \right) \left(\frac{-s^2 + 10^2}{s^2 + 50s + 10^4} \right) \quad (\text{Eq.V.11})$$

Il faut regrouper dans $G(s)$ tous les pôles stables de $\Phi_{ww}(s)$, ce qui permet de fixer le dénominateur de $G(s)$ mais il n'y a aucune condition sur la "stabilité" des zéros de $G(s)$. Il y a donc 2 filtres stables qui permettent, lorsqu'il sont attaqués par un bruit blanc normalisé $b(t)$, de générer un bruit de spectre $\Phi_{ww}(s)$:

$$G(s) = \left(\frac{-s^2 + 10^2}{s^2 + 50s + 10^4} \right) \text{ et } G'(s) = \left(\frac{s^2 + 10^2}{s^2 + 50s + 10^4} \right)$$

Si l'on choisi $G(s)$ alors une représentation markovienne de $w(t)$ s'écrit (on choisit par exemple une forme compagne observable):

$$\begin{cases} \dot{x}_G(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -50 \end{bmatrix} x_G(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} b(t) \\ w(t) = \begin{bmatrix} 10^2 & -1 \end{bmatrix} x_G(t) \end{cases} \quad (\text{Eq.V.12})$$

c) La variance peut être calculée de 2 façons :

– à partir du spectre complexe et du théorème de la valeur initiale (voir Remarque 1.2 dans l'annexe A) :

$$\begin{aligned} \Phi_{ww}(s) &= \frac{\frac{1}{50}s + \frac{1}{2}}{s^2 + 50s + 10^4} + \frac{-\frac{1}{50}s + \frac{1}{2}}{s^2 - 50s + 10^4} = \Phi_{ww}^+(s) + \Phi_{ww}^-(s) \\ \sigma_w^2 &= \phi_{ww}(\tau) \Big|_{\tau=0} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \Phi_{ww}^+(s) = 1/50 \end{aligned} \quad (\text{Eq.V.13})$$

– à partir de la représentation markovienne et du théorème 1.1 dans l'annexe B: en régime permanent, la matrice de covariance P du vecteur d'état x_G de la représentation

1.15 vérifie l'équation de **Lyapunov** :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10^4 & -50 \end{bmatrix} P + P \begin{bmatrix} 0 & -10^4 \\ 1 & -50 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow P &= \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \sigma_w^2 &= \begin{bmatrix} 10^2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^{-6} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10^2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1/50 \end{aligned} \quad (\text{Eq.V.14})$$

II.1. Illustration sous Matlab

Le fichier **bruit.m** donné ci-dessous permet d'illustrer l'utilisation de macro fonctions Matlab pour résoudre l'exemple. Il montre également comment simuler sur un calculateur numérique un tel bruit coloré à partir d'un bruit pseudo-blanc échantillonné-bloqué à la cadence dt . Il utilise pour cela le fichier Simulink **simule_bruit.mdl** représenté sur la figure V.2. Les réponses du bruit pseudo-blanc $b(t)$ et du bruit de roulement $w(t)$ présentées respectivement figures V.3 et V.4 mettent en évidence que la variance de $w(t)$ est indépendante de dt (du moment que dt est rapide par rapport à la dynamique du filtre $G(s)$) alors que la variance de $b(t)$ est égale à $1/dt$:

on retrouve que cette variance tend vers l'infini si dt tend vers 0 tout comme la variance d'un bruit blanc continu est infinie (par contre la densité spectrale de $b(t)$ est indépendante de dt et vaut 1).

L'exemple B.1 en annexe complète cette illustration par une analyse de la variance du bruit w en temps discret (à la cadence dt).

