

N° d'ordre :

N° de série :



République Algérienne Démocratique et Populaire

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique**

UNIVERSITÉ HAMMA LAKHDAR D'EL OUED

FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES

Mémoire de fin d'étude

MASTER ACADEMIQUE

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Spécialité: Mathématiques fondamentales et appliquées

Thème

**RÉSOLUTION D'UNE ÉQUATION
DIFFÉRENTIELLE DE SECOND ORDRE PAR
LA MÉTHODE DES ONDELETTES**

Présenté par: ATALLAH Awatef

GUITOUBI Nadia

Soutenu devant le jury composé de

DAHDA Bachir

MCA

Président

Univ. d'El Oued

BEN ALI Brahim

MCA

Rapporteur

Univ. d'El Oued

BEGGAS Mehammed

MCA

Examinatrice

Univ. d'El Oued

Année universitaire 2019 – 2020.

Dédicaces

Nous dédions ce travail à :

Nos chers parents

Nos frères et nos sœurs

Nos amies

Et à tous nos familles.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons utilisées une étude informaticiene de la méthode numérique relative à la nouvelle méthode (l'ondelette de Haar) pour résoudre des équations différentielles linéaires, puis nous avons fais une comparaison entre les résultats de cette méthode et les résultats de la méthode classique (de Euler). L'objectif de ce travail est de montrer l'efficacité de la méthode présentée et ses avantages sur l' autre méthode. L'ondelette de Haar est une méthode simple et ses résultats numériques sont proches ainsi plus précis à la solution exacte que la méthode classique.

Mote clés: Résolution, équation différentielle, ondelettes de Haar, méthode de Euler, méthode numérique.

Abstract

In this thesis, we used a computer study of the numerical method relating to the new method (the Haar wavelet) to solve linear differential equations, then we made a comparison between the results of this method and the results of the classical method (of Euler). The objective of this work is to show the effectiveness of the presented method and its advantages over the other method. The Haar wavelet is a simple method and its numerical results are thus closer to the exact solution than the classical method.

Key words: Resolution, differentielle equations, Haar wavelts, Euler's method, numerical method.

المخلص

في هذه المذكرة، استخدمنا دراسة حاسوبية للطريقة العددية المتعلقة بالطريقة الجديدة (مويجة هار) لحل المعادلات التفاضلية الخطية، ثم قمنا بإجراء مقارنة بين نتائج هذه الطريقة ونتائج الطريقة الكلاسيكية (لأويلر). الهدف من هذا العمل هو إظهار فعالية الطريقة المقدمة ومزاياها على الطريقة الأخرى. مويجة هار هي طريقة بسيطة وبالتالي فإن نتائجها العددية أقرب إلى الحل الدقيق من الطريقة الكلاسيكية. الكلمات المفتاحية: الدقة، معادلة تفاضلية، مويجات هار، طريقة أولر، الطريقة العددية.

Remerciements

*A vant tout chose, nous tenons à remercier **Allah** le tout puissant, pour nous avoir donné assez de courage pour accomplir ce travail.*

*Comme nous tenons à remercier vivement, l'encadreur de mémoire **Dr. BEN ALI Brahim** maitre de congrérence à l'université Echahid Hamma Lakhder El Oued ; pour sa patience, son encouragement et disponibilité ainsi que son soutientrés précirux tout au long de ce travail.*

*Nous remercions encore, **Dr. BELOUL Said** et M^{me} la professeure : **DOUDI Nadjet** qui nous a aidé à accomplir ce travail.*

nous remercions les membres du jury pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de siéger à notre défense et de revoir notre travail

Nous remercions vivement nos parents et M. le directeur Mouhammed SEBAA et M. Linspecteur MEAMMRI Meammer pour l'aide et le sautient moral qu'ils nous ont prodigués.

Nos sentiments de reconnaissance et nos remerciements chaleureux également au nos camarades de la promation 2020 de Mathématiques et nos amis surtout

Abdelmounaim, Amina, Asma, Safa,.... pour leur compagnie, leur aide, leur humour, et leur soutien moral aux moments où tout allait mal.

Enfin à tous ceux qui ont pas été mentionnés et qui n'ont contribué à la réalisation, de prés ou de loin, de cetravail vous nos remerciements.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction générale | vi |
| 1 Généralité sur les équation différentielles | 1 |
| 1.1 Préliminaire | 1 |
| 1.1.1 Espace de Hilbert | 1 |
| 1.1.2 L'espace $L^2(\mathbb{R})$ | 2 |
| 1.1.3 Transformation de Fourier | 2 |
| 1.2 Définition de l'équation différentielle | 3 |
| 1.2.1 Classification des équations différentielles | 3 |
| 1.3 Équations différentielles d'ordre supérieur à un (notions générales) | 3 |
| 1.3.1 Équation différentielle lineaires d'ordre n | 4 |
| 1.4 Équation différentielle ordinaire du second ordre | 5 |
| 1.4.1 Propriétés et définitions des équations différentielle linéaires de second ordre | 5 |
| 1.4.2 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants | 7 |
| 1.4.3 Équation différentielle du second ordre à coefficients variables | 10 |
| 1.5 L'équations différentielles de Cauchy-Euler | 12 |
| 1.5.1 La solution particulière à l'équation différentielle de d'Euler | 14 |
| 1.6 Résolution Numérique des équations différentielles | 15 |
| 1.6.1 Introduction, le problème mathématique | 15 |
| 1.6.2 La Méthode d'Euler | 16 |
| 1.6.3 Résolution de systèmes différentiels dans \mathbb{R}^2 | 17 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 2 | Rappel Sur la Théorie des Ondelettes | 18 |
| 2.1 | La théorie des ondelettes | 18 |
| 2.1.1 | Définitions et quelques exemples sur les ondelette | 18 |
| 2.1.2 | Exemples d'ondelettes | 19 |
| 2.1.3 | Propriétés des ondelettes | 20 |
| 2.1.4 | Transformée en ondelettes (TO) | 20 |
| 2.1.5 | Transformée en ondelettes continue(TOC) | 21 |
| 2.1.6 | Transformée en ondelettes discrètes (TOD) | 21 |
| 2.2 | Analyse multirésolution (AMR) | 22 |
| 2.2.1 | Quelques exemples | 24 |
| 2.3 | Décomposition en ondelettes orthogonales | 24 |
| 2.3.1 | Les bases d'ondelettes | 24 |
| 2.3.2 | Transformée en ondelettes [3] | 25 |
| 2.4 | L'ondelette de Haar sur l'intervalle [0,1] | 26 |
| 2.4.1 | Ondelettes de Haar sur $L^2(\mathbb{R})$ | 26 |
| 2.4.2 | Le système de Haar | 27 |
| 2.4.3 | Orthogonalité du système de Haar | 29 |
| 2.4.4 | Le système de Haar sur [0,1] | 29 |
| 3 | Applications | 34 |
| 3.1 | Méthode de collocation d'ondelettes | 35 |
| 3.2 | Méthode d'ondelette de Haar | 35 |
| 3.2.1 | Intégration de la fonction Haar | 35 |
| 3.2.2 | la matrice opérationnelle du produit de l'ondelette Haar | 36 |
| 3.3 | Approximation des fonctions | 39 |
| 3.4 | Méthode des ondelettes de Haar pour les équations différentielles ordinaires | 40 |
| 3.4.1 | Problème de valeur initiale | 40 |
| | Conclusion générale | 54 |
| | Bibliographie | 54 |

Table des figures

- 2.1 L'ondelette de Haar .
- 2.2 La première dérivée G.
- 2.3 les graphiques de $\psi(t)$ et $|\widehat{\psi}(w)|$.
- 2.4 Fonction d'échelle ou ondelette père.
- 2.5 Fonction d'échelle de Haar.

Introduction générale

Les équations différentielles sont en plusieurs applications en physique et en ingénierie. Cependant, les solutions analytiques des équations différentielles n'existent pas ou sont difficiles à trouver. C'est précisément pour cette raison que plusieurs méthodes numériques ont été développées pour trouver des solutions des équations différentielles.

L'utilisation des ondelettes a pris de l'importance d'une application numérique.

Les ondelettes ont été développées indépendamment dans les domaines des mathématiques, de la physique quantique, de l'ingénierie et des technologies médicales, etc. La principale branche des mathématiques aux ondelettes a commencé avec Joseph Fourier en 1807 avec ses théories de l'analyse des fréquences.

Les efforts de Fourier avec l'analyse des fréquences ont conduit à l'analyse de Fourier bien connue. Le travail de Fourier est basé sur le fait que la fonction périodique peut être représentée comme une combinaison linéaire de sinus et de cosinus [17]. Une autre contribution de Fourier est la transformée de Fourier. Il transforme une fonction f de son domaine temporel en son domaine fréquentiel [11].

L'analyse de Fourier est adaptée à l'étude de signaux stationnaires; l'analyse par les ondelettes est adaptée aux signaux non-stationnaires.

A noter que dans l'histoire de la mathématique l'analyse des ondelettes remonte au début des années (1930) et sont actuellement utilisées dans plusieurs domaines tels que : le traitement du signal d'image, la compression des données.

Même si peu de gens connaissent probablement très peu de choses sur le concept des ondelettes ils contrastent avec son impact phénoménal dans la technologie Aujourd'hui.

La notion d' " ondelettes " ou " wavelets " a été utilisée pour la première fois au début des années 80 par le géophysicien français J. Morlet [14] pour désigner des fonctions

mathématiques utilisées dans la représentation des données sismiques. Les ondelettes sont des fonctions de base de variation multi-échelles, ou multi-résolutions utilisées dans le but de l'approximation ou de la compression données. La théorie des ondelettes n'est pas en fait tout à fait nouvelle, mais le support mathématique, contenu déjà dans les recherches des années 30, a été développé considérablement dans les dernières 20 années après que ces fonctions ont été utilisées dans le traitement numérique du signal et en particulier dans l'analyse et la compression des images.

Utiliser les ondelettes pour résoudre des équations intégrales, des équations différentielles intégrales et des intégrales numériques. Parmi les types les plus importants d'ondelettes, ondelette dérivé première de gaussienne et ondelette sombrero, égal à Δ -G (dérivé second de gaussienne), ondelette de Myer et dans notre travail de spécialité dans l'ondelette de Haar qui est le mois le plus commun. l'objectif principal des recherches modernes sur les ondelette est de créer des fonctions de base variation multi-échelles, ou multirésolutions faciles à se transformer en information, efficace et utile dans la description d'une fonction ou d'un signal. Si celui ci est représenté comme une fonction du temps et si les ondelettes fournissent une localisations efficace en terme de temps et de fréquence ou d'échelle.

Notre travail est reparti en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré en général sur les équations différentielles : nous avons présenté quelques définitions de base de l'espace de Hilbert et la transformation de Fourier. Ainsi, nous avons présenté quelques méthodes sur de résolution d'équations différentielles.

Dans le deuxième chapitre, nous avons discuté la théorie des ondelettes leurs définitions et propriétés ; aussi bien que l'analyse de multi-résolution et décomposition en ondelettes orthogonales finalement, nous sommes concentrés sur l'ondelette de Haar sur l'intervalle.

Dans le troisième chapitre nous avons fait une application de méthode numérique d'ondelettes de Haar pour la résolution des équations différentielles. La méthode est basée sur l'expansion de la dérivée la plus élevée de l'équation différentielle en termes d'ondelettes de Haar, puis sur l'intégration de l'expansion pour obtenir la solution.

Aussi nous avons appliqué la méthode d'Euler pour résoudre les problèmes aux valeurs initial homogène et non homogène puis, nous avons comparé les résultats obtenus par les deux méthodes.