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all close all

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Définition du filter %%%%%%%%%%%%%%%
G=tf([-1 100],[1 50 10000])

% Calcul d'une réalisation:

[A,B,C,D]=ssdata(G);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calcul de la variance par l'équation de Lyapunov %%%%%%%%%%%%%%%
P=lyap(A,B*B');
var_w=C*P*C'

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% ==> On retrouve bien le résultat espéré: variance=1/50 %%%%%%%%%%%%%%%
% (écart type: sigma=0.14)

% Validation en simulation: voir fichier SIMULINK: simule_bruit.mdl
% Choix d'un pas d'échantillonnage rapide par rapport à
% la dynamique du filtre (100 rd/s):
dt=0.0001;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Simulation %%%%%%%%%%%%%%%
sim('simule_bruit');

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Tracé des résultats %%%%%%%%%%%%%%%

```

```

plot(b.time,b.signals.values,'k');
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calcul numérique de la variance de b(t) %%%%%%%%%%%%%%%
var(b.signals.values) % On retrouve var_b=1/dt=10000.
figure
plot(w.time,w.signals.values,'k')
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calcul numérique de la variance de w(t) %%%%%%%%%%%%%%%
var(w.signals.values) % On retrouve var_w=1/50 (à peu près)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% On multiplie le pas d'échantillonnage par 10 %%%%%%%%%%%%%%%
dt=0.001;
sim('simule_bruit');
figure(1) hold on
plot(b.time,b.signals.values,'g-');
var(b.signals.values) % On retrouve var_b=1/dt=1000.
figure(2) hold on
plot(w.time,w.signals.values,'g-')
var(w.signals.values) % On retrouve var_w=1/50 (à peu près).
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

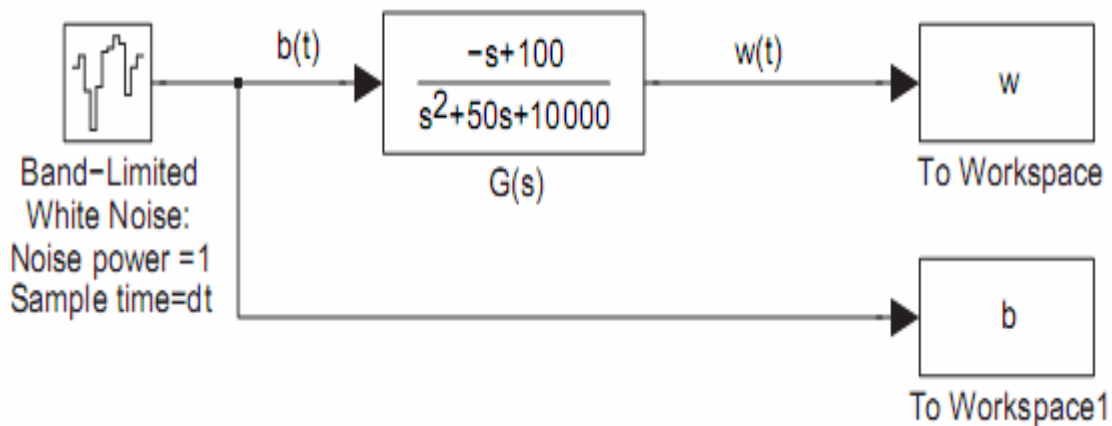


Fig.V.2 Fichier SIMULINK simule bruit.mdl pour la simulation du bruit de roulement.

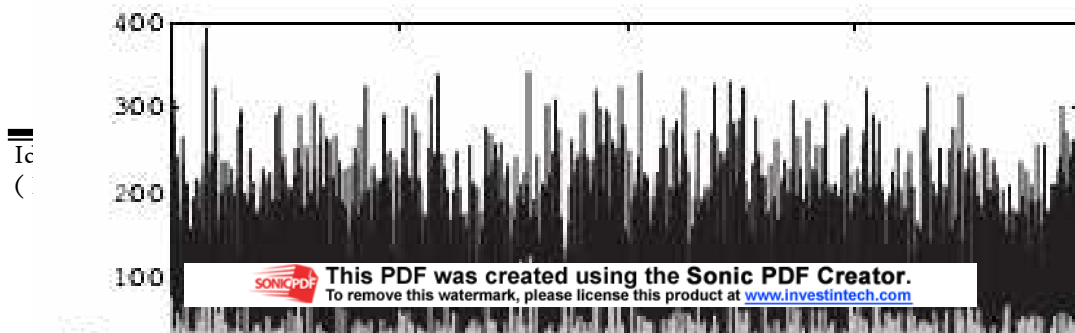


Fig.V.3. Réponse du bruit blanc normalisé $b(t)$ (avec $dt=0.0001s$: noir ; avec $dt=0.001s$:gris).

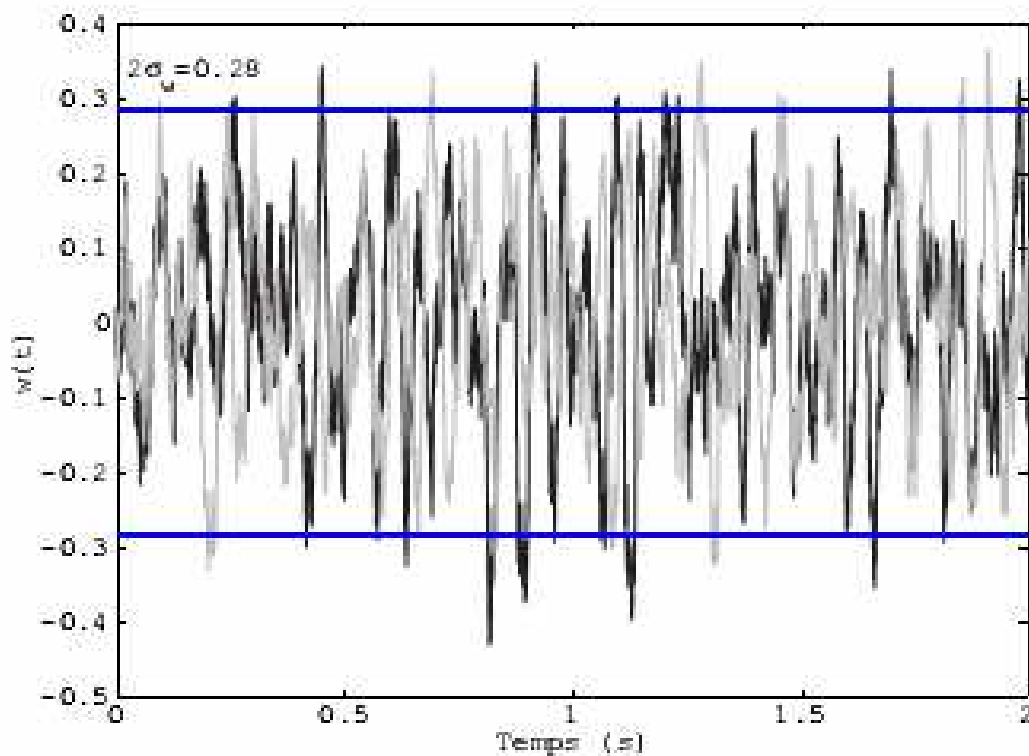


Fig.V.4. Réponse du bruit de roulement $w(t)$ (avec $dt=0.0001s$: noir; avec $dt=0.001s$: gris).

Cette exemple a permis de présenter les outils mathématiques utilisés pour analyser les signaux aléatoires continus et leurs transmission dans les systèmes dynamiques linéaires. Il

a également permis d'introduire la notion de bruit gaussien centré (hypothèse requise dans le modèle de Kalman présenté dans le chapitre III) qui a l'avantage d'être entièrement caractérisé par sa fonction d'autocorrélation (ou son spectre complexe s'il est stationnaire).

III. Conclusion

Le filtre de Kalman est un observateur linéaire qui peut être, il permet de résoudre, dans le domaine temporel le problème de l'estimation statistique pour des systèmes linéaires. Une condition nécessaire pour la convergence du filtre, l'observabilité du système.

Si on veut estimer des paramètres recherchés, le modèle devient alors non linéaire. Dans ce cas, on applique le filtre de Kalman étendu au modèle linéarisé.

Nous pouvons dire que l'EKF est classé parmi les bons estimateurs. Ce filtre est basé sur des itérations mathématiques qui converge rapidement.

CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail nous avons montrés qu'on peut effectuer une estimation des états et une identification des paramètres conjoints d'un système monovariable en utilisant la technique du vecteur d'état augmenté qui comporte en même temps les paramètres et les états du système. On remarque qu'on peut arriver à une forme canonique appropriée. Une étude comparative peut être faite en utilisant le filtre de Kalman étendu. On remarque que les algorithmes converges et de bons résultats sont obtenus.

La méthode du filtre de Kalman est une méthode efficace qui assure une meilleure estimation d'état et une meilleure identification des paramètres pour le système monovariable et se prête bien face à la perturbation comparativement aux autres méthodes d'identification. L'exemple théorique illustre l'efficacité du filtre de Kalman avec sa rapidité de convergence vers les états et les paramètres à identifier.