Notations générales

| | |
|-----------------------------------|---|
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | Le produit scalaire . |
| P_F | La projection orthogonale. |
| $L^2(\mathbb{R})$ | Espace les fonctions de carré intégrable sur \mathbb{R} , avec $\ f\ _{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} f(t) ^2 dt < \infty$. |
| $\mathcal{F}f(\omega)$ | Transformée de Fourier de f . |
| $\hat{f}(\omega)$ | Transformée de Fourier de f . |
| TF | Transformée de Fourier de f . |
| $\overline{\mathcal{F}}f(\omega)$ | Transformée de Fourier inverse de f . |
| EDO | Équations différentielles ordinaires |
| EDP | Équations différentielles partielles |
| $\psi(t)$ | Ondelette mère. |
| $\psi_{i,j}(t)$ | Ondelette discrète. |
| \oplus | Somme directe. |
| $I_{i,j}$ | Intervalle dyadique. |
| $\varphi_{i,j}$ | Le système des fonctionnels l'échelle Haar. |
| $\psi_{j,k}$ | Le système des ondelettes de Haar. |
| E | Espace mesure. |
| \mathbb{R} | L'ensemble des nombres réels. |
| \mathbb{C} | L'ensemble des nombres complexes. |
| \mathbb{Z} | L'ensemble des nombres entières. |
| \mathbb{N} | L'ensemble des nombres naturels. |
| TOC | Transformée en Ondelettes continue. |
| TOD | Transformée en Ondelettes discrètes. |
| AMR | Analyse multirésolution. |

Chapitre 1

Généralité sur les équation différentielles

1.1 Préliminaire

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1. [19] *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel H sur \mathbb{C} muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tel que la norme $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ est complète.*

Définition 1.1.2. [19] *Soit H un espace de Hilbert. un système orthonormé est un sous-ensemble E de H tel que pour tout $e, y \in E$ nous avons*

$$\langle e, y \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } e = y, \\ 0 & \text{si } e \neq y. \end{cases}$$

Définition 1.1.3. [19] *Soit H un espace de Hilbert et soit $F \subset H$. Le complément orthogonal de F est*

$$F^\perp = \{x \in H : \langle x, f \rangle = 0 \quad \forall f \in F\}. \quad (1.1)$$

Proposition 1.1.1. *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H .*

Alors on dispose d'un opérateur de projection orthogonale $P_F : H \rightarrow F$ caractérisé par la propriété suivante : pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est l'unique $y \in F$ tel que

$$\forall z \in F, \quad \langle x - y, z \rangle = 0.$$

L'application P_F est un opérateur linéaire continu de H dans F . De plus, le sous-espace $\text{Ker } p_F$ de H coïncide avec le sous-espace F^\perp . On en déduit alors $H = F \oplus F^\perp$. Ainsi, dans un espace de Hilbert, tout sous-espace vectoriel fermé admet un supplémentaire orthogonal qui est fermé.

En particulier, lorsque F est une droite de vecteur directeur u , la projection orthogonale sur F est donnée par

$$\forall x \in H, \quad P_F(x) = \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u.$$

1.1.2 L'espace $L^2(\mathbb{R})$

$$L^2(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables avec } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

avec le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$.

1.1.3 Transformation de Fourier

Définition 1.1.4. [5] Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^1$, sa transformation de Fourier (TF) est définie comme

$$\mathcal{F}f(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-2i\pi\omega t) dt, \quad (1.2)$$

et sa transformation conjuguée est donnée par

$$\overline{\mathcal{F}}f(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(2i\pi\omega t) dt. \quad (1.3)$$

Définition 1.1.5. (Base hilbertienne) Soit $(e_n)_{n \geq 0}$ une famille dénombrable d'un espace de Hilbert H . On dit que la famille $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne si :

- (i) pour tous $n \neq m$ on a $\langle e_n, e_m \rangle = 0$, et $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) l'espace vectoriel $\text{Vect} \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ des combinaisons linéaires finies des vecteurs e_n , pour $n \in \mathbb{N}$, est dense dans H .

1.2 Définition de l'équation différentielle

Nous appelons une équation différentielle chaque équation reliant la variable indépendante x et la fonction $y(x)$ (pour faire court, ou écrit y) et ses dérivés de rangs différents.

1.2.1 Classification des équations différentielles

a) Équations différentielles ordinaires (EDO) :

L'équation différentielle est appelée équation différentielle ordinaire si la fonction inconnue dépend d'une variable indépendante.

b) Équation aux dérivées partielles (EDP) :

l'équation différentielle partielle est appelée équation différentielle partielle si la fonction inconnue dépend de deux variables indépendantes ou plus.

Remarque 1.2.1. *Dans cette ce rappelle, nous allons seulement étudier les équations différentielles ordinaires.*

1.3 Équations différentielles d'ordre supérieur à un (notions générales)

On peut écrire symboliquement une équation différentielle d'ordre n sous la forme

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = g(x). \quad (1.4)$$

Si $g(x) \neq 0$ l'équation (1.4) est dite non homogène ou encore avec second membre.

Si $g(x) = 0$ l'équation (1.4) est dite homogène c-à-d

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.5)$$

ou encore, si elle se résout par rapport à la dérivée d'ordre n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.6)$$

Théorème 1.3.1. [18] *Si dans l'équation*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

la fonction $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ et ses dérivées partielles par rapport à $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ sont continues dans un certain domaine contenant les valeurs

$x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ il existe une solution et une seule $y = y(x)$ de l'équation vérifiant les conditions

$$\left. \begin{aligned} y_{x=x_0} &= y_0 \\ y'_{x=x_0} &= y'_0 \\ &\dots\dots\dots \\ y_{x=x_0}^{(n-1)} &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

qui sont appelées les conditions initiales.

Si l'on considère une équation du second ordre $y'' = f(x, y, y')$, les conditions initiales de la solution pour $x = x_0$ seront

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}' = \mathbf{y}'_0,$$

où x_0, y_0, y'_0 sont des nombres donnés.

1.3.1 Équation différentielle lineaires d'ordre n

Définition 1.3.1. [18] Une équation différentielle d'ordre n est dite linéaire si elle est du premier degré par rapport à la fonction inconnue y et ses dérivées $y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$, c.-à-d. si elle est de la forme

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x) \quad (1.8)$$

où a_0, a_1, \dots, a_n et $f(x)$ sont des fonctions données de x ou des constantes, et $a_0 \neq 0$ quel que soit x dans le domaine de définition de l'équation (1.8). La fonction $f(x)$ est appelée le second membre de l'équation(1.8).

Si $f(x) = 0$, et $a_0 = 1$ l'équation s'écrit

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \quad (1.9)$$

et elle est dite homogène ou sans second membre (le premier membre de cette équation est une fonction homogène du premier degré par rapport à $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$).

1.4 Équation différentielle ordinaire du second ordre

Définition 1.4.1. Une équation différentielle ordinaire du second ordre est une équation dans laquelle la dérivée seconde $y''(x)$ est exprimée en fonction d'une variable x , de $y(x)$ et de la dérivée première $y'(x)$:

$$y'' = f(x, y, y')$$

1.4.1 Propriétés et définitions des équations différentielle linéaires de second ordre

Théorème 1.4.1. Si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de l'équation linéaire homogène du second ordre

$$y'' + a_1y' + a_2y = 0, \quad (1.10)$$

1. $y_1 + y_2$ est aussi solution de cette équation.
2. Si c est une constante, cy_1 est aussi une solution de cette équation.

Preuve. Etant donné que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation proposée, on a

$$\left. \begin{aligned} y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 &= 0, \\ y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Substituant la somme $y_1 + y_2$ dans l'équation (1.10) et prenant en considération les identités (1.11), on aura

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)'' + a_1(y_1 + y_2)' + a_2(y_1 + y_2) &= (y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1) + (y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $y_1 + y_2$ est solution de l'équation. □

Définition 1.4.2. [18] Deux solutions y_1 et y_2 de (1.11) sont dites linéairement indépendantes sur le segment $[a, b]$ si leur rapport n'est pas constant sur ce segment, c.-à-d. si

$$\frac{y_1}{y_2} \neq \text{const.}$$

Si, les solutions sont dites linéairement dépendantes. En d'autres termes, deux solutions y_1 et y_2 sont dites linéairement dépendantes sur le segment $[a, b]$ s'il existe une constante λ telle que $\frac{y_1}{y_2} = \lambda$ pour $a \leq x \leq b$. On a alors $y_1 = \lambda y_2$.

Exemple 1.4.1. Soit l'équation $y'' - y = 0$. On vérifie facilement que les fonctions $e^x, e^{-x}, 3e^x, 5e^{-x}$ sont des solutions de cette équation. Les fonctions e^x et e^{-x} sont linéairement indépendantes sur tout segment, étant donné que le rapport $\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$ ne reste pas constant lorsque x varie. Les fonctions e^x et $3e^x$, elles sont linéairement dépendantes, car $\frac{3e^x}{e^x} = 3 = \text{const}$.

Définition 1.4.3. y_1 et y_2 étant des fonctions de x , le déterminant

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

est appelé le déterminant de Wronski ou wronskien des fonctions données.

Théorème 1.4.2. Si les fonctions y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes sur le segment $[a, b]$, leur wronskien est identiquement nul sur ce segment.

En effet, si $y_2 = \lambda y_1$ où $\lambda = \text{const}$, $y_2' = \lambda y_1'$ et

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \lambda y_1 \\ y_1' & \lambda y_1' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} y_1 & y_1 \\ y_1' & y_1' \end{vmatrix} = 0$$

Théorème 1.4.3. Si le déterminant de Wronski $W(y_1, y_2)$ des solutions y_1 et y_2 de l'équation linéaire homogène (1.10) n'est pas nul en un point $x = x_0$ du segment $[a, b]$ où les coefficients de l'équation sont continus, il ne s'annule nulle part sur ce segment.

Remarque 1.4.1. Si le wronskien est nul pour une certaine valeur $x = x_0$, il est alors nul pour toute valeur x du segment considéré. Ceci résulte directement de la formule $(W = C e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx})$: si $W = 0$ pour $x = x_0$, alors

$$(W)_{x=x_0} = C = 0;$$

par conséquent, $W \equiv 0$ quelle que soit la valeur de la borne supérieure x dans la formule $(W = C e^{-\int_{x_0}^x a_1 dx})$.

Théorème 1.4.4. Si les solutions y_1 et y_2 de l'équation (1.10) sont linéairement indépendantes sur le segment $[a, b]$, le déterminant de Wronski formé avec ces solutions ne s'annule en aucun point de ce segment.

Théorème 1.4.5. *Si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.10), alors*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (1.12)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires, est la solution générale de cette équation.

1.4.2 Équations différentielles du second ordre à coefficients constants

Équations différentielles homogènes du second ordre

Soit l'équation linéaire homogène du second ordre

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (1.13)$$

où a , b et c sont des constantes réelles et $a \neq 0$.

On cherche une solution de (1.13) sous la forme $y(x) = e^{kx}$ où $k \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On trouve

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= 0 \\ \Leftrightarrow (ak^2 + br + c) \exp^k x &= 0 \\ \Leftrightarrow ak^2 + br + c &= 0 \end{aligned}$$

Définition 1.4.4. *L'équation $ak^2 + bk + c = 0$ est appelée l'équation caractéristique associée à (1.13).*

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (1.13).

Théorème 1.4.6. 1. *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $k_1 \neq k_2$ et les solutions de (1.13) sont les*

$$y(x) = \lambda e^{k_1 x} + \mu e^{k_2 x}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double k_0 et les solutions de (1.13) sont les*

$$y(x) = (\lambda + \mu x) e^{k_0 x}, \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

3. *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (1.13) sont les*

$$y(x) = e^{\alpha x} (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)), \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exemple 1.4.2. Soit l'équation

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Trouver la solution générale et la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales $y_{x=0} = 0$, $y'_{x=0} = 1$.

Solution :

1. Écrivons l'équation caractéristique

$$k^2 - 2k + 5 = 0$$

et trouvons ses racines :

$$k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i.$$

La solution générale s'écrit

$$\mathbf{y} = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

2. Trouvons la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données : déterminons à cet effet les valeurs correspondantes de C_1 et C_2 . On déduit de la première condition :

$$0 = e^{-0} (C_1 \cos 2 \cdot 0 + C_2 \sin 2 \cdot 0), \quad \text{d'où } C_1 = 0.$$

Remarquons que

$$y' = e^{-x} 2C_2 \cos 2x - e^{-x} C_2 \sin 2x,$$

on déduit de la seconde condition :

$$1 = 2C_2, \quad \text{ou bien } C_2 = \frac{1}{2}.$$

La solution particulière cherchée est

$$y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x.$$

Équations différentielles non homogènes du second ordre

Soit l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad (1.14)$$

où a, b et c numéros réels fixes, avec $f(x) \neq 0$.

Méthode de solution : Nous savons que la solution générale est $y = y_p + y_h$ où y_h la solution de l'équation homogène et y_p sa solution particulières en peut-être trouvé par la méthode de variation de constantes.

Le premier cas : le côté droit l'équation à la forme d'une polynôme Sense $f(x) = P_n(x)$ où $P_n(x)$ polynôme from degré n , dans ce cas, la solution spécial prend la forme suivante : $y_p = Q_n(x)x^r$ où $Q_n(x)$ polynôme de degré n , (du même degré r le nombre des racines de l'équation égal au zéro.

La deuxième cas : L'extrémité droit de la forme $e^{\alpha x} P_n(x)$ à savoir $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$. La solution spécial dans ce cas prend la forme suivante : $y_p = Q_n(x)x^r e^{\alpha x}$ où $Q_n(x)$ polynôme de degré n et r le nombre de racines de l'équation égal à la valeur où α .