Une autre approche est utilisée pour faire une étude comparative, il s'agit de la technique du filtre de Kalman étendu qui a donnée des résultats acceptables par rapport à la méthode du filtre de Kalman.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - P.Borne, G.Dauphin-Tanguy, J.P.Richard, F.Rotella & I.Zambettakis

« Modélisation et Identification des processus » (tome 1 & 2) 1991.

[2] - Yacine OUSSAR.

« Réseaux d'ondelettes et réseaux de neurones pour la modélisation statique et dynamique de processus. » Spécialité: Robotique. Université Paris VI "PIERRE ET MARIE CURIE". 1998.

[3] - Fabien Campillo

« Filtrage En Temps Discret », DEA de Mathématiques Appliquées. Université de Provence 1996/97.

[4] - Arneud Clavel.

« Modélisation et identification paramétrique de systèmes hystérétiques. Application à la suspension des véhicules routiers ». Devant l'Université de Rennes 1.

(Mention : *Traitement du signal*) 2002.

[5] - M.Ksouri & P.Borne

« La commande par ordinateur Application aux procédés industriels », 1999.

[6] - Mehda Hachani & Mehaouchi Lazhar.

« Identification des Paramètres et Estimation des Etats Conjointes d'un système Mono-variables par Le Filtre de Kalman ». Biskra, (Automatique) Promotion 2004.

[7] - C.Foulard, S.Gentil & J.P.Sandraz

« Commande et régulation par ordinateur numérique » Ed. Eyrolles, paris, 1987.

[8] - Iain M. Johnstone & Bernard W. Silverman

« Empirical Bayes Selection of Wavelet Thresholds », février 2006.

[9] – Yves Granjon

« AUTOMATIQUE système linéaires, non linéaire, à temps continu, à temps discret, représentation d'état », Dépôt légal de la 1^{er} édition: septembre 2001.

[10] - Martin Breton

Rapport pour le cours GEL-64459-Lectures dirigées en génie électrique III « Suivi temporel d'objets en 2D et 3D: revue de littérature sur le filtre de Kalman et autres méthodes par propagation de densité de probabilité conditionnelle. » 2004.

[11] – Djokhrab Ala Eddine

« Estimation Des Etats et Identification Des Paramétras par Le F-K-E », mini projet, 2006.

[12] - D.Alazard

« Introduction au Fltre de Kalman », Janvier 2005 - version 0.0

A. Rappels et définitions

A.1. Caractérisation d'une variable aléatoire scalaire

Soit X une variable aléatoire scalaire prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction de répartition $F(x)$ associe à tout réel x la probabilité de l'événement $X < x$. On note :

$$F(x) = P[X < x].$$

Propriétés :

- $\square x_1 < x_2, P[x_1 \leq X < x_2] = F(x_2) - F(x_1),$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$
- $F(x)$ est monotone, non décroissante, et peut être continue ou discontinue selon que X prenne des valeurs continues ou discrètes.

Si $F(x)$ est dérivable, alors sa dérivée est appelée densité de probabilité et notée $p(x)$:

$$p(x) = dF(x)/dx \quad \text{soit : } p(x)dx = P[x \leq X < x + dx] .$$

Pour caractériser et manipuler mathématiquement une variable aléatoire X , on utilise également les moments de cette variable. Le moment d'ordre 1 est plus connu sous le nom de moyenne ou espérance mathématique. Le moment centré d'ordre 2 est appelé variance que l'on note $\text{var}_x = \sigma_x^2$; σ_x désigne l'écart type.

Soit :

- **l'espérance mathématique ou moyenne** : $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$
- **le moment d'ordre k** : $E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x)dx$
- **le moment centré d'ordre k** : $E[(X - E[X])^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^k p(x)dx$

Les moments d'ordre supérieur ou égal à 3 sont très peu utilisés car ils se prêtent mal au calcul théorique. L'intérêt (mathématique) des variables aléatoires gaussiennes est qu'elles sont entièrement caractérisées par leurs moments d'ordre 1 et 2. Soit X une variable aléatoire gaussienne de moyenne m , et d'écart type σ ,

$$\text{alors: } p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad E[m] = m, \quad E[(x-m)^2] = \sigma^2$$