La troisième cas : L'extrémité droit de la forme $a \cos bx + b \sin x$. La solution spécial dans ce cas prend la forme suivante : $y_p = (A \cos bx + B \sin bx)x^r$ où r le nombre de racine de l'équation égal à ib .

La quatrième cas : L'extrémité droit de la forme $e^x(P_n(x) \cos bx + P_m \sin bx)$ où P_n, P_m , polynôme de degré n, m respectivement dans ce cas, la solution spécial prend la forme suivante :

$y_p = x^r e^{\alpha x} (Q_1(x) \cos bx + Q_2(x) \sin bx)$ où Q_1, Q_2 polynôme en degré S où $S = \text{Max}\{m, n\}$ et r le nombre de racines de l'équation caractéristique est-il égal à $a + ib$.

Exemple 1.4.3. [13] Résoudre l'équation différentielle suivant

$$y'' + 2y' = x + 1$$

La solution : Il est connue que la solution générale aux équations homogènes $y'' + 2y' = 0$ est $y_h = C_1 + C_2 e^{-2x}$, la solution spécial prend la forme suivante

$$y_p = Q_n(x)x^r \text{ où } n = 1, \quad r = 1 \text{ où } y_p = (ax + b)x$$

par dérivation et compensation nous trouvons $b = \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{4}$. Et de la sur devien $y_p = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$. Par conséquent la solution générale à cette équation est $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + C_1 + C_2e^{-2x}$ où C_1, C_2 constantes des optionnels.

1.4.3 Équation différentielle du second ordre à coefficients variables

Équation différentielle homogène du second ordre

soit l'équation linéaire homogène de second ordre.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad (1.15)$$

où $a_0(x) \neq 0$, $a_1(x)$ et $a_2(x)$ sont de fonction données de x .

Exemple 1.4.4. [18] L'équation

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0,$$

dont les coefficients $a_1 = \frac{1}{x}$ et $a_2 = \frac{1}{x^2}$ sont continus sur tout segment ne contenant pas le point $x = 0$, admet les solutions particulières

$$y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x}$$

La solution générale s'écrit comme

$$y = C_1x + C_2\frac{1}{x}.$$

Équation différentielles non homogène du second ordre

soit l'équation linéaire non homogène de second ordre.

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) \quad (1.16)$$

où $a_0(x) > 0$, $a_1(x)$ et $a_2(x)$ sont de fonction données de x .

Pour résoudre les équation (1.15) nous appliquons la méthode des paramètres. Soit $y_1(x)$ et $y_2(x)$ la solution (1.15), la solution (1.15) s'écrit $y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ où $C_1(x)$

et $C_2(x)$ sont deux fonction inconnais, nous pouvons donc avoir deux ensembles de conditions qui déterminent $C_1(x)$ et $C_2(x)$. Depuis

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + C_1' y_1 + C_2' y_2$$

comme première condition, nous supposons que

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \tag{1.17}$$

Ainsi, nous avons

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

et sur la différenciation

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + C_1' y_1' + C_2' y_2'.$$

Les substituer dans (1.16), nous trouvons

$$C_1(a_0 y_1'' + a_1 y_1' + a_2 y_1) + C_2(a_0 y_2'' + a_1 y_2' + a_2 y_2) + a_0(C_1' y_1' + C_2' y_2') = f(x).$$

De toute évidence, cette équation compte tenu de fait que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont solution de $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ est la même que

$$C_1' y_1' + C_2' y_2' = \frac{f(x)}{a_0(x)} \tag{1.18}$$

Résoudre (1.17) et (1.18) nous trouvons

$$C_1' = -\frac{y_2(x)f(x)/a_0(x)}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}; \quad C_2' = \frac{y_1(x)f(x)/a_0(x)}{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}};$$

et donc une solution particulière de(1.16) est

$$\begin{aligned} y_p(x) &= C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \\ &= -y_1(x) \int^x \frac{y_2(t)f(t)/a_0(t)}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} dt + y_2(x) \int^x \frac{y_1(t)f(t)/a_0(t)}{\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix}} dt \end{aligned}$$

[1]

Exemple 1.4.5. *Trouver la solution générale de l'équation*

$$y'' - \frac{y'}{x} = x.$$

Solution : *Trouvons la solution générale de l'équation homogène*

$$y'' - \frac{y'}{x} = 0.$$

On a :

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x}, \quad \log y' = \log x + \log C, \quad y' = Cx;$$

ainsi,

$$y = C_1x^2 + C_2.$$

Pour que cette expression soit la solution de l'équation proposée, il faut déterminer C_1 et C_2 comme fonctions de x du système

$$C_1'x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \quad 2C_1'x + C_2' \cdot 0 = x$$

On trouve en résolvant ce système :

$$C_1' = \frac{1}{2}, \quad C_2' = -\frac{1}{2}x^2$$

et par intégration :

$$C_1 = \frac{x}{2} + \bar{C}_1, \quad C_2 = -\frac{x^3}{6} + \bar{C}_2$$

Substituant les fonctions trouvées dans la formule $y = C_1x^2 + C_2$, on obtient la solution générale de l'équation avec second membre :

$$y = \bar{C}_1x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} \text{ où } y = \bar{C}_1x^2 + \bar{C}_2 + \frac{x^3}{3},$$

où \bar{C}_1 et \bar{C}_2 sont des constantes arbitraires.

1.5 L'équations différentielles de Cauchy-Euler

Définition 1.5.1. [1] *L'équation différentielles Cauchy-Euler de second ordre c'est l'équation qui prend la forme suivante :*

$$x^2y'' + axy' + by = f(x)$$

où a, b de constantes et $f(x)$ est une fonction numérique.

- Si $f(x) \neq 0$ l'équation est dit non homogène.
- Si $f(x) = 0$ l'équation est dit homogène.

nous trouverons la solution de l'équation Cauchy-Euler

$$x^2 y'' + axy' + by = 0; \quad x > 0 \quad (1.19)$$

$y(x) = x^m$ la compensation à (1.19)

$$x^2 m(m-1)x^{m-2} + axm x^{m-1} + bx^m = 0; \quad (1.20)$$

où

$$m(m-1) + am + b = 0 \quad (1.21)$$

c'est l'équation caractéristique de (1.20), et comme précédemment la nature de ses racines (1.21) détermine la solution de (1.20).

1. **Racines réelles et distinctes** $m_1 \neq m_2$:

$$y(x) = C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2}$$

2. **Racines réelles et répétées** $m = m_1 = m_2$:

$$y(x) = C_1 x^m + C_2 (\ln x) x^m$$

3. **Racines conjuguées complexes** $m_1 = u + iv; m_2 = u - iv$:

$$y(x) = C_1 x^u \cos(v \ln x) + C_2 x^u \sin(\ln x)$$

Exemple 1.5.1. [8] *Considérer l'équation*

$$x^2 y'' + xy' + 9y = 0$$

*l'équation caractéristique est $m(m-1) + m + 9 = 0$, qui a des racines $m = \pm 3i$
la solution générale est donc*

$$y(x) = C_1 \cos(3 \ln x) + C_2 \sin(3 \ln x).$$

1.5.1 La solution particulière à l'équation différentielle de d'Euler

Pour obtenir la solution particulière de l'équation d'Euler non homogène, nous appliquons également la méthode des paramètres, nous trouvons d'abord les solutions de base $y_1(x)$ et $y_2(x)$ des l'équation (1.19) homogène et ensuite nous mettons $y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$. Et pour obtenir les fonctions $u(x), v(x)$ nous faisons dérivation et la compensation que nous trouve

$$v(x) = \frac{y_1 f(x)}{x^2 w(y_1; y_2)(x)} dx \quad u(x) = \frac{-y_2 f(x)}{x^2 w(y_1; y_2)(x)} dx$$

Exemple 1.5.2. [13] Trouver la solution générale de l'équation suivante :

$$x^2 y'' - 4xy' + 4y = x^4 + x^2$$

solution : Cette équation d'Euler second ordre non homogène, pour le résoudre, nous trouvons d'abord la solution y_h de l'équation homogène dont sa équation caractéristique est : $r^2 - 5r + 4 = 0$ et a elle racine réel $r_1 = 1$ et $r_2 = 4$. Ainsi, la solution général est $y_h(x) = C_1 x + C_2 x^4$.

Nous recherchons maintenant une solution particulière y_p supposons qu'il soit sur la forme

$$y_p = u(x)y_1(x) + v(x)y_2(x)$$

donc

$$y_p = xu(x) + x^4 v(x)$$

on a

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} x & x^4 \\ 1 & 4x^3 \end{vmatrix} = 3x^4 \neq 0$$

Pour obtenir les fonctions u, v utilisons les deux relations précédentes nous trouvons

$$u(x) = -\frac{1}{3} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \text{ et } v(x) = \frac{1}{3} \left(\ln|x| - \frac{1}{2x^2} \right)$$

Donc la solution particulières

$$y_p = \frac{1}{3} x^4 \ln|x| - \frac{1}{9} x^4 - \frac{1}{2} x^2$$

Donc la solution générale est

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^4 + \frac{1}{3} x^4 \ln|x| - \frac{1}{9} x^4 - \frac{1}{2} x^2$$

1.6 Résolution Numérique des équations différentielles

1.6.1 Introduction, le problème mathématique

Soit $I = [a, b]$ un intervalle fermé de \mathbb{R} et f une application donnée

$$f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (t, y) \longrightarrow f(t, y)$$

Et soit y une application différentiable de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ On appelle equation différentielle du premier ordre, la relation

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)) \quad (1.22)$$

On dit que y est la solution de cette équation différentielle sur $[a, b]$ si y vérifie la relation (1.22) pour tout $t \in [a, b]$ On appelle problème de Cauchy ou problème de condition initiale l'équation différentielle à laquelle on adjoint la condition initiale $y(a) = y_0$ où y_0 est un nombre donnée :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (1.23)$$

Remarque 1.6.1. [2] 1. Si y est une fonction du temps, il est d'usage de noter la dérivée $\frac{dy}{dt}$ par \dot{y} et de l'appeler vitesse. De même la dérivée seconde $\frac{d^2y}{dt^2}$ sera notée \ddot{y} et appelée accélération. 2. Si on considère une équation différentielle d'ordre supérieure

$$y^{(p)} = f(t, y, y', \dots, y^{(p-1)})$$

on peut ramener le problème à celui d'un système d'équations différentielles du premier ordre, en posant $z = (z_1, z_2, \dots, z_p)$ et $y = z_1$ on obtient le Méthodes numériques avec Java système :

$$\begin{cases} z'_1 & = z_2 \\ z'_2 & = z_3 \\ \vdots & \vdots \\ z'_{p-1} & = z_p \\ z'_p & = f(t, z_1, z_2, \dots, z_p) \end{cases} \quad (1.24)$$

Définition 1.6.1. [2] Soit f une application définie sur $[a, b] \times \mathbb{R}$; s'il existe une constante $L > 0$ indépendante de t, u et v telle que $|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v|, \forall u, v \in \mathbb{R}$, et $\forall t \in [a, b]$, alors f est dite Lipschitzienne de rapport L sur $[a, b] \times \mathbb{R}$ (ou simplement L -lipschitzienne

Théorème 1.6.1. *Si f est une application définie sur $[a, b] \times \mathbb{R}$ continue et L lipschitzienne par rapport à y , alors le problème de Cauchy admet une solution unique sur $[a, b]$ et ceci pour toute condition initiale $y_0, (\forall y_0 \in \mathbb{R})$*

Proposition 1.6.1. *[2] Une condition suffisante pour que les hypothèses du théorème soient vérifiées est que f soit dérivable par rapport à y et que sa dérivée soit bornée.*

1.6.2 La Méthode d'Euler

Soit le problème de Cauchy (1.23) et soit $y(t_i)$ la solution de ce problème à l'abscisse t_i . Une méthode d'analyse numérique pour intégrer cette équation différentielle consistera à fournir des approximations y_i de $y(t_i)$ pour $i = 1, \dots, N$, N entier donné.