Variable aléatoire discrète :

si la variable aléatoire X prends ses valeurs dans un ensemble discret de N valeurs x_i , $i=1, \dots, N$ alors on ne parle plus de densité de probabilité et on définit directement la "probabilité que $X=x_i$ " que l'on note $P(X=x_i)$. Le calcul des moments fait alors intervenir une somme discrète :

$$E[X^k] = \sum_{i=1}^N x_i^k P(X = x_i)$$

A.2. Caractérisation d'une variable aléatoire à plusieurs dimensions

Soit $X = [X_1, \dots, X_q]^T$ une variable aléatoire à q dimensions prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^q$.

Fonction de répartition

$$F(x_1, \dots, x_q) = P(X_1 \leq x_1, \text{ et } X_2 \leq x_2, \text{ et } \dots, \text{ et } X_q \leq x_q).$$

Densité de probabilité

$$p(x_1, \dots, x_q) = \frac{\partial^q F(x_1, \dots, x_q)}{\partial x_1 \dots \partial x_q}$$

Moments

On note: $x = [x_1, \dots, x_q]^T$ et on ne s'intéressera qu'au vecteur des moments d'ordre 1 (c'est-à-dire le vecteur moyen) et à la matrice des moments d'ordre 2 centrés (c'est-à-dire la matrice de covariance).

- **Moyenne** : $E[X] = [E[X_1], \dots, E[X_q]]^T$.
- **Covariance** : $\text{Cov}_x = E[(X - E[X])(X - E[X])^T]$. L'élément $\text{Cov}_x(i, j)$ de la ligne i et colonne j de cette matrice de covariance vérifie :

$$Cov_x(i, j) = \int_{R^2} (x_i - E[X_i])(x_j - E[X_j]) dF(x_i, x_j).$$

La matrice de covariance est définie, positive et symétrique.

Vecteur aléatoire gaussien de moyenne m et de covariance Δ :

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{q/2} \sqrt{\det \Delta}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T \Delta^{-1}(x-m)}.$$

Le vecteur aléatoire gaussien de moyenne m et de covariance Δ peut être généré à partir du vecteur gaussien normalisé N (c'est-à-dire de moyenne nulle et de covariance unité) de la façon suivante: $X = m + G N$

ou G est une matrice vérifiant: $GG^T = \Delta$

Indépendance:

Deux variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes si et seulement si:

$$F(x_1, x_2) = F(x_1) F(x_2).$$

Une condition nécessaire d'indépendance s'écrit:

$$E(X_1, X_2) = E(X_1) E(X_2).$$

A.3. Signal aléatoire (processus stochastique)

Etant donné une variable aléatoire X , le signal aléatoire ou processus stochastique $x(t)$ est un signal fonction du temps t tel que pour tout t fixé, $x(t)$ corresponde à une valeur de la variable aléatoire X .

A.4. Bruit blanc

est un signal aléatoire stationnaire de variance infinie dont la fonction d'autocorrélation est proportionnelle à un Dirac (c'est-à-dire un spectre complexe constant sur toute la plage des fréquences). Cela traduit que les valeurs du signal pris à deux instants, même très proches, ne sont pas du tout corrélées.

Les bruits blancs gaussiens centrés $w(t)$ et $v(t)$ que nous allons utiliser dans le cadre du filtre de Kalman sont donc entièrement définis par leur densités spectrales respectives $W(t)$ et $V(t)$:

$$E[w(t)w(t+\tau)^T] = W(t)\delta(\tau), E[v(t)v(t+\tau)^T] = V(t)\delta(\tau)$$

Les matrices $W(t)$ et $V(t)$ deviennent constantes dans le cas de bruits blancs stationnaires. Le bruit blanc gaussien normalisé est tel que $W(t) = I_{q \times q}$ (q : nombre de composantes dans le bruit).

B. Passage d'un bruit dans un système linéaire

B.1 Complément: caractérisation des signaux aléatoires discrets

Soit $w(n)$ une suite de variables aléatoires.