Les différentes méthodes d'intégration se distinguent par la manière d'obtenir ces y_i . La méthode d'Euler, est la plus simple et consiste à substituer la dérivée $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ par l'expression

$$\frac{y(t+h) - y(t)}{h} \quad (1.25)$$

où $h = \frac{b-a}{N}$ est le pas d'intégration numérique. Considérons alors une subdivision de $[a, b]$ en N sous intervalles $[t_i, t_{i+1}]$ de longueur $h, i = 0, \dots, N$ et $t_i = a + ih$, avec $t_0 = a$ et $t_n = b$

L'expression (1.25) entraîne $y(t+h) = y(t) + hy'(t)$ d'où $y(t+h) = y(t) + hf(t, y)$

Par conséquent, partant de la condition initiale (t_0, y_0) , et prenant un pas régulier $h = t_{i+1} - t_i$, on obtient, en posant y_i approximation de $y(t_i)$

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \quad (1.26)$$

L'algorithme d'Euler s'écrit alors :

$$\begin{cases} y_0 = y(a) & \text{donné} \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) & i = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

[2]

Remarque 1.6.2. *On dit que la méthode d'Euler est une méthode à pas séparés ou à un pas, parceque le calcul de y_{i+1} ne fait intervenir que y_i*

Etude de l'erreur d'Euler

Définition 1.6.2. [2] Une méthode numérique approchant $y(t_j)$ par y_j telle que l'erreur

$$e_j = y(t_j) - y_j \text{ vérifie}$$

$$|e_j| \leq kh^p$$

est dite d'ordre p , ($k \in \mathbb{R}_*^+$)

Théorème 1.6.2. [2]

Supposons que l'application $f(t, y)$ soit continue par rapport aux deux variables, et lipschitzienne par rapport à y uniformément par rapport à t , et que $y \in C^2([a, b])$. On pose $M_2 = \max_{t \in [a, b]} |y''(t)|$, alors on a la majoration

$$|e_i| \leq (e^{L(b-a)} - 1) \frac{M_2}{2L} h$$

où $e_i = y_i - y(t_i)$ est l'erreur commise au point (t_i, y_i)

Remarque 1.6.3. 1. Ce résultat s'exprime sous la forme $|e_i| \leq kh$, c'est à dire que la méthode d'Euler est d'ordre 1

2. Pour que $y \in C^2[a, b]$ il suffit que $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R})$

1.6.3 Résolution de systèmes différentiels dans \mathbb{R}^2

Dans \mathbb{R}^2 soit le système différentiel :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y, z) \\ z'(t) = g(t, y, z) \end{cases}$$

L'application de l'algorithme d'Euler à ce système se fait composante par composante d'où :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i, z_i) \\ z_{i+1} = z_i + hg(t_i, y_i, z_i) \end{cases}$$

Cet algorithme s'applique aux équations différentielles d'ordre 2 (ou plus ...) à condition de les réduire au préalable à des systèmes différentiels du premier ordre.[2]

Chapitre 2

Rappel Sur la Théorie des Ondelettes

La notion d'ondelettes a été utilisée pour désigner des fonctions mathématiques utilisées dans la représentation des données sismiques. On utilise les ondelettes pour résoudre des équations intégrales, des équations différentielles intégrales et des intégrales numériques. Elles sont utilisées pour l'approximation ou de la compression des données.

2.1 La théorie des ondelettes

2.1.1 Définitions et quelques exemples sur les ondelette

Définition 2.1.1. [10] Une ondelette est une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ vérifie la relation suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$$

Définition 2.1.2. [10] Une ondelette $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ vérifie la condition d'admissibilité, c.à.d :

$$C_{\psi} = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < +\infty$$

Définition 2.1.3. [16] L'ondelette mère ψ génère une famille d'ondelettes constituée de ses dilatées et de ses translatées : $\left\{ \psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\}_{b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+^*}$

2.1.2 Exemples d'ondelettes

- **L'ondelette de Haar** : c'est la première et la plus simple des ondelette définie comme suit :

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ -1 & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1[\\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x \geq 1 \end{cases}$$

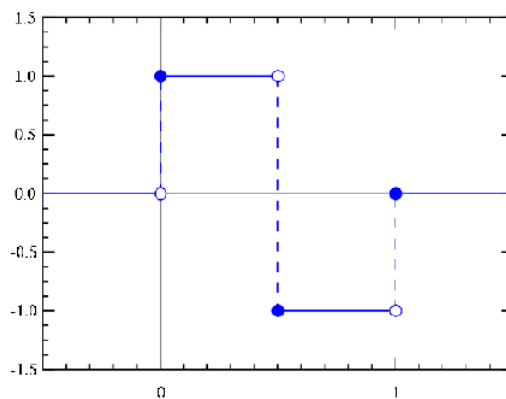
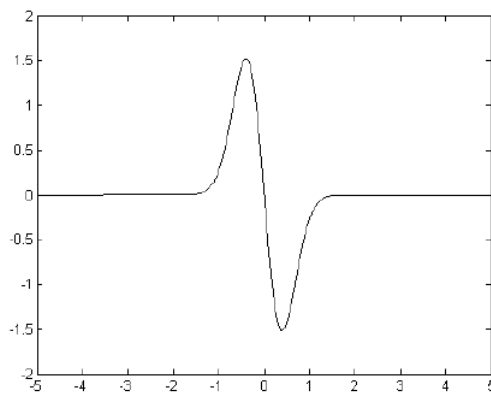


FIGURE 2.1 – L'ondelette de Haar

- Soit une gaussienne $G(x) = e^{-\pi x^2}$, ses dérivées $G^{(n)}$ ($n \geq 1$) sont des ondelettes à n moments nuls.[10]

FIGURE 2.2 – La première dérivée de G

2.1.3 Propriétés des ondelettes

Les ondelettes sont des fonctions qui peuvent être caractérisées par certaines propriétés remarquables, ces dernières pouvant être incompatibles entre elles, cela implique des choix à faire suivant l'application souhaitée. Nous donnons des propriétés usuelles ainsi que des exemples d'ondelettes.

- **Décroissance rapide** : une ondelette sera dite à décroissance rapide si

$$\forall m \in \mathbb{N}, \exists C_m > 0 / \forall t \in \mathbb{R}, |\psi(t)| \leq \frac{C_m}{1 + |t|^m}.$$

- **Orthogonalité** : une ondelette ψ est dite orthogonale si pour tout $(j, j', n, n') \in \mathbb{Z}^4$:

$$\langle \psi_{jn}, \psi_{j'n'} \rangle = \delta_{jj'} \delta_{nn'}, \quad (\delta_{jj'} = 0 \text{ si } j \neq j', \delta_{jj} = 1).$$

- **Nombre de moments nuls** : Les ondelettes orthogonales doivent avoir un nombre de moments nuls

pour $n \in \mathbb{N}$, Une ondelette admet n moments nuls si

$$\forall k = 0, \dots, n-1, \int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0.$$

- **Support compact** : Autant l'ondelette a moins de moments nuls autant son support est compact, et une analyse plus exacte des hautes fréquences est possible.[5]

2.1.4 Transformée en ondelettes (TO)

(Jean Morletin1982)

La définition de l'ondelette mère est donné par la formule suivante

$$\psi_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi \left(\frac{t-b}{a} \right), a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

où :

1. b facteur de translation.
2. a facteur de dilatation « Échelle ».
3. $\psi_{a,b}$ ondelette mère.
4. $\psi \left(\frac{t-b}{a} \right)$ ondelette enfants.

2.1.5 Transformée en ondelettes continue(TOC)

La transformée en ondelettes continue utilise des translations et des dilatations de la fonction ondelette mère durant tout l'intervalle du temps de manière continue. La transformée en ondelettes de $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut être définie comme

$$T_\psi f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{\psi} \left(\frac{t-b}{a} \right) dt = \langle f, \psi_{a,b} \rangle,$$

où $\bar{\psi}(t)$ complexe conjugué de $\psi(t)$.

$T_\psi f(a, b)$ est appelée la transformée en ondelettes de f dans $L^2(\mathbb{R})$.

La transformée en ondelettes inverse peut être définie dans [7], par la formule

$$f(t) = C_w^{-1} \int_{\mathbb{R}^*} \int_{\mathbb{R}} T_\psi f(a, b) \psi_{a,b} (a^{-2} da) db,$$

où $C_w = 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty$ est $\hat{\psi}(w)$ la transformée de Fourier de $\psi(t)$. [21]

2.1.6 Transformée en ondelettes discrètes (TOD)

La transformée en ondelettes discrète(translate et dilate), selon des valeurs discrètes.

Ces coefficients a et b seront discrétisés de la manière suivante :

$a = a_0^m$ et $b = nb_0 a_0^m$ avec $a_0^m > 1$ et $b_0 > 0$ fixés et appartenants à \mathbb{Z}

Les ondelettes sont alors définies de la manière suivante :

$$\psi_{a_0, b_0} = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi \left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m} \right)$$

Pour $f \in L^2(\mathbb{R})$, on définit la transformée discrète en ondelettes de la fonction f par :

$$T_\psi f(a_0, b_0) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \bar{\psi} \left(\frac{t - nb_0 a_0^m}{a_0^m} \right) dt$$

Tel que :

a_0^m Facteur d'échelle.

b_0 Facteur de translation.

n et m des entiers.

La famille des ondelettes discrètes peut être obtenue en limitant les valeurs de a et b à des valeurs discrètes. Mettre $a = 2^{-j}$, $b = k2^{-j}$, j, k sont des entiers arbitraires, on obtient une famille d'ondelettes discrètes $\psi_{j,k}(t)$ définis par

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$$

Les ondelettes $\psi_{j,k}(t)$ forment une base orthonormale dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ et $\psi(t)$ est appelé ondelette mère.[25][7]

2.2 Analyse multirésolution (AMR)

L'analyse multirésolution (AMR) est une notion mathématique apparue depuis 1985 par Stéphane Mallat et Yves Meyer. Cette notion a été considéré comme un outil à extraire des bases orthonormées d'ondelettes, dont le signal peut être représenté par une limite de ses approximations à différents niveaux ou à des échelles successives. En effet, l'analyse multirésolution a donné le soutien au développement de théorie des signaux tel que, la plupart des algorithmes de traitement du signal et de l'image se basent basiquement sur la décomposition en ondelettes,[10]

Définition 2.2.1. [15] Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite de sous-espaces fermés $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ (espaces d'approximation) vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-j}t - k) \in V_0$.
2. $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j-1} \subset V_j$ donc $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$.
3. $\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$.
4. $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \bigcap_{-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$ et $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcup_{-\infty}^{+\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$.
5. Il existe $\varphi \in V_0$ telle que la suite $\{\varphi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$, forme une base de Riesz de V_0 (cette fonction φ est appelée fonction d'échelle de l'AMR).

Les espaces V_j sont appelés espace d'approximation. L'approximation multirésolution de f à la résolution 2^{-j} est définie comme sa projection orthogonale sur l'espace V_j .

Définition 2.2.2. Soit φ une fonction de $L^2(\mathbb{R})$. On pose $\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}}\varphi(2^j t - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.

On définit les espaces $V_0 = \left\{ f(t) = \sum_k c_k \varphi(t - k), \sum_k |c_k|^2 < \infty \right\}$,
 et pour $j \in \mathbb{Z}$, $V_j = \{h(t) = f(2^j t), f \in V_0\}$.

On suppose que $(\varphi_{0,k})_{k \in \mathbb{Z}} = (\varphi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$, $k \in \mathbb{Z}$ est une famille orthonormale. Dans ce cas.

pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $(\varphi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormale de V_j . On dit alors que φ engendre la suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$.

Quelques éclaircissements à propos de ces propriétés s'imposent :

- La première propriété signifie que V_j est invariant par toute translation proportionnelle à l'échelle 2^{-j} .
- La seconde caractérise le changement d'échelle d'un sous-espace emboîté à un autre : l'espace V_{j+1} contient des signaux plus grossiers que l'espace V_j .
- La troisième propriété garantit que la dilatation par 2 d'une fonction f de V_j (donc le grossissement par deux des détails) définit une approximation de cette fonction à l'échelle plus grossière 2^{-j+1} .
- La quatrième propriété montre que si $j \rightarrow +\infty$ (de plus en plus grossier), alors nous perdons toutes les informations nécessaires à la reconstitution du signal f et inversement si $j \rightarrow -\infty$ alors la convergence vers f est assurée.
- La cinquième définit l'existence d'une fonction φ qui permet d'approximer toute fonction f de V_0 de manière discrète et unique : $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormale de V_0

Toutes les propriétés énoncées ci-dessus caractérisent l'analyse multirésolution dyadique (on utilise un facteur 2 lors d'un passage d'un sous-espace à un autre).

Les ondelettes apparaissent naturellement comme un moyen d'écrire la différence entre deux espaces V_j et V_{j+1} consécutifs. On construit pour cela un espace de Riesz W_0 tel que :

$$V_0 \oplus W_0 = V_1 \tag{2.2}$$

L'espace W_0 est engendré par une fonction ψ :

$$W_0 = \left\{ t \mapsto \sum_{k \in \mathbb{R}} a_k \psi(t - k) : a_k \in \mathbb{R} \right\}$$

2.2.1 Quelques exemples

Exemple 2.2.1. [10] La fonction $\theta = 1_{[0,1]}$ et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par :

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} \quad f|_{\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]} = c^{te} \right\}$$

Exemple 2.2.2. [10] La fonction θ définie par :

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

et ses translatées entières engendrent l'analyse multirésolution définie par :

$$V_j = \left\{ \begin{array}{l} f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}), \forall k \in \mathbb{Z} \quad f|_{\left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right]} = P_k \\ \text{ou } P_k \text{ est un polynôme de degré } 1 \end{array} \right\}$$

2.3 Décomposition en ondelettes orthogonales

2.3.1 Les bases d'ondelettes

La relation (2.2) se transpose à toutes les échelles j :

$$V_j \oplus W_j = V_{j+1},$$

et on obtient par itérations de cette relation :

$$V_j \oplus W_j \oplus \cdots \oplus W_{j'-1} = V_{j'}, \quad \text{si } j < j',$$

En faisant tendre j' vers $+\infty$ (et éventuellement j vers $-\infty$), on obtient deux relations :

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{V_j \oplus \bigoplus_{j'=j}^{+\infty} W_{j'}}, \quad \text{quel que soit } j \in \mathbb{Z},$$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j'=-\infty}^{+\infty} W_{j'}.$$

La réunion des bases de Riesz de chacun des espaces de ces sommes directes fournit ainsi plusieurs bases d'ondelettes :

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_j &= \{\phi_{j,k} : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\psi_{j',k} : j' \geq j, k \in \mathbb{Z}\}, \\ \mathcal{B} &= \{\psi_{j,k} : j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

[3]

Théorème 2.3.1 (Bases orthonormées d'ondelettes). *Soit AMR une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. A partir de (définition 2.2.1(6)) on peut construire une fonction d'échelle φ puis une ondelette ψ telles que : $\forall j \in \mathbb{Z}, \{\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}, \{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}, j \geq j}\}$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ et $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$.*

Preuve. À partir de g et donc de $\{g(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, on construit une fonction telle que $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de V_0

- on déduit que $\{\varphi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_j
- à partir de φ , on construit une fonction ψ telle que $\{\psi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de W_0
- on déduit que $\{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de W_j
- on conclut que $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de L^2 .

□

2.3.2 Transformée en ondelettes [3]

La transformée en ondelettes s'applique à des signaux échantillonnés sur une grille discrète, et en général cet échantillonnage consiste à approcher une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ par

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{j/2} f[k/2^j] \phi_{jk},$$

où l'échantillon $f[k/2^j]$ peut lui aussi être estimé par :

$$f[k/2^j] \simeq f(k/2^j),$$

Le signal dont on part est donc représenté sur une base de Riesz de V_j . Appliquer à ce signal une transformation en ondelettes jusqu'à l'échelle $L \in \mathbb{Z}$ revient à représenter ce signal sur

une base adaptée à la somme directe :

$$V_L \oplus W_L \oplus W_{L+1} \oplus \cdots \oplus W_{j-1}.$$

L'algorithme de transformation est itératif et consiste à remplacer la représentation d'une composante sur $V_{j'}$ par une représentation sur $V_{j'-1} \oplus W_{j'-1}$. On passe ainsi successivement par des décompositions adaptées aux différentes sommes directes suivantes :

$$\begin{aligned} & V_{j-1} \oplus W_{j-1} \\ & V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \\ & \vdots \\ & V_L \oplus W_L \oplus W_{L+1} \oplus \cdots \oplus W_{j-1} \end{aligned}$$

2.4 L'ondelette de Haar sur l'intervalle [0,1]

2.4.1 Ondelettes de Haar sur $L^2(\mathbb{R})$

Nous discuterons en détail des ondelettes les élémentaires, appelées ondelettes de Haar.

Définition 2.4.1 (fonction de Haar). [24] *l'ondelette de Haar est la fonction sur définis ligne réelle \mathbb{R} comme :*

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{si non .} \end{cases}$$

Exemple 2.4.1 (Ondelettes de Haar). *L'ondelette de Haar est l'un des exemples classique défini par*

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{si non .} \end{cases}$$

L'ondelette de Haar à support compact, et clairement $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dt = 0$, et $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, mais ce n'est pas une ondelette continue, sa transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{\psi}(\omega) = ie^{-\frac{i}{2}\omega} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\left(\frac{\omega}{4}\right)}$$

où

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = 16 \int_{\mathbb{R}} |\omega|^{-3} \left| \sin\left(\frac{\omega}{4}\right) \right|^4 d\omega < \infty$$

Les deux fonctions ψ et $\hat{\psi}$ représenté par les graphes suivants

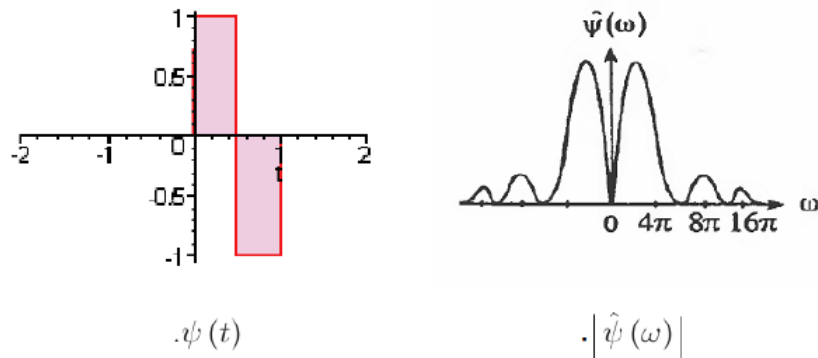


FIGURE 2.3 – Les graphiques de $\psi(t)$ et $|\hat{\psi}(t)|$

Intervalles Dyadiques :

Pour chaque pair d'entiers $j, k \in \mathbb{Z}$, définissez l'intervalle par : $I_{j,k} = [k2^{-j}; (k + j)2^{-j})$

2.4.2 Le système de Haar

1- La fonction d'échelle Haar :

L'ondelettes de Haar est généré par une fonction d'échelle Haar (une ondelette père) :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Cette fonction pouvait se décomposer sur les fonctions de

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t - 1)$$

Définition 2.4.2. On dit qu'une fonction φ définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} est une fonction d'échelle s'il existe une suite de coefficients $h_k, k \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \sqrt{2} \varphi(2x - k).$$

tel que :

$$h_k = \langle \varphi(x), \sqrt{2}\varphi(2x - k) \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \sqrt{2}\varphi(2x - k) dx, k \in \mathbb{Z}$$

Définition 2.4.3. $\left\{ \varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est appelé le système des fonctions d'échelle Haar. [20]

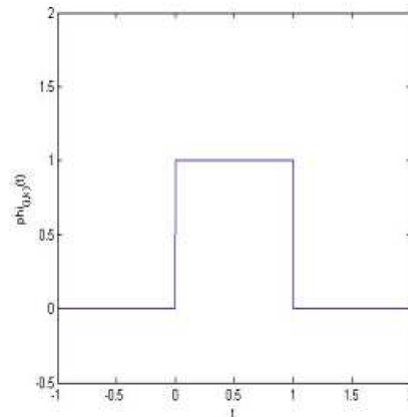


FIGURE 2.4 – Fonction d'échelle ou ondelette père

$$\varphi(2^j t - k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k2^{-j} \leq t < (k+1)2^{-j} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Cette collection peut être désignée comme le système de fonctions d'échelle de Haar.

2- La fonction de Haar ondelettes :

Définition 2.4.4. La fonction de Haar (une ondelette mère) peut être écrite comme

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

$\left\{ \psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \right\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est appelé le système de Haar sur \mathbb{R} .

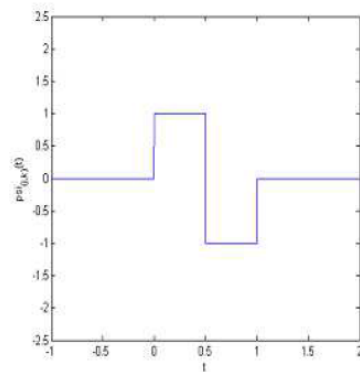


FIGURE 2.5 – Fonction d'échelle de Haar

Remarque 2.4.1. *Il existe une relation (mathématique) entre les ondelettes père et mère :*

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t - 1).$$

2.4.3 Orthogonalité du système de Haar

Théorème 2.4.1. *Le système de Haar $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ est un système orthonormal complet sur \mathbb{R} . Nous avons le produit scalaire*

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j_1,k_1} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi_{j,k}(t) \psi_{j_1,k_1}(t) dt.$$

Propriétés :

- a- Les fonctions $\varphi_{j,k}(t)$ et $\psi_{j,k}(t)$ sont supportées dans l'intervalle dyadique $I_{j,k} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j})$ pour tout $j, k \in \mathbb{Z}$.
- b- Le système de Haar est un système orthonormé dans \mathbb{R}

2.4.4 Le système de Haar sur [0,1]

Nous travaillerons dorénavant dans l'espace $L^2([0, 1])$

On pose $I = [0, 1[$ et on décompose I en développement dyadique en considérant pour $j \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq 2^j - 1$, les intervalles

$$I_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right[, \quad (2.3)$$

Ainsi on obtient l'union disjointe

$$I = [0, 1[= \bigsqcup_{k=0}^{2^j-1} \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right[= \bigsqcup_{k=0}^{2^j-1} I_{j,k}, \quad (2.4)$$

Avec cette décomposition, on peut considérer les fonctions

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k), \quad j \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq 2^j - 1. \quad (2.5)$$

et

$$\varphi(t) = \mathbf{1}_{t \in [0,1]} = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Notons :

V_0 le sous-espace vectoriel de $L^2([0, 1])$ engendré par les fonctions constantes sur $[0, 1[$.

V_1 l'espace vectoriel des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles $[0, 1/2[$ et $[1/2, 1]$.

V_j l'espace vectoriel des fonctions constantes par morceaux sur les intervalles $I_{j,k} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right[$, $0 \leq k \leq 2^j - 1$.

Théorème 2.4.2. *Il est évident que la famille $\{\varphi_{j,k}, 0 \leq k \leq 2^j - 1\}$ est un système libre donc elle forme une base sur l'espace qu'elles engendrent, qu'on notera par la suite $V_j \in L^2([0, 1])$ Nous pouvons vérifier que cette base est orthonormée.*

Preuve. Vérifions les deux propriétés d'une base.

$$\begin{aligned} \|\varphi_{j,k}(t)\|_{L^2([0,1])}^2 &= \int_I |\varphi_{j,k}(t)|^2 dt = \int_{I_{j,k}} \left[2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) \right]^2 dt \\ &= \int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} 2^j dt = 2^j \left[\frac{k+1}{2^j} - \frac{k}{2^j} \right] = 1, \end{aligned}$$

Alors

$$\|\varphi_{j,k}(t)\|_{L^2([0,1])} = 1,$$

Si $k \neq k_1$ et $k, k_1 = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ alors

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k_1} \rangle = \int_0^1 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k) 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k_1) dt = 0,$$

car $I_{j,k} \cap I_{j,k_1} = \emptyset$. □

● **Des bases d'ondelettes de Haar dans l'espace $L^2([0,1])$.**

On a vu que $V_j \subset V_{j+1}$. Cette inclusion est stricte, on peut donc considérer W_j , le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} , c'est-à-dire : $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. On a alors

$$V_j = V_0 \oplus \left(\bigoplus_{n=0}^{j-1} W_n \right) \quad (2.7)$$

Comme $\dim(V_{n+1}) = 2^{n+1}$, on a que $\dim(W_n) = 2^n = \dim(V_n)$. On définit maintenant des fonctions de $\psi_{j,k}$ telles que

Pour $j \geq 0$ et $0 \leq k \leq 2^j - 1$, on pose

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(t) &= 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), \\ &= \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}} & \text{si } x \in \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+\frac{1}{2}}{2^j} \right[, \\ -2^{\frac{j}{2}} & \text{si } x \in \left[\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right]. \end{cases} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{j+1,2k}(t) - \varphi_{j+1,2k+1}(t)]. \end{aligned}$$

où

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{si non.} \end{cases} \quad \text{et } \varphi(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1[, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.4.3. *La famille $\{\varphi_{0,0}, \psi_{j,k} / j \geq 0, 0 \leq k \leq 2^j - 1\}$ est une base Hilbertienne de $L^2([0,1])$, appelée base de Haar*

Verifions les deux propriétés d'orthonormalité.