- Espérance mathématique (moyenne): $m(n) = E[w(n)]$
- Fonction d'autocorrélation : $\phi_{ww}(n, k) = E[w(n)w^T(n+k)]$
- Stationnarité à l'ordre 2 : $m(n) = m$; $\phi_{ww}(n, k) = \phi_{ww}(k) \quad \forall n$
- Variance: $\sigma_w^2 = \phi_{ww}(k)|_{k=0}$
- Spectre complexe: $\Phi_{ww}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_{ww}(k)z^{-k}$

$$\phi_{ww}(k) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\text{cercle unité}} \Phi_{ww}(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{ww}(e^{j\theta}) e^{j\theta k} d\theta$$

- Densité spectrale de puissance: cette fonction de la pulsation w suppose que l'on introduise une échelle de temps. On introduit donc la période d'échantillonnage dt entre les événements $w(n)$.

$$\Phi_{ww}(w) = \Phi_{ww}(z) \Big|_{z=e^{jw dt}}$$

On a alors:

$$\phi_{ww}(k) = \frac{dt}{2\pi} \int_{-\pi/dt}^{\pi/dt} \Phi_{ww}(w) e^{jw dt k} dw \quad \text{et} \quad \sigma_w^2 = \frac{dt}{2\pi} \int_{-\pi/dt}^{\pi/dt} \Phi_{ww}(w) dw$$

La variance est à $dt/2/\pi$ près, l'intégrale de la densité spectrale de puissance entre $-\pi/dt$ et π/dt .

B.2 Approche temporelle

B.2.1 Cas continu :

Théorème 1.1:

Soit le système linéaire continu:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Mw(t) \quad (\text{Eq.B.1})$$

$w(t)$ est un bruit blanc gaussien centré de densité spectrale de puissance W . On note $m(t_0)$ et $P(t_0)$ la moyenne et la covariance de l'état initial $x(t_0)$ (lui aussi aléatoire gaussien mais indépendant de $w(t)$). On montre que $x(t)$ est un signal aléatoire gaussien :

- de moyenne : $m(t) = E[x(t)] = e^{A(t-t_0)} m(t_0)$
- de covariance $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T]$ vérifiant l'équation différentielle de LYAPUNOV :

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + MWM^T \quad (\text{Eq.B.2})$$

Si le système est stable (toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle négative) on tend vers un régime permanent: $\dot{P} = 0$ et $P(t) = P$ vérifie alors l'équation de Lyapunov continue:

$$AP + PA^T + MWM^T = 0 \quad (\text{Eq.B.3})$$

Démonstration:

l'intégration de l'équation (B.1) entre l'instant initial t_0 et le l'instant courant t s'écrit:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} M w(\tau) d\tau$$

$x(t)$ est donc une combinaison linéaire de signaux aléatoires gaussiens ($x(t_0)$ et $w(\tau)$), $x(t)$ est donc également un signal aléatoire gaussien. Calculons sa moyenne $m(t) = E[x(t)]$ et sa matrice de covariance $P(t) = E[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))^T]$.

Moyenne $m(t)$:

$$m(t) = e^{A(t-t_0)} E[x(t_0)] + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} M E[w(\tau)] d\tau ,$$

or $E[w(\tau)] = 0$ (bruit centré) et $E[x(t_0)] = m(t_0)$ donc :

$$\boxed{m(t) = e^{A(t-t_0)} m(t_0)} .$$

Covariance $P(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) - m(t) &= e^{A(t-t_0)} \left(x(t_0) - m(t_0) \right) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} M w(\tau) d\tau \\ &= e^{A(t-t_0)} \left(x(t_0) - m(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M w(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (\text{Eq.B.4})$$

$$\begin{aligned} \left(x(t) - m(t) \right) \left(x(t) - m(t) \right)^T &= e^{A(t-t_0)} \left(\left(x(t_0) - m(t_0) \right) \left(x(t_0) - m(t_0) \right)^T + \right. \\ &\quad + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M w(\tau) \left(x(t_0) - m(t_0) \right)^T d\tau + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \left(x(t_0) - m(t_0) \right) w^T(\tau) M^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau + \\ &\quad \left. + \iint_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M w(\tau) w^T(u) M^T e^{A^T(t_0-u)} d\tau du \right) e^{A^T(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (\text{Eq.B.5})$$

$$\begin{aligned} P(t) &= e^{A(t-t_0)} \left(P(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M E \left[w(\tau) \left(x(t_0) - m(t_0) \right)^T \right] d\tau + \right. \\ &\quad + \int_{t_0}^t E \left[\left(x(t_0) - m(t_0) \right) w^T(\tau) \right] M^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau + \\ &\quad \left. + \iint_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M E \left[w(\tau) w^T(u) \right] M^T e^{A^T(t_0-u)} d\tau du \right) e^{A^T(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (\text{Eq.B.6})$$