Preuve. On sait déjà que $\varphi_{0,0}$ est de norme 1. Pour $k = 1, \dots, 2^j - 1$ on a :

$$\begin{aligned} \|\psi_{j,k}(t)\|_{L^2([0,1])}^2 &= \int_I |\psi_{j,k}(t)|^2 dt = \frac{1}{2} \int_I |\varphi_{j+1,2k}(t) - \varphi_{j+1,2k+1}(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_I (|\varphi_{j+1,2k}(t)|^2 - 2\varphi_{j+1,2k}(t)\varphi_{j+1,2k+1}(t) + |\varphi_{j+1,2k+1}(t)|^2) dt \right] \\ &= \frac{1}{2}(1 - 0 + 1) = 1, \end{aligned}$$

Alors

$$\|\psi_{j,k}(t)\|_{L^2([0,1])}^2 = 1,$$

Pour $k \neq k_1$ et $k, k_1 = 1, \dots, 2^j - 1$ alors

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_{j,k}, \psi_{j,k_1} \rangle &= \int_{I_{j,k}} \psi_{j,k}(t) \psi_{j,k_1}(t) dt = \int_I 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k_1) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_I |\varphi_{j+1,2k}(t) - \varphi_{j+1,2k+1}(t)| |\varphi_{j+1,2k_1}(t) - \varphi_{j+1,2k_1+1}(t)| dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_I (\varphi_{j+1,2k}(t) \varphi_{j+1,2k_1}(t) + \varphi_{j+1,2k+1}(t) \varphi_{j+1,2k_1+1}(t) \\
 &\quad - \varphi_{j+1,2k}(t) \varphi_{j+1,2k_1+1}(t) - \varphi_{j+1,2k+1}(t) \varphi_{j+1,2k_1}(t)) dt = 0,
 \end{aligned}$$

De plus pour $k = 0, \dots, 2^j - 1$ on a :

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_{0,0}, \psi_{j,k_1} \rangle &= \int_I \varphi_{0,0}(t) \psi_{j,k_1}(t) dt = \int_I \varphi_{0,0}(t) 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k_1) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_I \varphi_{0,0}(t) [\varphi_{j+1,2k_1}(t) - \varphi_{j+1,2k_1+1}(t)] dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_{\frac{k}{2^j}}^{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}} 2^{\frac{j+1}{2}} dt - \int_{\frac{k+\frac{1}{2}}{2^j}}^{\frac{k+1}{2^j}} 2^{\frac{j+1}{2}} dt \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2^{\frac{j+1}{2}} \left(\frac{1}{2^{j+1}} \right) - 2^{\frac{j+1}{2}} \left(\frac{1}{2^{j+1}} \right) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

□

• Approximation par ondelettes de Haar

Décomposition d'une fonction 1D :

On a la famille $\{\varphi_{0,0}, \psi_{j,k} / j \geq 0, 0 \leq k \leq 2^j - 1\}$ est une base Hilbertienne de $L^2(0, 1)$, appelée base de Haar. Alors

la décomposition d'une fonction $f \in L^2(0, 1)$ s'écrit

$$f(t) = a_0 \varphi_{0,0}(t) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (2.8)$$

avec

$$a_0 = \langle f, \varphi_{0,0} \rangle = \int_0^1 f(t) dt, \quad \text{et} \quad b_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_0^1 f(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (2.9)$$

Théorème 2.4.4. Soit g une fonction de $L^2(0, 1)$, la somme partielle de la série Haar est

$$g_m(t) = a_0 \varphi_{0,0}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k} \psi_{j,k}(t),$$

pour $j = m \in \mathbb{N}$, fixe. Ensuite, l'erreur de l'approximation $L^2(0, 1)$ est $O(2^{-\frac{m}{2}})$.

Preuve. L'erreur de l'approximation dans $L^2(0, 1)$ est

$$\begin{aligned} \|f - g\|_{L^2([0,1])} &= \left\| f - a_0\varphi_{0,0}(t) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k}\psi_{j,k}(t) \right\|_{L^2([0,1])} \\ &= \left\| \sum_{r=m}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} b_{j,k}\psi_{j,k}(t) \right\|_{L^2([0,1])} \leq \left(\sum_{r=m}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} |a_r|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\sim \left(\sum_{r=m}^{\infty} 2^{-j} \right)^{\frac{1}{2}} \sim 2^{-\frac{m}{2}} \sim \frac{1}{\sqrt{2^m}} = O\left(2^{-\frac{m}{2}}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\|f - g\|_{L^2([0,1])} \sim \sum_{r=N}^{\infty} 2^{-\frac{r}{2}} \sim 2^{-\frac{m}{2}} = O\left(2^{-\frac{m}{2}}\right).$$

□

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre, nous utilisons des ondelettes de Haar pour résoudre des équations différentielle en termes initiaux, et ils ont également très bonne estimation de la solution avec certains points d'agrégation.

L'objectif principal de cette application est de présenter une mise en œuvre simple et précise de la méthode d'ondelettes de Haar pour la solution numérique de :

$$y'' + \alpha_1(t)y' + \alpha_2(t)y = f(t) \quad (3.1)$$

Ce problème sera résolu sous réserve de condition initiale suivante $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y_1$. Il a également été résolu par la méthode numérique traditionnelle bien connue (méthode d'Euler) et en faisant une comparaison numérique entre eux. Les estimations d'erreurs montrent que la précision des calculs est très élevée même lorsque le nombre de modes est petit.

3.1 Méthode de collocation d'ondelettes

Méthode de collocation utilisée dans la solution numérique d'équation différentielle l'idée principale implique des opérateurs numériques agissant sur la valeur du point (points de collocation) dans l'espace physique, ou divisant le domaine en nombre de points et calcule la solution à cet sujet. Généralement, les méthodes de collocation d'ondelette sont créées en choisissant une ondelette et certains types de structure de grille qui seront adaptés par calcul.

la méthode de collocation en ondelettes est une tâche simple.[4]

3.2 Méthode d'ondelette de Haar

La famille d'ondelettes Haar pour $x \in [0, 1)$ est définie comme

$$h_i = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [a, b). \\ -1 & \text{pour } x \in [b, c). \end{cases} \quad (3.2)$$

où $a = \frac{k}{m}$; $b = \frac{k+0.5}{m}$; $c = \frac{k+1}{m}$.

Dans cette définition l'entière $m = 2^j$; $j = 0, 1, \dots, J$ indique le niveau de l'ondelette et l'entier $k = 0, 1, \dots, m-1$, est le paramètre de traduction. J est le niveau de résolution maximale l'indice i sur (3.2) est calculé à l'aide de la formule $i = m + k + 1$.

La valeur minimale de i est $i = 2$ que est obtenu des solutions d'ondelettes au deuxième ordre (ODE) quand $m = 1$; $k = 0$. La valeur maximale de i est $i = 2$; $m = 2^{j+1}$.

Pour $i = 1$, la fonction $h_1(x)$ est définie comme

$$h_1 = \begin{cases} 1 & \text{pour } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2.1 Intégration de la fonction Haar

L'intégration de la fonction Haar dans l'équation (3.2) peut s'écrire

$$P_{i,1}(t) = \int_0^t h_i(x) dx \quad (3.4)$$

$$P_{i,1}(t) = \begin{cases} t - a & t \in [a, b) \\ c - t & t \in [b, c) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.5)$$

et l'intégration ultérieure peut être définie récursivement comme

$$P_{i,v+1}(t) = \int_0^t P_{i,v}(x) dx \quad (3.6)$$

certaines $P_{i,v+1}(t); v = 0, 1, \dots$ calculés sont données ci-dessous.

$$P_{i,2}(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, a) \\ \frac{(t-a)^2}{2} & t \in [a, b) \\ \frac{1}{4m^2} - \frac{(c-t)^2}{2} & t \in [b, c) \\ \frac{1}{4m^2} & t \in [c, 1) \end{cases} \quad (3.7)$$

$$P_{i,3}(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, a) \\ \frac{(t-a)^3}{6} & t \in [a, b) \\ \frac{t-b}{4m^2} - \frac{(c-t)^3}{6} & t \in [b, c) \\ \frac{t-b}{4m^2} & t \in [c, 1) \end{cases} \quad (3.8)$$

$$P_{i,4}(t) = \begin{cases} 0 & t \in [0, a) \\ \frac{(t-a)^4}{24} & t \in [a, b) \\ \frac{t-b}{8m^2} - \frac{(c-t)^4}{24} + \frac{1}{192m^4} & t \in [b, c) \\ \frac{t-b}{8m^2} + \frac{1}{192m^4} & t \in [c, 1) \end{cases} \quad (3.9)$$

De même pour $P_{i,v}(t); v = 5, 6, \dots$ sont obtenus de manière similaire. [4][22]

3.2.2 la matrice opérationnelle du produit de l'ondelette Haar

Les intégrales en [3.6, -3.9] sont évaluées peuvent être utilisées toutes les équations différentielles.

Il est commode de passer à la formulation matricielle.

À cet effet, l'intervalle $x \in [0, 1]$ est divisé en parties de $2m$ chacune de longueur $sx = \frac{1}{2m}$.

Nous définissons les points de colocation où approchons n'importe quelle fonction comme

$$x_\ell = \frac{2\ell - 1}{4m} \text{ pour } \ell = 1, 2, \dots, 2m. \quad (3.10)$$

À ces points de collocation, nous discrétisons la fonction de Haar $h_i(x)$ pour obtenir une matrice de coefficient de Haar H , nous est définie comme

$$H_{(m)}(i, \ell) = h_i(x_\ell). \quad (3.11)$$

Pour calculer H , nous définissons un vecteur de fonction de Haar

$$H_m(x) = [h_0(x), h_1(x), \dots, h_{m-1}(x)]^T. \quad (3.12)$$

où m est dimensions du vecteur. Ces vecteurs sont utilisés pour calculer chaque colonne de la matrices de Haar comme

$$H_m = \left[h_{(m)}\left(\frac{1}{4m}\right), h_{(m)}\left(\frac{3}{4m}\right), \dots, h_{(m)}\left(\frac{4m-1}{4m}\right) \right]^T. \quad (3.13)$$

les matrices intégrales P_v ont les éléments $P_v(i, \ell) = P_{i,v}(\ell)$ Chen et Hsiao ont définie la matrice intégrale d'une manière différente. Ils ont calculé $p_{(m)}$ à partir de l'équation

$$\int_0^x h_{(m)}(\Gamma) d\Gamma = P p_{(m)} h_{(m)}(x), x \in [0, 1]. \quad (3.14)$$

Le résultat est la matrice carrée $P_{(m)} = P_{(m \times m)}$ qui est appelée la matrice opérationnelle d'intégration.

La méthode Chen et Hsiao à montrer que la formule récursive suivant

$$P_{(n)} = \frac{1}{2m} \begin{bmatrix} 2mP & -H_{(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2})} \\ H_{(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2})}^{-1} & O_{(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2})} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

où $O_{(\frac{m}{2} \times \frac{m}{2})}$ est une matrice nulle.

$$H_{(m)} = \left[h_{(m)}(x_0), h_{(m)}\left(\frac{3}{4m}x_1\right), \dots, h_{(m)}(x_{m-1}) \right]^T. \quad (3.16)$$

où $\frac{\ell}{m} \leq x_\ell \leq \frac{\ell+1}{m}$ et $H_{(m \times m)}^{-1} = \frac{1}{m} H_{(m \times m)}^T \text{diag}(r)$.

Il est à montre que le calcul de $P_{(m)}$ et $H_{(m)}$ ne doit être effecuté qu'une seul fois puisque H et H^{-1} contiennent de nombreux zéro.[4]

Exemple 3.2.1 (Matrices de Haar). [4] Nous commençons par la matrice de Haar d'ordre un $H_1 = [1]$.

1. La matrice de Haar d'ordre deux.

Les deux premières valeurs de fonction Haar avec $x = \frac{1}{4}$, $\ell = 1, 3$ peuvent être exprimés comme suit

$$h_2\left(\frac{1}{4}\right) = [h_0\left(\frac{1}{4}\right), h_1\left(\frac{1}{4}\right)]^T = [1, 1]^T.$$

$$h_2\left(\frac{3}{4}\right) = [h_0\left(\frac{3}{4}\right), h_1\left(\frac{3}{4}\right)]^T = [1, -1]^T.$$

qui peut être écrit matrice à partir comme

$$H_{(2)} = [h_2\left(\frac{1}{4}\right), h_2\left(\frac{3}{4}\right)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Matrice de Haar d'ordre quatre.

Les quatre premiers valeurs de fonction Haar avec

$$x = \frac{1}{8}, \ell = 1, 3, 5, 7, \dots$$

peut-être exprimé comme suit

$$h_4\left(\frac{1}{8}\right) = [h_0\left(\frac{1}{8}\right), h_1\left(\frac{1}{8}\right), h_2\left(\frac{1}{8}\right), h_3\left(\frac{1}{8}\right)]^T = [1, 1, 1, 0]^T.$$

$$h_4\left(\frac{3}{8}\right) = [h_0\left(\frac{3}{8}\right), h_1\left(\frac{3}{8}\right), h_2\left(\frac{3}{8}\right), h_3\left(\frac{3}{8}\right)]^T = [1, 1, -1, 0]^T.$$

$$h_4\left(\frac{5}{8}\right) = [h_0\left(\frac{5}{8}\right), h_1\left(\frac{5}{8}\right), h_2\left(\frac{5}{8}\right), h_3\left(\frac{5}{8}\right)]^T = [1, -1, 0, 1]^T.$$

$$h_4\left(\frac{7}{8}\right) = [h_0\left(\frac{7}{8}\right), h_1\left(\frac{7}{8}\right), h_2\left(\frac{7}{8}\right), h_3\left(\frac{7}{8}\right)]^T = [1, -1, 0, -1]^T.$$

Que peut-être écrit comme matrice

$$H_{(4)} = [h_4\left(\frac{1}{8}\right), h_4\left(\frac{3}{8}\right), h_4\left(\frac{5}{8}\right), h_4\left(\frac{7}{8}\right)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemple 3.2.2. [4] La matrice opérationnelle d'intégration montré en commençant par la matrice opérationnelle d'ordre un $P_{(1)} = \left[\frac{1}{2}\right]$.

1. La matrice opérationnelle d'ordre deux est obtenue par la Formule récursive et la

matrice opérationnelle de rang un définie $P_{(2)} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2. La matrice opérationnelle d'ordre quatre est obtenue par la formule récursive et la matrice opérationnelle de rang un définie comme

$$P_{(4)} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 8 & -4 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. La matrice opérationnelle d'ordre huit est obtenue par la formule récursive et la matrice opérationnelle de rang quatre définie comme

$$P_{(8)} = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 32 & -16 & -8 & -8 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 16 & 0 & -8 & -8 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3 Approximation des fonctions

[22] Toute fonction $f(t) \in \mathcal{L}^2[0, 1)$ peut-être décomposée en

$$f(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i h_i(t), \quad t \in [0, 1).$$

$$a_i = \langle f(t), h_i(t) \rangle = 2^i \int_0^1 f(t) h_i(t) dt.$$

$A = [a_0, a_1, \dots, a_d]^T$ est une vecteur de coefficients d'ondelettes. Pour le calcul de la somme, cette somme infinie se termine à $N = 2^j, j \in \mathbb{N}$ de sort que $f(t)$ est une approximation comme

$$f(t) = \sum_{i=0}^{N-1} a_i h_i(t), \quad t \in [0, 1) \tag{3.17}$$

3.4 Méthode des ondelettes de Haar pour les équations différentielles ordinaires

[22] Nous résolvons l'équation différentielle ordinaire du second ordre par la méthode des ondelettes de Haar, soit l'équation

$$y''(t) + \mu_1(t)y'(t) + \mu_2(t)y(t) = f(t) \quad (3.18)$$

où $t \in [a, b]$.

Nous avons l'intention de faire J niveau de résiliation, nous laissons $2M = 2^{j+1}$. L'intervalle sera divisé en $2M$ sous intervalles d'où $\Delta t = \frac{b-a}{2M}$ et la matrice sont de dimension $2M \times 2M$.

3.4.1 Problème de valeur initiale

Pour expliquer l'approximation de la solution à une IVP linéaire du second ordre en utilisant la série d'ondelette Haar. Considérant l'IVP linéaire générale du deuxième ordre

$$y''(t) + \mu_1 y'(t) + \mu_2 y(t) = f(t) \quad (3.19)$$

avec conditions initiales $y(0) = \alpha$, $y'(0) = \sigma$.

où les coefficients $\mu_1(t)$ et $\mu_2(t)$ sont supposés expansibles dans la série Haar. Pour commencer l'approximation, nous suivons [4] [22].

Étape(1) Nous supposons que

$$y''(t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t), \quad (3.20)$$

pour un niveau de la résiliation M donné.

Étape(2) Maintenant intégrons (3.20) de 0 à t , pour obtenir puis (3.21) pour obtenir

$$y'(t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(t) + y'(0) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(t) + \sigma \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(t) + \sigma t + y(0) \\ &= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(t) + \sigma t + \alpha \end{aligned} \quad (3.22)$$

Étape(3) Remplaçons (3.20)–(3.22) à (3.19), après quelques simplifications et évaluations aux points de collocation nous obtenons

$$t_\ell = \frac{2\ell - 1}{4m}, \quad \ell = 1, 2, \dots, 2m.$$

$$\sum_{i=1}^{2M} a_i [h_i(t_\ell) + \mu_1(t_\ell)P_{i,1}(t_\ell) + \mu_2(t_\ell)P_{i,2}(t_\ell)] = f(t) - \mu_1(t_\ell)\sigma - \mu_2(t_\ell)[t_\ell\sigma - \alpha]. \quad (3.23)$$

Étape(4) On résout le système de l'étape (3) pour obtenir les coefficients d'ondelettes a_i .

Étape(5) Pour obtenir la solution numérique pour $y(t)$ on substitue les coefficients a_i à la série d'ondelettes de la solution.

Problème homogène :

Considérons le problème suivant

$$y'' + 2\gamma y' + \omega_0^2 y = 0, \quad t \in [0, 1] \quad (1)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad \gamma = 1, \quad \omega_0 = \frac{1}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow y'' + 2y' + \frac{1}{4}y = 0$$

l'équation caractéristique correspondante

$$r^2 + 2r + \frac{1}{4} = 0 \quad \Delta = 3, \quad r_1 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

la solution générale

$$y = c_1 \exp^{-(1+\frac{\sqrt{3}}{2})t} + c_2 \exp^{-(1-\frac{\sqrt{3}}{2})t}$$

Pour $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \exp^{-(1+\frac{\sqrt{3}}{2})t} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \exp^{-(1-\frac{\sqrt{3}}{2})t}$$

Méthode de Haar :

En utilisant trois niveaux d'ondelettes Haar ($j = 3$).

Étape(1) Développons le dérivé le plus élevé

$$y''(t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t)$$

Étape(2) Intégrons les deux membres de 0 à t

$$\begin{aligned} \int_0^t y''(\tau)d\tau &= \int_0^t \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(\tau)d\tau \\ \Rightarrow y'(t) - y'(0) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i \int_0^t h_i(\tau)d\tau \\ y'(t) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(t) \end{aligned}$$

Aussi une fois intégrons les deux membres de 0 à t

$$\begin{aligned} \int_0^t y'(\tau)d\tau &= \int_0^t \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(\tau)d\tau \\ y(t) - y(0) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(t) \\ y(t) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(t) + 1 \end{aligned}$$

Étape(3) Remplaçons $y(t)$ et ses dérivés dans l'équation et évaluons au point de collocation t_ℓ .

$$\begin{aligned} y''(t) + 2y'(t) + \frac{1}{4}y(t) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t_\ell) + 2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(t_\ell) + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(t_\ell) &= 0, \\ \sum_{i=1}^{2M} a_i [h_i(t_\ell) + 2P_{i,1}(t_\ell) + \frac{1}{4}P_{i,2}(t_\ell)] &= 0, \quad \ell = 1, 2, \dots, 16 \end{aligned}$$

Étape(4) En résolvant le système d'équation linéaire à l'étape (3), nous obtenons les Coefficients d'ondelettes a_i .

Étape(5) Remplaçons les coefficients en $y(t)$ pour obtenir la solution.

D'après MATLAB on a les tableaux :

| Noeud ($t/32$) | Solution de Haar | Solution Exacte | Erreur |
|------------------|------------------|-----------------|--------|
| 1 | 0.9999 | 0.9999 | 0 |
| 3 | 0.9990 | 0.9990 | 0 |
| 5 | 0.9973 | 0.9972 | 0.0001 |
| 7 | 0.9949 | 0.9948 | 0.0001 |
| 9 | 0.9923 | 0.9917 | 0.0006 |
| 11 | 0.9886 | 0.9881 | 0.0005 |
| 13 | 0.9846 | 0.9840 | 0.0006 |
| 15 | 0.9801 | 0.9795 | 0.0006 |
| 17 | 0.9779 | 0.9746 | 0.0033 |
| 19 | 0.9727 | 0.9694 | 0.0033 |
| 21 | 0.9639 | 0.9623 | 0.0034 |
| 23 | 0.9615 | 0.9582 | 0.0033 |
| 25 | 0.9557 | 0.9523 | 0.0034 |
| 27 | 0.9496 | 0.9462 | 0.0034 |
| 29 | 0.9434 | 0.9399 | 0.0035 |
| 31 | 0.9370 | 0.9335 | 0.0035 |

Méthode d'Euler : on a le système

$$(1) \begin{cases} y'' + 2y' + \frac{1}{4}y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0, 1].$$

poson $y' = z$ d'où $z' = y''$ donc $z' = -2z - \frac{1}{4}y$ c-à-d

on a le système

$$(2) \begin{cases} y' = z \\ z' = -2z - \frac{1}{2}y \\ y(0) = 1 \text{ et } z(0) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0, 1]$$

le système matricielle correspondante

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

et $U' = F(t, U)$ avec $U = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ et F l'endomorphisme associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -2 \end{pmatrix}, \quad F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

d'après la formule(1.26)(chapitre 1)

on a $U_{n+1} = U_n + hF(t_n, U_n)$.

c-à-d

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n + hAU_n \\ &= U_n + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -2 \end{pmatrix} U_n \\ &= \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{4} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} z_n \\ -\frac{1}{4}y_n - 2z_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les résultats d'Euler :

| Noeud ($t/32$) | Solution Exacte | Solution d'Euler | Erreur |
|------------------|-----------------|------------------|----------|
| 1 | 0.99988 | 1 | 0.00012 |
| 3 | 0.998967 | 0.999283 | 0.000316 |
| 5 | 0.997244 | 0.997707 | 0.000463 |
| 7 | 0.994808 | 0.995377 | 0.000569 |
| 9 | 0.991745 | 0.992386 | 0.000641 |
| 11 | 0.988132 | 0.988818 | 0.000686 |
| 13 | 0.984036 | 0.984744 | 0.000708 |
| 15 | 0.979519 | 0.98023 | 0.000711 |
| 17 | 0.974633 | 0.975333 | 0.000701 |
| 19 | 0.969426 | 0.970104 | 0.000678 |
| 21 | 0.963942 | 0.964589 | 0.000647 |
| 23 | 0.958217 | 0.958826 | 0.000609 |
| 25 | 0.952285 | 0.952851 | 0.000566 |
| 27 | 0.946176 | 0.946695 | 0.000519 |
| 29 | 0.939916 | 0.940386 | 0.00047 |
| 31 | 0.933529 | 0.933949 | 0.000419 |

Tableau des erreurs (ondelettes de Haar et d'Euler) :

| Noeud ($t/32$) | Erreur de Haar | Erreur d'Euler |
|------------------|----------------|----------------|
| 1 | 0 | 0.00120 |
| 3 | 0 | 0.000316 |
| 5 | 0.0001 | 0.000463 |
| 7 | 0.0001 | 0.000569 |
| 9 | 0.0006 | 0.000641 |
| 11 | 0.0005 | 0.000686 |
| 13 | 0.0006 | 0.000708 |
| 15 | 0.0006 | 0.000711 |
| 17 | 0.0033 | 0.000701 |
| 19 | 0.0033 | 0.000678 |
| 21 | 0.0034 | 0.000647 |
| 23 | 0.0033 | 0.000609 |
| 25 | 0.0034 | 0.000566 |
| 27 | 0.0034 | 0.000519 |
| 29 | 0.0035 | 0.000470 |
| 31 | 0.0035 | 0.000419 |

Problème non homogène :

Considérons le problème suivant homogène

$$y''(t) + y(t) = \sin(t) + t \cos(t), \quad 0 < t < 1$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 1$$

avec la solution exacte.

$$y(t) = \cos(t) + \frac{5}{4} \sin(t) + \frac{1}{4} (t^2 \sin(t) - t \cos(t))$$

Méthode de Haar :

En utilisant trois niveaux d'ondelettes Haar ($j = 3$).

Étape(1) Développons le dérivé le plus élevé

$$y''(t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(t)$$

Étape(2) Intégrons les deux membres de 0 à t

$$\begin{aligned} \int_0^t y''(\tau) d\tau &= \int_0^t \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(\tau) d\tau \\ \Rightarrow y'(t) - y'(0) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i \int_0^t h_i(\tau) d\tau \\ y'(t) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(t) + 1 \end{aligned}$$

Aussi une fois intégrons les deux membres de 0 à t

$$\begin{aligned} \int_0^t y'(\tau) d\tau &= \int_0^t \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,1}(\tau) d\tau + \int_0^t d\tau \\ y(t) - y(0) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(t) + t \\ y(t) &= \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{i,2}(t) + t + 1 \end{aligned}$$

Étape(3) Remplaçons $y(t)$ et ses dérivés dans l'équation et évaluons au point de collocation t_ℓ .