Du fait des hypothèses ($x(t_0)$ et $w(\tau)$ sont indépendants $\forall \tau > t_0$ et $w(t)$ est un bruit blanc centré), on peut affirmer:

- $E[w(\tau)(x(t_0) - m(t_0))^T] = 0$
- $E[w(\tau)w^T(u)] = W\delta(\tau - u)$

On a donc :

$$P(t) = e^{A(t-t_0)} \left(P(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t_0-\tau)} M W M^T e^{A^T(t_0-\tau)} d\tau \right) e^{A^T(t-t_0)}. \quad (\text{Eq.B.7})$$

et

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \frac{dP(t)}{dt} = A e^{A(t-t_0)} \left(P(t_0) + \dots \right) e^{A^T(t-t_0)} + e^{A(t-t_0)} \left(P(t_0) + \dots \right) e^{A^T(t-t_0)} A^T \\ &\quad + e^{A(t-t_0)} \left(e^{A(t_0-t)} M W M^T e^{A^T(t_0-t)} \right) e^{A^T(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (\text{Eq.B.8})$$

Soit :

$$\boxed{\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + M W M^T}. \quad (\text{Eq.B.9})$$

B.2.2 Cas discret :

Théorème B.1 Soit le système linéaire discret:

$$x(k+1) = A_d x(k) + M_d w_d(k) \quad (\text{Eq.B.10})$$

$w_d(k)$ est un bruit pseudo-blanc gaussien centré de densité spectrale W_d (c'est-à-dire $E[w_d(k)w_d(k+j)^T] = W_d \delta(j)$). On note $m(0)$ et $P(0)$ la moyenne et la covariance de l'état initial $x(k_0) = (0)$ (lui aussi aléatoire gaussien mais indépendant de $w_d(k)$).

On montre que $x(k)$ est un signal aléatoire gaussien:

- de moyenne: $m(k) = E[x(k)] = A_d^{k-k_0} m(0)$
- de covariance $P(k) = E[(x(k) - m(k))(x(k) - m(k))^T]$ vérifiant l'équation récurrente de LYAPUNOV : $P(k+1) = A_d P(k) A_d^T + M_d W_d M_d^T$ (Eq.B.11)

Si le système est stable (toutes les valeurs propres de A_d sont de module inférieur à 1) on tend vers un régime permanent : $P(k+1) = P(k) = P$. Vérifie alors l'équation de LYAPUNOV discrète : $P = A_d P A_d^T + M_d W_d M_d^T$ (Eq.B.12)

Remarque B.2 A partir de l'équation B.7 on retrouve l'équation de Lyapunov discrète dans le cas d'un système continu échantillonné à la cadence dt . Il suffit de prendre $t_0 = ndt$ et $t = (n+1)dt$ ou dt désigne la période d'échantillonnage. On note alors $P(t) = P(n+1)$ et $P(t_0) = P(n)$ on obtient:

$$P(n+1) = e^{A_d t} P(n) e^{A_d^T dt} + \int_0^{dt} e^{A_d u} M_d W_d M_d^T e^{A_d^T u} du$$

On note :

- $e^{A_d t} = A_d$: la matrice dynamique discrète,
- $\int_0^{dt} e^{A_d u} M_d W_d M_d^T e^{A_d^T u} du = W_d$: la matrice de covariance du bruit intégré sur une période d'échantillonnage,

Pour obtenir: $P_{n+1} = A_d P_n A_d^T + W_d$ (dont le régime permanent s'écrit: $P_n = A_d P_n A_d^T + W_d$).

On retrouve bien l'équation (B.11) avec $M_d = I$. On peut vérifier que:

- si A est inversible, W_d vérifie l'équation de Lyapunov :

$$A W_d + W_d A^T + M W M^T - e^{A dt} M W M^T e^{A^T dt} = 0$$

- $W_d \approx dt M W M^T$ si dt est petit par rapport au temps de réponse du système.