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= \sin(t) + t \cos(t) \\ \sum_{i=1}^{2M} a_i [h_i(t_\ell) + P_{i,2}(t_\ell)] &= \sin(t_\ell) + t_\ell \cos(t_\ell) - t_\ell - 1, \quad \ell = 1, 2, \dots, 16 \end{aligned}$$

Étape(4) En résolvant le système d'équation linéaire à l'étape (3), nous obtenons les Coefficients d'ondelettes a_i .

Étape(5) Remplaçons les coefficients en $y(t)$ pour obtenir la solution.

D'après MATLAB on a les tableaux :

| Noeud (t/32) | Solution d'Haar | Solution Exacte | Erreur |
|--------------|-----------------|-----------------|----------|
| 1 | 1.030793 | 1.030767 | 0.000026 |
| 3 | 1.089637 | 1.089496 | 0.000142 |
| 5 | 1.144892 | 1.144700 | 0.000193 |
| 7 | 1.196953 | 1.196643 | 0.000310 |
| 9 | 1.245953 | 1.245594 | 0.000359 |
| 11 | 1.292290 | 1.291819 | 0.000472 |
| 13 | 1.336093 | 1.335577 | 0.000517 |
| 15 | 1.377736 | 1.377118 | 0.000618 |
| 17 | 1.417333 | 1.416676 | 0.000657 |
| 19 | 1.455208 | 1.454467 | 0.000741 |
| 21 | 1.491454 | 1.490681 | 0.000773 |
| 23 | 1.526319 | 1.525485 | 0.000834 |
| 25 | 1.559869 | 1.559012 | 0.000857 |
| 27 | 1.592255 | 1.591364 | 0.000891 |
| 29 | 1.623509 | 1.622605 | 0.000904 |
| 31 | 1.653672 | 1.652763 | 0.000909 |

Méthode d'Eleur

On résoudre même exemple par la méthode d'Eleur

Soit l'équation

$$(1) \begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin(t) + t \cos(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

Avec $t \in [0, 1]$

1. On pose $y' = z$ d'où $y'' = z' = \sin(t) + t \cos(t) - y$.

On trouve le système

$$(2) \begin{cases} y' = z \\ z' = \sin(t) + t \cos(t) - y \end{cases}$$

avec $t \in [0, 1]$ et $y(0) = 1$ et $z(0) = 1$

Matriciellement ce système s'écrit,

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

ou $U' = F(t, U)$ avec $U = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$ et F l'endomorphisme associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

Ce système peut donc s'écrire,

2.

a) D'après (1.26) on a $U_{n+1} = U_n + hF(t_n, U_n)$.

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n + hAU_n \\ &= U_n + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} U_n \\ &= \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} z_n \\ \sin(t_n) + t_n \cos(t_n) - y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h z_n \\ z_{n+1} = z_n + h (\sin(t_n) + t_n \cos(t_n) - y_n) \end{cases}$$

avec $y_0 = 1$ et $z_0 = 1$

On utilise les programmes MATLAB pour résolution problème non homogène pour la méthode d'Euler

```

clc
dy = @(x,y)sin(x)+x*cos(x)-y;
f = @(x)cos(x)+(5/4)*sin(x)+(1/4)*(x^2 sin(x)-x cos(x));
% Initial conditions and setup
h = 1/32;      % step size
x = 0 :h :1;   % the range of x
y = zeros(size(x));      % allocate the result y
u = zeros(size(x));      % allocate the result u
j = 1;
y(1) = 1;      % the initial y value
u(1) = 1;      % the initial u value
n = numel(y);  % the number of y values
err=0;
fprintf('x= %f \t Euler Exact = %f \t Euler Sol = %f \t Erreur = %f\n',x(1),f(x(1)),y(1),err);
% The loop to solve the DE
for i=1 :n-1
    y(i+1) = y(i) + h * u(i);
    u(i+1) = u(i) + h * dy(x(i),y(i));
    err=abs(f(x(i+1))-y(i+1));
    fprintf('x= %f \t Euler Exact = %f \t Euler Sol = %f \t Erreur = %f\n',x(i+1),f(x(i+1)),y(i+1),err);
    err= 0;
end

```

Les résultats d'Euler :

| Noeud ($t/32$) | Solution Exacte | Solution d'Euler | Erreur |
|------------------|-----------------|------------------|----------|
| 1 | 1.030767 | 1.03125 | 0.000483 |
| 3 | 1.089496 | 1.090851 | 0.001355 |
| 5 | 1.444700 | 1.146793 | 0.002094 |
| 7 | 1.196643 | 1.199336 | 0.002692 |
| 9 | 1.245594 | 1.248742 | 0.003148 |
| 11 | 1.291819 | 1.295278 | 0.003459 |
| 13 | 1.335577 | 1.339205 | 0.003629 |
| 15 | 1.377118 | 1.380779 | 0.003662 |
| 17 | 1.416676 | 1.420242 | 0.003566 |
| 19 | 1.454467 | 1.457818 | 0.003351 |
| 21 | 1.490681 | 1.493713 | 0.003031 |
| 23 | 1.525485 | 1.528105 | 0.002620 |
| 25 | 1.559012 | 1.561148 | 0.002135 |
| 27 | 1.591364 | 1.592969 | 0.001596 |
| 29 | 1.622605 | 1.623627 | 0.001022 |
| 31 | 1.652763 | 1.653199 | 0.000414 |

Tableau des erreurs (ondelettes de Haar et d'Euler) :

| Noeud ($t/32$) | Erreur de Haar | Erreur d'Euler |
|------------------|----------------|----------------|
| 1 | 0.000026 | 0.000483 |
| 3 | 0.000142 | 0.001355 |
| 5 | 0.000193 | 0.002094 |
| 7 | 0.00310 | 0.002692 |
| 9 | 0.000359 | 0.003148 |
| 11 | 0.000472 | 0.003459 |
| 13 | 0.00517 | 0.003629 |
| 15 | 0.00618 | 0.003662 |
| 17 | 0.000657 | 0.003566 |
| 19 | 0.000741 | 0.003351 |
| 21 | 0.000773 | 0.003031 |
| 23 | 0.000834 | 0.002620 |
| 25 | 0.000857 | 0.002135 |
| 27 | 0.000891 | 0.001596 |
| 29 | 0.000904 | 0.001022 |
| 31 | 0.000909 | 0.000414 |

Remarque 3.4.1. *Nous remarquons que les erreurs obtenus par la méthode des ondelettes de Haar sont plus petit par rapport aux erreurs obtenir par la méthode d'Euler.*

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons développé des méthodes de résolution des équations différentielles du second ordre avec condition initiale, l'objectif principal de ce travail est de proposer la méthode des ondelettes de Haar pour la résolution des équations différentielles linéaires, une solution exacte du problème a été utilisée dans le test pour illustrer l'efficacité de l'approximations de solution de l'équation différentielle linière de second ordre par la méthode des ondelettes de Haar. **Et enfin nous tirons les résultats suivant :**

- Les ondelettes de Haar peut être appliqué aux problèmes de valeur initiale directement sans complication.
- L'applicabilité simple et la convergence rapide des ondelettes de Haar présentent une base solide pour l'utilisation de ces fonctions de contexte d'approximation numérique de la solution des équations différentielles ordinaires.
- Le principal avantage de cette méthode est sa simplicité et ses petits coûts de calcul, elle est due à une matrice multiple de transformation et au petit nombre de coefficients d'ondelettes significatifs.
- Nous avons constaté que la méthode des ondelettes de Haar est meilleure que la méthode de Euler en termes de précision de résultat.

Les ondelettes de Haar peuvent être utilisées pour les résolutions des problèmes aux limites, autre type des différentielles ordinaires ainsi les équations différentielles aux dérivées partielles.

Bibliographie

- [1] R.P. Agarwal, D.O'Regan, An Introduction to Ordinary Differential Equations, Springer, 2000.
- [2] M. A. Aziz Alaoui, C. Bertelle, METHODES NUMERIQUES APPLIQUEES, France, (2002).
- [3] C. Bernard, Ondelettes et problèmes mal posés : la mesure du flot optique et l'interpolation irrégulière, thèse de doctorat, Paris 2001.
- [4] Y. Bsharat, Wavelets numerical methods for solving differential equations, thèse de doctorat, An-Najah National University, 2015.
- [5] D.Christophe,Ondelettes pour la détection de caractéristiques en traitement d'images. Application à la détection de région d'intérêt, HALID : tel- 00287008(2008).
- [6] C. F. Chen and C. H. Hsiao, Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems, IEE Proc. Control Theory Appl. 144, pp 87-94, (1997).
- [7] I. Daubechies, Ten Lectures on Wavelets, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1992).
- [8] J. David Logan, A First Course in Differential Equations, Springer, 2011.
- [9] L. Debnath, Wavelet transformation and their application, Birkhuser Boston,(2002).
- [10] B. Dehda, Méthodes mathématiques pour la compression et le débruitage d'images, thèse de doctorat, Universié Mohamed Khider-Biskra,(2018).
- [11] B. Gannam. Mathematical Theory of Wavelets. Faculty of Graduate Studies, at An Najah National University. Nabblus. Palestine (2009).
- [12] A. Grossman, J.Morlet, "Decompositions of hardly functions into square integrable wavelets of constant shape ". SIAM J.Math.Anal., 15,pp723-736,(1984).

-
- [13] M. Guasbba, Cours sur les équations différentielles, université Chahid Hama Lakhdar El-Oued, 2018-2019.
- [14] M. Kumar. Sapna Pandit. Wavelet Transform and Wavelet Based Numerical Methods : an Introductory, Journal of Nonlinear Science, Vol. 13(2012). No.3. pp.325-345.
- [15] Y. M. Ondelettes et opérateurs I : ondelettes. Paris, Hermann, (1990).
- [16] V. Perrier, Méthodes d'ondelettes pour la segmentation d'images. Applications à l'imagerie médicale et au tatouage d'images, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique De Grenoble, (2004).
- [17] M. Pinsky. Introduction to Fourier Analysis and Wavelets, U.S .A. American Mathematical Society. (2009).
- [18] N. Piskounov, Calcul Différentiel et Intégral, tome II, ÉDITIONS MIR. MOSCOU, (1978).
- [19] M. Pouliot, La détermination des coefficients des ondelettes de Daubechies, thèse, Université Laval, 2009.
- [20] J. F. Rasolomanana, P.A.Randriamitantoa, Ondelettes de Haar et ses transformées, MADA-ETI, ISSN 2220-0673, Vol.2, 2015.
- [21] A. H. Siddiqi, Applied Functional Analysis, Marcel-Dekker Publ, New York,(2004).
- [22] A. Sunmonu, Implementation of Wavelet Solutions to Second Order Differential Equations with Maple, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, 2012, no. 127, 6311 - 6326.
- [23] D. F. Walnut, An Introduction to Wavelet Analysis, Birkhuser, Boston, (2001).
- [24] P. Wojtaszczyk, A Mathematical Introduction to Wavelets, Cambridge UNIVERSITY PRESS, 2003.
- [25] D. Walnut, An Introduction to Wavelet Analysis, Birkhauser, Boston, (2002).

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons utilisées une étude informaticiene de la méthode numérique relative à la nouvelle méthode (l'ondelette de Haar) pour résoudre des équations différentielles linéaires, puis nous avons fais une comparaison entre les résultats de cette méthode et les résultats de la méthode classique (de Euler). L'objectif de ce travail est de montrer l'efficacité de la méthode présentée et ses avantages sur l' autre méthode. L'ondelette de Haar est une méthode simple et ses résultats numériques sont proches ainsi plus précis à la solution exacte que la méthode classique.

Mote clés: Résolution, équation différentielle, ondelettes de Haar, méthode de Euler, méthode numérique.

Abstract

In this thesis, we used a computer study of the numerical method relating to the new method (the Haar wavelet) to solve linear differential equations, then we made a comparison between the results of this method and the results of the classical method (of Euler). The objective of this work is to show the effectiveness of the presented method and its advantages over the other method. The Haar wavelet is a simple method and its numerical results are thus closer to the exact solution than the classical method.

Key words: Resolution, differentielle equations, Haar wavelts, Euler's method, numerical method.

المخلص

في هذه المذكرة، استخدمنا دراسة حاسوبية للطريقة العددية المتعلقة بالطريقة الجديدة (مويجة هار) لحل المعادلات التفاضلية الخطية، ثم قمنا بإجراء مقارنة بين نتائج هذه الطريقة ونتائج الطريقة الكلاسيكية (لأويلر). الهدف من هذا العمل هو إظهار فعالية الطريقة المقدمة ومزاياها على الطريقة الأخرى. مويجة هار هي طريقة بسيطة وبالتالي فإن نتائجها العددية أقرب إلى الحل الدقيق من الطريقة الكلاسيكية. الكلمات المفتاحية: الدقة، معادلة تفاضلية، مويجات هار، طريقة أولر، الطريقة العددية.